Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 19** (presencial)

TP4D-1: 5ª feira, 20/05, 14h ; TP4D-2: 5ª feira, 20/05, 16h ; TP4D-3: 6ª feira, 21/05, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 19/05, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 21/05, 14h

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 51 a 65 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Nota: Resolver antes da aula os integrais da pág. 5 desta planificação

Slides 1 a 6 (novos slides) **Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)**

Equações que estabelecem uma relação entre a variável independente, a função desconhecida e as suas derivadas.

Nota: Esta matéria é das mais usadas na resolução de imensos problemas de engenharia e de ciências ⇝ ver exemplos das pág. 51 a 54 dos apontamentos

Notação: $y^{(k)}$ ou $\dfrac{d^k y}{dx^k}$ ⇝ derivada de ordem k de y em ordem a x

Definição: Chama-se equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n ($n \in \mathbb{N}$), a uma equação do tipo $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

ou, equivalentemente, $F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dots, \dfrac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$

onde : x ⇝ variável independente

$y \equiv y(x)$ ⇝ função desconhecida que depende de x

Exemplos: a) $xy' + y = 0$ ⇝ EDO de ordem 1

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x^2 \operatorname{sen}(x) - 2xy'$ ⇝ EDO de ordem 2

c) $(y')^2 + y = \cos x$ ⇝ EDO de ordem 1

Definição: Dizemos que uma EDO está na forma normal quando está escrita na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Exemplo: Das 3 EDO anteriores, apenas a da alínea b) está escrita na forma normal.

Slides 7 a 9

Solução de uma EDO

Definição: Chama-se **solução da EDO** $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$, num intervalo I, a toda a função $\varphi: I \to \mathbb{R}$ com derivadas finitas até à ordem n tal que

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\dots,\varphi^{(n)}(x))=0 \ , \ \forall x \in I$$

Exercício 1: Mostre que $\varphi(x)=\operatorname{sen}(2x)$ é uma solução da EDO $y''+4y=0$.

Terminologia associada a uma EDO de ordem n

- **Integral geral:** família de soluções obtidas por técnicas de integração adequadas, dependente de n constantes arbitrárias
- **Solução particular:** solução obtida do integral geral por concretização das constantes arbitrárias.
- **Solução singular:** solução da EDO que não se obtém do integral geral.
- **Solução geral:** conjunto de todas as soluções de uma EDO.

Notas:

- Uma EDO do tipo $y'=f(x)$, $x\in I$, tem solução geral $y=\int f(x)dx + c$, $c\in\mathbb{R}$ $(x \in I)$
- A EDO $y^{(n)}=f(x)$ resolve-se por n integrações sucessivas.

Exercício 2: Determine a solução geral da EDO $y''-\cos x=0$, $x\in\mathbb{R}$.

Exercício 3: Considere a EDO $(y')^2-4y=0$.

a) