

# Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática

2019-2020

# Probabilidade

- Qual a hipótese de chover amanhã?
- Qual a possibilidade de eu chegar a horas à aula ?
- Qual a probabilidade de eu ganhar o Euromilhões (ou um de vocês) ?
- São questões que colocamos frequentemente...
- e estão relacionadas com o **incerto / não determinístico**

# Aleatório

- Em termos qualitativos, “qualquer coisa” que não seja predizível com certeza absoluta
- Acontecimento (evento) cujo resultado não possa ser determinado com certeza absoluta.
  - Caso contrário é determinístico
- adj. Que repousa sobre um acontecimento **incerto**, fortuito: contrato aleatório.  
Diz-se de uma grandeza que pode tomar certo número de valores, a cada um dos quais está ligada uma probabilidade.
  - De: [dicionário online de português](#)
- <http://www.priberam.pt/dlpo/aleat%C3%B3rio>

# Então qual o interesse ?

- Qual o interesse em estudar algo que não se pode prever ?
- Na maioria das aplicações **existe algum tipo de regularidade** que se manifesta se o número de observações / experiências for elevado

# Problema Exemplo 1

- Qual a probabilidade de acertar num PIN/**password** de 4 dígitos escolhendo um PIN completamente ao acaso?

E de 20 dígitos ?

# Problema Exemplo 2

- Qual a probabilidade de 80% ou mais dos alunos de MPEI deste ano letivo que não reprovem por faltas ter sucesso na UC?
- **O que precisamos saber**
  - Quantos alunos considerar?
  - Qual a probabilidade de cada um passar ?
    - Talvez simplificar ?
  - O que é isso de probabilidade ?

# Probabilidade

“Medida do grau de certeza associado a um resultado proveniente de um fenómeno de acaso”

- Palavra usada pela primeira vez por Bernoulli (1654-1705)

# Recordar ...

- **Experiência aleatória**
  - Procedimento que deve produzir um resultado
  - Mas mesmo que seja repetido nas mesmas condições não garante que o resultado seja idêntico
  - Exemplo:
    - Escolher uma letra do alfabeto
- Experiência aleatória é especificada por
  - Espaço de amostragem
  - Conjunto de eventos
  - Lei de probabilidade



# Espaço de amostragem

- Conjunto (S) de **todos os resultados possíveis** de uma experiência aleatória
  - Em geral representado por S (de Sample Space)
- Resultados têm de ser **mutuamente exclusivos e não divisíveis**
- **discreto** se for contável
  - i.e. se contiver um número finito de elementos ou se contiver um número infinito em que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca com o conjunto dos inteiros
- **contínuo** se não for contável
- Elementos de S são designados por resultados

# TPC

- Qual o espaço de amostragem dos 3 problemas exemplo ?

# Acontecimentos / eventos

- Os resultados das experiências não constituem necessariamente os únicos itens de interesse nos experimentos
  - Exemplo:
    - No caso da contagem de mensagens de email podemos estar interessados no facto de o número total exceder um determinado limiar ( $n^o > L$ )
- **Acontecimento (evento)**  $A$  é um subconjunto de  $S$ 
  - $S$  é obviamente um subconjunto de si próprio e constitui o evento certo
  - O conjunto vazio,  $\phi$ , também é subconjunto, o evento impossível

# Lei de probabilidade

- **Atribui probabilidade aos vários eventos**
- **Probabilidade**: número associado a um evento que indica a “verosimilhança” de esse evento **ocorrer** quando se efectua o experimento
  - valor entre 0 e 1
    - 1 para acontecimento certo
    - 0 para acontecimento impossível

# Cálculo de probabilidades

# Como é que se definem/obtêm as probabilidades associadas a eventos ?

- Através de **medição**
- Através da construção de **modelos** probabilísticos
- Probabilidades **teóricas**
- Probabilidades **empíricas**
- Probabilidades subjectivas
  - Exemplo:
    - Um Médico diz que tem 95 % de certeza de que determinada pessoa tem uma determinada doença
    - Uma casa de apostas estimou em 1/5 a probabilidade de Portugal ser campeão Europeu em 2016
      - E fomos Campeões 😊
  - Não nos interessam nesta UC

# Diferentes abordagens

- Teoria **clássica** (de Laplace)
  - Probabilidades teóricas
- **Frequencista**
  - Probabilidades empíricas
- Teoria **matemática**

# Teoria Clássica



# Noção clássica

Simon de Laplace (1749-1827)

- *“Pour étudier un phénomène, il faut réduire tous les événements du même type à un certain nombre de cas également possibles, et alors la probabilité d’un événement donné est une fraction, dont le numérateur représente le nombre de cas favorables à l’événement e dont le dénominateur représente par contre le nombre des cas possibles”*
  - pg 17 livro “O Acaso”
- Primeiro reduzir o fenómeno a um conjunto de resultados elementares, **“casos”, igualmente prováveis**

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

# Exemplo

- **Lançamento de 1 DADO**
  - Honesto
    - $\Rightarrow$  qualquer face igualmente provável
- Probabilidade de obter certa face, ex: a 5 ?
- 6 resultados ou eventos elementares
  - Representáveis pelo conjunto  $\{1,2,3,4,5,6\}$
- Ao evento “saída da face 5” apenas corresponde um caso favorável
  - $\rightarrow P(\text{“face 5”})=1/6$

# Variante do problema

- E se 2 faces tivessem o 5 marcado ?
- Espaço de amostragem ?
  - $S=\{1,2,3,4,5\}$  ?  $\Rightarrow$  casos possíveis =5
  - $S=\{1,2,3,4,\mathbf{5},\mathbf{5}\}$
- $P(\text{"sair 5"})=2/6$

# Regras básicas (**OU**)

- $P(\text{"sair face maior que 4"}) ?$   
 $= P(\text{"sair face 5 ou face 6"}) = P(\{5,6\}) = 2/6$   
 $= P(\{5\}) + P(\{6\})$
- $P(\text{"face par"}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 1/2$
- $P(\text{"qualquer face"}) = 6 \times 1/6 = 1$

$$\dots \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sempre ???

# Regras básicas

- $P(\text{"face menor ou igual a 4"})$   
 $= 1 - P(\text{"face maior que 4"})$   
 $= 1 - 2/6 = 4/6$

## Regra do **complemento**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

# Regras básicas (E)

- $P(\text{"face par E face menor ou igual a 4"}) =$   
 $= P(\text{"face par"}) \times P(\text{"face menor ou igual a 4"})$   
 $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

De facto existem 2 possibilidades em 6,  $\{2,4\}$

$$\dots P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Sempre? ....

