Aulas 11 e 12

- Representação de números em vírgula flutuante
- A norma IEEE 754
 - Operações aritméticas em vírgula flutuante
 - Precisão simples e precisão dupla
 - Arredondamentos
- Unidade de vírgula flutuante do MIPS
 - Instruções da FPU do MIPS

Bernardo Cunha, José Luís Azevedo, Arnaldo Oliveira



Representação de quantidades fracionárias

- A codificação de quantidades numéricas com que trabalhamos até agora esteve sempre associada à representação de números inteiros
- A representação posicional de inteiros pode também ser usada para representar números racionais considerando-se potências negativas da base
- Por exemplo a representação da quantidade 5.75 em base 2 com 4 bits para a parte inteira e 4 bits para a parte fracionária poderia ser:
 23 22 21 20 2-1 2-2 2-3 2-4



 Esta representação designa-se por "representação em vírgula fixa"



Representação de quantidades fracionárias

- A representação de quantidades fracionárias em vírgula fixa coloca de imediato a questão da divisão do espaço de armazenamento para as partes inteira e fracionária
- O número de dígitos da parte inteira determina a gama de valores representáveis
- O número de dígitos da parte fracionária, determina a precisão da representação (no exemplo anterior, a menor quantidade representável é 2⁻⁴ = 0,0625)
- No caso geral, quantos dígitos devem então ser reservados para a parte inteira e quantos para a parte fracionária, sabendo nós que o espaço de armazenamento é limitado?



Representação de números em Vírgula Flutuante

• **Exemplo**: **-23.45129876** (vírgula fixa). A mesma quantidade pode também ser representada recorrendo à notação científica:

- São representações do mesmo valor em que a posição da vírgula tem de ser ponderada, na interpretação numérica da quantidade, pelo valor do expoente de base 10
- Esta técnica, em que a vírgula pode ser deslocada sem alterar o valor representado, designa-se também por representação em vírgula flutuante (VF)
- A representação em VF tem a vantagem de não desperdiçar espaço de armazenamento com os zeros à esquerda da quantidade representada
- No primeiro exemplo, o número de dígitos diferentes de zero à esquerda da vírgula é igual a um: diz-se que a representação está normalizada



Representação de números em Vírgula Flutuante

 A representação de quantidades em vírgula flutuante, em sistemas computacionais digitais, faz-se recorrendo à estratégia descrita nos slides anteriores, mas usando agora a base dois:

$$N = (+/-) 1.f \times 2^{Exp}$$

(representação **normalizada** de uma quantidade binária em vírgula flutuante)

• Em que:

f – parte fracionária representada por n bits

1.f – mantissa (também designada por significando)

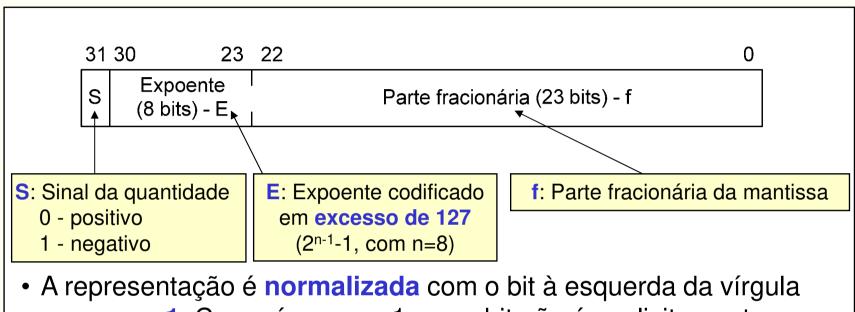
Exp — expoente da potência de base 2 representado por *m* bits



Representação de números em Vírgula Flutuante

- O problema da divisão do espaço de armazenamento coloca-se também neste caso, mas agora na determinação do número de bits ocupados pela parte fracionária e pelo expoente
- Essa divisão é um compromisso entre gama de representação e precisão:
 - Aumento do número de bits da parte fracionária ⇒ maior precisão na representação
 - Aumento do número de bits do expoente ⇒ maior gama de representação
- Um bom design implica compromissos adequados!





- A representação é normalizada com o bit à esquerda da vírgula sempre a 1. Como é sempre 1, esse bit não é explicitamente representado (hidden bit)
- A parte fracionária (23 bits) pode então tomar valores compreendidos entre:
- E os limites de representação da mantissa (1.f) são:





• O expoente é codificado em excesso de 127 (2ⁿ⁻¹-1, n=8 bits). Ou seja, é somado ao expoente verdadeiro (Exp) o valor 127 para obter o código de representação

(i.e. E = Exp + 127, em que E é o expoente codificado)

$$N = (-1)^S 1.f \times 2^{Exp} = (-1)^S 1.f \times 2^{E-127}$$

- O código 127 representa, assim, o expoente zero; códigos maiores do que 127 representam expoentes positivos e códigos menores que 127 representam expoentes negativos
- Os códigos 0 e 255 são reservados. O expoente pode, desta forma, tomar valores entre -126 e +127 [códigos 1 a 254].





Expoente =
$$130 - offset = 130 - 127 = 3 \Leftrightarrow (Exp = E - offset)$$

Mantissa =
$$(1 + parte fracionária) = 1 + .1011 = 1.1011$$

A quantidade representada (R) se $R = +1.1011 \times 2^3$

$$R = +1.1011 \times 2^{3} = (1 + 1 \times 2^{-1} + (R = 1101.1 \text{ (vírgula fixa)})$$

= 1.6875 × 8 = 13.5 $R = 13.5_{10}$ $R = 13.5_{10}$



• Exemplo: codificar no formato vírgula flutuante IEEE 754 precisão simples, o valor -12.59375₁₀

Parte inteira: $12_{10} = 1100_{2}$

Parte fracionária: $0.59375_{10} = 0.10011_2$

 $12.59375_{10} = 1100.10011_2 \times 2^0$

Normalização: $1100.10011_2 \times 2^0 = 1.10010011_2 \times 2^3$

Expoente codificado: $+3 + 127 = 130_{10} = 10000010_2$

1 10000010 10010011000000000000000

0xC1498000

		0.59575
		× 2
MSb		1 .18750
		0.18750
		× 2
		0.37500
		0.37500
		× 2
		0.75000
		0.75000
		× 2
		1 .50000
•		0.50000
		× 2
LS	b	1 .00000

0 59375

• A gama de representação suportada por este formato será portanto:

$$\pm [1.175494 \times 10^{-38}, 3.402824 \times 10^{+38}]$$

- Qual o número de dígitos à direita da vírgula na representação em decimal (casas decimais)?
- Partindo de uma representação com "n" dígitos fracionários na base "r", o número máximo de dígitos na base "s" que garante que a mudança de base não acrescenta precisão à representação original é:

 Assim, de modo a não exceder a precisão da representação original, a representação em decimal deve ter, no máximo, 6 casas decimais:

$$m = \left| n \frac{\log r}{\log s} \right| = \left| 23 \frac{\log 2}{\log 10} \right| = 6$$

• Ou, sabendo que o nº de bits por casa decimal = $\log_2(10) \cong 3.3$), o número de casas decimais é $\lfloor 23 / 3.3 \rfloor = 6$ casas decimais





- Nas operações com quantidades representadas neste formato podem ocorrer situações de *overflow* e de *underflow*:
 - Overflow: quando o expoente do resultado n\(\tilde{a}\) o cabe no espa\(\tilde{c}\) o que lhe est\(\tilde{a}\) destinado \(\tilde{E} > \frac{254}{}\)

 Underflow: caso em que o expoente é tão pequeno que também não é representável → E < 1)



Norma IEEE 754 – Adição / Subtração

Exemplo: $N = 1.1101 \times 2^0 + 1.0010 \times 2^{-2}$

1º Passo: Igualar os expoentes ao maior dos expoentes

$$a = 1.1101 \times 2^0$$
 $b = 0.010010 \times 2^0$

2º Passo: Somar / subtrair as mantissas mantendo os expoentes

$$N = 1.1101 \times 2^0 + 0.010010 \times 2^0 = 10.000110 \times 2^0$$

3º Passo: Normalizar o resultado

$$N = 10.000110 \times 2^0 = 1.0000110 \times 2^1$$

4º Passo: Arredondar o resultado e renormalizar (se necessário)

$$N = 1.0000110 \times 2^1 = 1.0001 \times 2^1$$

Exemplo com 4 bits fracionários

Norma IEEE 754 – Multiplicação

Exemplo: $N = (1.1100 \times 2^{0}) \times (1.1001 \times 2^{-2})$

1º Passo: Somar os expoentes

Exp. Resultado = 0 + (-2) = -2

2º Passo: Multiplicar as mantissas

 $Mr = 1.1100 \times 1.1001 = 10.101111$

3º Passo: Normalizar o resultado

$$N = 10.101111 \times 2^{-2} = 1.0101111 \times 2^{-1}$$

4º Passo: Arredondar o resultado e renormalizar (se necessário)

$$N = 1.01011111 \times 2^{-1} = 1.0110 \times 2^{-1}$$

Exemplo com 4 bits fracionários

Norma IEEE 754 – Divisão

Exemplo: $N = (1.0010 \times 2^{0}) / (1.1000 \times 2^{-2})$

1º Passo: Subtrair os expoentes

Exp. Resultado = 0 - (-2) = 2

2º Passo: Dividir as mantissas

Mr = 1.0010 / 1.1000 = 0.11

3º Passo: Normalizar o resultado

$$N = 0.11 \times 2^2 = 1.1 \times 2^1$$

4º Passo: Arredondar o resultado

$$N = 1.1 \times 2^1 = 1.1000 \times 2^1$$

Exemplo com 4 bits fracionários

Norma IEEE 754 (precisão dupla)

 A norma IEEE 754 suporta a representação de quantidades em precisão simples (32 bits) e em precisão dupla (64 bits)

31	30 23	22	0
s	Expoente (8 bits) - E	Parte fracionária (23 k	pits) - f Precisão Simples
63	62 52	51	0
s	Expoente (11 bits) - E	Parte fracionária (52 k	oits) - f Dupla
N:	= (-1) ^S 1.f×	(Precisão simp	les - tipo float)
N:	= (-1) ^S 1.f×	(Precisão dupla	a - tipo double)

Norma IEEE 754 (precisão dupla)



$$N = (-1)^S 1.f \times 2^{Exp} = (-1)^S 1.f \times 2^{E-1023}$$

 A gama de representação suportada pelo formato de precisão dupla será:

 De modo a não exceder a precisão da representação original, a representação em decimal deve ter, no máximo, ∠52 / log₂(10) = 15 casas decimais



Norma IEEE 754 – casos particulares

- A norma IEEE 754 suporta ainda a representação de alguns casos particulares:
 - A quantidade zero; essa quantidade não seria representável de acordo com o formato descrito até aqui
 - +/-infinito. Exemplos: 1.0 / 0.0, -1.0 / 0.0
 - Resultados não numéricos (NaN Not a Number). Exemplo:
 0.0 / 0.0
 - Por forma a aumentar a resolução (menor quantidade representável) é ainda possível usar um formato de mantissa desnormalizada no qual o bit à esquerda do ponto binário é zero



Norma IEEE 754 – casos particulares

Precisão Simples		Precisão Dupla		Representa
Expoente	Parte Frac.	Expoente	Parte Frac.	
0	0	0	0	0
0	≠ 0	0	≠0	Quantidade desnormalizada
1 a 254	qualquer	1 a 2046	qualquer	Nº em vírgula flutuante normalizado
255	0	2047	0	Infinito
255	≠0	2047	≠ 0	NaN (Not a Number)



Norma IEEE 754 – representação desnormalizada

- Permite a representação de quantidades cada vez mais pequenas (*underflow* gradual)
- A gama de representação suportada pelo formato de mantissa desnormalizada, em precisão simples, é:

$$\pm [1 \times 2^{-23} \times 2^{-126}, 1.0 \times 2^{-126}]$$

$$\pm [1.401299 \times 10^{-45}, 1.175494 \times 10^{-38}]$$





- As operações aritméticas são efetuadas com um número de bits da parte fracionária superior ao disponível no espaço de armazenamento
- Desta forma, na conclusão de qualquer operação aritmética é necessário proceder ao arredondamento do resultado por forma a assegurar a sua adequação ao espaço que lhe está destinado
- As técnicas mais comuns no processo de arredondamento do resultado (o qual introduz um erro) são:
 - Truncatura
 - Arredondamento simples
 - Arredondamento para o par (ímpar) mais próximo



• Truncatura (exemplo com 2 dígitos na parte fracionária: d=2)

Número	Trunc(x)	Erro
x.00	X	0
x.01	Х	-1/4
x.10	Х	-1/2
x.11	Х	-3/4

Erro médio =
$$(0 - 1/4 - 1/2 - 3/4) / 4$$

= $-3/8$

 Mantém-se a parte inteira, desprezando qualquer informação que exista à direita do ponto binário

 Arredondamento simples (exemplo com 2 dígitos na parte fracionária: d=2)

Número	Arred(x)	Erro
x.00	X	0
x.01	X	-1/4
x.10	x + 1	+1/2
x.11	x + 1	+1/4

Erro médio =
$$(0 - 1/4 + 1/2 + 1/4) / 4$$

= +1/8

• Mantém-se a parte inteira quando o 1º dígito à direita do ponto binário for 0 ou soma-se "1" à parte inteira quando aquele for "1":

$$arred(x) = trunc(x + 0.5)$$

• O erro médio é mais próximo de zero do que no caso da truncatura, mas ligeiramente polarizado do lado positivo

 Arredondamento para o par mais próximo (exemplo com 2 dígitos na parte fracionária: d=2)

Número	Arred(x)	Erro	Número	Arred(x)	Erro
x0.00	x0	0	x1.00	x1	0
x0.01	x0	-1/4	x1.01	x1	-1/4
x0.10	х0	-1/2	x1.10	x1 + 1	+1/2
x0.11	X0 + 1	+1/4	x1.11	x1 + 1	+1/4

- Semelhante à técnica de arredondamento, mas decidindo, para o caso "xx.10", em função do primeiro dígito à esquerda do ponto binário
- Erro médio = (0 1/4 1/2 + 1/4) / 4 + (0 1/4 + 1/2 + 1/4) / 4 = -1/8 + 1/8 = 0



O que fica à direita de b_{23}	Exemplo	Resultado
< 0.5	1.b ₁ b ₂ b ₂₂ b ₂₃ 0111	Round down : bits à direita de b_{23} são descartados
> 0.5	1.b ₁ b ₂ b ₂₂ b ₂₃ 1001	Round up : soma-se 1 a b_{23} (propagando o <i>carry</i>)
= 0.5	1.b ₁ b ₂ b ₂₂ 1 1000	Round up : soma-se 1 a b_{23} (propagando o <i>carry</i>) (*)
= 0.5	1.b ₁ b ₂ B ₂₂ 0 1000	Round down : bits à direita de b_{23} são descartados (*)
= 0.5	1.b ₁ b ₂ B ₂₂ 1 1000	Round down : bits à direita de b_{23} são descartados (**)
= 0.5	1.b ₁ b ₂ b ₂₂ 0 1000	Round up : soma-se 1 a b_{23} (propagando o carry) (**)

- (*) Arredondamento para o par mais próximo.
- (**) Arredondamento para o **impar mais próximo**.



Norma IEEE 754 – arredondamentos

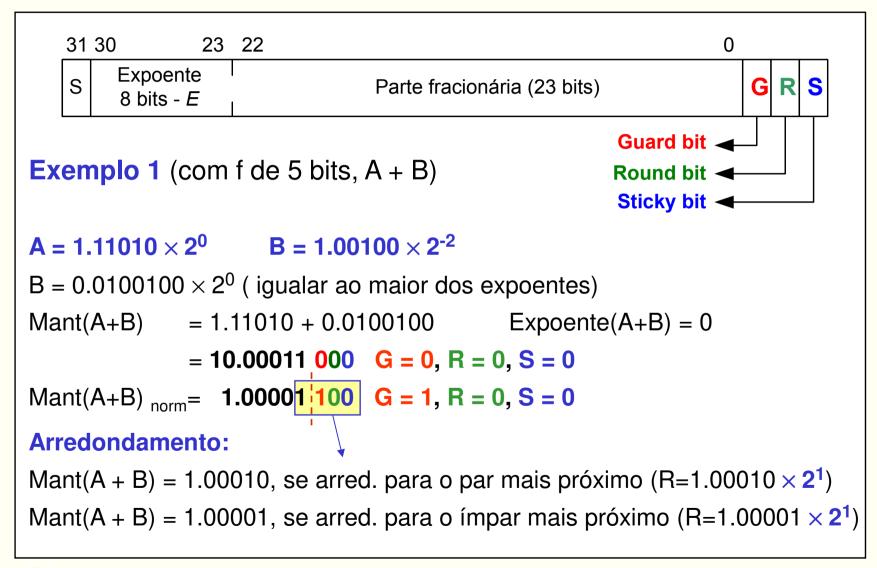
• Os valores resultantes de cada fase intermédia da execução de uma operação aritmética são armazenados com três bits adicionais, à direita do bit menos significativo da mantissa (i.e., para o caso de precisão simples, com pesos 2⁻²⁴, 2⁻²⁵ e 2⁻²⁶)

