Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 14** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 04/05, 16h30

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slide 3 **Extremos** Novos slides → Capítulo 3, parte 2

Definição: Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p \in D$. Diz-se que:

- $f(p)$ é o **máximo global** (ou **absoluto**) de f se $f(x) \leq f(p), \forall x \in D$
- $f(p)$ é o **mínimo global** (ou **absoluto**) de f se $f(x) \geq f(p), \forall x \in D$
- $f(p)$ é um **máximo local** (ou **relativo**) de f se existir $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(p), \forall x \in D \cap B_r(p)$
- $f(p)$ é um **mínimo local** (ou **relativo**) de f se existir $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(p), \forall x \in D \cap B_r(p)$
- **Extremos** → Máximos ou mínimos
- **Extremantes** → pontos p onde os extremos são atingidos
  ↳ **maximizantes** ou **minimizantes**

Slide 4 **Existência de extremos globais**

Teorema de Weierstrass

$$\left.\begin{array}{l} f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ contínua} \\ D \text{ fechado e limitado} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f \text{ atinge em } D \text{ o mínimo e máximo globais}}$$

Exercício 1: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

a) Calcule o domínio de f.

b) Justifique que f tem máximo e mínimo globais em D

Exercício 2: Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = (x+3)^2 + (y-2)^2 + 5$.

a) Mostrar que f atinge mínimo global em $(-3;2)$.

b) Justifique que f não possui máximo global.
Isso contradiz o Teorema de Weierstrass?

Slides 5 e 6 **Existência de extremos locais**

Teorema de Fermat: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $p \in int(D)$.

$f(p)$ é um extremante de f $\Rightarrow$ $\nabla f(p) = (0, \dots, 0)$
$\not\Leftarrow$

Definição: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $p \in int(D)$.

- p é um **ponto crítico de f** se $\nabla f(p) = (0, \dots, 0)$
- p é um **ponto de sela de f** se é ponto crítico de f mas não é seu extremante.

Exercício 3: Determine os pontos críticos de $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Nota: Veremos no exercício 6a) quais destes pontos críticos são extremantes e quais são pontos de sela.

Slide 7 **Matriz Hessiana**

Definição: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p \in int(D)$. Se existem as derivadas parciais de 2.ª ordem de f em p, a **matriz Hessiana de f em p** é:

$$H_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{bmatrix}$$

$n = 2$

$$H_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix}$$

$n = 3$

$$H_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p) \end{bmatrix}$$

Nota: Se f for de classe C^2 numa bola centrada em p, pelo Teorema de Schwarz, todos os pares de derivadas mistas são iguais $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p), \ i \neq j}$

Cálculo de determinantes

↳ recordar na disciplina de ALGA

Notações: Seja A uma matriz quadrada.
Determinante de A ⟶ $\det(A)$ ou $|A|$

Definição: O determinante da matriz Hessiana chama-se **hessiano**.
↳ $\det(Hf(p))$

Slides 10 a 12

Classificação de pontos críticos

Teste das segundas derivadas ⟶ só se pode usar com 2 variáveis

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathrm{int}(D)$.
Suponha-se que $\nabla f(a,b) = (0,0)$ e f é de classe C^2 numa bola centrada em (a,b).

- Se $\det(Hf(a,b)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, então $f(a,b)$ é **mínimo local**.
- Se $\det(Hf(a,b)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, então $f(a,b)$ é **máximo local**.
- Se $\det(Hf(a,b)) < 0$, então (a,b) é **ponto de sela** de f.
- Se $\det(Hf(a,b)) = 0$, nada se pode concluir.

Exercício 4: Determine e classifique os pontos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 15$.

Exercício 5: Mostre que a função anterior não atinge máximo global nem mínimo global em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 6: Determine e classifique os pontos críticos das seguintes funções:

a) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

b) $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 8x - 10y - 13$

c) $f(x,y) = x^4 + y^2 + y^6$

d) $f(x,y) = x^3 + y^2 + y^6$

TPCs: Folha prática 3 : 17 até 28

Teste 1, 10/04/2019 → Ex. 6 ; 7c)

Ex. Final, 19/06/2019 → Ex. 3 b)