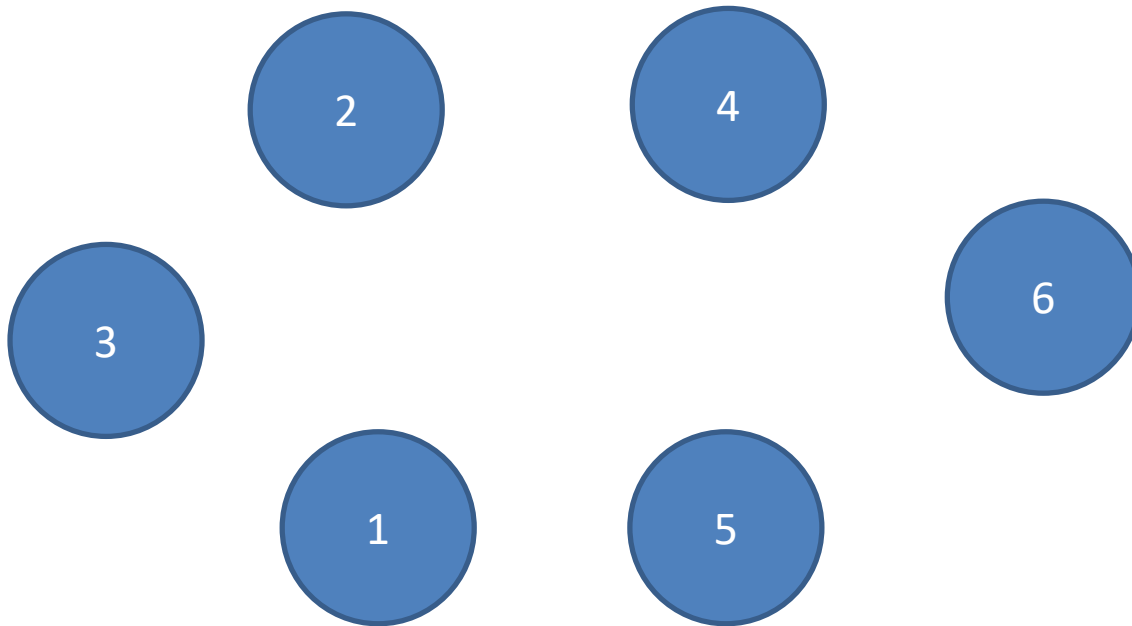
(só se os acontecimentos forem independentes)

# Aplicação das regras (OU novamente)

- $P(\text{"face par OU face menor ou igual a 4"}) = ?$
- Se fizermos  $P(\text{"face par"}) + P(\text{"face menos ou igual a 4"})$  dá  $7/6 > 1$  !!
- Qual o erro ?

# Analisemos

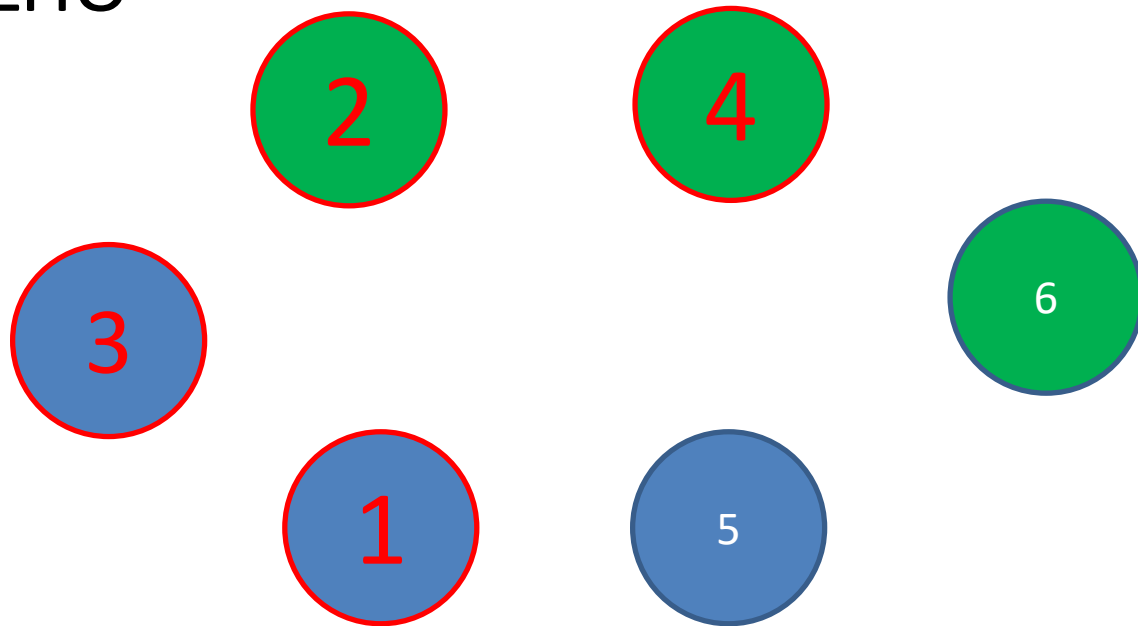
S





# Eventos

- A=“face par” VERDE
- B=“face menor ou igual a 4” limite e texto a VERMELHO



...

Temos 3 com fundo verde  $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

Temos 4 com vermelho  $\Rightarrow P(B) = \frac{2}{3}$

... mas temos 2 casos com verde e vermelho

– No mínimo perigoso 😊

- Estávamos a contar 2 vezes a intersecção

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

# Testar as regras num problema

- Considere uma **família com 2 filhos** e que a probabilidade de nascer rapaz é igual à de nascer uma rapariga.
- Designando o nascimento de um filho por M e uma filha por F, qual a probabilidade de MF ?
- Probabilidade de pelo menos 1 rapaz numa família com 2 filhos ?

