

Bolsa de Investigação Científica
Relatório Final

Escalonamento num *Call Center* de Saúde

Autor: André Martins Brito^{a,b}

a Bolseiro de Investigação Científica, CMAFcIO, Universidade de Lisboa

b MAEG, ISEG, Universidade de Lisboa

Orientação: Cândida Mourão^c, Margarida Moz^c, Margarida Pato^c

c CMAFcIO & ISEG, Universidade de Lisboa

Conteúdo

Abstract	2
Keywords	2
1 Introdução	3
2 Modelo de Escalonamento	3
2.1 Implementação	3
2.2 Características do <i>Call Center</i>	4
2.3 Construção dos turnos	5
2.4 Dados	6
2.5 Variáveis	9
2.6 Objetivo	9
2.7 Restrições	9
2.8 Resultados	11
2.8.1 Procura Constante	13
2.8.2 Procura Variável	16
3 Conclusão	19
Referências	21

Abstract

Existe uma multiplicidade de modelos de escalonamento de pessoal desenvolvidos especialmente para adaptação a determinadas realidades. Neste trabalho, estudam-se dois modelos de escalonamento de um *call center* português integrado na área da saúde que, respeitando as necessidades e restrições deste *call center*, têm diferente grau de generalidade. Estes dois modelos de programação linear binária (PLB) foram implementados de forma a serem passíveis de comparação. Um dos modelos foi desenvolvido neste projeto e implementado no software Jupyter, baseado na linguagem de programação *Python*, recorrendo à *Python* API do CPLEX, enquanto o outro modelo, tendo sido proposto num anterior trabalho de investigação, foi implementado diretamente no software de otimização CPLEX. Os dois modelos foram utilizados na resolução de várias instâncias teste, para averiguar limitações inerentes a cada um e comparar o desempenho destes nas mesmas circunstâncias. Ambos produzem soluções admissíveis, convergindo, em geral, para soluções de valores perto do ótimo, fornecendo resultados em tempo útil que podem ser utilizados na realidade do *call center* em estudo.

Keywords: Problemas de escalonamento; *call center*; modelos de PLB.

1 Introdução

Por proposta das professoras orientadoras, o trabalho realizado no âmbito da bolsa Investigação em Investigação Operacional, disponibilizada pelo centro de investigação CMAFcIO [1], focou-se no desenvolvimento e implementação de modelos de escalonamento específicos para um *call center* de uma entidade pública portuguesa ligada à área da saúde em Portugal cujas características estão descritas no trabalho [2] no ponto 2.2 deste relatório.

Este relatório foca-se na descrição e análise de um modelo de escalonamento desenvolvido de raiz para corresponder a todas as exigências deste *Call Center*. Os resultados deste modelo de escalonamento foram também preparados para que pudessem ser comparados com os resultados de um outro modelo [3] desenvolvido para o mesmo *Call Center*.

2 Modelo de Escalonamento

Ao desenvolver-se este modelo, pretendeu-se obter um programa que minimizasse os custos para o empregador e que fornecesse resultados em tempo considerado aceitável pela organização. Desta forma, pretende-se que sua utilização fosse viável em situações reais, dado que, por vezes, pode surgir a necessidade de obter soluções para um horizonte de planeamento extenso num espaço reduzido de tempo. Para além disso, intencionava-se que as soluções do modelo fossem de fácil compreensão e passíveis de serem apresentadas de forma prática e perceptível. Neste trabalho, o objetivo consistia, então, em determinar quantos indivíduos devem trabalhar e em que turnos, por forma a minimizar os custos de escalonamento. Neste caso, os indivíduos são enfermeiros que são empregados por um *Call Center* pertencente a uma entidade pública portuguesa ligada à área da saúde em Portugal.

2.1 Implementação

Para implementar o modelo foi utilizada a linguagem de programação *Python* em conjunção com os pacotes do CPLEX para *Python*, com recurso ao formato Notebook Jupyter. A escolha da implementação do modelo em *Python* permitiu:

- a importação e a exportação de dados de folhas de cálculo do Excel através das funcionalidades do software de análise de dados *Pandas* para *Python*. Por um lado, foi possível construir os turnos numa folha de cálculo do Excel e, posteriormente, importar esses dados e integrá-los no modelo. Por outro lado, após correr o modelo, foi também possível exportar os resultados para folhas de cálculo do Excel de forma a serem facilmente interpretados;
- a criação de um conjunto de funções para tratar e preparar os dados que o modelo exige e integrá-los neste, tudo no mesmo ambiente;
- a utilização do formato Notebook, no qual é possível uma apresentação mais organizada e perceptível de todos os comandos que constituem funções auxiliares e do próprio modelo.

2.2 Características do *Call Center*

De acordo com o estudo base [2], as características do *Call Center* português integrado na área da saúde são as seguintes:

- Horizonte de planeamento é de 28 dias;
- Os turnos são de 4, 5, 6 e 7 horas e terminam no mesmo dia em que começam;
- Tem que existir um intervalo mínimo de 13 horas entre turnos de dias consecutivos;
- Em cada dia de trabalho, um enfermeiro faz no máximo 1 turno;
- Em cada semana existem 2 dias de folga consecutivos para todos os enfermeiros ou 7 dias de folga, quando os enfermeiros a tempo parcial não são contratados nessa semana;
- Os enfermeiros a tempo integral trabalham sempre em todo o horizonte de planeamento, cumprindo um horário de 35 horas semanais, realizando 5 turnos de 7 horas;
- Os enfermeiros a tempo parcial só trabalham se houver necessidade, cumprindo um horário de 20 a 24 horas por semana realizando turnos de 4 a 6 horas;
- Há pelo menos 1 enfermeiro sénior (a tempo integral ou parcial) a supervisionar cada turno;
- Os enfermeiros a tempo integral têm ordenado fixo e os enfermeiros a tempo parcial (maioria) ganham à hora;
- Acrescem ainda custos comuns aos dois tipos de enfermeiro relacionados com horas noturnas (das 22 às 7h), fins de semana e feriados.

