Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 6** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 06/04, 16h30

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 31 a 37 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 27 a 30 Série de Potências : Convergência Uniforme

Teorema do slide 27 e Teorema de Abel (slide 28) → ler

Consequência desses teoremas: uma série de potências é uniformemente convergente em qualquer intervalo limitado e fechado do seu domínio de convergência.

Teorema slide 30

Sejam:
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$
- $I =]c-R; c+R[$ o seu intervalo de convergência
- $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ a sua função soma

Então:

(i) f é contínua no seu domínio de convergência

(ii) f é diferenciável em I e $\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-c)^{n-1}}$, $\forall x \in I$

→ Série derivada (tem raio de convergência R)

(iii) A função F, definida por $\boxed{F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}}$, é a primitiva de f em I tal que $F(c)=0$.

→ Série integranda (tem raio de convergência R)

Nota: A primitiva de f tal que $F(c)=0$ é $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

(iv) f é integrável em qualquer subintervalo $[a,b]$ do domínio de convergência e

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n (x-c)^n \,dx}$$

Exercício 1: Representar em série de potências as funções seguintes, indicando o intervalo de convergência

a) $\frac{1}{2+x}$

b) $\frac{1}{x}$

c) $\frac{1}{(1-x)^2}$

d) $\frac{2}{(1-x)^3}$

e) $-\ln(1-x)$

f) $\operatorname{arctg} x$

Exercício 2: Folha prática 2 → Ex. 3

Exercício 3: Folha prática 2 → Ex. 9

Slides 31 a 33 Unicidade de representação de uma função em série de potências

Teorema slide 31: Se $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ então $a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$, $\forall n\in\mathbb{N}_0$, $x\in]c-R;c+R[$

Observação: Este teorema mostra que a série de potências de f centrada em c é única e coincide com a série de Taylor centrada em c

Exercício 4: Seja $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$.

a) Calcular $f^{(31)}(0)$.

b) Calcular $f^{(1000)}(0)$.

TPCs: Folha prática 2: 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11

Exames anos anteriores

- 1.º Teste, 10/04/2019 → Ex. 2
- Ex. Final, 19/06/2019 → Ex. 1b)
- Ex. Recurso, 08/07/2019 → Ex. 1b) c)
- Ex. Final, 13/06/2018 → Ex. 1b)
- Ex. Recurso, 02/07/2018 → Ex 2 ; Ex 3