# Resolução

- Pelo menos 1 rapaz  $\Rightarrow$  MF ou FM ou MM
- MF é a intersecção (“e”) de M no primeiro e F no segundo  $= \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$
- Similar para MM e FM
- $P(MF) + P(MM) + P(FM) = \frac{3}{4}$ 
  - Devido à união (“ou”)

# Problema do Cavaleiro de Méré

- $P(\text{"sair pelo menos um seis em 4 lançamentos de 1 dado"})$  vs  $P(\text{"sair pelo menos um DUPLO 6 em 24 lançamentos de 2 dados"})$
- Melhor usar a regra do complemento...
- $P(\text{"nenhum 6 em 4 lançamentos"}) =$
- $P(\text{"não 6 na primeira E não 6 na segunda E ..."})$   
 $= P(\text{"não 6 na primeira"}) \times P(\text{"não 6 na segunda"})$
- ...  
$$= 5/6 \times 5/6 \dots = (5/6)^4$$

- P(“sair pelo menos um seis em 4 lançamentos de 1 dado”)

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$
$$= 0,51775$$

- P ( “sair pelo menos um DUPLO 6 em 24 lançamentos de 2 dados” ) =

$$= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$
$$= 0,49141$$

# Não esquecer

- Estas regras e definição clássica ASSUMEM dados honestos, moedas honestas, igual probabilidade de nascer rapaz e rapariga, **equiprobabilidade para os eventos elementares**
- Uma questão que surge naturalmente é se na prática tais valores são ou não razoáveis ?

# Abordagem Frequencista



# Noção **Frequencista**

- Noção introduzida por De Moivre (1718)
- Repete-se a experiência um certo número de vezes ( $n$ )
- Seja  $k$  o número de vezes que ocorre o acontecimento que nos interessa (ex: “sair face 5 num dado”)
- Determina-se  $f=k/n$  , ou seja a **frequência relativa** de ocorrência
- Usa-se esta frequência como uma medida **empírica** de probabilidade

# Frequência relativa

- Definição:
  - Se uma experiência for repetida  $N$  vezes nas mesmas condições a frequência relativa do evento  $A$  é

$$f(A) = \frac{\# \text{ ocorrências do evento } A}{N}$$

- Se a frequência relativa convergir quando  $N$  aumenta, então o limite da frequência relativa é a probabilidade de  $A$

$$p(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\# \text{ ocorrências de } A}{N}$$

# Frequência relativa (cont.)

- $0 \leq f(A) \leq 1$
- Numa experiência com  $K$  resultados possíveis em  $N$  experiências:
  - $S = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_k\}$
  - o resultado  $A_i$  ocorre  $N_i$  vezes
  - Cada um dos resultados possíveis terá uma frequência relativa de  $f(A_i) = N_i/N$
  - $\sum_{i=1}^k f(A_i) = 1$

# Exemplo em **Matlab**

- Probabilidade de **sair 2 caras em 3 lançamentos**
- Como se simula a experiência de lançar uma moeda ?
- Como se simula 3 lançamentos ?
- Como se repete “muitas” vezes ?
- Como contar as ocorrências do evento ?

# Simular lançamentos ...

% simular 1 lançamento

l= rand() >0.5 % assumiremos que 1 = “cara”

% simular os 3 lançamentos

l3= rand (3, 1) > 0.5    % ou l3 = rand(1,3) > 0.5

% repetir N vezes

N= 1e6 % mas comecem com valor pequeno

lancamentos= rand(3,N); % importante o “;”

# # ocorrências ... freq. relativa

% contar num ocorrências de “2 caras”

%        contar num caras (1s) em cada experiência

%        (que se encontra numa coluna da matriz lancamentos)

numCarasNaExperiencia= sum (lancamentos);

% contar vezes em que esse número de caras é 2

numOcorrencias = sum (numCarasNaExperiencia ==2)

% calcular freq relativa

fr = numOcorrencias / N

% usar como estimativa da probabilidade

pA= fr

# Variação com N

% variação da frequência relativa em função de N

N= 1e5

lancamentos = rand(3,N) > 0.5;

sucessos= sum(lancamentos)==2; % 1 = sucesso

fabsol = **cumsum**(sucessos);

frel = fabsol ./ (1:N);

plot(1:N, frel);

**Até segunda.**

Continuaremos com resoluções em  
Matlab, seguida da Teoria  
Matemática



# Exemplo de aplicação da Teoria Clássica (em Java)

- Problema: Probabilidade de termos “0123” numa sequência de 4 dígitos
- Como fazer ? Sugestões ?
- Relembro que precisamos contar todos os casos possíveis

# Resolvendo...

- Ideia 1 : 4 ciclos for ...
  - Limitação do código... se quisermos 5 etc
- Ideia 2 ...
  - Usar **recursividade** ...

# Possível solução

```
void comb(String example, String alphabet, int len, List<String> list)
{

    if (len == 0) { // new combination available, store it ...
        list.add(example); // store it in a list
        return;
    }
    else {
        for (int i=0;i<alphabet.length(); i++){ // all alphabet

            // recursive cal
            comb(example+alphabet.charAt(i), alphabet, len-1, list);

        }
    }
}
```

# Exemplo de utilização

```
public static void main(String[] args) {  
  
    String alphabet = "0123456789";  
  
    final int MAX=7;  
  
    for (int n=1;n<=MAX;n++) {  
        int possible=comb(alphabet,n);  
  
        System.out.printf("Prob=%.8f\n",  
                           1/(double)possible);  
    }  
}
```

# Problema das aprovações a MPEI

- **Simulação** em Matlab [simulMPEI.m]

```
p=0.85 ;           % prob aluno passar em 2015 - 2016
n=70*2;           % alunos de MPEI
N=1e6;            % experiências
k=fix(0.8 * n);    % os 80 %
```

```
aprovados = rand(n,N) < p;  %% 1 indica aprovado
```

```
numOcorrencias =0;
for k1=k:n
    sucessos= sum(aprovados)==k1 ;
    fprintf('%d aprovados -> %8d , p=%.5f\n',k1,sum(sucessos),sum(sucessos)/N);
    numOcorrencias = numOcorrencias +sum(sucessos);
end
```

```
probSimulacao= numOcorrencias /N;
fprintf('prob de %d ou mais em %d passsarem é de %.4f\n',k,n,probSimulacao);
```

# Problema do Cavaleiro de Méré

- $P(\text{"sair pelo menos um seis em 4 lançamentos de 1 dado"})$  vs  $P(\text{"sair DUPLO 6 em 24 lançamentos de 2 dados"})$
- Simulação **em Matlab** [cavaleiro.m]
- TPC: Simulação em Java

# Simple mas não perfeita

- Conceptualmente é extremamente simples e pode ser aplicada praticamente a todas as experiências
- Tem, no entanto, algumas desvantagens:
  - Em muitos casos requer considerável dispêndio de tempo
  - As experiências devem poder ser repetidas em condições idênticas
  - Quando o espaço amostral é infinito surgem questões de fiabilidade uma vez que só podemos efectuar um número finito de repetições da experiência
  - A própria obtenção dos valores coloca algumas questões:
    - Quantos ensaios se tem de efectuar para termos medidas fiáveis ?
    - Como se lida com medições sujeitas a erro ?

