Projeto 2 - FDTD 1D
A equação de onda escalar

*Note: Ondas Eletromagnéticas - SEL0612 (2020)

1st André Baconcelo Prado Furlanetti
Depto de E. Elétrica e de Computação
Escola de Engenharia de São Carlos
São Carlos, SP, Brasil
N^{o}USP 10748305

2nd Diego da Silva Parra
Depto de E. Elétrica e de Computação
Escola de Engenharia de São Carlos
São Carlos, SP, Brasil
N^{o}USP 10716550

3rd Mateus Fernandes Doimo
Depto de E. Elétrica e de Computação
Escola de Engenharia de São Carlos
São Carlos, SP, Brasil
N^{o}USP 10691971

***Resumo*—Este documento consiste em um relatório feito em LaTex para a disciplina "Ondas Eletromagnéticas". Ele consiste em descrições teóricas, apresentação de uma seção de problemas, métodos práticos implementados e análise dos resultados obtidos computacionalmente. Os problemas requerem o desenvolvimento de um algoritmo que aplique o método FDTD 1D na equação de onda escalar e apresente resultados gráficos.**

***Index Terms*—ondas eletromagnéticas, FDTD, escalar, estabilidade, exponencial.**

I. INTRODUÇÃO

Esse relatório é referente ao projeto 2 da disciplina de "Ondas Eletromagnéticas", ministrada pelo professor Dr. Leonardo André Ambrósio. O assunto abordado é o método das diferenças finitas para ondas dimensionais. Para isso, serão apresentadas as manipulações algébricas da equação da onda escalar e do método FDTD a fim de obter-se implicações gráficas. Além disso, será apresentado um algoritmo desenvolvido em linguagem JavaScript para uma melhor visualização do comportamento das características da onda.

II. A EQUAÇÃO DE ONDA ESCALAR

A equação de onda escalar para uma dada função $u \equiv u(x,t)$ é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}. \tag{1}$$

Além disso, tem-se as condições iniciais:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= I(x), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} &= 0, \\ u(0,t) &= 0 \text{ e} \\ t &\in (0,T]. \end{aligned} \tag{2}$$

A função $u(x,t)$ descreve as ondas que se movem com velocidade v para a direita ou para a esquerda. Sendo assim, pode-se escrever as soluções propagante e contrapropagante de x da seguinte maneira:

$$u(x,t) = u^+(x,t) + u^-(x,t) = u(x - vt) + u(x + vt). \tag{3}$$

Universidade de São Paulo - USP

Considerando, agora, a seguinte solução na forma exponencial:

$$u(x,t) = e^{j(\omega t - kx)}, \tag{4}$$

tem-se a representação complexa instantânea de uma onda plana uniforme de amplitude unitária, com ω sendo a frequência angular (Hz) e k o número de onda (m^{-1}). Além disso, pode-se inferir que:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{5}$$

sendo λ o comprimento de onda (m) e f a frequência (Hz).

III. MÉTODO FDTD

Para uma melhor análise do comportamento da onda e considerando uma malha uniforme, serão consideradas as seguintes relações para a função inicial $u(x_i, t_n)$:

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x \text{ e} \\ t_n &= n\Delta t. \end{aligned} \tag{6}$$

Em seguida, sabendo que a condição da Equação 1 se mantém em todos os pontos no espaço-tempo, para que a equação diferencial parcial (EDP) seja válida somente nos intermediários dos pontos da malha, temos:

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_n)}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x_i,t_n)}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Como condições de contorno, tem-se:

$$\begin{aligned} n = 0 \quad \Rightarrow \quad u = I(x) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ e} \\ i = 0, \quad \Rightarrow \quad u = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

A. Aproximação de Derivadas Parciais

Considerando os conceitos da expansão da série de Taylor aplicados no Projeto 1, pode-se inferir as seguintes aproximações para as derivadas parciais:

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_n)}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} \text{ e} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_n)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \tag{10}$$

Dessa forma, aplicando a equação de onda, tem-se:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = v^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \tag{11}$$

A partir disso, pode-se reescrever uma relação da Equação 2, a fim de aplicar o método de aproximação:

$$\frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial t} \approx \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta t}. \tag{12}$$

Sendo assim, encontra-se novas condições iniciais dadas por:

$$\begin{aligned} u_i^{-1} &= u_i^1 \text{ e} \\ u_i^0 &= I(x_i). \end{aligned} \tag{13}$$