De forma a completar a caracterização do *Call Center* e obter uma situação mais realista foi definido que os dias 6, 7, 13, 14, 20, 21, 27, 28 são dias de fim de semana e que o dia 25 é feriado. Para definir os custos associados a cada turno foi consultada a tabela salarial fornecida pelo Sindicato dos Enfermeiros Portugueses para o ano de 2019 [4]. Com isto, convencionou-se que todos enfermeiros, trabalhem estes a tempo integral ou a tempo parcial, auferem o mesmo valor por hora de trabalho e que estão no primeiro escalão do respetivo cargo. Assim, os enfermeiros ganham em trabalho diurno €7.92 por hora, acrescido de €3.96 por hora de trabalho noturno nos dias úteis, aos sábados depois das 13h, em domingos, em feriados e em dias de descanso semanal. Por sua vez, considerou-se que os enfermeiros séniores correspondem aos enfermeiros gestores que constam na tabela salarial e, assim, ganham em trabalho diurno €15.39 por hora, acrescido de €7.70 por hora de trabalho noturno nos dias úteis, aos sábados depois das 13h, em domingos, em feriados e em dias de descanso semanal. Vale a pena realçar também que a Direção-Geral da Administração Pública e do Emprego Público considera período de trabalho noturno o compreendido entre as 22 horas de um dia e as 7 horas do dia seguinte [5] e, por isso, foi esse o período considerado como trabalho noturno.

2.3 Construção dos turnos

No caso deste *Call Center*, os turnos podem ser de 4, 5, 6 e 7 horas e terminam no mesmo dia em que se iniciaram. Considerou-se também que os turnos que incluem horas de refeição, almoço ou jantar, teriam que ter um intervalo no trabalho de 1 hora, pelo que essa hora não conta como trabalho. Cada refeição pode ser realizada num dos seguintes intervalos de tempo:

- Almoço: $12h - 13h$ ou $13h - 14h$;
- Jantar: $19h - 20h$ ou $20h - 21h$;

Dado que todo o turno passível de ser realizado, neste caso, obedece a estas regras, os turnos possíveis podem ser facilmente definidos. Utilizou-se, então, uma folha de cálculo do Excel para definir os vários turnos de forma a que essa informação fosse facilmente importada para o *Python* e utilizada no modelo. A folha de cálculo contém, assim, os índices, π , que identificam cada turno, as horas, h , que compõem um dia de trabalho e os valores 0 e 1 que indicam se a h -ésima hora pertence (1) ou não (0) ao turno de índice π . Neste trabalho, considerou-se que a h -ésima hora representa o intervalo de tempo $[h - 1, h]$.

Na Tabela 1 apresenta-se um exemplo da definição de dois turnos de 7 horas.

Turnos		
$h \setminus \pi$	1	2
1	1	0
2	1	1
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	1	1
7	1	1
8	0	1
9	0	0
...
24	0	0

Tabela 1: Definição de dois turnos de 7 horas

No caso em que os turnos incluem horas de refeição, foi necessário estudar as combinações possíveis. Para ilustrar o raciocínio feito, utiliza-se novamente o caso de turnos de 7 horas, apresentado na Tabela 2.

Turnos				
$h \setminus \pi$	18	19	20	21
1	0	0	0	0
...
13	1	0	0	0
14	0	1	0	0
15	1	1	1	1
16	1	1	1	1
17	1	1	1	1
18	1	1	1	1
19	1	1	1	1
20	1	1	1	0
21	0	0	0	1
22	0	0	1	1
23	0	0	0	0
24	0	0	0	0

Tabela 2: Definição de quatro turnos de 7 horas com inclusão de horas de refeição

Aplicou-se este raciocínio aos restantes turnos de 7 horas, bem como aos de 4, 5 e 6 horas de forma a esgotar todas as combinações possíveis e a ocupar todas as horas de um dia, tendo-se obtido 99 turnos distintos.

2.4 Dados

Segue-se, então, a apresentação e respetiva explicação dos dados utilizados:

- H , conjunto das horas, $H = \{1, \dots, 24\}, (h \in H)$;
- D , conjunto dos dias, $D = \{1, \dots, 28\}, (d \in D)$;
- $d = 0$, último dia do mês anterior;
- W , conjunto das semanas, $W = \{1, 2, 3, 4\}, (w \in W)$;
- D_w , conjunto dos dias da semana w ;
- E , conjunto dos enfermeiros ($e \in E$);
- E_p , conjunto de enfermeiros a tempo parcial;
- E_i , conjunto de enfermeiros a tempo integral;
- E_s , conjunto de enfermeiros seniores;
- Π , conjunto dos turnos, $\Pi = \{1, \dots, 99\}, (\pi \in \Pi)$;

- P_e , conjunto dos turnos que o enfermeiro e pode realizar;
- $t_h^\pi = \begin{cases} 1, & \text{se a hora } h \text{ pertence ao turno } \pi, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$
- $R_{e,d}^\pi$, conjunto dos turnos que o enfermeiro e não pode realizar no dia $d + 1$ se realizou o turno π no dia d ;
- $c_{e,d}^\pi$, custo de o enfermeiro e realizar o turno π no dia d ;
- h^π , número de horas do turno π ;
- $p_{d,h}$, procura de enfermeiros no dia d na h -ésima hora;
- $m_e^\pi = \begin{cases} 1, & \text{se o enfermeiro } e \text{ fez o turno } \pi \text{ no último dia do mês anterior (dia 0),} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

De forma a testar o modelo, considerou-se que existem 26 enfermeiros que podem ser contratados para o serviço, cada um identificado por um índice $e \in E = \{1, 2, \dots, 26\}$. Desse 26 enfermeiros, 20 trabalham a tempo parcial e 6 a tempo integral, $E_p = \{7, \dots, 26\}$ e $E_i = \{1, \dots, 6\}$. Para além disso, definiu-se que existiam 13 enfermeiros séniores cujos índices são $E_s = \{3, \dots, 15\}$.