# Teoria Axiomática de Probabilidade



# Definição axiomática de probabilidade

- Em 1933, Kolmogorov estabeleceu a  
DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE POR  
AXIOMATIZAÇÃO
  - na sua obra Foundations of the Theory of Probability.
- com base nas propriedades das frequências relativas e das operações sobre conjuntos

# O que é uma axiomática?

Em determinado ponto da evolução de uma teoria de pensamento matemático, torna-se imperioso ordenar, sistematizar e relacionar todos os conhecimentos entretanto nela reconhecidos, isto é, proceder à sua **AXIOMATIZAÇÃO**

# Axiomática de probabilidades

- Axioma 1- probabilidades são não-negativas  
 $P(A) \geq 0$
- Axioma 2 – normalização (S tem probabilidade 1)  
 $P(S) = 1$
- Axioma 3a – Se A e B forem mutuamente exclusivos  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Axioma 3b – Se  $A_1, A_2, \dots$  for uma sequência infinita de acontecimentos mutuamente exclusivos ( $\forall_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset$ )

$$P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_k)$$

# Teoremas

- Como sabem, às afirmações que se obtêm dedutivamente a partir dos axiomas, ou de outras já deles obtidas por dedução, chamamos TEOREMAS.

# Teoremas / Corolários :

## Prob. do acontecimento complementar

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

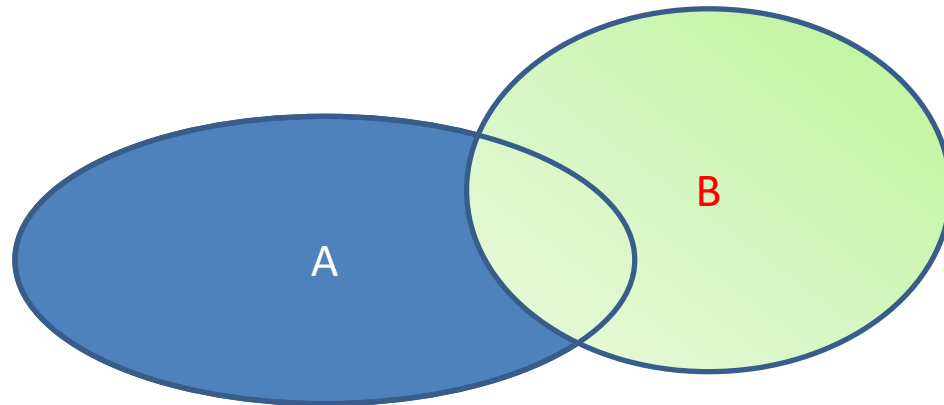
### Demonstração

- Como  $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- E  $A \cup \bar{A} = S$
- Pelo axiomas 2 e 3:
- $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(S) \dots$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

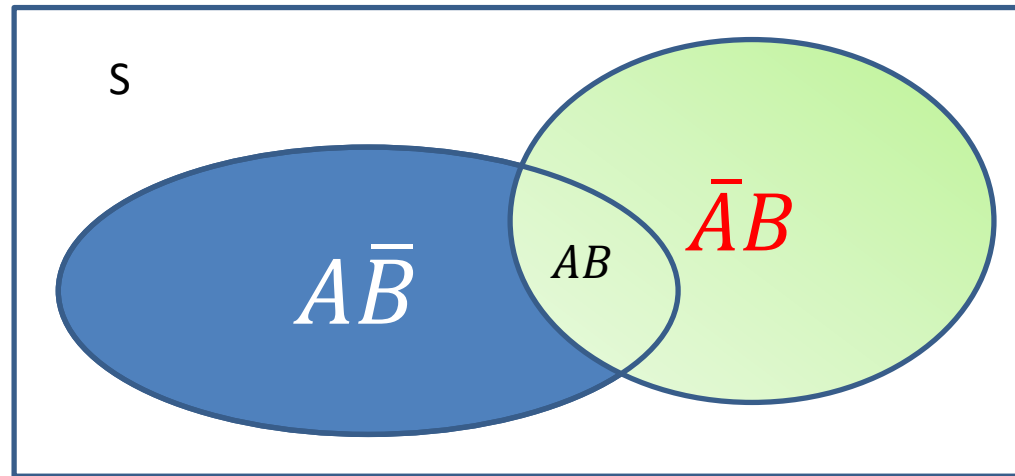
# Teorema/Corolário: Probabilidade da união

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Com  $AB \equiv A \cap B$



# Demonstração



$$A \cup B = A\bar{B} \cup AB \cup \bar{A}B, \text{ disjuntos}$$

Logo (axioma):

$$P(A \cup B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B)$$

Adicionando e subtraindo  $P(AB)$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= (P(A\bar{B}) + P(AB)) + P((\bar{A}B) + P(AB)) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

# Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- Exemplo:
  - Escolha de um número real no intervalo  $[a,b]$
- Seja o acontecimento A “número pertencer a  $[c,d]$ ”



- $P(A) = (d-c) / (b-a)$
- A probabilidade de qualquer ponto  $x \in [a, b]$  é *igual* a 0
  - Ter, por exemplo,  $]c, d[$  dará igual



# Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

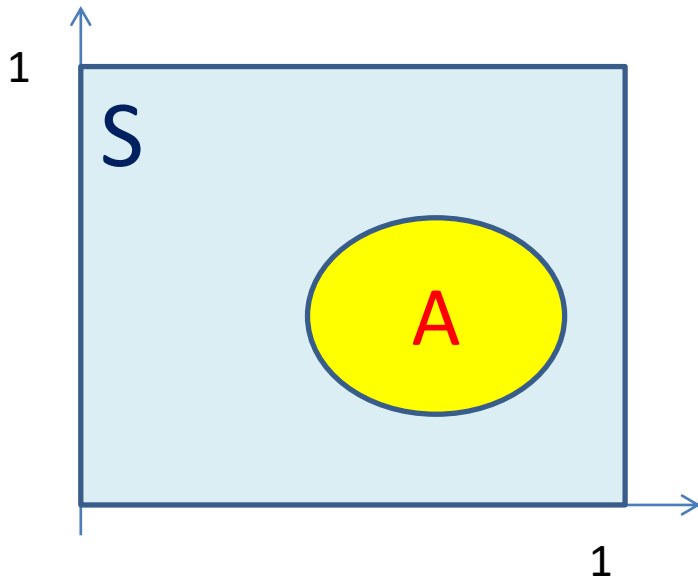
- Exemplo:

