Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3 5 de abril de 2017

1.º Teste de Avaliação Discreta Duração: 2h

Justifique as suas respostas e indique os cálculos efetuados.

---

1. **[55]** Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xye^{x-y}$.
   (a) Determine os pontos críticos de f e classifique-os.
   (b) Justifique que f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio e obtenha uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,2,4)$.
   (c) Determine a derivada direcional de f no ponto $(2,2)$ segundo um qualquer vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

2. **[35]** Seja g a função dada por $g(x,y) = 2x^2 + y^2$. Justifique que g possui extremos absolutos no círculo
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+1)^2 \leq 4\}$$
e determine tais extremos.

3. **[15]** Calcule o valor máximo e o valor mínimo da função $h(x,y,z) = x - 2y + 2z$ na superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

4. **[25]** Resolva o seguinte problema de Cauchy:
$$(x^2+1)\cos y\, y' + x \operatorname{sen} y = 0\,, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}.$$

5. **[25]** Considere a equação diferencial de primeira ordem
$$(2xy - 9x^2)\,dx + (2y + x^2 + 1)\,dy = 0.$$
Justifique que se trata de uma EDO exata e resolva-a.

6. **[30]** Uma equação diferencial de Bernoulli é uma EDO da forma
$$y' + a(x)\,y = b(x)\,y^{\alpha}\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$
(onde $a(x)$ e $b(x)$ são funções contínuas num dado intervalo).
   (a) Mostre que a mudança de variável dada por $z = y^{1-\alpha}$ transforma a equação anterior numa EDO linear.
   (b) Resolva a equação diferencial $y' = y + e^{-3x}y^4$.

7. **[15]** Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - 10y' + 25y = 0$.