Cálculo II – 2020/2021

Aula 13 ①/6

Planificação **Aula 13** (presencial)

TP4D-1: 5ª feira, 29/04, 14h ; TP4D-2: 5ª feira, 29/04, 16h ; TP4D-3: 6ª feira, 30/04, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 28/04, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 30/04, 14h

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 32 a 34 — Derivadas parciais de ordem superior

As derivadas parciais de 2.ª ordem de uma função f obtêm-se derivando parcialmente as funções derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Notações: 1.ª ordem 2.ª ordem

$$\begin{tikzcd}
 & & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ ou } f''_{xx} \\
 & \frac{\partial f}{\partial x} \text{ ou } f'_x \arrow[ur, "x"] \arrow[r, "y"'] & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ ou } f''_{xy} \\
f \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "y"'] & & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ ou } f''_{yx} \\
 & \frac{\partial f}{\partial y} \text{ ou } f'_y \arrow[ur, "x"] \arrow[r, "y"'] & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ ou } f''_{yy}
\end{tikzcd}$$

Definição: Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $f: D \to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Diz-se que f é de classe C^k em D se f admite derivadas parciais contínuas até à ordem k em todos os pontos de D.

Teorema de Schwarz (em $\mathbb{R}^2$)

Seja $f(x,y)$ uma função de classe C^2 num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Então, $\forall (x,y) \in D$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Nota: Ver no slide 34 a versão do Teorema de Schwarz para $\mathbb{R}^n$

Exercício 1: Calcular as derivadas parciais de 2.ª ordem de

$$f(x,y) = x^3 y + 5 x y^2 + \operatorname{sen}(y^3).$$

Exercício 2: Mostrar que $f(x,y) = e^{-2y}\cos(2x)$ satisfaz a eq. de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Recordar: • Norma do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2) \rightsquigarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
(em $\mathbb{R}^2$) • Vetor unitário $\rightsquigarrow$ tem norma igual a 1

Slides 35 a 39 **Derivadas direcionais**

Definição: Sejam $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p = (a,b) \in \text{int}(D)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário ($\|\vec{u}\| = 1$).
A derivada direcional de f no ponto p na direção de $\vec{u}$ é

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h\vec{u}) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a,b)}{h}}$$

(se o limite existir)

Nota: Se $\|\vec{u}\| \neq 1$, a derivada direcional obtém-se substituindo na fórmula anterior o vetor $\vec{u}$ pelo vetor unitário $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

Observações: • A fórmula anterior generaliza-se para $\mathbb{R}^n$ (slide 36)
• Ver no slide 36 a interpretação geométrica (e a applet).

Exercício 3: Calcule a derivada direcional de $f(x,y) = x^2 + y$ na direção do vetor $\vec{u} = (1, -1)$ no ponto $(2,3)$.

Nota: Veremos mais à frente nesta aula como e quando se podem calcular as derivadas direcionais de forma mais simples

Recordar: • $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $x = a$ se $f'(a)$ existe e é finita
(em $\mathbb{R}$) • f é diferenciável em $x = a \Rightarrow f$ é contínua em $x = a$

A generalização do conceito de diferenciabilidade para funções de várias variáveis não é imediato pois:

- As derivadas parciais de uma função num ponto podem existir, ser finitas e iguais, mas mesmo assim a função ser descontínua nesse ponto. (ver exemplo slide 35)
- Existem funções que admitem derivadas segundo todas as direções num dado ponto e, ainda assim, são descontínuas nesse ponto. (ver exemplo slide 39)

Slides 40 a 46 **Diferenciabilidade**

Nota: Nesta planificação só se estuda a diferenciabilidade em $\mathbb{R}^2$ (ver nos slides para $\mathbb{R}^m$)

Definição: Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in int(D)$. Diz-se que **f é diferenciável em (a,b)** se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ existem e

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\times h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\times k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Observação: Esta definição está escrita de forma diferente no slide 42, mas elas são equivalentes usando as mudanças de variável $x = a+h$ e $y = b+k$.

Ver nos slides 40 e 41 a motivação geométrica para a definição de diferenciabilidade.

Exercício 4: Verifique se as seguintes funções são diferenciáveis no ponto indicado:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ em $(3,1)$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ em $(0,0)$

c) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ em $(0,0)$

Teorema: (slide 44) Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $(a,b) \in int(D)$, então f é contínua em (a,b).

Consequência: Se f não é contínua em (a,b) então <u>f não é diferenciável</u> em (a,b).