?.??????????????? GRS (f c/ 26 bits)

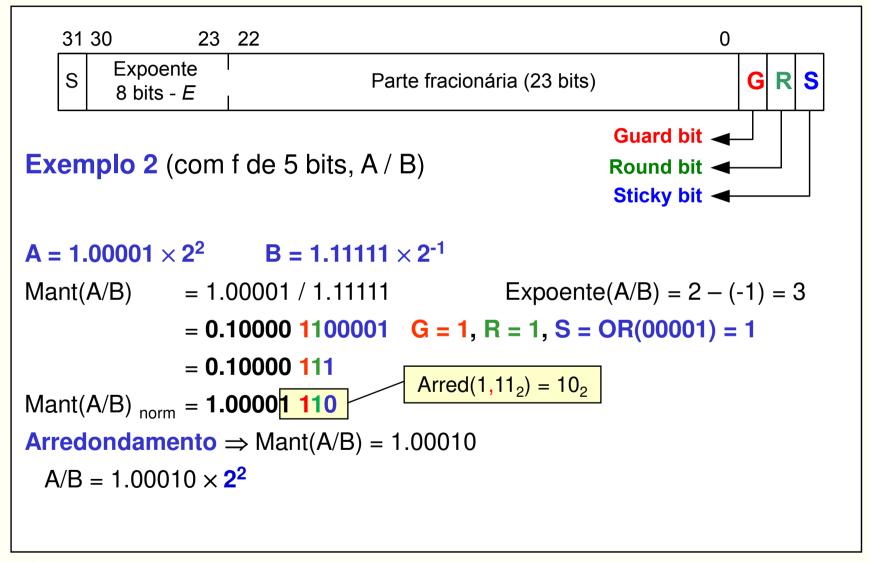
- Objetivos: 1) minimizar o erro introduzido pelo processo de arredondamento e 2) ter bits suplementares para a pósnormalização
- G Guard Bit
- R Round bit
- S Sticky bit Bit que resulta da soma lógica de todos os bits à direita do bit R (i.e., se houver à direita de R pelo menos 1 bit a '1', então S='1')



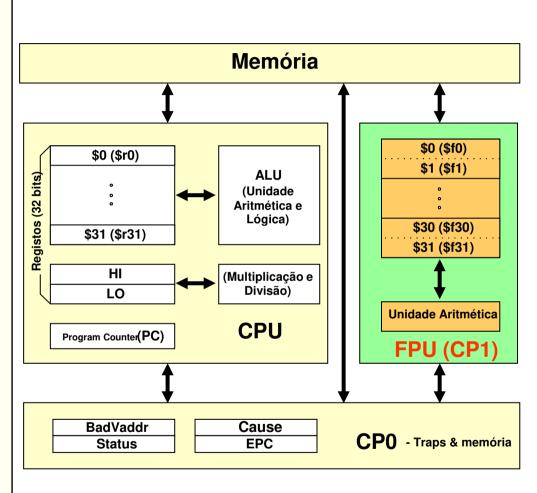
Norma IEEE 754 – arredondamentos



Norma IEEE 754 – arredondamentos



Cálculo em Vírgula Flutuante no MIPS



- O MIPS inclui um coprocessador aritmético (Coprocessador 1) capaz de efetuar operações aritméticas em vírgula flutuante, usando a norma IEEE 754
- Esse coprocessador tem o seu próprio espaço de armazenamento composto por um conjunto de 32 registos de 32 bits cada, e o seu próprio conjunto de instruções (ISA)