- Escolha de um número real no intervalo  $[0,90]$  relativo ao atraso de chegada a uma aula de 1h30m
- Seja o acontecimento A “chegar dentro da tolerância, i.e.  $[0,15[$
- $P(A) = (15-0) / (90-0) = 0.16(6)$ 
  - Assumindo que podem chegar em qualquer altura da aula 😞
    - O que não é válido

# Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- No caso de um par de números reais  $x, y$  entre 0 e 1

$$S = \{x, y: x \in [0,1] \cap y \in [0,1]\}$$



$$P(A) = \frac{\text{Área}(A)}{\text{Área}(S)}$$

A axiomática é compatível com  
as teorias anteriores ?

Sim, como era de esperar.

# A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 1: « $p(A)$  não negativo»
  - pois se as frequências são números não negativos também convergem para um número não negativo.

# A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 2: « $p(E)=1$ »
  - pois as frequências relativas de um acontecimento certo são sempre 1, logo, tendem para 1.

# A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Satisfaz o axioma 1: « $p(A)$  não negativo»
  - Pois  $p(A) = \#A / \#E$  o que significa que  $p(A)$  é o quociente entre um número real não negativo e um número positivo.

# TPC

- Completar a verificação dos restantes axiomas para as duas teorias (Clássica e Frequencista)

# Exemplo de Aplicação



# k ocorrências em n experiências

- n lançamentos de moeda de 1 Euro  
 $P(\text{Face}) = P(F) = p$  ;  $P(\text{Verso}) = P(V) = 1-p$
- $P(\text{FVVFFF}) = P(F) \times P(V) \dots = p (1-p) (1-p) p p p$
- $$P(\text{FVVFFF}) = p^{\# \text{Faces}} (1 - p)^{\# \text{Versos}}$$
$$= p^4 (1 - p)^2$$

...

- $P(\text{"k Faces"}) = ?$
- $P(\text{"k Faces"}) = \sum_{\text{sequências com k Faces}} P(\text{sequência})$   
$$= (\# \text{ sequências de k Faces}) \cdot p^k (1 - p)^{n-k}$$
- Num de sequências = Combinações com k faces em n
- $P(\text{"k Faces"}) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1 - p)^{n-k}$ 
$$= \frac{n!}{(n - k)! k!} \cdot p^k (1 - p)^{n-k}$$

# Para aprender mais ...

- Capítulos iniciais do Livro “Probabilidades e Processos Estocásticos”, F. Vaz, Universidade de Aveiro [ELEARNING]
- Links para material online:
  - <http://www.stat.berkeley.edu/~stark/SticiGui/Text/probabilityAxioms.htm>
  - <https://www.youtube.com/course?list=PL10921DED3A8BF53>
- Capítulos iniciais do Livro “O Acaso” , Joaquim Marques de Sá, Gradiva

# Probabilidades Condicionais

# Probabilidade condicional

- Muitas vezes interessa-nos saber a probabilidade de um evento assumindo outro evento
- Exemplos:
  - Probabilidade de amanhã estar sol **dado que hoje esteve sol**
  - Probabilidade de ter uma doença **sabendo que tenho um sintoma**

# Exemplo 1 - Manchas e Sarampo

- $P(\text{“doente ter Manchas dado que tem Sarampo”}) = ?$

Manchas \ Sarampo	M	$\bar{M}$	
$S$	$x$ casos		$s$ casos
$\bar{S}$			
			$N$ casos

- $P(S \text{ e } M) = ?$

- $P(S \text{ e } M) = \frac{x}{N} = \frac{x}{s} \times \frac{s}{N}$

$$= P(M | S) \times P(S)$$

Também pode ser :  $P(S | M) \times P(M)$

- $P(M | S) = P(S \text{ e } M) / P(S)$

# Probabilidade condicional

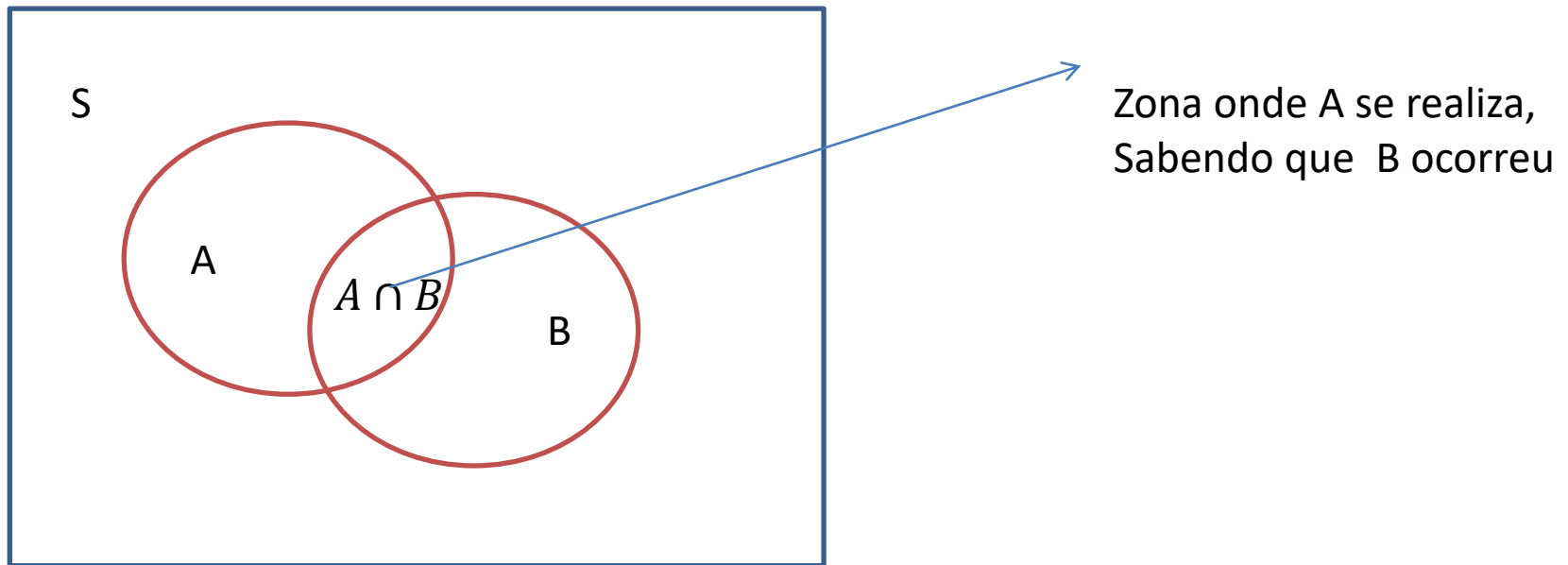
- Por vezes – como no exemplo anterior – dois acontecimentos estão relacionados
  - A ocorrência de um depende ou faz depender a ocorrência do outro
- A Probabilidade de um evento A com a condição que o evento B ocorreu é a designada **PROBABILIDADE CONDICIONAL** de A dado B
  - Definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ se } P(B) \neq 0$$

