

# Projeto 1 - Linhas de Transmissão

\*Note: Ondas Eletromagnéticas - SEL0612 (2020)

1<sup>st</sup> André Baconcelo Prado Furlanetti

Depto de E. Elétrica e de Computação  
Escola de Engenharia de São Carlos  
São Carlos, SP, Brasil  
NºUSP 10748305

2<sup>nd</sup> Diego da Silva Parra

Depto de E. Elétrica e de Computação  
Escola de Engenharia de São Carlos  
São Carlos, SP, Brasil  
NºUSP 10716550

3<sup>rd</sup> Mateus Fernandes Doimo

Depto de E. Elétrica e de Computação  
Escola de Engenharia de São Carlos  
São Carlos, SP, Brasil  
NºUSP 10691971

**Resumo**—Este documento consiste em um relatório feito em LaTeX para a disciplina “Ondas Eletromagnéticas”. Ele consiste em descrições teóricas, apresentação de um problema, métodos práticos implementados e análise dos resultados obtidos computacionalmente. O problema requer o desenvolvimento de um algoritmo que mostre a tensão e a corrente elétrica de uma linha de transmissão sem perdas, com base nas equações do telegrafista e suas implicações.

**Index Terms**—ondas eletromagnéticas, FDTD, tensão, corrente, linhas, transmissão.

## I. INTRODUÇÃO

Esse relatório é referente ao projeto 1 da disciplina de “Ondas Eletromagnéticas”, ministrada pelo professor Dr. Leonardo André Ambrósio. O assunto abordado é linhas de transmissão e suas implicações. Para isso, serão apresentadas as manipulações algébricas das equações do Telegrafista a fim de obter-se os valores de tensão e corrente elétrica em uma linha de transmissão sem perdas. Além disso, será apresentado um algoritmo desenvolvido em linguagem Python para uma melhor visualização do comportamento das características elétricas do circuito.

### A. O exercício

A Fig. 1 mostra uma linha de transmissão de impedância característica  $Z_0$  cujos terminais de entrada (em  $z = -l$ ) estão conectados a uma fonte de tensão  $v_s(t)$  de resistência interna  $R_s$ . Em  $z = 0$ , uma carga  $R_L$  é alimentada.

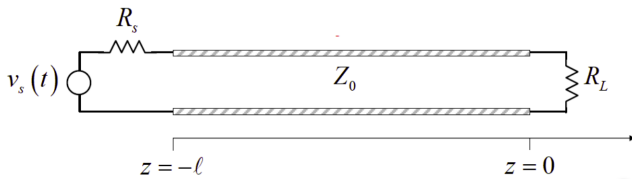


Figura 1. Linha de Transmissão considerada para a resolução

Para isso, assumir-se-á  $Z_0 = 50 \Omega$ . Além disso, serão consideradas três cargas  $R_L$ :

- $R_L \rightarrow \infty$  (carga em aberto);
- $R_L = 0$  (carga em curto), e

Universidade de São Paulo - USP

- $R_L = 100 \Omega$

Ademais, a fonte de tensão terá resistência interna fixa  $R_s = 75 \Omega$  e assumirá:

- $v_s = 2u(t)$ , onde  $u(t)$  é a função degrau, e
- $v_s(t) = u(t) - u\left(t - \frac{l}{10u_f}\right)$ , onde  $u_f = 0.9c$  é a velocidade do sinal de tensão (ou de corrente), sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo.

### B. As Equações do Telegrafista

As equações do telégrafo são um par de equações diferenciais parciais acopladas (EDPs) no espaço e no tempo:

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = G'v(z,t) + C'\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = R'i(z,t) + L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (2)$$

onde  $v(z,t)$  e  $i(z,t)$  representam a tensão instantânea e a corrente na posição  $z$  ao longo da linha de transmissão unidimensional e no momento  $t$ . Os valores de  $v(z,t)$  e  $i(z,t)$  são resolvidos e obtidos através do método do FDTD. Os coeficientes  $R'$ ,  $L'$ ,  $G'$  e  $C'$  representam a resistência, indutância, condutância e capacitância por comprimento de unidade.

### C. Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo

O método das diferenças finitas no domínio do tempo (Finite-Difference Time-Domain) consiste em uma técnica de aproximações sucessivas que transforma as equações diferenciais em equações discretizadas ou finitas, através do conceito da aproximação da derivada central de um ponto ao longo do tempo. Nesse caso, ele é aplicado às equações de curvatura de Maxwell no domínio do tempo. É um procedimento explícito que avança no tempo e que simula a propagação e a interação das ondas eletromagnéticas em uma região do espaço.