O conjunto dos turnos que um dado enfermeiro e pode realizar, P_e , é definido de acordo com o seu tipo de trabalho, integral ou parcial. Os enfermeiros que trabalham a tempo parcial podem realizar qualquer dos 99 turnos, ou seja, $P_{e_p} = \{1, \dots, 99\}$, onde e_p é um enfermeiro a tempo parcial, enquanto os enfermeiros a tempo integral realizam apenas turnos de 7 horas, ou seja, $P_{e_i} = \{1, \dots, 25\}$, onde e_i é um enfermeiro a tempo integral.

Observação: Pode acontecer que um enfermeiro específico não possa trabalhar num dado período do dia. Nesse caso, bastava criar um documento, por exemplo, uma folha de cálculo do Excel, que identificasse o enfermeiro em questão e as horas em que este não pode trabalhar para contemplar esta informação no conjunto dos turnos que o enfermeiro pode realizar. Apesar de não ter sido feito neste trabalho, seria muito simples, com base nessa informação, construir uma função em *Python* que definisse o conjunto P_e de forma a apenas incluir turnos admissíveis para um enfermeiro específico, sem necessidade de incluir mais uma restrição no modelo.

Devido à obrigação de existir um intervalo mínimo de 13 horas entre turnos de dias consecutivos para permitir o descanso dos enfermeiros contratados, há turnos em dias consecutivos incompatíveis. Assim, criou-se uma função em *Python* que, para cada turno realizado num dado dia por um enfermeiro, tendo por base a hora em que este termina, devolve os turnos que não podem ser realizados no dia seguinte por esse enfermeiro, definindo o conjunto $R_{e,d}^\pi$. Para além disso, de forma a assegurar a continuidade do escalonamento, é necessário considerar os turnos realizados no último dia do mês anterior (dia $d = 0$). No entanto, até ao momento, não se possuíam quaisquer informações para completar estes dados, pelo que foi necessário executar o modelo uma primeira vez sem contemplar os turnos realizados no último dia do mês anterior

para obter resultados para o escalonamento, utilizando-se, posteriormente, os dados do dia 28 para completar a informação em falta, m_e^π .

Relativamente aos custos, teve-se por base a tabela salarial da carreira dos enfermeiros [4] para desenvolver uma função que calcula o custo da realização de um turno, tendo em conta o enfermeiro que o realiza, o dia em que é realizado e as horas que inclui.

No que diz respeito à procura, isto é, à necessidade de enfermeiros por hora e por dia, consideraram-se duas situações:

- uma situação mais simples, de **procura constante**, para testar a viabilidade e funcionalidade do modelo, tendo sido definida uma procura de 3 enfermeiros por hora e por dia para todo o horizonte de planeamento;
- outra mais exigente, de **procura variável**, em que se utilizou a geração de números pseudoaleatórios através de uma distribuição de Poisson de média 3 enfermeiros nas horas $h = 21, 22, 23, 24$ e nas restantes horas por uma distribuição de Poisson de média 2.

No respeitante às estruturas de dados usadas para armazenar os dados, para H , D , W , D_w , E , E_p , E_i , E_s , Π e P_e foram utilizadas listas e para t_h^π , $R_{e,d}^\pi$, $c_{e,d}^\pi$, h^π , $p_{d,h}$ e m_e^π foram utilizados dicionários. Considerando um caso genérico, os dicionários que armazenam os dados $nome_{i,j}^v$ são definidos da forma $nome = \{(i, j, v) : z\}$, onde $nome$ é a designação que identifica a estrutura, i, j e v são índices que caracterizam os dados e z é a informação guardada. Por sua vez, z pode ser um escalar ou uma lista e pode ser acedido diretamente ao declarar $nome$ e os índices (i, j, v) que o identificam. Para exemplificar, considere-se o conjunto $c_{e,d}^\pi$ que no *script* do *Python* é identificado por *custos* através do comando apresentado na imagem 1.

```
In [24]: custos = {(e,d,pi): float(custoturno(pi,e,d,t_pi_h)) for e in E for pi in P_e[e] for d in D}
```

Figura 1: Comando para a definição do conjunto $c_{e,d}^\pi$

O dicionário *custos* é definido ao chamar uma função auxiliar, *custoturno*, que calcula o custo de cada turno para cada enfermeiro, $e \in E$, dia, $d \in D$, e turno, π , que esse enfermeiro pode realizar, $\pi \in P_e$, e guarda o resultado dessa função na posição (e, d, π) do dicionário. Para aceder, por exemplo, ao custo de o enfermeiro $e = 1$ realizar no dia $d = 2$ o turno $\pi = 3$ é utilizado o comando ilustrado na imagem 2.

```
In [25]: custos[1,2,3]
Out[25]: 71.28
```

Figura 2: Comando para a definição do conjunto $c_{e,d}^\pi$

Assim, o custo de o enfermeiro $e = 1$ realizar no dia $d = 2$ o turno $\pi = 3$ é de €72.28.

2.5 Variáveis

De seguida, apresentam-se as variáveis definidas:

- $x_{e,d}^\pi = \begin{cases} 1, & \text{se o enfermeiro } e \text{ realiza o turno } \pi \text{ no dia } d, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$
- $y_{e,d} = \begin{cases} 1, & \text{se o enfermeiro } e \text{ tem folga no dia } d, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$
- $z_{e,w} = \begin{cases} 1, & \text{se o enfermeiro } e \text{ (a tempo parcial) é contratado na semana } w, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$

As variáveis foram declaradas utilizando novamente a estrutura de dados dicionário. Assim, as variáveis $x_{e,d}^\pi$ são da forma $X = \{(e, d, \pi) : x\}$, $y_{e,d}$ da forma $Y = \{(e, d) : y\}$ e, por fim, as $z_{e,w}$ da forma $Z = \{(e, w) : z\}$. Os valores x, y e z são os resultados da aplicação do modelo.