Indefinida se  $P(B)=0$

# Interpretação da probabilidade condicional

- $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$  se  $P(B) \neq 0$





# Exemplo de aplicação

- 2 números de 1 a 4, N1 e N2

- Evento B = “ $\min(N1, N2)=2$ ”

- Evento M = “ $\max(N1, N2)$ ”

- $P(M=1 | B) =$

$$P(\text{“max()=1”} \ \& \ \text{“min()=2”}) / P(\text{“min()=2”}) =$$

...

$$=0$$

- $P(M=2 | B) = \dots$

$$= 1/5$$

N2→	1	2	3	4
1				
2		B / 2	B / 3	B / 4
3		B / 3		
4		B / 4		

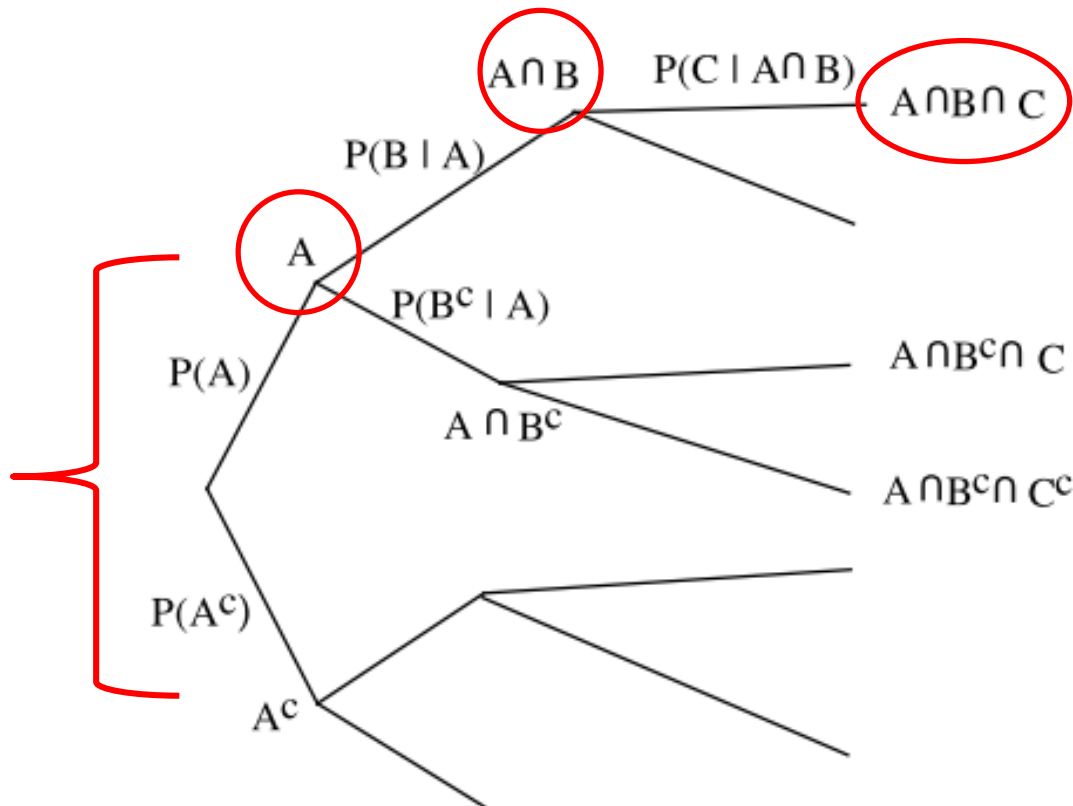
# $P(AB), P(ABC) \dots$

- $P(AB) = P(A|B) \times P(B)$
- Aplicando sucessivamente temos (regra da cadeia)

$$\begin{aligned} &P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) \\ &= P(A_1 | A_2 \dots A_n) \times P(A_2 A_3 \dots A_n) \\ &= P(A_1 | A_2 \dots A_n) \\ &\quad \times P(A_2 | A_3 \dots A_n) \dots P(A_{n-1} | A_n) \end{aligned}$$

# Regra da cadeia / multiplicação

- $P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$



# Problema com 2 urnas...

- Consideremos 2 urnas, designadas por X e Y, contendo bolas brancas e pretas:
  - X contém 4 brancas e 5 pretas e
  - Y contém 3 brancas e 6 pretas.
- Escolhe-se uma urna ao acaso e extrai-se uma bola. Qual a probabilidade de sair bola branca?

- **P(“bola branca”)**

$$= P(\text{“branca da urna X OU branca da urna Y”})$$

$$= P(\text{“branca E urna X”}) + P(\text{“branca E urna Y”})$$

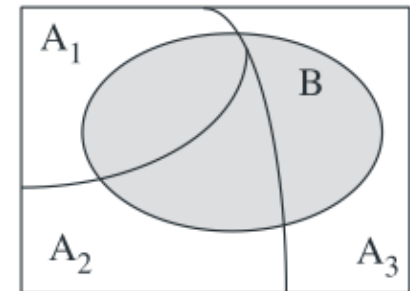
$$= P(\text{“branca”} | \text{“urna X”}) \times P(\text{“urna X”}) + P(\text{“branca”} | \text{“urna Y”}) \times P(\text{“urna Y”})$$

$$= (4/9) \times (1/2) + (3/9) \times (1/2) \approx 0,39$$

# Lei da Probabilidade total

- Dividir para conquistar
- Partição do espaço de amostragem  $A_1, A_2, A_3$
- Ter  $P(B|A_i)$ , para todos os  $i$

