Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 5** (E@D)

TP4D-1: 5ª feira, 25/03, 14h ; TP4D-2: 5ª feira, 25/03, 16h ; TP4D-3: 6ª feira, 26/03, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 24/03, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 26/03, 14h

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 22 a 31 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Novos slides $\rightsquigarrow$ Capítulo 2

$\boxed{\text{Slides 1 a 18}}$ Sucessões de Funções

Sucessão de funções definida em $D \subseteq \mathbb{R}$ Notação: (f_n)

↳ sucessão $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ em que cada termo é uma função

Exercício 1: Representar graficamente os primeiros 4 termos das sucessões de funções definidas por:

a) $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $x \in [0,1]$

b) $h_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$

Exercício 2: Para as sucessões do ex. 1 calcular, com $x \in [0,1]$:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(x)$

Sejam (f_n) uma sucessão de funções reais definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$

- (f_n) converge pontualmente para f em D se, $\forall x \in D$, $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

- (f_n) converge uniformemente para f em D se $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = 0$, onde $M_n = \sup\limits_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$.

Nota: A convergência uniforme é mais importante e traz mais propriedades

Exercício 3: Verificar se as sucessões do ex. 1 convergem uniformemente em $[0,1]$.

Proposição: Se (f_n) converge uniformemente para f num conjunto D, então (f_n) converge pontualmente para f em D.

$\hookrightarrow$ ver demonstração no slide 16

Propriedades das sucessões uniformemente convergentes $\rightsquigarrow$ ler slides 17 e 18

Slides 19 a 22 Séries de Funções

- Série de funções: $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, onde (f_n) é uma sucessão de funções definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$
- Sucessão das somas parciais: (S_n) , onde $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$
- Se a sucessão (S_n) converge uniformemente em D e $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, então a série de funções $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em D e tem soma S, e escreve-se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = S$. Nota: Para a convergência pontual é análogo.

Domínio de convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, onde f_n estão definidas em D

$\hookrightarrow$ conjunto dos pontos $x \in D$ para os quais a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge

Exercício 4: Determinar o domínio de convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^x$

Slides 23 e 24 — Propriedades das séries uniformemente convergentes

Teorema: Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ uma série de funções contínuas em $[a,b]$.

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em $[a,b]$ com soma S, então:

(i) A soma S é contínua em $[a,b]$;

(ii) A soma S é integrável em $[a,b]$ e

$$\boxed{\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx}$$

Integração termo a termo

(iii) Adicionalmente, se cada f_n é de classe C^1 em $[a,b]$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ converge uniformemente em $[a,b]$, então

S é diferenciável em $[a,b]$ e

$$\boxed{S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\ , \quad x\in[a,b]}$$

Derivação termo a termo

Slides 25 e 26 — Critério de Weierstrass

↳ usa-se para provar que uma série converge uniformemente

Critério de Weierstrass

- (f_n) ⇝ sucessão de funções definidas em D
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ⇝ série numérica convergente ($a_n \geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$)
- $|f_n(x)| \leq a_n\ ,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in D$

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em D

Exercício 5: Mostrar que as séries seguintes são uniformemente convergentes no intervalo indicado.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ em $[0,1]$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ em $[0,2\pi]$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2+x^4}$ em $\mathbb{R}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$ em $[0,+\infty[$

Exercício 6: Seja $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}$, $x \in [1,+\infty[$

a) Mostrar que a função soma da série é contínua em $[1,+\infty[$

b) Determinar em $[1,+\infty[$ a derivada da função soma da série.

c) Justificar que a função soma é integrável em $[\ln 3; \ln 4]$ e calcular $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} \right) dx$

TPCs: Folha prática 2: 1

Exercício 7: Seja $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^4}$

a) Mostrar que S é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

b) Mostrar que S é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcular S'.

c) Mostrar que S é integrável em $[0,\pi]$ e calcular $\int_0^{\pi} S(x)dx$.

Soluções: b) $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ c) $\int_0^{\pi} S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n-1)^5}$

Nota: $\cos(n\pi) = (-1)^n$