Obtiveram-se, assim, 60448 variáveis no total: 59640 variáveis $x_{e,d}^\pi$, 728 variáveis $y_{e,d}$ e 80 variáveis $z_{e,w}$.

2.6 Objetivo

Relativamente à função objetivo, pretende-se minimizar os custos de escalonamento para o empregador:

$$\min \sum_{e \in E} \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in P_e} c_{e,d}^\pi x_{e,d}^\pi \quad (1)$$

2.7 Restrições

No que diz respeito às restrições, tem-se:

- Cada enfermeiro realiza, no máximo, um turno por dia, quando não está de folga:

$$\sum_{\pi \in P_e} x_{e,d}^\pi \leq 1 - y_{e,d}, \forall e \in E, \forall d \in D \quad (2)$$

- Cada enfermeiro beneficia de dois dias de folga consecutivos por semana ou 7 folgas por semana se o enfermeiro a tempo parcial não foi contratado nessa semana:

$$\sum_{d \in D_w} y_{e,d} = 2, \forall e \in E_i, \forall w \in W \quad (3)$$

$$\sum_{d \in D_w} y_{e,d} = 2z_{e,w} + 7(1 - z_{e,w}), \forall e \in E_p, \forall w \in W \quad (4)$$

$$y_{e, \min D_w} \leq y_{e, \min D_w + 1}, \forall e \in E, \forall w \in W \quad (5)$$

$$y_{e,d} \leq y_{e,d+1} + y_{e,d-1}, \forall e \in E, \forall w \in W, \forall d : \min D_w + 1 \leq d \leq \max D_w - 1 \quad (6)$$

As restrições (3) garantem que cada enfermeiro a tempo integral auferirá exatamente de 2 folgas por semana, as restrições (4) garantem que um enfermeiro a tempo parcial, numa

semana em que é contratado, tem 2 dias de folga e quando não é contratado tem 7 dias de folga. As restrições (5) garantem que não há folga solta no primeiro dia de cada semana e as restrições (6) garantem que as folgas, se existirem, são consecutivas nos dias que se seguem.

- Intervalo mínimo de 13 horas entre turnos:

$$x_{e,d+1}^{\pi_r} \leq 1 - x_{e,d}^{\pi}, \forall e \in E, \forall \pi \in P_e, \forall \pi_r \in R_{e,d}^{\pi}, \forall d \in D \setminus \{28\} \quad (7)$$

$$x_{e,1}^{\pi_r} \leq 1 - m_e^{\pi}, \forall e \in E, \forall \pi \in P_e, \forall \pi_r \in R_{e,0}^{\pi} \quad (8)$$

As restrições (7) garantem que nenhum turno pertencente a $R_{e,d}^{\pi}$ é realizado no dia $d+1$, se o enfermeiro realizar o turno π do dia d , de forma a cumprir as 13 horas de intervalo entre os turnos, sendo (8) idênticas, mas para o primeiro dia do horizonte de planeamento, tendo em conta a informação sobre os turnos realizados no último dia do mês anterior.

- Os enfermeiros a tempo parcial, que são contratados, têm que realizar entre 20 a 24 horas de trabalho por semana:

$$\sum_{d \in D_w} \sum_{\pi \in P_e} h^{\pi} x_{e,d}^{\pi} \leq 24 z_{e,w}, \forall e \in E_p, \forall w \in W \quad (9)$$

$$\sum_{d \in D_w} \sum_{\pi \in P_e} h^{\pi} x_{e,d}^{\pi} \geq 20 z_{e,w}, \forall e \in E_p, \forall w \in W \quad (10)$$

- Os enfermeiros a tempo integral têm que realizar 5 turnos de 7 horas por semana:

$$\sum_{d \in D_w} \sum_{\pi \in P_e} h^{\pi} x_{e,d}^{\pi} = 35, \forall e \in E_i, \forall w \in W \quad (11)$$

- A procura de enfermeiros por hora tem que ser correspondida em todos os dias e em qualquer hora:

$$\sum_{e \in E} \sum_{\pi \in P_e} t_h^{\pi} x_{e,d}^{\pi} \geq p_{d,h}, \forall d \in D, \forall h \in H \quad (12)$$

- Tem que existir, pelo menos, um enfermeiro sénior (a tempo integral ou parcial) a supervisionar cada hora dos diferentes dias:

$$\sum_{e \in E_s} \sum_{\pi \in P_e} t_h^{\pi} x_{e,d}^{\pi} \geq 1, \forall d \in D, \forall h \in H \quad (13)$$

2.8 Resultados

Para testar e avaliar o desempenho do modelo e da sua implementação em *Python*, como já foi referido, foram consideradas duas situações distintas: **procura constante** e **procura variável**. Após executar o modelo nestas duas situações, os resultados foram exportados do *Python* para folhas de cálculo de Excel, utilizando novamente o software *Pandas*. Assim, os resultados do modelo consistem em 4 folhas de cálculo, cada uma a conter o seguinte:

- Os resultados respeitantes aos valores das variáveis $x_{e,d}^\pi$ foram manipulados, através de uma função em *Python*, de forma a serem apresentados, por dia e por hora, os enfermeiros escalonados. Assim, os resultados traduzem-se numa tabela na qual as linhas são as horas e as colunas os dias do horizonte de planeamento. Por sua vez, as entradas são os índices dos enfermeiros que foram escalonados para trabalhar naquele dia àquela hora, ou seja, que realizam o turno que inclui aquelas horas naquele dia;
- Os resultados respeitantes aos valores das variáveis $y_{e,d}$ numa tabela, na qual as linhas designam os enfermeiros pelos seus respetivos índices e as colunas são os dias. As entradas da tabela são iguais a 1 ou 0 consoante o enfermeiro tem (1) ou não (0) folga naquele dia;
- Os resultados respeitantes aos valores das variáveis $z_{e,w}$ numa tabela, na qual as linhas designam os enfermeiros que trabalham a tempo parcial pelos seus respetivos índices e as colunas são as semanas do horizonte de planeamento. As entradas da tabela são iguais a 1 ou 0 consoante o enfermeiro parcial é (1) ou não (0) contratado nessa semana;
- Por fim, uma tabela com o valor da função objetivo da melhor solução inteira encontrada, o tempo de execução e a diferença relativa entre o valor da função objetivo da melhor solução inteira encontrada e o valor da função objetivo da solução ótima da relaxação linear do problema, designado por GAP.

