Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3

Soluções do 1.º Teste de Avaliação Discreta (de 5 de abril de 2017)

---

1. (a) As derivadas parciais de primeira ordem são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(1+x)e^{x-y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x(1-y)e^{x-y}\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Os pontos críticos de f são os pontos $(0,0)$ e $(-1,1)$. A origem é um ponto de sela (visto que o hessiano é negativo nesse ponto) e o ponto $(-1,1)$ é um minimizante local (pois ambos os menores principais são positivos).

(b) A função f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ visto ser de classe C^1 em todo o domínio. Uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,2,4)$ é

$$6x - 2y - z - 4 = 0.$$

(c) $D_{\vec{u}}f(2,2) = \nabla f(2,2) \cdot \vec{u} = (6,-2) \cdot (u_1,u_2) = 6u_1 - 2u_2$.

2. A função g é contínua em $\mathbb{R}^2$ (visto ser do tipo polinomial), pelo que é também contínua no conjunto D, que é fechado e limitado. Nestas condições, o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos (absolutos) de g em D.
O único ponto crítico de g no interior de D é a origem. Este ponto é o único candidato a extremante em $int(D)$ (visto que g é diferenciável e o seu gradiente apenas se anula em $(0,0)$).
Usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange na fronteira de D, identificamos os seguintes pontos situados na circunferência de equação $x^2 + (y+1)^2 = 4$:

$$(0,-3)\,;\ (0,1)\,;\ (\sqrt{3},-2)\,;\ (-\sqrt{3},-2).$$

O valor mínimo de g é 0, atingido em $(0,0)$, e o valor máximo de g é 10, atingido nos pontos $(\pm\sqrt{3},-2)$.

3. $h(1,-2,2) = 9$ é o máximo e $h(-1,2,-2) = -9$ é o mínimo.

4. A EDO dada é de variáveis separáveis. A solução geral é dada por

$$\operatorname{sen} y\,\sqrt{x^2+1} = C\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Notar que $C = 0$ corresponde à família de soluções $y = m\pi$, com $m \in \mathbb{Z}$.
A solução do PVI é

$$\operatorname{sen} y\,\sqrt{x^2+1} = 1.$$

<u>Nota</u>: Em alternativa, a EDO dada também poderia ser resolvida usando um fator integrante (dependente apenas de y, nomeadamente $\operatorname{sen} y$, para $y \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$).

5. A EDO dada é exata, uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy - 9x^2) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(2y + x^2 + 1)$$

em $\mathbb{R}^2$ (aberto e simplesmente conexo). A solução da EDO é

$$(x^2+1)y - 3x^3 + y^2 = C\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

6. (a) (ver pág. 29 do Texto de Apoio).
   (b) A EDO $y' = y + e^{-3x}y^4$ é de Bernoulli (com $\alpha = 4$).
   A solução geral é constituída pelo integral geral

$$y^3 = \frac{e^{3x}}{C - 3x}\,, \qquad C \in \mathbb{R},$$

   e pela função nula $y \equiv 0$ (solução singular).

7. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{5x}\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$