Para isso, a técnica utiliza a expansão em série de Taylor até atingir um erro estipulado pelo truncamento, após um dado número de interações. Dessa forma, pode-se obter uma malha para o cálculo de  $v(z,t)$  e  $i(z,t)$  como a representada na Fig. 1.

## II. ANÁLISE DO PROBLEMA

### A. Aproximação de Derivadas Parciais

Considerando a expansão da série de Taylor para a tensão  $v(z,t)$  sobre o ponto  $z_k$  até o ponto  $z_{k+1}$  (difusão progressiva), mantendo fixo o tempo  $t_n$ , tem-se:

$$v_{k+1}^n = v_k^n + \Delta z \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_k, t_n} + \frac{(\Delta z)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z_k, t_n} + \frac{(\Delta z)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right|_{z_k, t_n} + \dots \quad (3)$$

Isolando o termo da derivada parcial, obtém-se:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_k, t_n} = \frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\Delta z} - \frac{\Delta z}{2!} \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z_k, t_n} + \frac{(\Delta z)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right|_{z_k, t_n} + \dots \quad (4)$$

Assim, pode-se fixar o primeiro termo e atribuir a sequência restante a uma variável  $\vartheta$  que se aproxima de zero a uma tava  $\Delta z$ :

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_k, t_n} = \frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\Delta z} - \vartheta(\Delta z) \quad (5)$$

Agora, considerando a expansão da série de Taylor para a tensão  $v(z,t)$  sobre o ponto  $z_k$  até o ponto  $z_{k-1}$  (difusão retrógrada), mantendo fixo o tempo  $t_n$ , tem-se:

$$v_{k-1}^n = v_k^n - \Delta z \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_k, t_n} + \frac{(\Delta z)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z_k, t_n} - \frac{(\Delta z)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right|_{z_k, t_n} + \dots \quad (6)$$

Isolando o termo da derivada parcial, obtém-se:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_k, t_n} = \frac{v_k^n - v_{k-1}^n}{\Delta z} + \frac{\Delta z}{2!} \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z_k, t_n} - \frac{(\Delta z)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right|_{z_k, t_n} + \dots \quad (7)$$

Assim, também pode-se obter uma equação análoga à Equação 7 da seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_k, t_n} = \frac{v_k^n - v_{k-1}^n}{\Delta z} + \vartheta(\Delta z) \quad (8)$$

Por fim, pode-se considerar dois pontos centrais para realizar a diferenciação central subtraindo a Equação 8 da Equação 5:

$$v_{k+1}^n - v_{k-1}^n = 2\Delta z \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_k, t_n} + \vartheta(\Delta z^3) \quad (9)$$

Isolando o termo da derivada parcial, tem-se:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_k, t_n} = \frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2\Delta z} + \vartheta(\Delta z^2) \quad (10)$$

Portanto, observa-se que os três métodos utilizados para a diferenciação levam a um termo inicial com uma sequência que tende a zero. Sendo assim, será considerada a Equação 12, porém com um uma adaptação para a derivada temporal da seguinte maneira:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_k, t_n} = \frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2\Delta z} + \vartheta(\Delta z^2) \quad (11)$$

### B. Método FDTD para linhas sem perdas

Inicialmente, discretiza-se a função a fim de obter um conjunto de pontos em  $z$  e  $t$ . Para isso, utilizam-se as seguintes relações:

$$z_k = (k-1)\Delta z; \quad k = 1, 2, \dots, N_z \quad (12)$$

$$\Delta z = \frac{h}{N_z - 1}; \quad N_z \geq 2 \quad (13)$$

$$t_n = (n-1)\Delta t; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

$$\Delta t = \frac{T}{M-1}; \quad M \geq 2 \quad (15)$$

Agora, são adicionados novos pontos de meio tempo e meio espaço ( $z_{k+1/2}$ ,  $t_{n+1/2}$ ) de tal forma que:

$$z_{k+1/2} = \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta z; \quad k = 1, 2, \dots, N_z - 1 \quad (16)$$

$$t_{n+1/2} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta t; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Sendo assim, pode-se calcular  $v(z,t)$  e  $i(z,t)$  nos pontos ( $z_{k+1/2}$ ,  $t_{n+1/2}$ ) começando pelas condições de contorno ( $z = -1$  e  $z = 0$ ):

$$z_{1/2} = -\frac{1}{2}\Delta z \quad (18)$$

$$z_{N_z+1/2} = h + \frac{1}{2}\Delta z \quad (19)$$

Analogamente, para facilitar a imposição das condições iniciais em  $t = 0$ :

$$t_{1/2} = -\frac{1}{2}\Delta t \quad (20)$$

Para uma melhor visualização dos pontos, pode-se observar a Fig. 2, onde  $\bigcirc$  indica os pontos nos quais  $v(z,t)$  é calculada e  $+$  os pontos nos quais  $i(z,t)$  é calculada. Posto isso, pode-se reescrever as Equações 1 e 2 aproximando as derivadas:

$$\frac{\partial i(z_k, t_{n+1/2})}{\partial z} \approx \frac{i_{k+1/2}^{n+1/2} - i_{k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} \quad (21)$$

$$\frac{\partial v(z_k, t_{n+1/2})}{\partial t} \approx \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} \quad (22)$$