Sendo u_i^n e u_i^{n-1} conhecidos, temos:

$$u_i^{n+1} = -u_i^{n-1} + 2u_i^n + S^2(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \tag{14}$$

sendo S o número de *Courant* ou fator de estabilidade numérica e definido como:

$$S = v\frac{\Delta t}{\Delta x}. \tag{15}$$

Para as condições de contorno, tem-se:

$$u_i^{n+1} = 0. \tag{16}$$

Exemplificando para n = 0, obtemos:

$$u_i^1 = u_i^0 - \frac{1}{2}S^2(u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0). \tag{17}$$

A figura abaixo (Fig. 1) ilustra como a Equação 16 conecta quatro pontos (u_2^1, u_1^0, u_2^0 e u_3^0) no plano.

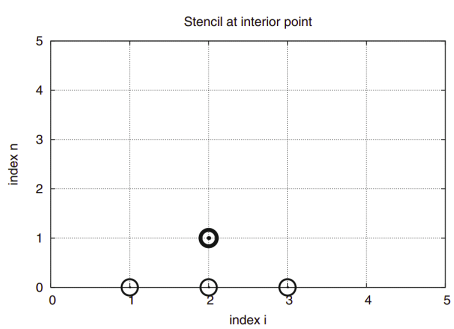

Figura 1: Estêncil modificado para o primeiro tempo

Fonte: Subseção 2.1.5 da Ref. [2]

Retornando agora para a Equação 11 e isolando o termo u_i^{n+1}, tem-se:

$$u_i^{n+1} = \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + 2u_i^n - u_i^{n-1}. \tag{18}$$

Aplicando a Equação 14 na Equação 17:

$$u_i^{n+1} = S^2(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + 2u_i^n - u_i^{n-1}. \tag{19}$$

Aplicando, agora, a seguinte função *u* e definindo um número complexo de onda $\bar{k} = \alpha + j\beta$, tem-se:

$$u_i^n = e^{j(\omega n\Delta t - \bar{k}i\Delta x)}. \tag{20}$$

Assim, obtém-se uma nova relação para a Equação 18:

$$\begin{aligned} e^{j(\omega(n+1)\Delta t - \bar{k}i\Delta x)} &= S^2[e^{j(\omega(n+1)\Delta t - \bar{k}(i+1)\Delta x)} - \\ -2e^{j(\omega n\Delta t - \bar{k}i\Delta x)} &+ e^{j(\omega n\Delta t - \bar{k}(i-1)\Delta x)}] - 2e^{j(\omega n\Delta t - \bar{k}i\Delta x)} + \\ &+ e^{j(\omega(n-1)\Delta t - \bar{k}i\Delta x)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Simplificando a relação acima, obtém-se:

$$e^{j\omega\Delta t} = S^2\left(e^{-j\bar{k}\Delta x} - 2 + e^{j\bar{k}\Delta x}\right) + 2 - e^{-j\omega\Delta t}. \tag{22}$$

$$\frac{e^{j\omega\Delta t} + e^{-j\omega\Delta t}}{2} = S^2\left(\frac{e^{j\bar{k}\Delta x} + e^{-j\bar{k}\Delta x}}{2} - 1\right) + 1. \tag{23}$$

Pelas relações de Euler para equações exponenciais, tem-se:

$$\cos(\omega\Delta t) = S^2[\cos(\bar{k}\Delta x) - 1] + 1. \tag{24}$$

Isolando o termo $\bar{k}$:

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x}\arccos\left[1 + \frac{1}{S^2}[\cos(\omega\Delta t) - 1]\right]. \tag{25}$$

Nesse ponto, vale considerar e ressaltar a resolução das amostras para o problema, denominada N_λ e definida por:

$$N_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta x}, \tag{26}$$

bem como a relação:

$$\zeta = 1 + \left(\frac{1}{S}\right)^2\left[\cos\left(\frac{2\pi S}{N_\lambda}\right) - 1\right]. \tag{27}$$

Assim, pode-se reescrever a Equação 24 da seguinte forma:

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x}\arccos\left[1 + \frac{1}{S^2}\left[\cos\left(\frac{2\pi S}{N_\lambda}\right) - 1\right]\right] \text{ e} \tag{28}$$

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x}\arccos(\zeta) = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(\zeta)\right]. \tag{29}$$

IV. Estudo das equações

A partir de agora, a fim de encontrar um $\bar{k}$ não complexo, estuda-se o valor de N_λ para a situação de transição da seguinte maneira:

$$N_\lambda\Big|_{trans} = \frac{2\pi S}{\arccos(1 - 2S^2)}. \tag{30}$$

A análise consiste em, se:

- $N_\lambda > N_\lambda\Big|_{trans}$, então $\bar{k}$ é real e a onda não sofre atenuação durante a propagação.
- $N_\lambda < N_\lambda\Big|_{trans}$, então $\bar{k}$ é complexo e a onda sofre um decaimento exponencial durante a propagação.

