Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 7** (E@D)

TP4D-1: 5ª feira, 08/04, 14h ; TP4D-2: 5ª feira, 08/04, 16h ; TP4D-3: 6ª feira, 09/04, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 07/04, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 08/04, 14h

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 37 a 45 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 34 e 35 — Funções Periódicas

Definição:
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica se existir $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Ao menor valor de T chamamos período de f.
- Neste caso, dizemos que f é T-periódica.

Observação: Só vamos considerar funções 2π-periódicas.
(Ver observação 2.11 da pág 38 dos apontamentos teóricos)

Slides 36 a 41 — Séries de Fourier

Definição: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e integrável em $[-\pi, \pi]$.
Chama-se série de Fourier associada à função f à série de funções:

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right]}$$

onde

- $a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$
- $a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$
- $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$

→ Coeficientes da série de Fourier

Para exprimir que a série está associada à função f escrevemos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right]$$

Observação: Ver na pág. 39 dos apontamentos teóricos como se obtêm as fórmulas de a_0, a_n e b_n da definição anterior.

Observações:
- Os coeficientes de Fourier podem ser calculados usando qualquer intervalo da forma $[a; a+2\pi]$, com $a \in \mathbb{R}$.
(ver observação 2.13 da página 41 dos apontamentos teóricos)

- Uma série de Fourier nem sempre converge. Caso seja convergente, a sua soma é 2π-periódica, mas pode ser diferente de f.
(iremos abordar este assunto na próxima aula)

Exercício 1: Faça um esboço e determine a série de Fourier das seguintes funções 2π-periódicas, definidas em $[-\pi, \pi[$ por

a) $f(x) = \begin{cases} 0 \ , & -\pi \leq x < 0 \\ \pi \ , & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

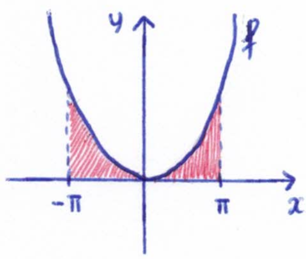
b) $f(x) = x$, em $[-\pi, \pi[$

Funções Pares e Funções Ímpares

Definição:
- f é par se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$ (simétrica em relação ao eixo dos yy)
- f é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$ (simétrica em relação à origem e $f(0)=0$)

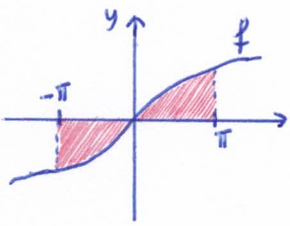
Observações:

- f é par $\rightsquigarrow$



$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

- f é ímpar $\rightsquigarrow$



$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

- função par × função par = função par
- função par × função ímpar = função ímpar
- função ímpar × função ímpar = função par

- $f(x) = \cos x \rightarrow$ função par
- $f(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow$ função ímpar

As observações anteriores permitem-nos simplificar os cálculos dos coeficientes de Fourier quando as funções são pares ou ímpares.

Por exemplo, se f é par: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}\,\underbrace{\cos(nx)}}_{\text{par} \times \text{par} = \text{par}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$

Série de Fourier de funções pares (série de cossenos)

Se f é par: $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$; $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$; $b_n = 0$

Série de Fourier de funções ímpares (série de senos)

Se f é ímpar: $a_0 = 0$; $a_n = 0$; $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx$

Exercício 2: Faça um esboço e determine a série de Fourier das seguintes funções 2π-periódicas definidas em $[-\pi,\pi[$ por

a) $f(x) = |x|$, em $[-\pi,\pi[$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0[\\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \in]0,\pi[\end{cases}$

$\boxed{\text{Slides 42 a 47}}$ Extensões periódicas $\rightsquigarrow$ Séries de Fourier de cossenos e de senos

Observação: Se uma função estiver definida apenas num intervalo de amplitude 2π, podemos estendê-la a todo o $\mathbb{R}$ de forma única tornando-a 2π periódica. Assim, calculamos a sua série de Fourier como explicado anteriormente. (Ver mais detalhes no slide 42 e observação 2.16 da pág. 43 dos apontamentos)

Definição: Seja $f: [0,\pi] \to \mathbb{R}$ uma função integrável

- Extensão par de f: $f_p : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $f_p(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\ f(x) & \text{se } 0 \le x \le \pi \end{cases}$

  ↳ $b_n = 0 \rightsquigarrow$ Série de Fourier de cossenos

- Extensão ímpar de f: $f_i : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $f_i(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ f(x) & \text{se } 0 < x \le \pi \end{cases}$

  ↳ $a_0 = 0$; $a_n = 0 \rightsquigarrow$ Série de Fourier de senos

Exercício 3: Seja $f(x) = x$, com $x \in [0, \pi]$. Determine:

a) A série de Fourier de cossenos de f.

b) A série de Fourier de senos de f.

TPCs: Exame recurso, 08/07/2019 → Ex. 2

1.º Teste, 13/04/2018 → Ex. 5

Exame final, 13/06/2018 → Ex. 3

Exame final, 22/06/2017 → Ex. 8

Folha prática 2: 12a), 12b), 14 (exercícios trabalhosos)

Completar a prova da pág. 39 dos apontamentos teóricos para obter a_n e b_n

Recordar

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Integração Por Partes}\\ \int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dx\end{array}}$$

$$v \xrightarrow{\text{derivar}} v'$$

$$u' \xrightarrow{\text{primitivar}} u$$

Exemplo: $\int_0^\pi x\cos(3x)\,dx = \left[\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)\times x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)\times 1\,dx$

$v = x \longrightarrow v' = 1$

$u' = \cos(3x) \longrightarrow u = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)$

C. aux.

$C = 0$

$\frac{1}{3}\int 3\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + C,$ $C \in \mathbb{R}$

$u = 3x$

$u' = (3x)' = 3$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3\pi)\times\pi - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3\times 0)\times 0}_{=0} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\int_0^\pi 3\operatorname{sen}(3x)\,dx$$

C. aux

$u = 3x$

$u' = 3$

$$= -\frac{1}{9}\times\left[-\cos(3x)\right]_0^\pi$$

$$= -\frac{1}{9}\times\left(-\cos(3\pi) + \cos(0)\right)$$

$$= -\frac{1}{9}\times\left(-(-1) + 1\right) = -\frac{2}{9}$$