Vírgula Flutuante no MIPS – registos

- Os registos do coprocessador aritmético são designados, no Assembly do MIPS, pelas letras \$fn, em que o indíce n toma valores entre 0 e 31
- Cada par de registos consecutivos [\$fn,\$fn+1] (com n par) pode funcionar como um registo de 64 bits para armazenar valores em precisão dupla.
- Em *Assembly* a referência ao par de registos faz-se indicando como operando o registo par
- Apenas os registos de índice par podem ser usados no contexto das instruções



Vírgula Flutuante no MIPS – instruções aritméticas

```
# Absolute Value
abs.p
          FPdst, FPsrc
         FPdst, FPsrc
                                     # Negate
neg.p
                                     # Divide
div.p
         FPdst, FPsrc1, FPsrc2
mul.p
                                     # Multiply
         FPdst, FPsrc1, FPsrc2
                                     # Addition
add.p
         FPdst, FPsrc1, FPsrc2
sub.p
          FPdst, FPsrc1, FPsrc2
                                     # Subtract
               O sufixo .p representa a precisão com que é
                 efetuada a operação (simples ou dupla).
                Deverá, na instrução, ser substituído pelas
                    letras .s ou .d respetivamente.
```



Vírgula Flutuante no MIPS – conversão entre tipos

```
cvt.d.s FPdst,FPsrc
cvt.d.w FPdst,FPsrc
cvt.s.d FPdst,FPsrc
cvt.s.w FPdst, FPsrc
cvt.w.d FPdst,FPsrc
cvt.w.s FPdst, FPsrc
         Formato original
 Formato do
  resultado
```

```
# Convert Single to Double
# Convert Integer to Double
# Convert Double to Single
# Convert Integer to Single
# Convert Double to Integer
# Convert Single to Integer
```

As conversões entre tipos de representação são efetuadas pela FPU pelo que apenas podem ter como operandos/destinos registos da FPU

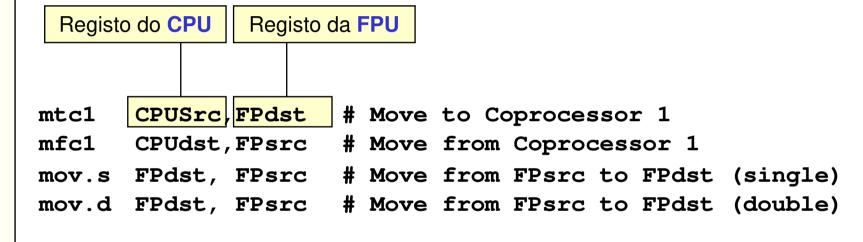
Conversão entre tipos – exemplos

```
= -1.625 \times 2^2 = -6.5
cvt.d.s $f6,$f0
   Exp = (129-127) + 1023 = 1025 = 10000000001
   $f6=0x00000000 $f7=1 1000000001 1010000...0
   $f6=0x00000000 $f7=0xC01A0000
cvt.w.s $f8,$f0
   Exp = (129-127) = 2
   Val = -1.625 \times 2^2 = -6.5, (int)(-6.5) = -6
   $f8=0xFFFFFFA
```



Vírgula Flutuante no MIPS – instruções de transferência

 Transferência de informação entre registos do CPU e da FPU, e entre registos da FPU



Estas instruções copiam o conteúdo integral do registo fonte para o registo destino.

Não efetuam qualquer tipo de conversão entre tipos de informação.



Vírgula Flutuante no MIPS – instruções de transferência

• Transferência de informação entre registos da FPU e a memória

```
Registo da FPU
              Endereço de memória
lwc1
      FPdst, offset (CPUreg) # Load single from memory
      FPsrc, offset (CPUreq) # Store single into memory
swc1
ldc1 FPdst, offset(CPUreq) # Load double from memory
sdc1 FPsrc, offset(CPUreq) # Store double into memory
Instruções virtuais (apenas muda a mnemónica):
      FPdst, offset (CPUreg) # Load single from memory
1.s
s.s FPsrc, offset (CPUreg) # Store single into memory
1.d FPdst, offset (CPUreq) # Load double from memory
s.d FPsrc, offset (CPUreq) # Store double into memory
```