Considerando $S = \frac{1}{2}$, obtém-se $N_\lambda\Big|_{trans} = 3$ e pode-se prosseguir com o seguinte estudo:

A. Regime com onda de valor real

Nesse caso, tem-se a seguinte relação para $\bar{k}$:

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x} \arccos \left[1 + 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right) - 1 \right] \right]. \tag{31}$$

Dessa forma, a velocidade da fase é dada por:

$$\bar{v}_p = \frac{\omega}{\bar{k}} = \frac{2\pi f \Delta x}{\arccos \left[1 + 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right) - 1 \right] \right]}. \tag{32}$$

Também vale considerar a seguinte condição para simplificação:

$$\frac{2\pi}{\Delta x} = 2\pi f \frac{\lambda}{N_\lambda} \text{e} \tag{33}$$

$$\bar{v}_p = \frac{\omega}{\bar{k}} = \frac{2\pi}{N_\lambda \arccos \left[1 + 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right) - 1 \right] \right]}. \tag{34}$$

B. Regime com onda de valor imaginário

Nesse caso, tem-se a que $\zeta <$ -1 (de acordo com a Equação 26). Sendo assim, aplica-se a seguinte relação na Equação 25:

$$\arcsin(\zeta) = -j \ln \left(j\zeta + \sqrt{1 - \zeta^2} \right), \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\pi}{2} + j \ln \left(j\zeta \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \right] \text{ e} \\ \bar{k} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\pi}{2} + j \ln \left(j\zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right]. \end{aligned} \tag{36}$$

Ajustando a equação obtém-se:

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x} \left[\pi + j \ln \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right]. \tag{37}$$

Nesse ponto, a parte real de k ($\frac{\omega}{\Delta x}$) é utilizada para a equação da velocidade de fase:

$$\bar{v} = \frac{\omega}{\bar{k}} = \frac{\omega}{\frac{\pi}{\Delta x}} = \frac{2\pi f \Delta x}{\pi} = \frac{2f\lambda}{N_\lambda} = \frac{2}{N_\lambda} c. \tag{38}$$

V. Estabilidade Numérica

Da mesma maneira que foi feita para $\bar{k}$ na Equação 20, considera-se, agora, uma frequência complexa $\bar{\omega}$ na função de entrada do sistema. Por conseguinte, pode-se escrever a seguinte relação:

$$u_i^n = e^{j(\bar{\omega} n \Delta t - \bar{k} i \Delta x)}. \tag{39}$$

Assim, analogamente ao que foi feito na Equação 29, tem-se

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\Delta t} \arccos(\xi) = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(\xi) \right], \tag{40}$$

sendo ξ definido por:

$$\xi = S^2 [\cos(\bar{k} \Delta x) - 1] + 1. \tag{41}$$

Pela relação acima, tem-se que $1 - 2S^2 \leq \xi \leq 1$. Sendo assim, obtém-se as seguintes análises:

- Para $-1 \leq \xi \leq 1$, tem-se que $0 \leq S \leq 1$ e $\bar{\omega}$ é puramente real e

- Para $1 - 2S^2 \leq \xi \leq -1$, tem-se que $1 - 2S^2 < -1 \Leftrightarrow S > 1$.

Em seguida, consideram-se as Equações 35 e 41 a fim de obter uma nova escrita para a Equação 40:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\Delta t} \left[\pi + j \ln(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \right]. \tag{42}$$

Prosseguindo, insere-se, agora, na Equação 39 a relação encontrada acima:

$$u_i^n = e^{-n \ln \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} e^{j \left[\frac{\pi}{\Delta t} n \Delta t - \bar{k} i \Delta x \right]}, \tag{43}$$

que pode ser ampliada para:

$$u_i^n = \left(\frac{1}{-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} \right)^n e^{j \left[\frac{\pi}{\Delta t} n \Delta t - \bar{k} i \Delta x \right]}. \tag{44}$$

Ademais, define-se o fator multiplicativo por:

$$q_{crescimento} = \frac{1}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} = -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}, \tag{45}$$

que, considerando $\xi = 1 - 2S^2$, resulta:

$$q_{crescimento} = \left(S + \sqrt{S^2 - 1} \right)^2, \tag{46}$$

Sendo assim, pode-se verificar, pela relação acima, que quando S = 1 não há crescimento da amplitude da onda. Já quando S $>$ 1 um crescimento exponencial é observado e, portanto, a onda torna-se instável.

Finalmente, após toda a fundamentação teórica, pode-se aplicar os conceitos estudados até aqui na seção ”Exercícios”a seguir.

VI. Exercícios

Seguem, abaixo, as informações necessárias para a resolução dos exercícios. Tais exercícios se encontram na seção ”Problemas”do Capítulo 2 da Ref. [1].

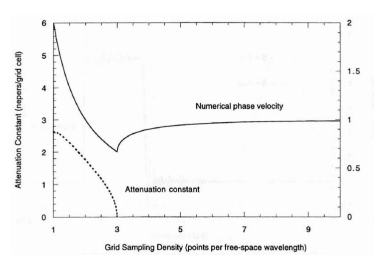

Figura 2: Variação da velocidade de fase numérica normalizada $\bar{v}_p/c$ e atenuação por célula da malha $\alpha\Delta x$ em função da densidade de amostragem da malha (1 $\leq$ N_λ $\leq$ 10) para um fator de estabilidade de Courant S = 0.5.

Fonte: Subseção 2.6.4 do Capítulo 2 da Ref. [1].

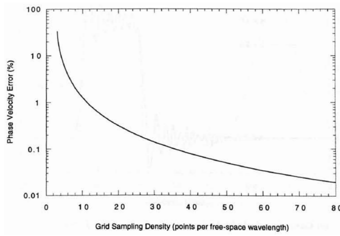

Figura 3: Erro percentual da velocidade de fase numérica em relação à velocidade da luz no espaço livre em função da densidade de amostragem da rede ($3 \leq N_\lambda \leq 80$) para um fator de estabilidade de Courant S = 0.5.

Fonte: Subseção 2.6.4 do Capítulo 2 da Ref. [1].

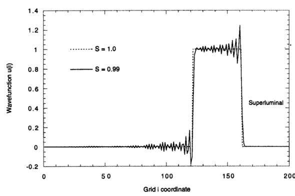

Figura 4: Efeito da dispersão numérica em um pulso retangular que se propaga no espaço livre para os seguintes fatores de estabilidade de *Courant*: S = 1 e S = 0.99.

Fonte: Subseção 2.6.5 do Capítulo 2 da Ref. [1].

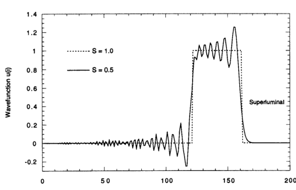

Figura 5: Efeito da dispersão numérica em um pulso retangular que se propaga no espaço livre para os seguintes fatores de estabilidade de *Courant*: S = 1 e S = 0.5.

Fonte: Subseção 2.6.5 do Capítulo 2 da Ref. [1].

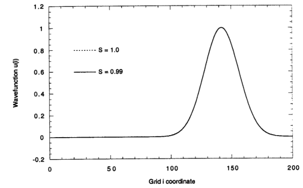

Figura 6: Efeito da dispersão numérica em um pulso gaussiano que se propaga no espaço livre para os seguintes fatores de estabilidade de *Courant*: S = 1 e S = 0.99.

Fonte: Subseção 2.6.5 do Capítulo 2 da Ref. [1].

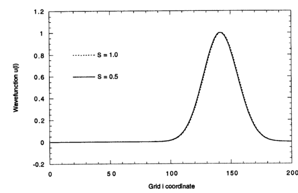

Figura 7: Efeito da dispersão numérica em um pulso gaussiano que se propaga no espaço livre para os seguintes fatores de estabilidade de *Courant*: S = 1 e S = 0.5.

Fonte: Subseção 2.6.5 do Capítulo 2 da Ref. [1].

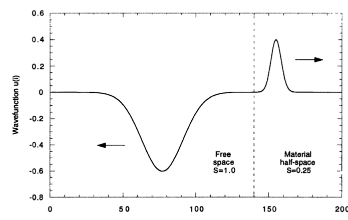

Figura 8: Exemplo da reflexão e transmissão calculadas para um pulso gaussiano em uma interface entre o espaço livre e um meio espaço sem perda de material tendo $\bar{v}_p/c = \frac{c}{4}$.

Fonte: Subseção 2.6.5 do Capítulo 2 da Ref. [1].