Por conseguinte, pode-se equacionar uma nova relação de  $v_k^{n+1}$ :

$$v_k^{n+1} = v_k^n - \frac{\Delta t}{C\Delta z} (i_{k+1/2}^{n+1/2} - i_{k-1/2}^{n+1/2}) \quad (23)$$

Esta nova relação de  $v_k^{n+1}$  pode ser representada esquematicamente pela "molécula computacional" ou "estêncil" como mostra a Fig. 3. A partir disso, fica claro que essa nova relação pode ser usada para  $k = 2, \dots, N_z-1$  e  $n \geq 2$ .

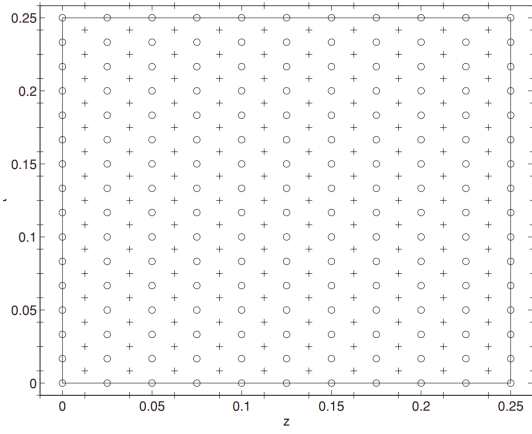


Figura 2. Grade para representar a tensão elétrica nas linhas sem perda ( $N_z = 11$ ,  $M = 16$ )

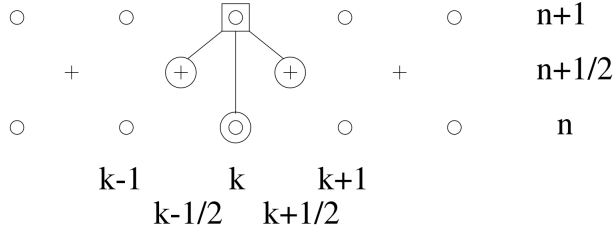


Figura 3. Molécula computacional ou Estêncil para a tensão elétrica

Em seguida, para a segunda equação do telegrafista (Equação 2) também realiza-se a aproximação em  $(z_{k+1/2}, t_n)$ :

$$\frac{\partial v(z_{k+1/2}, t_n)}{\partial z} \approx \frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\Delta z} \quad (24)$$

$$\frac{\partial i(z_{k+1/2}, t_n)}{\partial t} \approx \frac{i_{k+1/2}^{n+1/2} - i_{k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (25)$$

Assim, também pode-se equacionar uma nova relação para  $i_{k+1/2}^{n+1/2}$  e representá-la esquematicamente conforme a Fig. 4:

$$i_{k+1/2}^{n+1/2} = i_{k+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{L\Delta z} (V_{k+1}^n - V_k^n) \quad (26)$$

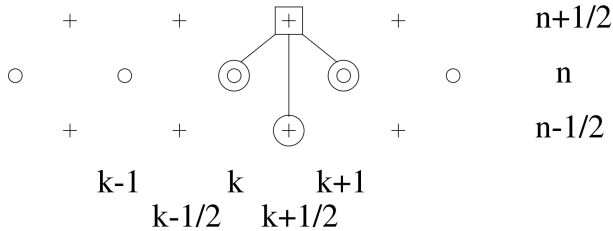


Figura 4. Molécula computacional ou Estêncil para a corrente elétrica

Agora, equacionam-se novas relações para a tensão elétrica em  $k = 1$  e  $k = N_z$ :

$$v_1^{n+1} = v_1^n - \frac{\Delta t}{C\Delta z} (i_{3/2}^{n+1/2} - i_{1/2}^{n+1/2}) \quad (27)$$

$$v_{N_z}^{n+1} = v_{N_z}^n - \frac{\Delta t}{C\Delta z} (i_{N_z+1/2}^{n+1/2} - i_{N_z-1/2}^{n+1/2}) \quad (28)$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$v(0, t_n) + R_s i(0, t_n) = v_0(t_n) \quad (29)$$

$$v(0, t_n) = v_1^n \quad (30)$$

$$i(0, t_n) \approx \frac{1}{2} [i_{1/2}^{n+1/2} - i_{3/2}^{n+1/2}] \quad (31)$$

Discretizando tais condições, obtém-se:

$$i_{1/2}^{n+1/2} = -i_{3/2}^{n+1/2} - \frac{2}{R_s} v_1^n + \frac{2}{R_s} v_0(t_n) \quad (32)$$

Considerando as condições de contorno em  $z = h$ :

$$v(h, t_n) - R_L i(h, t_n) = 0 \quad (33)$$

$$v(h, t_n) = v_{N_z}^n \quad (34)$$

$$i(h, t_n) \approx \frac{1}{2} [i_{N_z-1/2}^{n+1/2} + i_{N_z+1/2}^{n+1/2}] \quad (35)$$

Discretizando as condições de contorno:

$$i_{N_z+1/2}^{n+1/2} = -i_{N_z-1/2}^{n+1/2} - \frac{2}{R_L} v_{N_z}^n \quad (36)$$

Dessa forma, obtém-se novas relações para a tensão elétrica:

$$v_1^{n+1} = \left(1 - \frac{2\Delta t}{R_s C \Delta z}\right) v_1^n - \frac{2\Delta t}{C \Delta z} i_{3/2}^{n+1/2} \quad (37)$$

$$v_{N_z}^{n+1} = \left(1 - \frac{2\Delta t}{R_L C \Delta z}\right) v_{N_z}^n - \frac{2\Delta t}{C \Delta z} i_{N_z-1/2}^{n+1/2} \quad (38)$$

Para iniciar o método das diferenças finitas precisa-se de  $v_k^1$  e  $i_k^{3/2}$  para  $k = 1, \dots, N_z$ . Para isso, é sabido, através das condições iniciais, que  $v(z, 0) = 0$  e, conseqüentemente,  $v_k^1 = 0$  para  $k = 1, \dots, N_z$ . Considerando  $n = 1$ :

$$i_{k+1/2}^{3/2} = i_{k+1/2}^{1/2} - \frac{\Delta t}{L \Delta z} (v_{k+1}^1 - v_k^1) = i_{k+1/2}^{1/2} \quad (39)$$

$$i(z_{k+1/2}, 0) = 0 \quad (40)$$

A Equação 40 é condizente pois em todos os pontos nos passos 1/2 e 3/2 a corrente deve ser igual a zero. Em suma, tem-se:

$$v_k^1 = 0; \quad k = 1, \dots, N_z \quad (41)$$

$$i_{k+1/2}^{3/2} = 0; \quad k = 1, \dots, N_z - 1 \quad (42)$$

Agora, para  $n \geq 2$ :

$$v_1^n = \left(1 - \frac{2\Delta t}{R_s C \Delta z}\right) v_1^{n-1} - \frac{2\Delta t}{C \Delta z} i_{3/2}^{n-1/2} + \frac{2\Delta t}{R_s C \Delta z} v_0(t_{n-1}) \quad (43)$$

$$v_k^n = v_k^{n-1} - \frac{\Delta t}{C \Delta z} (i_{k+1/2}^{n-1/2} - i_{k-1/2}^{n-1/2}); \quad k = 2, \dots, N_z - 1 \quad (44)$$

$$v_{N_z}^n = \left(1 - \frac{2\Delta t}{R_L C \Delta z}\right) v_{N_z}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{C \Delta z} i_{N_z-1/2}^{n-1/2} \quad (45)$$

$$i_{k+1/2}^{n+1/2} = i_{k+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{L \Delta z} (v_{k+1}^n - v_k^n); \quad k = 1, \dots, N_z - 1 \quad (46)$$

Para evitar grandes problemas no desenvolvimento do código, considerou-se as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} n + 1/2 &\rightarrow n \\ k + 1/2 &\rightarrow k \end{aligned} \quad (47)$$

### C. Reduzindo o número de operações

Para reduzir o número de operações por etapa de tempo realizou-se a seguinte alteração das variáveis:

$$\tilde{v}_k^n = \frac{C\Delta z}{\Delta t} v_k^n \quad (48)$$

Assim, obteve-se novas relações:

$$\tilde{v}_k^1 = 0; \quad k = 1, \dots, N_z \quad (49)$$

$$i_k^1 = 0; \quad k = 1, \dots, N_z - 1 \quad (50)$$

Para  $n \geq 2$ :

$$\tilde{v}_1^n = (1 - \beta_1)\tilde{v}_1^{n-1} - 2i_1^{n-1} + \frac{2}{R_s}v_0(t_{n-1}) \quad (51)$$