Devido ao grande número de restrições existentes, decidiu-se limitar o tempo de execução do problema a 15 minutos. Para simplificar a apresentação dos resultados, apenas vão ser expostos os resultados das variáveis $x_{e,d}^\pi$ e $y_{e,d}$ na primeira semana do horizonte de planeamento.

Para ilustrar como são transformados os resultados respeitantes aos valores das variáveis $x_{e,d}^\pi$, considere-se um exemplo com três enfermeiros $e \in \{1, 2, 3\}$ a tempo integral e um horizonte de planeamento de dois dias onde $x_{1,1}^1 = 1$, $x_{1,2}^2 = 1$, $x_{2,1}^{18} = 1$, $x_{2,2}^{19} = 1$, $x_{3,1}^{20} = 1$, $x_{3,2}^{21} = 1$ e todas as restantes variáveis $x_{e,d}^\pi$ iguais a 0. Os turnos 1, 2, 18, 19, 20 e 21 referem-se aos turnos já ilustrados nas Tabelas 1 e 2. Assim, sabe-se que o enfermeiro 1 realiza o turno 1 no dia 1 e o turno 2 no dia 2, o enfermeiro 2 realiza o turno 18 no dia 1 e o turno 19 no dia 2 e que o enfermeiro 3 realiza o turno 20 no dia 1 e o turno 21 no dia 2 e, para além disso, através da construção dos turnos (2.3) são conhecidas as horas que pertencem a cada turno. A tabela seguinte ilustra o raciocínio feito para manipular os resultados respeitantes aos valores das variáveis $x_{e,d}^\pi$.

$h \setminus d$	1	2
1	1	
2	1	1
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	1	1
7	1	1
8		1
9		
10		
11		
12		
13	2	
14		2
15	2, 3	2, 3
16	2, 3	2, 3
17	2, 3	2, 3
18	2, 3	2, 3
19	2, 3	2, 3
20	2, 3	2
21		3
22	3	3
23		
24		

Tabela 3: Transformação dos resultados respeitantes aos valores das variáveis $x_{e,d}^{\pi}$

Na Tabela 3, as linhas representam as horas, as colunas os dias e as entradas os índices dos enfermeiros escalonados naquele dia àquela hora. As horas de refeição estão realçadas a vermelho e as entradas vazias significam que nenhum enfermeiro foi escalonado para essa hora nesse dia. Esta apresentação simplifica a análise dos resultados pois, permite observar todos os enfermeiros escalonados em qualquer de qualquer dia, o que numa aplicação real é muito mais prático. A partir dos resultados respeitantes aos valores das variáveis $x_{e,d}^{\pi}$, seria possível também obter o horário individual de cada enfermeiro, isto é, uma tabela na qual as linhas são as horas, as colunas os dias e as entradas iguais a 0 ou 1 consoante o enfermeiro trabalha (1) ou não (0) naquele dia àquela hora o que, na realidade, também tem utilidade.

2.8.1 Procura Constante

Nesta situação, considerou-se uma procura constante de 3 enfermeiros em cada hora de cada dia do horizonte de planeamento. Obtiveram-se, então, os seguintes resultados:

Resultados do Escalonamento							
$h \setminus d$	1	2	3	4	5	6	7
1	3, 23, 26	3, 22, 24	4, 18, 21	4, 20, 21	4, 19, 25	1, 4, 19	4, 17, 22
2	3, 23, 26	3, 22, 24	4, 18, 21	4, 20, 21	4, 19, 25	1, 4, 19	4, 17, 22
3	3, 23, 26	3, 22, 24	4, 18, 21	4, 20, 21	4, 19, 25	1, 4, 19	4, 17, 22
4	3, 23, 26	3, 22, 24	4, 18, 21	4, 20, 21	4, 19, 25	1, 4, 19	4, 17, 22
5	3, 23, 25	3, 22, 24	4, 18, 21	4, 19, 21	4, 19, 25	1, 4, 19	4, 17, 22
6	3, 23, 25	3, 22, 24	4, 18, 21	4, 19, 21	4, 19, 25	1, 4, 19	4, 17, 22
7	3, 6, 25	3, 6, 22	3, 4, 6	4, 6, 19	4, 6, 18	1, 4, 19	4, 7, 22
8	6, 16, 25	6, 16, 25	3, 6, 22	6, 18, 19	6, 18, 21	14, 21, 24	14, 24, 25
9	6, 16, 25	6, 16, 25	3, 6, 22	6, 18, 19	6, 18, 21	14, 21, 24	14, 24, 25
10	6, 16, 19	6, 16, 25	3, 6, 22	6, 18, 22	6, 18, 21	14, 21, 24	14, 24, 25
11	6, 16, 19	6, 16, 25	3, 6, 22	6, 18, 22	6, 18, 21	14, 21, 24	14, 24, 25
12	6, 16, 19	6, 16, 25	3, 6, 22	6, 18, 22	6, 18, 21	14, 21, 24	14, 24, 25
13	6, 16, 19	6, 16, 25	3, 6, 22	6, 18, 22	6, 18, 21	14, 21, 24	14, 24, 25
14	1, 2, 5	1, 2, 5	1, 2, 5	2, 3, 17	2, 3, 20	5, 23, 26	1, 5, 23
15	1, 2, 5	1, 2, 5	1, 2, 5	2, 3, 17	2, 3, 20	5, 23, 26	1, 5, 23
16	1, 2, 5	1, 2, 5	1, 2, 5	2, 3, 17	2, 3, 20	5, 23, 26	1, 5, 23
17	1, 2, 5	1, 2, 5	1, 2, 5	2, 3, 17	2, 3, 20	5, 23, 26	1, 5, 23
18	1, 2, 5	1, 2, 5	1, 2, 5	2, 3, 17	2, 3, 20	5, 23, 26	1, 5, 23
19	1, 2, 5	1, 2, 5	1, 2, 5	2, 3, 17	2, 3, 20	5, 23, 26	1, 5, 23
20	1, 2, 5	1, 2, 5	1, 2, 5	2, 3, 17	2, 3, 20	5, 23, 26	1, 5, 23
21	14, 17, 20	14, 17, 23	9, 16, 24	9, 16, 26	9, 16, 26	9, 18, 20	9, 20, 26
22	14, 17, 20	14, 17, 23	9, 16, 24	9, 16, 26	9, 16, 26	9, 18, 20	9, 20, 26
23	14, 17, 20	14, 17, 23	9, 16, 24	9, 16, 26	9, 16, 26	9, 18, 20	9, 20, 26
24	14, 17, 20	14, 17, 23	9, 16, 24	9, 16, 26	9, 16, 26	9, 18, 20	9, 20, 26