Vírgula Flutuante no MIPS – instruções de decisão

- A tomada de decisões envolvendo quantidades em vírgula flutuante realiza-se de forma distinta da utilizada para o mesmo tipo de operação envolvendo quantidades inteiras
- Para quantidades em vírgula flutuante são necessárias duas instruções em sequência: uma comparação das duas quantidades, seguida da decisão (que usa a informação produzida pela comparação):
 - A instrução de comparação coloca a True ou False uma flag (1 bit), dependendo de a condição em comparação ser verdadeira ou falsa, respetivamente
 - Em função do estado dessa flag a instrução de decisão (instrução de salto) pode alterar a sequência de execução



Cálculo em Vírgula Flutuante no MIPS

Instruções de comparação:

```
c.x.s FPUreg1, FPUreg2 # compare single
c.x.d FPUreg1, FPUreg2 # compare double
```

Em que x pode ser uma das seguintes condições:

```
EQ - equal
```

LT - less than

LE - less or equal

Instruções de salto:

```
bclt # branch if true
bc1f # branch if false
```



Vírgula Flutuante no MIPS – instruções de decisão

```
float a, b;
if(a > b)
 a = a + b;
else
  a = a - b;
```

```
# \$f0 \leftarrow a
# $f2 ← b
if: c.le.s $f0, $f2 # if(a > b)
     bclt else # {
add.s $f0, $f0, $f2 # a = a + b;
    bc1t else
                      # }
     j endif
                          # else
else: sub.s $f0, $f0, $f2 # a = a - b;
endif:...
```

Convenções quanto à utilização de registos

- Registos para passar parâmetros para funções:
 - \$f12 (\$f13), \$f14 (\$f15)
- Registos para devolução de resultados das funções:
 - \$f0 (\$f1), \$f2 (\$f3)
- Registos para caller saved não preservados pelas funções:
 - \$f4 (\$f5) a \$f18 (\$f19)
- Registos para callee saved preservados pelas funções:
 - \$f20 (\$f21) a \$f30 (\$f31)



Diretivas do Assembler em vírgula flutuante

.data

label1: .float f1.s1, f2.s2, ...

label2: .double d1.f1, d2.f2, ...

Nota: "label2" tem de ser um endereço múltiplo de 8

.float -> aloca espaço no segmento de dados e inicializa esse espaço com a lista de valores float (precisão simples) indicado

.double -> aloca espaço no segmento de dados e inicializa esse espaço com a lista de valores double (precisão dupla) indicado



Cálculo em Vírgula Flutuante no MIPS – Exemplo

```
double average(double *, int);
void main(void)
  static double array[SIZE];
  double avg;
  avg = average( array, SIZE );
  double average(double *v, int N)
  double av = 0.0;
  int i;
  for(i = 0; i < N; i++)
    av += v[i];
  return av / (double) N;
```

Tradução C / Assembly

```
void main(void)
                     double average(double *, int)
  static double array[SIZE];
  double avg;
  avg = average( array, SIZE );
```

```
data
                    # n = 8 * SIZE
array: .space n
     .text
     .globl main
main:
                      # void main(void) {
     la $a0, array
     li $a1, SIZE
     jal average
     mov.d $f12, $f0
                          avg = average(array, SIZE)
     li $v0, 3
     syscall
                          print_double(avg)
     jr $ra
                  # }
```

Tradução C / Assembly

```
double average(double *v, int N)
  double av = 0.0;
  int i;
  for(i = 0; i < N; i++)
   av += v[i];
  return av / (double) N;
# $f0 \leftarrow av
cvt.d.w $f0, $f0  # av = 0.0
li $t0, 0 # i = 0
for: bge    $t0, $a1, endf # while(i < N) {
    sll    $t1, $t0, 3 #</pre>
     addu $t1, $t1, $a0 # $t1 = &v[i]
     1.d $f4, 0($t1) # $f0 = v[i]
     add.d $f0, $f0, $f4 # av += v[i]
     addi $t0, $t0, 1 # i++
     j for
cvt.d.w $f4, $f4 # $f4 = (double)N
     div.d $f0, $f0, $f4
            $ra
     jr
```