$$\tilde{v}_k^n = \tilde{v}_k^{n-1} - (i_k^{n-1} - i_{k-1}^{n-1}) \quad (52)$$

$$\tilde{v}_{N_z}^n = (1 - \beta_2)\tilde{v}_{N_z}^{n-1} + 2i_{N_z-1}^{n-1} \quad (53)$$

$$i_k^n = i_k^{n-1} - r(\tilde{v}_{k+1}^n); \quad k = 1, \dots, N_z - 1 \quad (54)$$

$$\beta_1 = \frac{2\Delta t}{R_s C \Delta z} \quad (55)$$

$$\beta_2 = \frac{2\Delta t}{R_l C \Delta z} \quad (56)$$

$$r = \frac{(\Delta t)^2}{LC(\Delta z)^2} \quad (57)$$

### D. Condições iniciais

Como existem dois possíveis valores para  $v_s(t)$ , deve-se considerar e analisar cada caso. Sendo assim, seguem as condições iniciais:

1) *Caso 1:*

$$v_s(0) = 2u(0) = 2V \quad (58)$$

Em seguida, avalia-se a situação para cada carga  $R_L$ :

- $R_L \rightarrow \infty$  (carga em aberto). Não existe corrente.
- $R_L = 0$  (carga em curto). A corrente será dada através da Lei de Ohm. Portanto,  
 $I = \frac{v_s(0)}{R_s + Z_0} = \frac{2}{75+50} = 0.016$  A.
- $R_L = 100 \Omega$ . Analogamente ao item anterior, tem-se:  
 $I = \frac{v_s(0)}{R_s + Z_0 + R_L} = \frac{2}{75+50+100} = 0.0089$  A.

2) *Caso 2:* Para esse caso, assumiu-se  $l = 100$  m. Dessa forma, analogamente ao caso 1 pode-se inferir:

$$v_s(0) = u(0) - u\left(0 - \frac{100}{10 * 269813212.2}\right) = 1V \quad (59)$$

Em seguida, avalia-se a situação para cada carga  $R_L$ :

- $R_L \rightarrow \infty$  (carga em aberto). Não existe corrente.
- $R_L = 0$  (carga em curto). A corrente será dada através da Lei de Ohm. Portanto,  
 $I = \frac{v_s(0)}{R_s + Z_0} = \frac{1}{75+50} = 0.008$  A.
- $R_L = 100 \Omega$ . Analogamente ao item anterior, tem-se:  
 $I = \frac{v_s(0)}{R_s + Z_0 + R_L} = \frac{1}{75+50+100} = 0.0044$  A.

### III. O CÓDIGO

Para a resolução do exercício proposto foi desenvolvido um algoritmo em linguagem Python. A escolha se deu pela ampla disponibilidade de ferramentas matemáticas presentes na linguagem, gratuidade da aplicação e principalmente pela praticidade em gerar gráficos e animações com os resultados obtidos. Além disso, o programa desenvolvido em Python possui alta compatibilidade nos diversos computadores e sistemas operacionais.

#### A. Funcionalidade

A aplicação desenvolvida requer a entrada dos seguintes dados:

- valor da fonte de tensão;
- carga a ser considerada;
- tamanho da linha;
- número de interações.

A partir disso, a aplicação resulta animações gráficas de tensão e corrente ao longo da extensão da linha. Os valores são calculados até que a tensão e a corrente elétrica atinjam o regime estacionário.

```
1 # Metodo FDTD
2 for n in range(1,N):
3     # Condicao de controrno no inicio da linha
4     V[n][0] = (1 - beta_1)*V[n-1][0] - 2*I[n-1][0] +
5         (2/Rs)*fonte(res_fonte,(n-1)*dt,1)
6     # Tensao para toda linha K
7     for k in range(1,K-1):
8         V[n][k] = V[n-1][k] - (I[n-1][k]-I[n-1][k-1])
9     # Condicao de contorno no final da linha
10    if Rl == 0:
11        V[n][K-1] = 0
12    else:
13        V[n][K-1] = (1 - beta_2)*V[n-1][K-1] + 2*I[n-1][K-2]
14    # Corrente para toda linha K-1
15    for k in range(0, K-1):
16        I[n][k] = I[n-1][k] - (dt**2)/(L*C*dz**2)*(V[n][k+1] - V[n][k])
17 V = V*(dt/(C*dz))
```

### IV. RESULTADOS

A seguir, são apresentados os valores de tensão e corrente elétrica em  $t \rightarrow \infty$  para os casos 1 e 2 (Ver Tab. 1 e 2). Além disso, são apresentados os graficos exibidos pela aplicação em todas as situações de fonte de tensão e valor de carga apresentados no exercício (Ver Fig. 5-16).