- $$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$



Em geral:  $P(B) = \sum_j P(B|A_j)P(A_j)$

# Condicionamento inverso

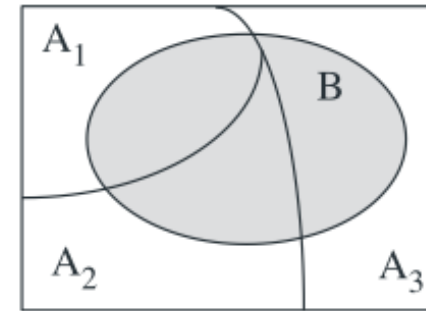
- Continuando com as urnas ...
- **Problema Inverso** (condicionamento inverso)

$P(\text{"urna X"} \mid \text{"bola branca"})$

Resolvido pela primeira vez pelo Reverendo Thomas  
**Bayes** (1702-1761)

# Regra de Bayes

- Probabilidades *a priori*  $P(A_i)$
- Sabemos  $P(B|A_i) \quad \forall i$



- Pretendemos calcular  $P(A_i|B)$ 
  - i.e.  $P(A_i)$  dado que B ocorreu

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(A_i|B) &= \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)} \end{aligned}$$

# Aplicando ao problema das urnas

- $P(\text{"urna X"} \mid \text{"bola branca"})$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(\text{"bola branca"} \mid \text{"urna X"}) \times P(\text{"urna X"})}{P(\text{"bola branca"})} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{9}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)}{7/18} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

- $P(\text{"urna Y"} \mid \text{"bola branca"}) =$   
$$\begin{aligned} &\dots = \frac{\left(\frac{3}{9}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)}{7/18} = \frac{3}{7} \\ &= 1 - P(\text{"urna X"} \mid \text{"bola branca"}) \end{aligned}$$



# Causa e efeito

- No evento “urna X se bola branca” podemos considerar que a saída de bola branca é o EFEITO da causa “urna X”
- A Regra de Bayes, em consequência, pode ser escrita da seguinte forma:

$$P(\text{"causa"}|\text{"efeito"}) = \frac{P(\text{"efeito"}|\text{"causa"}) \times P(\text{"causa"})}{P(\text{"efeito"})}$$

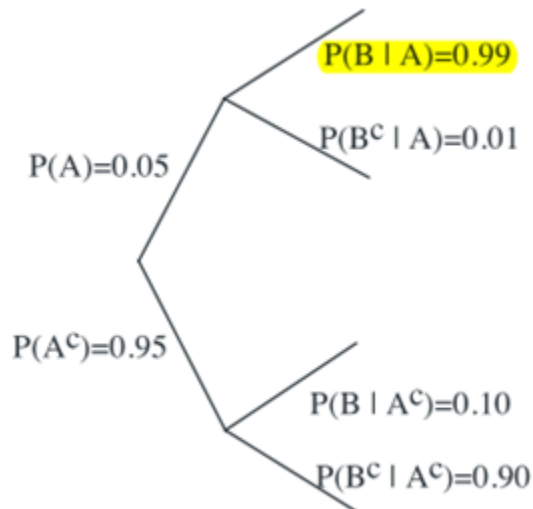
# Exemplo de aplicação Regra de Bayes - radar

**Evento A:** avião voando na zona do radar,  
 $P(A) = 0.05$

- $P(A \cap B) =$   
 $= P(B|A) P(A)$   
 $= 0,99 \times 0,05$

**Evento B:** Aparece algo no ecrã do radar,  
 $P(B|A) = 0.99$

$P(A | B) = ?$

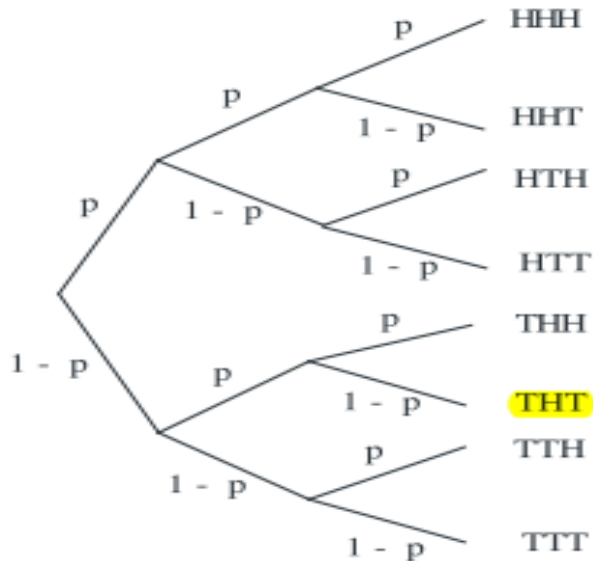


- $P(B) =$   
 $= P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A})$   
 $\times P(\bar{A})$
- $P(A | B) =$   
 $= \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$   
 $= \frac{0,99 \times 0,05}{0,1445} = 0.3426$   
(valor baixo)

# Outro exemplo

## 3 lançamentos de uma moeda não honesta

$$P(H) = p, \quad p(T)=1-p$$



### Calcular:

- $P(THT)$   
 $= (1-p) p (1-p)$
- $P(\text{"1 H"})$   
 $= P(HTT) + P(THT) + P(TTH)$   
 $= p(1-p)(1-p) + (1-p)p(1-p) + (1-p)(1-p)p$   
 $= 3 \times p(1-p)(1-p)$
- $P(\text{"primeiro lançamento dá H"} \mid \text{"1 H"})$   
 $= P(\text{primeiro H} \ \& \ 1 \text{ H}) / p(1H)$   
 $\dots = p(1-p)(1-p) / \dots = 1/3$

Confirmando caso favorável {HTT} e casos possíveis {HTT, THT, TTH}

Nota: os casos possíveis são equiprováveis

# Terceiro exemplo – sistema de comunicação/transmissão

- 0 ou 1 na entrada, transmissão sujeita a erros, entradas equiprováveis.
- No receptor uma decisão é tomada (0 ou 1):
  - Se  $\varepsilon$  for a probabilidade de erro, qual a entrada mais provável se na saída obtemos 1 ?
- Seja  $A_k$  o acontecimento “entrada é k”,  $k=0,1$   
 $A_0$  e  $A_1$  constituem uma partição de  $S$
- Seja  $B_1$  o acontecimento “saída = 1”

...

