Cálculo II – 2020/2021

Aula 17 1/2

Planificação **Aula 17** (presencial)

TP4D-1: 5ª feira, 13/05, 14h ; TP4D-2: 5ª feira, 13/05, 16h ; TP4D-3: 6ª feira, 14/05, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 12/05, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 14/05, 14h

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 17 a 20 **Extremos Condicionados**

Objetivo: Determinar os extremantes de $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em D, que satisfazem a condição $g(x,y)=0$ $\rightsquigarrow$ Max/Min $f(x,y)$ sujeito a $g(x,y)=0$

Método dos Multiplicadores de Lagrange (M.M.L.)

↳ usa-se para determinar extremos condicionados

Teorema: Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, $f: D \to \mathbb{R}$ e $g: D \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 em D e $C = \{(x,y) \in D : g(x,y) = k\}$, para algum $k \in \mathbb{R}$ dado.
Se $p = (x_0,y_0) \in C$ é um extremante da restrição de f a C e $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$.

Notas: • O teorema anterior também é válido para n variáveis (ver slide 18)

• $\lambda \in \mathbb{R}$ chamam-se multiplicadores de Lagrange.

Geometricamente: Se $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$ e $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$ então (x_0,y_0) é o ponto onde a curva de nível de f é tangente à curva $g(x,y)=k$.
(ver slide 17 e ficheiro geogebra enviado por email)

Procedimento

1.º Passo: Resolver o sistema $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$, com $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$.

2.º Passo: Verificar se existem pontos tais que $\nabla g(x,y) = (0,0)$ e $g(x,y) = k$.

3.º Passo: Calcular o valor de f nos pontos encontrados nos passos 1 e 2 e ver quais são os extremos.

Exercício 1: Considere a função $f(x,y) = 4x+6y$ e a circunferência $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 13\}$.

a) Justifique que f possui extremos globais no conjunto C.

b) Calcule os extremos de f em C.

Exercício 2: Calcule os extremos condicionados de $f(x,y) = x^2y$ no conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 = 6\}$.

Exercício 3: Determine os pontos da superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=4$ que estão mais próximo e mais distante do ponto $(3,1,-1)$.

TPCs: Folha prática 3: 32, 33, 34, 39

2.º Teste, 19/06/2019 → Ex. 1

Ex. Recurso, 02/07/2018 → Ex. 5

Ex. Final, 22/06/2017 → Ex. 3