Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 4** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 23/03, 16h30

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 17 a 21 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 13 e 14 — **Série de Taylor**

Seja f uma função com derivadas finitas de todas as ordens num ponto $c \in \mathbb{R}$

Série de Taylor da função f no ponto c

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$

Nota: Se $\boxed{c=0}$ chama-se série de Maclaurin

Exemplo: Pelo slide 4 temos que a série de Maclaurin de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

e que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $-1 < x < 1$.

Exercício 1: Determinar a série de Maclaurin de $f(x) = e^x$.

Slides 15 a 17

Função analítica: uma função diz-se analítica num ponto se for possível representá-la por uma série de potências centrada nesse ponto (num intervalo aberto centrado nesse ponto)

Nota: Existem funções que não são analíticas num dado ponto.
(Ver observação 1.10 da pág 19 dos apontamentos)

Sejam I um intervalo, $c \in I$ e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em I.

Teorema slide 16: Para todo o $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \iff \lim_{n\to+\infty} \overbrace{R_c^n f(x)}^{\text{Resto de Lagrange}} = 0$$

Teorema slide 17: Se existir $M > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

então $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \ \forall x \in I$$

Exercício 2: Mostrar que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Exercício 3: Determinar a série de MacLaurin das seguintes funções, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.

a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = \frac{1}{1+8x}$

d) $f(x) = x e^{-2x}$

e) $f(x) = \frac{1}{5-3x}$

f) $f(x) = \frac{4}{4-x^2}$

g) $f(x) = \operatorname{senh} x$

h) $f(x) = \cosh x$

Nota: $\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$

Exercício 4: Desenvolver a função $f(x) = \frac{1}{11-3x}$ em série de potências de $x-2$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.

Exercício 5: Calcular a soma das séries numéricas:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$

Desenvolvimentos em série de Maclaurin (formulário exame)

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad , \forall x \in]-1,1[$
- $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

TPCs: Folha prática 1: 10, 11

Exames anos anteriores

- 1º Teste, 13/04/2018 → Ex. 3a ; Ex. 2
- Ex. Final, 13/06/2018 → Ex. 2