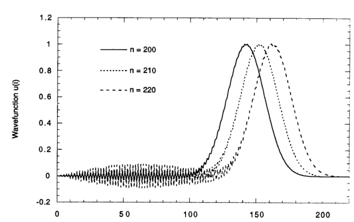

Figura 9: Comparação da propagação de pulso calculada em n = 200, 210 e 220 intervalos de tempo sobre as coordenadas i = 1 a i = 220 da malha.

Fonte: Subseção 2.7.2 do Capítulo 2 da Ref. [1].

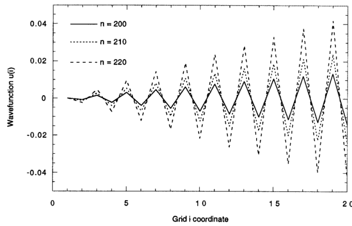

Figura 10: Visualização expandida da Figura 9 sobre as coordenadas i = 1 a i = 20 da malha.

Fonte: Subseção 2.7.2 do Capítulo 2 da Ref. [1].

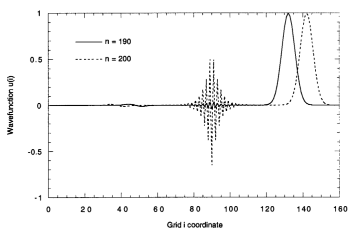

Figura 11: Comparação da propagação de pulso calculada em n = 190 e 220 intervalos de tempo sobre as coordenadas i = 1 a i = 220 da malha.

Fonte: Subseção 2.8 do Capítulo 2 da Ref. [1].

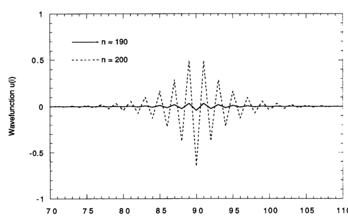

Figura 12: Visualização expandida da Figura 9 sobre as coordenadas i = 70 a i = 110 da malha.

Fonte: Seção 2.8 do Capítulo 2 da Ref. [1].

A. *Exercício 2.4*

Desenvolver resultados gráficos semelhantes aos da Fig. 2, considerando um fator de estabilidade de *Courant* $S = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

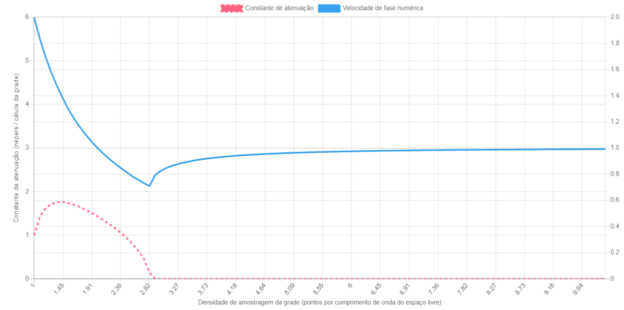

Figura 13: Replicação da Fig. 2 considerando $1 \leq N_\lambda \leq 10$ para um fator de estabilidade de Courant $S = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Fonte: elaborada a partir de modelagem de software (*framework Chart.js*).

B. *Exercício 2.5*

Replicar os resultados gráficos da Fig. 3.

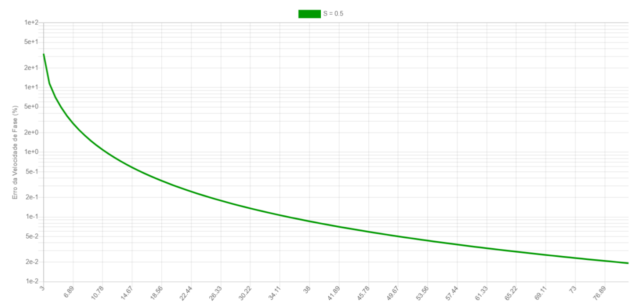

Figura 14: Replicação da Fig. 3, considerando $3 \leq N_\lambda \leq 80$ para um fator de estabilidade de Courant $S = 0.5$.

Fonte: elaborada a partir de modelagem de software (*framework Chart.js*).