Tabela 4: Escalonamento na primeira semana do horizonte de planeamento com procura constante

Facilmente se observa na Tabela 4 que a procura está a ser correspondida no seu valor exato, isto é, para qualquer hora de qualquer dia apenas são escalonados os três enfermeiros necessários.

O intervalo de 13 horas entre turnos está a ser cumprido para todos os enfermeiros, pelo que até é possível detetar algumas regularidades no escalonamento, no sentido em que se identificam vários enfermeiros que realizam sempre o mesmo turno nos cinco dias em que trabalham nesta semana. Este é o caso, por exemplo, para os enfermeiros 4, 5 e 9.

Verifica-se que, entre as horas das refeições (limite identificado com tracejado amarelo na

Tabela 4), há sempre revezamento dos enfermeiros. Assim, nenhum enfermeiro tem intervalo para refeições incluído no respetivo turno de trabalho. Isto significa que os turnos são contínuos e que a situação ideal é a de os enfermeiros fazerem as suas refeições antes do seu turno começar ou após o término do mesmo.

Para além disso, pode-se ver também que, em qualquer hora de qualquer dia, existe sempre, pelo menos, um enfermeiro sénior a supervisionar todos os turnos (identificados a azul na Tabela 4), e que estes estão realmente escalonados ao seu mínimo estando, em grande parte da semana, apenas um enfermeiro sénior a trabalhar, como seria de esperar, pois estes representam um custo superior para o empregador.

Resultados das folgas ($y_{e,d}$)							
$e \setminus d$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	1	0	0
2	0	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0	1	1
4	1	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	0	0	0	0	0
10	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1
14	0	0	1	1	0	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1
16	0	0	0	0	0	1	1
17	0	0	0	0	1	1	0
18	1	1	0	0	0	0	0
19	0	1	1	0	0	0	0
20	0	1	1	0	0	0	0
21	1	1	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	1	1	0
23	0	0	1	1	0	0	0
24	0	0	0	1	1	0	0
25	0	0	1	1	0	0	0
26	0	1	1	0	0	0	0

Tabela 5: Folgas ($y_{e,d}$) na primeira semana do horizonte de planeamento com procura constante

Dos resultados da Tabela 5 observa-se que, todas as folgas (identificadas a verde) dos enfermeiros contratados nesta semana ou que trabalham a tempo integral são consecutivas. Podem também identificar-se os enfermeiros que trabalham a tempo parcial que não foram contratados, pois estes têm a semana inteira de folga. Nesta semana, os enfermeiros 7, 8, 10, 11, 12, 13 e 15, todos eles séniores e a trabalhar a tempo parcial, não foram contratados.

Os resultados apresentados de seguida já contemplam todo o horizonte de planeamento.

Resultados das contratações ($z_{e,w}$)				
$e_p \setminus w$	1	2	3	4
7	0	0	0	1
8	0	0	0	0
9	1	0	0	0
10	0	1	1	0
11	0	0	1	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	1	1	0	0
15	0	0	0	1
16	1	1	1	1
17	1	1	1	1
18	1	1	1	1
19	1	1	1	1
20	1	1	1	1
21	1	1	1	1
22	1	1	1	1
23	1	1	1	1
24	1	1	1	1
25	1	1	1	1
26	1	1	1	1
Total	13	13	13	13

Tabela 6: Contratações ($z_{e,w}$) na primeira semana do horizonte de planeamento com procura constante

Com os resultados da Tabela 6, pode-se corroborar que os enfermeiros 7, 8, 10, 11, 12, 13 e 15 não foram contratados na primeira semana embora, alguns tenham acabado por ser escalonados em outras semanas. Observa-se que a contratação de enfermeiros a tempo parcial é a mesma em todas as semanas, o que pode resultar de uma procura mínima constante. No entanto, poderia ter-se verificado alguma variabilidade devido às restrições do intervalo mínimo entre turnos (7 e 8) que poderiam obrigar à contratação de enfermeiros adicionais para cobrir um ou mais turnos na mudança da semana. Conclui-se, assim, que, para esta procura, é possível distribuir os enfermeiros de forma a contratar apenas 13 todas as semanas.

Detalhes	
Valor da Função Objetivo	26284.78
Tempo de Execução	900.47s
GAP	0.64%

Tabela 7: Detalhes dos resultados do problema com procura constante

Por fim, com este plano de escalonamento, o empregador vai despende €26284.78 em remunerações, valor que é aproximadamente 0.64% superior ao valor da função objetivo da solução ótima obtida através da relaxação linear do problema quando a execução foi terminada. Como já foi referido, o tempo de execução foi limitado a 15 minutos (900 segundos).

2.8.2 Procura Variável

Nesta situação, para definir a procura foram gerados números aleatórios através de uma distribuição de Poisson de média 3 para as horas 21, 22, 23 e 24 e uma distribuição de Poisson de média 2 para as restantes horas. Os resultados do escalonamento estão apresentados na tabela seguinte.

Resultados do Escalonamento							
$h \setminus d$	1	2	3	4	5	6	7
1	6, 19	11	13	5	3, 23	8, 20	3
2	6, 19	11, 17, 19, 25, 26	13, 20	5, 18, 20, 22, 23	3, 23, 26	8, 20	3
3	6, 19	11, 17, 19, 25, 26	13, 20	5, 18, 20, 22, 23	3, 23, 26	8, 20	3
4	6, 19	11, 17, 19, 25, 26	13, 20	5, 18, 20, 22, 23	3, 23, 26	3, 7, 8, 17, 20	3, 22
5	6, 19	11, 17, 19, 25, 26	7, 13, 20	5, 18, 20, 22, 23	3, 18, 23, 26	3, 7, 17	3, 21, 22
6	6	11, 19	7	5, 18, 20	3, 18	3, 7, 17	3, 21, 22
7	6	11, 19	7, 22	5, 11	3, 13, 14, 17, 18, 20	3, 7, 17	1, 3, 7, 16, 17, 21, 22
8	4, 23	4, 6, 19	7, 22	4, 11, 13	13, 14, 17, 18, 20	3	1, 7, 16, 17, 21
9	3, 4, 23	4, 6	4, 22	4, 11, 13	13, 14, 17, 18, 19, 20	3, 21	1, 7, 16, 17, 21, 26
10	3, 4, 23	4, 6	4, 14, 22	4, 11, 13, 14	13, 14, 17, 18, 19, 20	3, 14, 21, 22, 26	1, 7, 16, 17, 26
11	3, 4, 12, 23	4, 6, 8	4, 11, 14	4, 11, 13, 14	5, 14, 17, 19, 22	14, 16, 21, 22, 26	1, 7, 17, 26
12	3, 4, 12	4, 6, 8	4, 11, 14	4, 13, 14	4, 5, 6, 14, 19, 22	14, 16, 21, 22, 26	1, 7, 17, 26
13	5	6	11, 14	13	4, 6, 22	14, 21, 22, 26	1, 7, 17, 26
14	2, 3, 4, 12	3, 4, 8	4, 6	2, 4, 6, 14	2, 5, 16	5, 16	5
15	1, 2, 3, 4, 5, 12	3, 4, 6, 8	4, 6, 11, 14	1, 2, 4, 6, 13, 14	2, 4, 5, 6, 16, 22	5, 16, 26	5, 26
16	1, 2, 3, 5, 8, 12	3	4, 6	1, 2, 6	2, 4, 5, 6, 16	5, 26	5
17	1, 2, 5, 8	1, 2, 3	1, 2, 6, 25	1, 2, 6, 24	2, 4, 5, 6, 11, 12, 16	5, 19	5
18	1, 2, 5, 8, 18	1, 2, 3, 18	1, 2, 6, 25	1, 2, 6, 16, 21, 24, 25	2, 4, 5, 6, 11, 12	5, 19, 24	5
19	1, 2, 5, 7, 8, 18	1, 2, 3, 18	1, 2, 6, 25	1, 2, 6, 16, 21, 24, 25	2, 4, 6, 11, 12	5, 19, 24	5, 20, 23
20	1, 2, 5	1, 3	6	2, 6, 16, 21, 25	2, 11, 25	5, 19, 24	5
21	7, 18	2, 12, 18	1, 2, 8, 16, 21, 24, 25	1, 12, 24	12, 24	13, 23	8, 20, 23
22	1, 7, 18	1, 2, 12, 18	1, 2, 8, 16, 21, 24, 25	1, 12, 16, 21, 24, 25	12, 24, 25	13, 24, 25	8, 20, 23
23	7	1, 2, 12, 18	1, 2, 8, 16, 21, 24, 25	12, 21, 24, 25	12, 24, 25	13, 23, 24	8, 20, 23
24	7	1, 2, 12	1, 2, 8, 16, 21, 24	12, 21, 24, 25	12, 24, 25	13, 23	8

Tabela 8: Escalonamento na primeira semana do horizonte de planeamento com procura variável

Na Tabela 8, os enfermeiros séniores estão identificados a azul e as horas de refeição estão assinaladas a vermelho. Tal como acontece na situação anterior de procura constante, existe, pelo menos, um enfermeiros sénior a supervisionar cada hora de cada dia e o intervalo mínimo de 13 horas entre turnos verifica-se para todos os enfermeiros escalonados.

As folgas dos enfermeiros escalonados são apresentadas na tabela seguinte.

Resultados das folgas ($y_{e,d}$)							
$e \setminus d$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	1	1	0
2	0	0	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1
5	0	1	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	0	1	1	0	0
8	0	0	0	1	1	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1
11	0	0	0	0	0	1	1
12	0	0	0	0	0	1	1
13	1	1	0	0	0	0	0
14	1	1	0	0	0	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	0	0	0	0	0
17	0	0	1	1	0	0	0
18	0	0	0	0	0	1	1
19	0	0	1	1	0	0	0
20	1	1	0	0	0	0	0
21	1	1	0	0	0	0	0
22	1	1	0	0	0	0	0
23	0	1	1	0	0	0	0
24	1	1	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	1	1
26	0	0	1	1	0	0	0

Tabela 9: Folgas ($y_{e,d}$) na primeira semana do horizonte de planeamento com procura variável

Na Tabela 9, observa-se que foram escalonados mais enfermeiros que na situação anterior de procura constante devido a uma maior procura de em certas horas. Conclui-se, pela existência de uma semana inteira de dias de folga, que três enfermeiros, 9, 10 e 15 todos eles sénior, não foram contratados nesta semana. Para os enfermeiros que trabalharam nesta semana, todos eles têm dois dias de folgas consecutivos.

Os enfermeiros a tempo parcial contratados por semana, em todo o horizonte de planeamento, são apresentados na tabela seguinte.