Por fim, as animações gráficas completas estão disponíveis nos links abaixo de cada figura e todos os arquivos também podem ser consultados no link abaixo da plataforma GitHub.

<https://github.com/andrebradof/FDTD-transmission-lines>

Tabela I  
VALORES DE TENSÃO E CORRENTE ELÉTRICA EM  $T \rightarrow \infty$  PARA O CASO 1

$R_L$	$0 \Omega$	$100 \Omega$	$\infty$
$V_\infty(z,t)$	0.0 V	1.143 V	2.0 V
$I_\infty(z,t)$	0.0266 A	0.0114 A	0.0 A

Tabela II  
VALORES DE TENSÃO E CORRENTE ELÉTRICA EM  $T \rightarrow \infty$  PARA O CASO 2

$R_L$	$0 \Omega$	$100 \Omega$	$\infty$
$V_\infty(z,t)$	0.0 V	0.0 V	0.0 V
$I_\infty(z,t)$	0.0 A	0.0 A	0.0 A

### A. Gráficos exibidos para o caso 1

#### 1) $R_L = 0 \Omega$ :

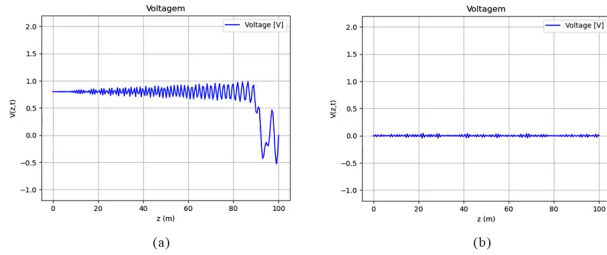


Figura 5. Tensão para o caso 1 e  $R_L = 0$  onde (b) com o regime estacionário atingido. Animação disponível em: <https://bit.ly/36qtgYy>

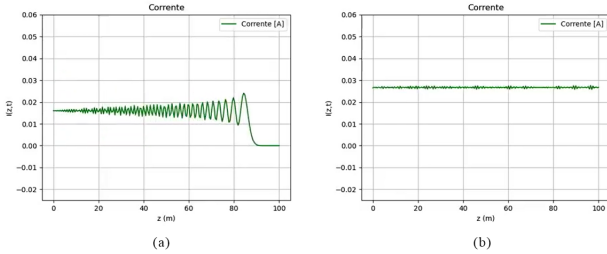


Figura 6. Corrente para o caso 1 e  $R_L = 0$  onde (b) com o regime estacionário atingido. Animação disponível em: <https://bit.ly/2LX8tm4>

#### 2) $R_L = 100 \Omega$ :

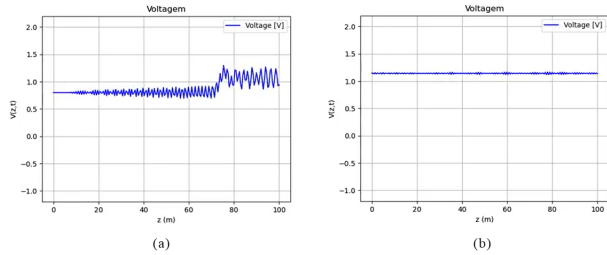


Figura 7. Tensão para o caso 1 e  $R_L = 100$  onde (b) com o regime estacionário atingido. Animação disponível em: <https://bit.ly/2Xp3f7X>

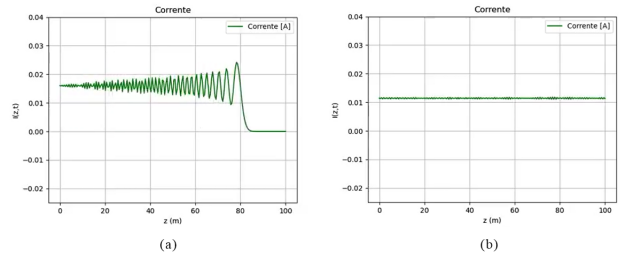


Figura 8. Corrente para o caso 1 e  $R_L = 100$  onde (b) com o regime estacionário atingido. Animação disponível em: <https://bit.ly/2ytwkXi>

#### 3) $R_L = \infty$ :

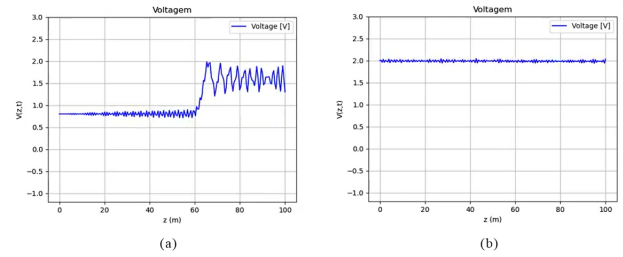


Figura 9. Tensão para o caso 1 e  $R_L = \infty$  onde (b) com o regime estacionário atingido. Animação disponível em: <https://bit.ly/2X33JSp>

