Equipo:　　　　　　　　　　　　Tarea 1　　　　　　　Estadística Multivariada
André Damián Chávez Castrejón
Dulce Marián Medina Rodríguez
Valeria Zamora Rodríguez

Ejercicio 1. Demuestra que el segundo problema de optimización para $\text{Var}(\xi_2)$ tiene solución cuando el multplicador de lagrange λ_2 es eigenvalor de la matriz de covarianza de $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

Segundo problema de optimización

$$\text{Max} \quad \text{Var}(\xi_2) = b_2 \Sigma_{xx} b_2^{tr}$$

$$\text{s.a.} \quad b_2 \cdot b_2^{tr} = 1$$

$$b_1 \cdot b_2^{tr} = 0$$

$b_2 = (b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n})$

Matriz de covarianza

X tiene 2 componentes princip.

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \text{Var}(\lambda_1) & \text{Cov}(\lambda_1, \lambda_2) \\ \text{Cov}(\lambda_2, \lambda_1) & \text{Var}(\lambda_2) \end{bmatrix}$$

Dado que $b_1 \cdot b_2^{tr} = 0 \rightarrow$ covarianza $= 0$

$$S = \begin{bmatrix} \text{Var}(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \text{Var}(\lambda_2) \end{bmatrix}$$

Función Lagrangiana

$$L(b_2, \lambda_2) = b_2^{tr} \Sigma_{xx} b_2 - \lambda_2 (b_2^{tr} \cdot b_2 - 1)$$

$$\frac{\partial L(b_2, \lambda_2)}{\partial b_2} = 2\Sigma_{xx} b_2 - 2\lambda_2 b_2 = 0$$

$$\Sigma_{xx} b_2 = \lambda_2 b_2$$

$\therefore b_2$ es eigenvector de S y λ_2 es eigenvalor

André Damián Chávez Castrejón
Dulce Marián Medina Rodríguez
Valeria Zamora Rodríguez

7.-

(1) Es sencillo ver a través de los ángulos que las coordenadas están dadas por

$$L_1 = \begin{cases} \cos(\pi/3) = 1/2 \\ \operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} \cos(8\pi/6) = -1/2 \\ \operatorname{sen}(8\pi/6) = -\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

$$L_3 = \begin{cases} \cos(3\pi/2) = 0 \\ \operatorname{sen}(3\pi/2) = -1 \end{cases}$$

Así,

$$L_1 = (1/2, \sqrt{3}/2) \qquad\qquad R_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$$
$$L_2 = (-1/2\rho, -\sqrt{3}/2\rho) \qquad R_2 = (-\rho, 0)$$
$$L_3 = (0, -\rho) \qquad\qquad R_3 = (-\sqrt{3}/2\rho, -1/2\rho)$$
$$L_4 = (-\rho, 0) \qquad\qquad R_4 = (0, -\rho)$$

Como la correlación del primer componente debe ser mayor con el primer elemento, la imagen de la derecha es la correcta.