Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3 13 de junho de 2018

2.º Teste de Avaliação Discreta

Duração: 2h

Nota: Justifique devidamente as suas respostas. O formulário encontra-se no verso.

---

1. **[50]** Considere a função f definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = x^3 - x^2 + xy^2 - y^2$.
   (a) Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 1, -1)$.
   (b) Calcule as derivadas direcionais $D_{\vec{u}} f(0, 1)$ segundo um qualquer vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$.
   (c) Determine os pontos críticos de f e classifique-os (minimizante local, maximizante local ou ponto de sela).

2. **[20]** Considere a função $f(x, y) = 1 - x$. Justifique que f possui extremos absolutos no círculo $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e calcule tais extremos.

3. **[35]** Resolva as seguintes equações diferenciais:
   (a) $y' = (2 - y)^2 \operatorname{sen} x$;
   (b) $(2x \cos y + 3x^2 y)\, dx + (x^3 - 2y - x^2 \operatorname{sen} y)\, dy = 0$.

4. **[30]** Determine a solução geral da equação diferencial $y'' + y' - 6y = 50xe^{2x}$. (**Sug.:** use o método dos coeficientes indeterminados.)

5. **[40]** Considere o problema de Cauchy de primeira ordem

$$y' - y = 2e^t, \quad y(0) = -1.$$

   (a) Determine a solução do problema começando por resolver a equação diferencial através de um fator integrante.
   (b) Resolva o mesmo problema de Cauchy, usando agora transformadas de Laplace.

6. **[10]** Calcule a transformada inversa de Laplace da função $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + 4s + 5}$.

7. **[15]** Considere uma EDO linear de segunda ordem num dado intervalo I:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \quad x \in I. \tag{1}$$

   Mostre que se g é solução da EDO (1) e h é solução da equação homogénea associada, então $g + h$ é também solução da EDO (1).

Algumas fórmulas de derivação

$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^{\alpha})' = \alpha\, f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\, a^f\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\mathrm{sen}\, f)' = f'\, \cos f$	$(\cos f)' = -f'\, \mathrm{sen}\, f$
$(\mathrm{tg}\, f)' = f'\, \sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\mathrm{cotg}\, f)' = -f'\, \mathrm{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\mathrm{sen}^2 f}$
$(\mathrm{arcsen}\ f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos\ f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\mathrm{arctg}\ f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\mathrm{arccotg}\ f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Algumas transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$\mathrm{e}^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\mathrm{sen}\,(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\mathrm{senh}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a \rvert$
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a \rvert$

função	transformada
$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t) f(t-a) \quad (a > 0)$	$e^{-as} F(s)$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$