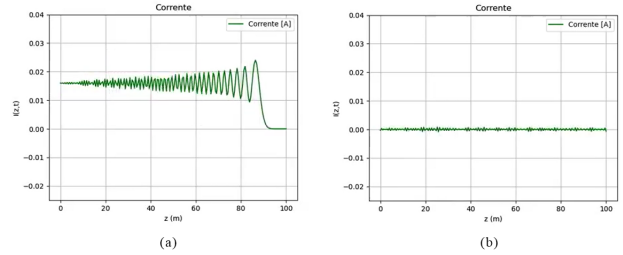


Figura 10. Corrente para o caso 1 e  $R_L = \infty$  onde (b) com o regime estacionário atingido. Animação disponível em: <https://bit.ly/3bW9w0d>

### B. Gráficos exibidos para o caso 2

#### 1) $R_L = 0 \Omega$ :

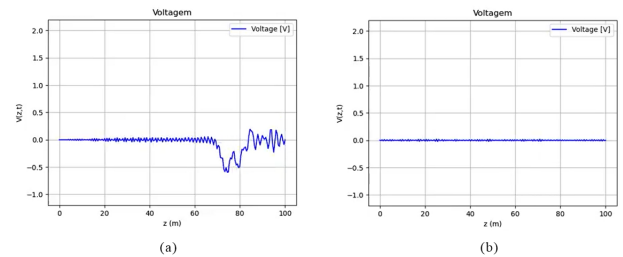


Figura 11. Tensão para o caso 2 e  $R_L = 0$  onde (b) com o regime estacionário atingido. Animação disponível em: <https://bit.ly/3gfFwzE>

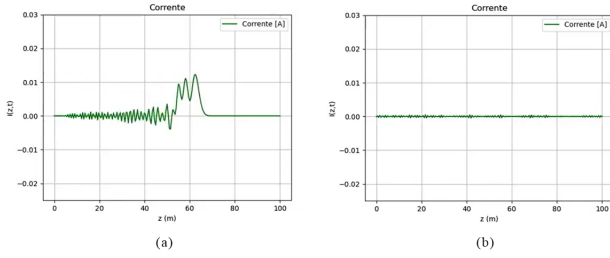


Figura 12. Corrente para o caso 2 e  $R_L = 0$  onde (b) com o regime estacionário atingido. Animação disponível em: <https://bit.ly/2TQrDP1>

2)  $R_L = 100 \Omega$ :

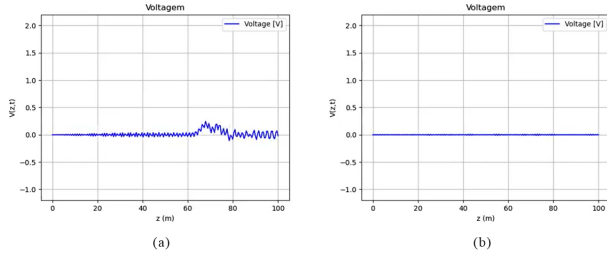


Figura 13. Tensão para o caso 2 e  $R_L = 100$  onde (b) com o regime estacionário atingido. Animação disponível em: <https://bit.ly/2XuERC1>

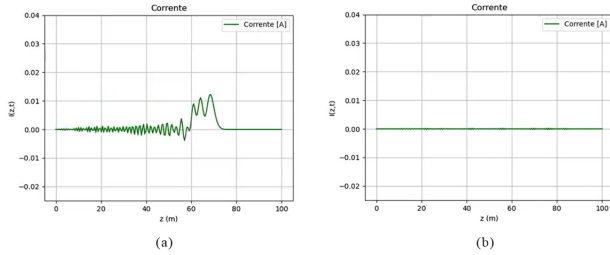


Figura 14. Corrente para o caso 2 e  $R_L = 100$  onde (b) com o regime estacionário atingido. Animação disponível em: <https://bit.ly/2A2Zqxa>

3)  $R_L = \infty$ :

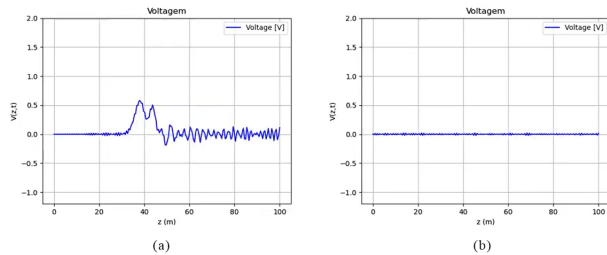


Figura 15. Tensão para o caso 2 e  $R_L = \infty$  onde (b) com o regime estacionário atingido. Animação disponível em: <https://bit.ly/2LXXCbz>