Exercício 5: Mostre que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ não é diferenciável em $(0,0)$.

Teorema: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $p = (a,b) \in int(D)$.
(slide 45)
- Se f admite derivadas parciais numa bola de centro p e se essas derivadas são contínuas em p, então <u>f é diferenciável</u> em p.
- Se D é aberto e as derivadas parciais de f são contínuas em D, então <u>f é diferenciável</u> em todos os pontos de D.

Exercício 6: Resolver de novo o exercício 4a) usando agora o teorema anterior.

Recordar: • Produto interno de dois vetores

↳ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$, onde α é o ângulo formado entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ então $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2$

• Vetor gradiente da função $f \rightsquigarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

Slides 45 a 47 — Derivadas direcionais

(outra forma mais simples para as calcular)

↳ pode-se usar quando f for diferenciável

Nota: Para provar que f é diferenciável devem, em primeiro lugar, tentar aplicar o teorema do slide 45 dado na página anterior.

Teorema: Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ for diferenciável no ponto $p = (a,b) \in int(D)$, então a
(slide 45) derivada direcional de f no ponto p na direção do vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é

↳ $\|\vec{u}\| = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(p) &= \nabla f(p) \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) \cdot (u_1, u_2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \times u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \times u_2 \end{aligned}}$$

Nota: Se $\|\vec{u}\| \neq 1$, a derivada direcional obtém-se substituindo na fórmula anterior o vetor $\vec{u}$ pelo vetor unitário $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

Observação: A direção de maior crescimento de uma função f no ponto (a,b) é $\vec{u} = \nabla f(a,b)$. Neste caso, $D_{\vec{u}} f(a,b) = \|\nabla f(a,b)\|$. (Ver detalhes no slide 47)

Exercício 7: Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = e^x \cos y + \frac{y^2}{2} + 1$

a) Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$

b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1,0)$ segundo a direção do vetor $(1,2)$.

c) Determine o valor máximo da derivada direcional de f no ponto $(0; \pi)$

Recordar: Seja $y = f(x)$ (função de uma variável)

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0) é ($y_0 = f(x_0)$)

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$$

$\boxed{\text{Slides } 41, 42, 48, 49}$ **Plano tangente e reta normal**

1.º caso: Seja $\boxed{z = f(x,y)}$ (função de 2 variáveis)

- Equação do **plano tangente** ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0, z_0) ($z_0 = f(x_0, y_0)$)

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0)}$$

- Equação vetorial da **reta normal** ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0, z_0) ($z_0 = f(x_0, y_0)$)

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0); -1 \right), \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Nota: o vetor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0); -1 \right)$ é normal ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0, z_0)

2.º caso: Seja $\boxed{F(x,y,z) = k}$ uma superfície de nível que passa no ponto (x_0, y_0, z_0)
(F é uma função de 3 variáveis)

Nota: o vetor gradiente $\nabla_F(x_0, y_0, z_0)$ é normal ao plano tangente à superfície de nível $F(x,y,z) = k$. (Assumindo que $\nabla_F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$)

- Equação do **plano tangente** à superfície de nível $F(x,y,z) = k$ no ponto (x_0, y_0, z_0)

$$\boxed{\nabla_F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0} \rightarrow \text{Fórmulas equivalentes}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \times (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \times (z - z_0) = 0}$$

- Equação vetorial da **reta normal** à superfície de nível $F(x,y,z) = k$ no ponto (x_0, y_0, z_0)

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \times \nabla_F(x_0, y_0, z_0), \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Nota: O 1.º caso inclui-se no 2.º caso, pois:

$$z = f(x,y) \iff \underbrace{f(x,y) - z}_{F(x,y,z)} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_F(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y); \frac{\partial f}{\partial y}(x,y); -1 \right)$$

Exercício 8: Considere a função $F(x,y,z) = 2xz^4 + x^2y$.
Determine a equação do plano tangente e da reta normal à superfície de nível 3 de F no ponto $(-1;2;1)$.

Slides 50 a 53

→ Auto-estudo facultativo (esta matéria não será avaliada)

TPCs: Folha prática 3: 11, 12, 13, 14, 15, 16

1.º Teste, 10/04/2019 → Ex. 5

Exame Final, 19/06/2019 → Ex. 3a)

2.º Teste, 13/06/2018 → Ex. 1a), 1b)

1.º Teste, 05/04/2017 → Ex. 1b), 1c)

Exame de Recurso, 10/07/2017 → Ex 1a)