- $P(B_1) = P(B_1|A_0) \times P(A_0) + P(B_1|A_1) \times P(A_1)$

$$= \varepsilon \frac{1}{2} + (1 - \varepsilon) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Probabilidade de entrada ter sido zero dado que saída igual a 1 ?

$$P(A_0|B_1) = P(B_1|A_0) \times P(A_0) / P(B_1)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} / \frac{1}{2} = \varepsilon$$

- De forma similar  $P(A_1|B_1) = \dots = 1 - \varepsilon$
- Se  $\varepsilon < 1/2$  a entrada mais provável é 1 (se saída for 1)
  - Que é o que se pretende em geral.

# Quarto exemplo

- Família com 2 filhos
- Sabendo que o primeiro filho é rapaz, qual a probabilidade do outro filho ser também rapaz ?

# Calculemos

outro→ Primeiro filho	M	$\bar{M}=F$	
$M$	x casos		M=2 casos
$\bar{M}=F$			N-m=2 casos
			N=4 casos

$$\begin{aligned}
 A &= P(\text{outro } M \mid \text{primeiro } M) \\
 &= \frac{P(\text{outro } M \cap \text{primeiro } M)}{P(\text{primeiro } M)} \\
 &= \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

# Análise do resultado

- $P(\text{"outro M"} \mid \text{"primeiro M"}) = \frac{1}{2} = P(\text{"outro M"})$
- O que significa este resultado ?



# Independência

# Independência

- 2 acontecimentos são independentes sse  $P(AB) = P(A)P(B)$ 
  - Simétrico relativamente a A e B
  - Aplica-se mesmo que  $P(A)=0$
  - Implica  $P(A|B)=P(A)$  [mas não é a definição]
    - Ocorrência de B não fornece informação sobre ocorrência de A
- Generalização...  
os acontecimentos  $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$  são independentes sse
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots P(A_n)$$

# Independência vs independência 2 a 2

- 2 lançamentos de moeda
- A: primeira é caras
- B: segunda é caras
- C: mesmo resultado em ambas

HH	HT
TH	TT

- $P(C) ? \quad P(A) ? \quad P(B) ?$   
 $2/4=1/2$
- $P(C \cap A) =$   
 $1/4 = 1/2 \times 1/2$   
C e A indep.
- $P(C \cap B) =$   
 $1/4 = 1/2 \times 1/2$   
C e B indep.
- $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \dots A e B ind.$
- $P(C \cap B \cap A) =$   
 $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

**Independência 2 a 2 não implica independência**

# Independência e acontecimentos mutuamente exclusivos

- Em geral dois acontecimentos que sejam mutuamente exclusivos e tenham probabilidade não nula não podem ser independentes

$$0 = P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

implicaria que um deles tenha probabilidade nula

- Em geral considera-se que acontecimentos em experiências distintas são independentes (experiências independentes)

# Sequências de experiências independentes

- Se uma experiência aleatória for composta por  $n$  experiências independentes e se  $A_k$  for um acontecimento que diga respeito à experiência  $k$ , é razoável admitir que os  $n$  acontecimentos são independentes
- Então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots P(A_n)$$

# Experiências de Bernoulli

- Uma **experiência de Bernoulli** consiste em realizar uma experiência e registrar se um dado acontecimento se verifica (sucesso) ou não (falha)

# Qual a **probabilidade de k sucessos em n ensaios independentes ?**

- Seja  $p$  a probabilidade de sucesso  
– E  $(1-p)$  a de falha
- A probabilidade de  $k$  sucessos e  $(n-k)$  falhas é:  
$$p^k (1 - p)^{n-k}$$
- $k$  sucessos em  $n$  experiências podem ocorrer de  $C_k^n$  maneiras
- Então a probabilidade pedida é:  
$$P_n(k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}$$

**Lei Binomial**

# Visão frequencista e probabilidade condicional

- Do ponto de vista frequencista, considerando os eventos A e B e N experiências, podemos escrever:
- $$P(A|B) \approx \frac{k_{A \text{ e } B}/N}{k_B/N} = \frac{k_{A \text{ e } B}}{k_B}$$
- Onde  $k_{A \text{ e } B}$  é o número de ocorrência de “A e B”
  - Que também se pode denominar por frequência absoluta e representar por  $f_{AB}$



# Simulação

- Como fazer para ter  $P(A|B)$  ?
- Realizar  $N$  experiências
- Contar o número de ocorrências de  $AB$   
Será  $f^{AB}$  (frequência absoluta)
- Contar número de ocorrências de  $B$   
 $f^B$
- $$P \cong \frac{f^{AB}/N}{f^B/N} = \frac{f^{AB}}{f^B}$$

# Exemplo de simulação

## (Independência vs independência 2 a 2)

- Relembremos:

2 lançamentos de moeda

A: primeira é caras

B: segunda é caras

C: mesmo resultado em ambas

- $P(C | A \cap B)$

# simulação

```
%  $P(C \mid A \text{ e } B) = P(C \text{ e } A \text{ e } B) / P(A \text{ e } B)$ 
```

```
N= 1e5;
```

```
m1= rand(1,N) < 0.5; % registo lançamentos da 1ª moeda
```

```
m2= rand(1,N) < 0.5; % registo lançamentos da 2ª moeda
```

```
ABC= (m1==m2) & (m1==1) & (m2==1); % C: iguais A: primeira caras  
segunda caras
```

% B:

```
fABC=sum(ABC,1);
```

```
AB = (m1==1) & (m2==1); % A: primeira caras B: segunda caras
```

```
fAB=sum(AB,1);
```

```
p=fABC/fAB
```

```
P= 1 ....
```

# Principais assuntos

- Probabilidade
- Teorias de Probabilidade (Clássica, Frequencista, Axiomática)
- Probabilidade Condicional
- 3 Ferramentas muito importantes
  - Regra da multiplicação
  - Teorema da Probabilidade total
  - Regra Bayes
- Aplicação da teoria frequencista a probabilidades condicionais

# Não esquecer

- Independência de 2 eventos
- Independência de uma coleção de eventos
- Probabilidade condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Regra da multiplicação:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

- Probabilidade total:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

- Regra de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{P(B)}$$

# Para aprender mais ...

- Capítulos iniciais do Livro “Probabilidades e Processos Estocásticos”, F. Vaz, Universidade de Aveiro
  - Disponíveis no Elearning da UC