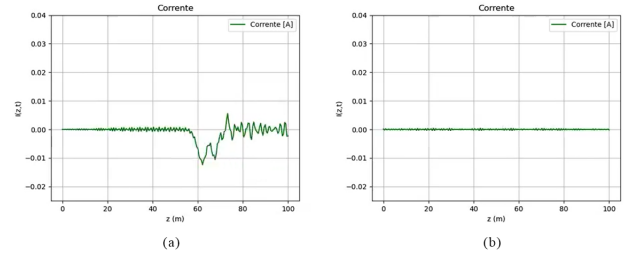


Figura 16. Corrente para o caso 2 e  $R_L = \infty$  onde (b) com o regime estacionário atingido. Animação disponível em: <https://bit.ly/2LXLMOk>

## V. CONCLUSÃO

Com base nos dados obtidos nesse projeto, foi possível observar melhor o comportamento das linhas de transmissão (nesse caso, sem perdas) e analisar os resultados implícitos de maneira clara e direta. Também foi possível aplicar os princípios das equações do telegrafista a fim de estudar o comportamento da tensão e corrente elétrica e obter resultados coerentes e satisfatórios. Além disso, através da utilização do método FDTD foi possível observar claramente o comportamento das ondas na linha de transmissão com o auxílio de gráficos animados.

Para cada carga  $R_L$  considerada foi possível entender o comportamento do circuito e das ondas. Para  $R_L \rightarrow \infty$  as ondas retornaram para a fonte pois havia uma carga em aberto. Dessa forma, ao encontrar a carga em aberto, houve um acúmulo de cargas no ponto e, com isso, uma reflexão da onda. Similarmente, para  $R_L = 0 \Omega$  também houve um retorno das ondas. Porém, nesse caso, o motivo do retorno se deu pelo fato de, ao fim da linha, a tensão em  $R_L$  ser nula. Por fim, para  $R_L = 100 \Omega$  a reflexão ocorrida pode ser explicada e justificada pelo fenômeno de reflexão, mais especificamente pelo coeficiente de reflexão  $\Gamma$  (Equações 60-62). Com isso, espera-se, algebricamente, que a reflexão retorne uma onda de tensão  $v_r$ .

$$\Gamma = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3} \quad (60)$$

$$\Gamma = \frac{v_r}{v_i} = \frac{v_r}{2} \quad (61)$$

$$\frac{v_r}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow v_r = \frac{2}{3} \quad (62)$$

Por fim, por haver coerência entre os conceitos teóricos e os resultados obtidos computacionalmente, pode-se dizer que os procedimentos foram realizados com o rigor necessário e se mostraram muito eficientes para os objetivos propostos previamente.

## REFERÊNCIAS

- [1] SADIKU, Matthew N. O. Elementos de Eletromagnetismo. Porto Alegre: Bookman, 3a. ed., 2004.
- [2] SADIKU, Matthew N. O. Elements of Electromagnetics. 7. ed. atual. [S. l.]: LSC Communications, 2018. ISBN 9780190698614.

- [3] THE FINITE-DIFFERENCE Time-Domain (FDTD) Algorithm. Salt Lake City, Utah, USA, 14 out. 2019. Disponível em: <https://utah.instructure.com/courses/578994/assignments/6489570>. Acesso em: 19 maio 2020.
- [4] TRANSMISSION Lines. Salt Lake City, Utah, USA, 26 ago. 2019. Disponível em: <https://utah.instructure.com/courses/578994/assignments/6490621>. Acesso em: 19 maio 2020.
- [5] TRANSMISSION Line Equations. Salt Lake City, Utah, USA, 28 ago. 2019. Disponível em: <https://utah.instructure.com/courses/578994/assignments/6490622>. Acesso em: 21 maio 2020.
- [6] INTRO to FDTD. Salt Lake City, Utah, USA, 25 set. 2019. Disponível em: <https://utah.instructure.com/courses/578994/assignments/6490605>. Acesso em: 22 maio 2020.
- [7] LUZ, Rafael Luchi. O método de diferenças finitas no domínio do tempo em eletromagnetismo. Orientador: Prof. Dr. Wagner Barbosa Muniz. 2013. 66 p. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2013. Disponível em: [https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/126279/Rafael\\_Luchi\\_Luz.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/126279/Rafael_Luchi_Luz.pdf?sequence=1&isAllowed=y). Acesso em: 21 maio 2020.