C. *Exercício 2.6*

Desenvolver resultados gráficos semelhantes aos da Fig. 3, considerando um fator de estabilidade de *Courant* $S = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

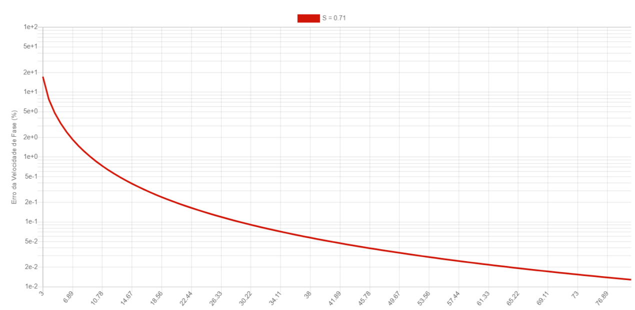

Figura 15: Replicação da Fig. 3 considerando $3 \leq N_\lambda \leq 80$ para um fator de estabilidade de Courant $S = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Fonte: elaborada a partir de modelagem de software (*framework Chart.js*).

D. *Exercício 2.7*

Escrever um programa que implemente a solução da equação de onda escalar unidimensional estudada. Para obter a onda, deve-se especificar u_0 no limite esquerdo da malha. Além disso, deve-se testar o programa replicando os resultados gráficos obtidos nas Figuras 4 e 5.

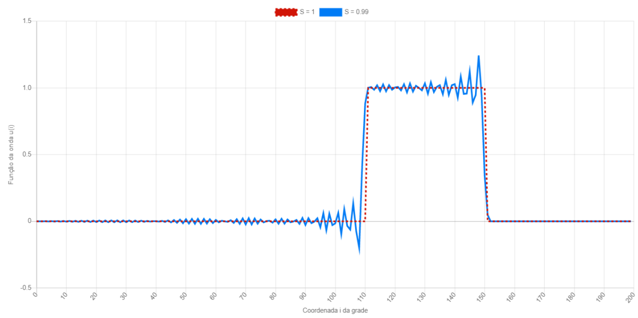

Figura 16: Replicação da Fig. 4 considerando os seguintes fatores de estabilidade de *Courant*: S = 1 e S = 0.99.

Fonte: elaborada a partir de modelagem de software (*framework Chart.js*).

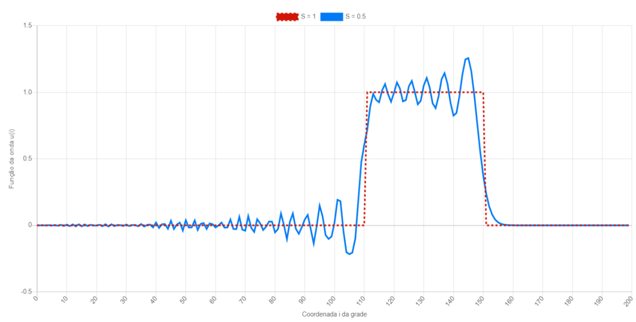

Figura 17: Replicação da Fig. 5 considerando os seguintes fatores de estabilidade de *Courant*: S = 1 e S = 0.5.

Fonte: elaborada a partir de modelagem de software (*framework Chart.js*).

E. *Exercício 2.8*

Utilizar o algoritmo da equação de onda escalar desenvolvido no exercício 2.7 a fim de replicar os resultados gráficos das Figuras 6 e 7.

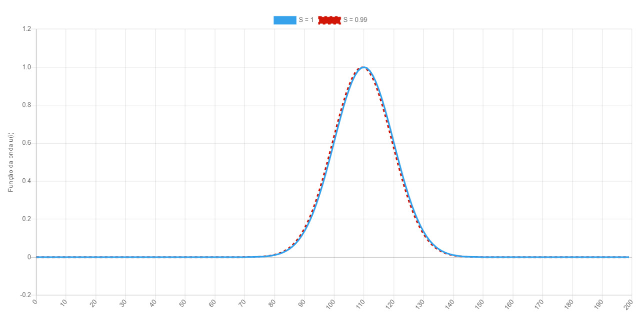

Figura 18: Replicação da Fig. 6 considerando os seguintes fatores de estabilidade de *Courant*: S = 1 e S = 0.99.

Fonte: elaborada a partir de modelagem de software (*framework Chart.js*).

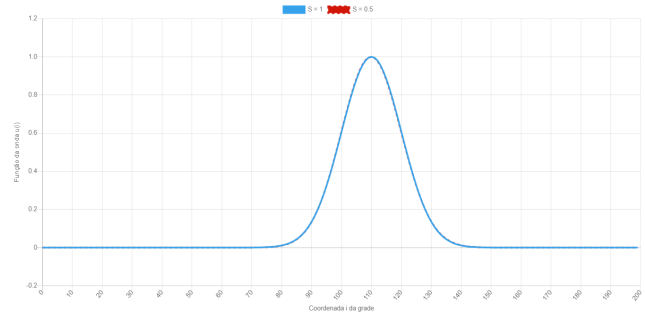

Figura 19: Replicação da Fig. 7 considerando os seguintes fatores de estabilidade de *Courant*: S = 1 e S = 0.5.

