Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3 22 de junho de 2017

Exame Final Duração: 2h30m

Justifique todas as respostas. O formulário encontra-se no verso.

---

1. [**20**] Considere a função $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-\beta^2)$ (onde $\beta > 0$ é um parâmetro).
   (a) Determine o domínio e as curvas de nível da função f.
   (b) Obtenha uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2\beta, 0)$.

2. [**20**] Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = (x-y)^2 - x^4 - y^4$.

3. [**20**] Calcule os valores máximo e mínimo da função $f(x,y,z) = z + 2y$ no conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9\}$.

4. [**50**] Resolva as seguintes equações diferenciais.
   (a) $y' = e^{x+y}$;
   (b) $(3x^2y^2 + ye^{xy})\,dx + (2yx^3 + xe^{xy})\,dy = 0$;
   (c) $y''' + 2y'' + y' = -\cos x$.

5. [**25**] Resolva o seguinte problema de valores iniciais usando transformadas de Laplace:

$$y' + 2y = 4te^{-2t}, \qquad y(0) = -3.$$

6. [**30**] Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{n+1}}{n}(x+3)^n$.
   (a) Determine o domínio de convergência da série dada, indicando os pontos onde a convergência é simples e absoluta.
   (b) Explicite a soma $f(x)$ da série.

7. [**20**] Considere uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ com raio de convergência $R > 0$. Mostre que a série é uniformemente convergente em cada intervalo da forma $[-b, b]$, com $0 < b < R$.

(continua)

8. [**15**] Determine a série de Fourier da função f, periódica de período 2π, dada por

$$f(x) = \begin{cases} -2\,, & -\pi < x < 0, \\ 0\,, & x = 0, \\ 2\,, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Formulário (Transformadas de Laplace)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f; \qquad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad s > s_g$$

função	transformada
$t^n \;\; (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\; s > 0$
$e^{at} \;\; (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}\,,\; s > a$
$\operatorname{sen}(at) \;\; (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\; s > 0$
$\cos(at) \;\; (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\; s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \;\; (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\; s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \;\; (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\; s > \lvert a\rvert$
$e^{\lambda t} f(t) \;\; (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t) f(t-a) \;\; (a > 0)$	$e^{-as} F(s)$
$f(at) \;\; (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \;\; (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \;\; (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \;\; (n \in \mathbb{N})$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \;\; (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$

Nota: Em geral, nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas indicadas. Em alguns casos são omitidas as restrições ao domínio das transformadas.