Cálculo II – 2020/2021

Aula 10 1/2

Planificação **Aula 10** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 20/04, 16h30

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 3 a 5 — Distâncias e Bolas em $\mathbb{R}^m$ (novos slides ⇝ capítulo 3)

Definições:

- **Norma** de $X=(x_1,\dots,x_m) \rightsquigarrow \|X\|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_m^2}$
- **Distância** entre $X=(x_1,\dots,x_m)$ e $Y=(y_1,\dots,y_m) \rightsquigarrow \|X-Y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_m-y_m)^2}$
- **Bola** (aberta) de centro $C\in\mathbb{R}^m$ e raio $r>0 \rightsquigarrow B_r(C)=\{X\in\mathbb{R}^m : \|X-C\|<r\}$
- **Complementar** de um conjunto $D\subseteq\mathbb{R}^m \rightsquigarrow D^c=\{X\in\mathbb{R}^m : X\notin D\}=\mathbb{R}^m\setminus D$

Observação:

- $m=1 \rightsquigarrow B_r(C)=]C-r\,;C+r[$
- $m=2 \rightsquigarrow B_r(C)$ é o interior do círculo de centro C e raio r
- $m=3 \rightsquigarrow B_r(C)$ " " " da esfera " " " " " "

Exercício 1: Provar a observação anterior

Slides 6 a 9 — Noções Topológicas em $\mathbb{R}^m$

Definições: Sejam $D\subseteq\mathbb{R}^m$ um conjunto e $P\in\mathbb{R}^m$ um ponto. Diz-se que

- P é um **ponto interior** de D se:
  existir alguma bola de centro P contida em $D \rightsquigarrow \exists r>0 : B_r(P)\subseteq D$
- P é um **ponto exterior** de D se:
  for ponto interior do complementar de $D \rightsquigarrow \exists r>0 : B_r(P)\subseteq D^c$
- P é um **ponto fronteiro** de D se:
  não for interior nem exterior $\rightsquigarrow \forall r>0,\ B_r(P)\cap D\neq\emptyset$ e $B_r(P)\cap D^c\neq\emptyset$
- P é um **ponto de acumulação** de D se:
  toda a bola centrada em P contém pontos de D distintos de P $\forall r>0,\ B_r(P)\cap(D\setminus\{P\})\neq\emptyset$
- P é um **ponto isolado** de D se:
  $P\in D$ e não é ponto de acumulação $\rightsquigarrow \exists r>0 : B_r(P)\cap D=\{P\}$

Definições: Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto.

- **Interior** de $D \rightsquigarrow int(D) \rightsquigarrow$ Conjunto de todos os pontos interiores de D
- **Exterior** de $D \rightsquigarrow ext(D) \rightsquigarrow$ " " " " " exteriores " "
- **Fronteira** de $D \rightsquigarrow fr(D) \rightsquigarrow$ " " " " " fronteiros " "
- **Derivado** de $D \rightsquigarrow D' \rightsquigarrow$ " " " " " de acumulação " "
- **Fecho ou Aderência** de $D \rightsquigarrow \overline{D} = D \cup fr(D)$

Definições: Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se:

- **Aberto** se $int(D) = D$
- **Fechado** se $\overline{D} = D$ (ou $fr(D) \subseteq D$)
- **Limitado** se existir alguma bola que o contenha

Exercício 2: Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 4\} \cup \{(1,0)\}$.

a) Faça o esboço de D.

b) Escreva e esboce o complementar de D.

c) Indique: $int(D)$; $ext(D)$; $fr(D)$; D'; $\overline{D}$; pontos isolados de D

d) D é aberto?

e) D é fechado?

Exercício 3: Para cada um dos seguintes conjuntos, faça o seu esboço, verifique se é aberto ou fechado, indicando a sua fronteira

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2 < 4\}$

c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 \leq 4\}$

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2 \wedge |y| \leq 1\}$

e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$

f) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

g) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 9 \wedge z \geq 0 \wedge z \leq 5-x\}$

h) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2+9y^2+z \leq 9\}$

TPCs: Folha Prática 3: 1