Fonte: elaborada a partir de modelagem de software (*framework Chart.js*).

F. *Exercício 2.9*

Utilizar o algoritmo da equação de onda escalar desenvolvido no exercício 2.7 a fim de replicar os resultados gráficos da Figura 8.

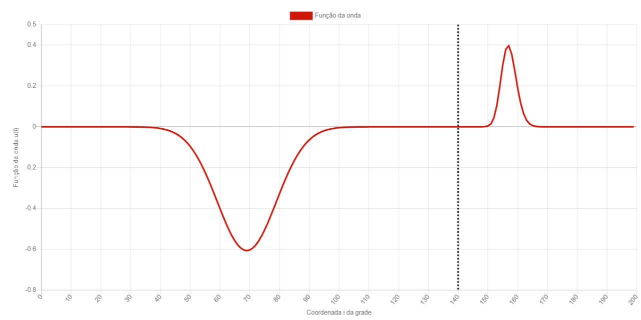

Figura 20: Replicação da Fig. 8 considerando $\bar{v}_p/c = \frac{c}{4}$.

Fonte: elaborada a partir de modelagem de software (*framework Chart.js*).

G. *Exercício 2.10*

Utilizar o algoritmo da equação de onda escalar desenvolvido no exercício 2.7 a fim de replicar os resultados gráficos das Figuras 9 e 10. Para isso, considerou-se que o início da instabilidade numérica de um pulso gaussiano que se propaga no espaço livre. O fator de estabilidade de *Courant* é S = 1.0005 em cada ponto da malha.

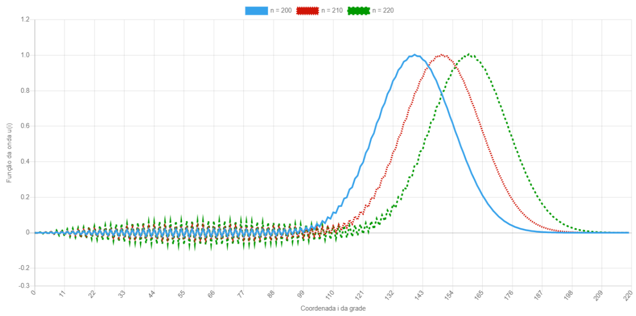

Figura 21: Replicação da Fig. 9 considerando uma comparação da propagação de pulso calculada em n = 200, 210 e 220 intervalos de tempo sobre as coordenadas i = 1 a i = 220 da malha.

Fonte: elaborada a partir de modelagem de software (*framework Chart.js*).

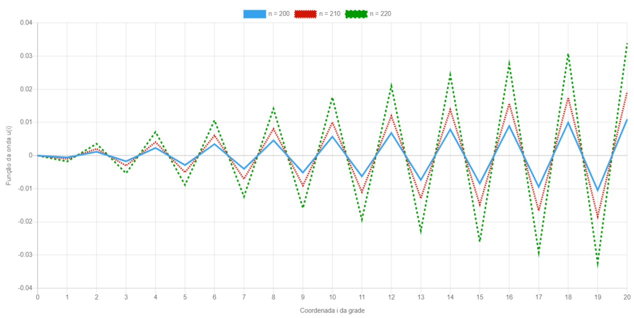

Figura 22: Replicação da Fig. 10 considerando uma visualização expandida da Figura 9 sobre as coordenadas i = 1 a i = 20 da malha.

Fonte: elaborada a partir de modelagem de software (*framework Chart.js*).

H. Exercício 2.11

Utilizar o algoritmo da equação de onda escalar desenvolvido no exercício 2.7 a fim de replicar os resultados gráficos das Figuras 11 e 12. Para isso, o início da instabilidade numérica de um pulso gaussiano que se propaga no espaço livre. Nesse caso, o fator de estabilidade de *Courant* é S = 1 em todos os pontos da malha, contudo i = 90 em S = 1.075.