Resultados das contratações ($z_{e,w}$)				
$e_p \setminus w$	1	2	3	4
7	1	1	1	0
8	1	1	1	1
9	0	0	1	0
10	0	1	0	0
11	1	1	0	0
12	1	1	1	1
13	1	0	1	0
14	1	0	0	1
15	0	1	0	1
16	1	1	1	1
17	1	1	1	1
18	1	1	1	1
19	1	1	1	1
20	1	1	1	1
21	1	1	1	1
22	1	1	1	1
23	1	1	1	1
24	1	1	1	1
25	1	1	1	1
26	1	1	1	1
Total	17	17	16	15

Tabela 10: Contratações ($z_{e,w}$) na primeira semana do horizonte de planeamento com procura variável

Com os resultados da Tabela 10, confirma-se que os enfermeiros 9, 10 e 15 não foram contratados na primeira semana embora, todos acabam por ser escalonados em outras semanas. Os enfermeiros 8, 12, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 e 26 foram contratados em todas as semanas do horizonte de planeamento. Nada se pode concluir sobre o total dos enfermeiros contratados por semana pois a procura difere de semana para semana.

Os detalhes do problema estão descrito na tabela seguinte.

Detalhes	
Valor da Função Objetivo	29786.08
Tempo de Execução	900.094s
GAP	4.11%

Tabela 11: Detalhes dos resultados do problema com procura variável

Por fim, com a procura variável considerada, o empregador vai despende €29786.08 em remunerações, valor que é aproximadamente 4.11% superior ao valor da função objetivo da

solução ótima obtida através da relaxação linear do problema quando a execução foi terminada. A GAP é superior ao obtido na situação anterior mas que é justificável pela maior exigência computacional desta situação de procura variável. Como já foi referido, o tempo de execução foi limitado a 15 minutos (900 segundos).

3 Conclusão

Em ambas as situações, procura constante (2.8.1) e procura variável (2.8.2), considerando um horizonte de planeamento de 28 dias e um tempo de execução comparativamente muito curto de 15 minutos, o desempenho do modelo foi mais que satisfatório. Analisando a GAP apresentada nas Tabelas 7 e 11, conclui-se que os valores para a função objetivo atingidos estão muito perto dos valores ótimos para a função objetivo obtidos para a relaxação linear do problema, 0.64% para a situação de procura constante e 4.11% para a situação de procura variável. Numa aplicação real, o facto de o modelo fornecer uma boa aproximação do valor da função objetivo ao valor ótimo da função objetivo da relaxação linear do problema associada a um tempo de execução relativamente curto representa uma grande vantagem para o empregador, pois permite obter resultados para um período longo de escalonamento em relativamente muito pouco tempo, com a garantia de que estes estão muito perto do caso ótimo possível.

No que diz respeito à comparação do modelo apresentado neste trabalho com o modelo alternativo apresentado em [3], foram considerados os mesmos dados para a procura constante e variável e o mesmo tempo de execução de 15 minutos, para ambas as situações. Para a procura constante, em [3] obteve-se um valor para a função objetivo de €2072 com GAP de 0,39% e para a situação de procura variável obteve-se um valor para a função objetivo de €20514 com GAP de 0,26%. No entanto, os valores da função objetivo não podem ser comparados pois, os custos dos turnos foram calculados de forma diferente. Analisando os resultados do escalonamento para a situação de procura constante, os resultados fornecidos pelo modelo deste trabalho (4) mostram que a procura é correspondida no seu valor exato em qualquer altura, isto é, são escalonados apenas três enfermeiros para cada hora de cada dia, enquanto os resultados fornecidos pelo modelo apresentado em [3], apesar da procura constante de três enfermeiros, mostram que são escalonados, em várias horas, mais que três enfermeiros. Dito isto, o modelo deste trabalho aparenta apresentar melhores resultados apesar de convergir mais lentamente para a solução ótima. No entanto, é necessária uma análise mais rigorosa dos modelos para averiguar a sua equivalência.

O modelo apresentado neste trabalho foi desenvolvido e está preparado para tratar dados reais que seriam fornecidos pelo **SNS24** (*call center* português integrado na área da saúde) de forma a avaliar o seu desempenho num caso real. Os dados nunca foram fornecidos, pelo que se lamenta a falta de cooperação por parte do **SNS24**.

Relativamente à implementação do modelo em *Python*, a utilização desta linguagem conjugada ao formato Notebook Jupyter apresenta uma série de vantagens. É possível uma apresentação mais organizada de todos os comandos, a importação e o tratamento dos dados é mais simples, pois estão disponíveis uma série de funcionalidades e softwares adicionais, como

é o caso do *Pandas*, que enriquecem a experiência e permite também uma fácil manipulação e apresentação dos resultados do modelo fornecidos pela API do CPLEX.

Por fim, agradeço ao Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional a oportunidade por me ter sido concedida esta Bolsa de Investigação que me permitiu iniciar o meu trabalho na investigação académica, assim como às professoras orientadoras Cândida Mourão, Margarida Moz e Margarida Pato o apoio na concretização deste projeto.

Referências

- [1] Bolsa de Investigação Científica. Financiada pela FCT através do Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional, CMAFcIO, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- [2] Anabela Pereira. *Um modelo para escalonamento de pessoal - Aplicação a um caso de estudo*. Projeto de Doutoramento em MAEG, ISEG, Universidade de Lisboa, 2013.
- [3] Diogo Jorge dos Santos. *Escalonamento de Pessoal - caso de estudo de um Call Center*. Trabalho realizado no âmbito de uma bolsa de investigação científica financiada pela FCT através do Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional, CMAFcIO, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2020.
- [4] Sindicato dos Enfermeiros Portugueses. Tabela salarial carreira especial enfermagem. https://www.sep.org.pt/files/uploads/2017/06/sep_27032020_TS_CEEenf2020VH_2.pdf. Acedido em 10/07/2020.
- [5] Direção-Geral da Administração e do Emprego Público. Trabalho noturno. https://www.dgaep.gov.pt/stap/infoPage.cfm?objid=c8efd505-bda6-4144-b900-f0e9c0202f06&KeepThis=true&TB_iframe=true&height=580&width=520. Acedido em 10/07/2020.