4) $y' = f(ax+by+c)$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ $\quad$ f é contínua em I.

a) Mostrar que a mudança de variável $z = ax+by+c$ transforma a EDO dada numa EDO de variáveis separáveis.

$$z = ax+by+c \implies z' = (ax+by+c)' \Leftrightarrow z' = a+by' \Leftrightarrow \boxed{\frac{z'-a}{b} = y'}$$

$$y' = f(ax+by+c) \rightsquigarrow \frac{z'-a}{b} = f(z) \Leftrightarrow z'-a = bf(z) \Leftrightarrow z' = a+bf(z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = a+bf(z) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{a+bf(z)}dz = dx}$$ EDO variáveis separáveis

b) Resolver a EDO $y' = (x+y+1)^2$

Usar a mudança de variável: $z = x+y+1 \rightsquigarrow z' = 1+y' \Leftrightarrow z'-1 = y'$

$$y' = (x+y+1)^2 \rightsquigarrow z'-1 = z^2 \Leftrightarrow z' = 1+z^2 \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = 1+z^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+z^2}dz = dx$$

Integrando $\int \frac{1}{1+z^2}dz = \int dx \Leftrightarrow \operatorname{arctg} z = x+c,\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \operatorname{tg}(x+c),\ c \in \mathbb{R}$ $\quad$ $z = x+y+1$

$$x+y+1 = \operatorname{tg}(x+c),\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{y = \operatorname{tg}(x+c) - x - 1,\ c \in \mathbb{R}}$$

3) $y' = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$ $\quad a_1 = 1 \quad b_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad b_2 = -1$ $\quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1\times(-1) - 1\times 1 = -2 \neq 0$

Mudança de variável: $\begin{cases} x = u+\alpha \\ y = w+\beta \end{cases}$ onde α e β são soluções do sistema $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+4=0 \\ \alpha-\beta-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta-4 \\ -\beta-4-\beta-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rule{1cm}{0.4pt} \\ -2\beta = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -(-5)-4 = 1 \\ \beta = -5 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = u+1 \\ y = w-5 \end{cases} \rightsquigarrow y' = w'$$

Então $y' = \dfrac{x+y+4}{x-y-6} \rightsquigarrow w' = \dfrac{u+1+w-5+4}{u+1-(w-5)-6} \Leftrightarrow \boxed{w' = \dfrac{u+w}{u-w}}$

↳ Verificar em T.P.C. que é uma EDO homogénea

Nova mudança de variável

↳ $w = zu \rightsquigarrow w' = z'u + z$

$$w' = \frac{u+w}{u-w} \rightsquigarrow z'u + z = \frac{u+zu}{u-zu} \Leftrightarrow z'u + z = \frac{\cancel{u}(1+z)}{\cancel{u}(1-z)} \Leftrightarrow z'u = \frac{1+z}{1-z} - \frac{z}{1}_{\times(1-z)}$$

$$\Leftrightarrow z'u = \frac{1+\cancel{z}-\cancel{z}+z^2}{1-z} \Leftrightarrow \boxed{z'u = \frac{1+z^2}{1-z}}$$ EDO de variáveis separáveis

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{du}\times u = \frac{1+z^2}{1-z} \Leftrightarrow \frac{1-z}{1+z^2}dz = \frac{1}{u}du$$

Integrando

$$\int \frac{1-z}{1+z^2}dz = \int \frac{1}{u}du \Leftrightarrow \int \frac{1}{1+z^2}dz - \frac{1}{2}\int \frac{2z}{1+z^2}dz = \int \frac{1}{u}du \Leftrightarrow \operatorname{arctg}(z) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln|u| + c,\ c\in\mathbb{R}$$

Mudanças de variáveis inversas: $z = \dfrac{w}{u} = \dfrac{y+5}{x-1} \rightsquigarrow \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y+5}{x-1}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\left(\dfrac{y+5}{x-1}\right)^2\right) = \ln|x-1| + c,\ c\in\mathbb{R}$