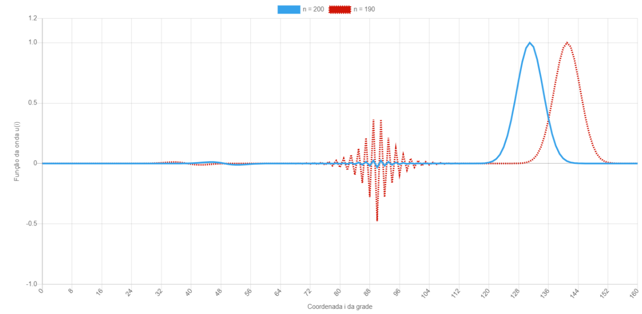

Figura 23: Replicação da Fig. 11 considerando uma comparação da propagação de pulso calculada em n = 190 e 220 intervalos de tempo sobre as coordenadas i = 1 a i = 220 da malha.

Fonte: elaborada a partir de modelagem de software (*framework Chart.js*).

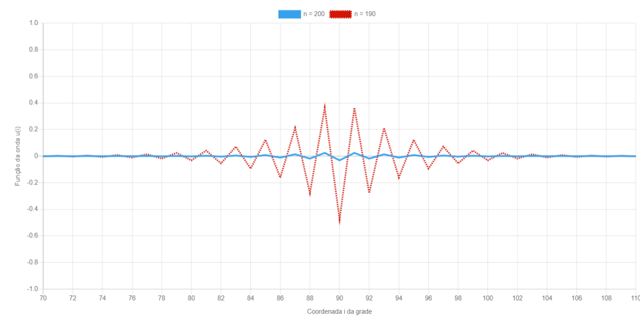

Figura 24: Replicação da Fig. 12 considerando uma visualização expandida da Figura 9 sobre as coordenadas i = 70 a i = 110 da malha.

Fonte: elaborada a partir de modelagem de software (*framework Chart.js*).

VII. O CÓDIGO

A. Linguagem utilizada

Para a resolução do exercício proposto foi desenvolvido um algoritmo em linguagem JavaScript. A escolha se deu pela configuração completa de funções matemáticas que a linguagem disponibiliza e pela gratuidade da aplicação. Vale ressaltar que a linguagem é muito acessível pois não necessita de um compilador específico já que os navegadores da *web* modernos e populares certamente conseguem compilá-la.

Além disso, o fato da linguagem ser quase inteiramente baseada em objetos traz diversas vantagens como: possuir matrizes associativas, nomes de propriedades do objeto são no formato *string* e propriedades e valores podem ser alteradas em tempo de execução.

Outrossim, embora as animações sejam mais complexas em JS, as ferramentas disponíveis são muito mais abrangentes e abertas para o controle total do programador. Elas são imperativas, pois são programadas em linha como parte do seu código. Assim, o desenvolvedor pode encapsulá-las dentro de outros objetos.

Dessa forma, pode-se aplicar desde os conceitos matemáticos mais básicos até as simulações gráficas mais sofisticadas sem grandes complicações, como foi o caso da resolução dos exercícios desse projeto.

B. *Link para acesso aos arquivos*

Abaixo, segue o link para acesso aos códigos desenvolvidos: **https://github.com/andrebpradof/FDTD-one-dimensional-scalar-wave**

C. *Link para acesso aos gráficos gerados*

Abaixo, segue o link para acesso aos gráficos gerados pelo algoritmo. Vale ressaltar que os gráficos estão devidamente dispostos em seus respectivos exercícios: **http://174.138.40.251/sel0612-ondas/**

VIII. CONCLUSÃO

Com base nos dados obtidos nesse projeto, foi possível observar melhor o comportamento das equações diferenciais de segunda ordem com o auxílio da equação de onda escalar e do método FDTD. Também pôde-se analisar os resultados implícitos de maneira clara e direta. Vale ressaltar que todos os gráficos solicitados nos exercícios apresentaram uma alta coerência e similaridade com as figuras apresentadas como base, verificando, assim, o grau de qualidade das respostas dadas.

Por fim, por haver coerência entre os conceitos teóricos e os resultados gráficos obtidos computacionalmente, pode-se dizer que os procedimentos foram realizados com o rigor necessário e se mostraram muito eficientes para os objetivos propostos previamente.

REFERÊNCIAS

[1] TAFLOVE, Allen, HAGNESS, Susan C. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Norwood: Artech House, 2a. ed., 2000.

[2] LANGTANGEN, Hans Petter, LINGE, Svein. Finite Difference Computing with PDEs. A Modern Software Approach. 1. ed. atual. [S. l.]: Springer, 2017. ISBN 978-3-319-55456-3. Disponível em: https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/27809/1002196.pdf?sequence=1.