Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4

2020/21

Folha 2: Séries de Funções (em geral) — Série de Taylor (rev.) — Série de Fourier

1. Considere a série de funções

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

- (a) Mostre que a série converge uniformemente em \mathbb{R} .
- (b) Justifique que a função (soma) S(x) é contínua em \mathbb{R} .
- 2. Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

- (b) $\cosh x$; (c) $\sinh(3x)$; (d) $2\cos^2 x$; (e) $\frac{1}{4+|x|^2}$

3. Calcule a (função) soma das séries seguintes:

(a)
$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

(b) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots + (-1)^n x^{3n} + \dots$

- (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $\ln(x+1)$. (Sugestão: desenvolva primeiro a função $\frac{1}{x+1}$ em série de MacLaurin).
 - (b) Calcule a soma da série

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

5. Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a f(a), onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

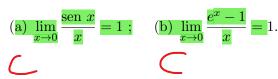
(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$$
; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (n+1)}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$.

(a) Verifique que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ tem raio de convergência igual a 2.

(b) Seja
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$$
, $-2 < x < 2$. Explicite $f(x)$.

(Sugestão: use a representação em série de potências de $\frac{1}{1-x}$).

7. Usando representações adequadas em série de potências, justifique que:

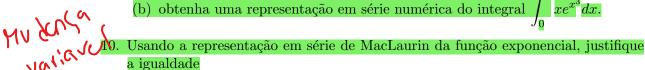


8. Considere a série de potências
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}.$$

- (a) Determine o maior subconjunto de \mathbb{R} no qual a série é absolutamente conver-
- (b) Calcule f'(4), onde $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$ (f definida no domínio de convergência da série).

9. Sabendo que
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
 para todo $x \in \mathbb{R}$:

- (a) obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x) = xe^{x^2}$ e indique o maior subconjunto de \mathbb{R} em que esta representação é válida;
- (b) obtenha uma representação em série numérica do integral $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{x^3} dx$.



$$\left(e^{x^2}\right)' = 2x e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Seja
$$f(x) = x e^{-x}, x \in \mathbb{R}$$
.

- (a) Desenvolva f(x) em série de MacLaurin.
- (b) Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)2^n}{n!}$
- (c) Usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, obtenha um majorante para o erro cometido ao aproximar f(x) por $T_0^2 f(x)$ no intervalo]0,0.1].

12. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

(a)
$$f(x) = x + x^2$$
, $x \in [-\pi, \pi[$;

(b)
$$g(x) = e^x$$
, $x \in [-\pi, \pi[;$

(c)
$$h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

- 13. Considere a função constante f(x) = 2 no intervalo $[0, \pi]$. Determine a série de Fourier de senos e a série de Fourier de cossenos de f e represente graficamente as respetivas somas no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.
- 14. Determine a série de Fourier de senos da função f dada $f(x) = \cos x$ em $[0,\pi]$. Qual será a sua série de Fourier de cossenos?
- 15. Considere a função f, 2π -periódica, definida por $f(x) = x^2$, $-\pi \le x \le \pi$.
 - (a) Determine a série de Fourier de f.
 - (b) Mostre que

$$x^{2} = \frac{\pi^{2}}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{4}{n^{2}} \cos(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

(c) Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

- (d) Verifique que a série de Fourier de f é uniformemente convergente em \mathbb{R} .
- (e) Justifique que

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \operatorname{sen}(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

- 16. Seja f a função 2π -periódica tal que $f(x) = |{\rm sen}\, x|, \ -\pi \le x \le \pi.$
 - (a) Mostre que a série de Fourier associada é

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$

- (b) Verifique que a série da alínea anterior é uniformemente convergente em $\mathbb R$ e identifique a sua soma, s(x).
- (c) Esboce o gráfico da soma s(x) no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.
- (d) Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 1}.$

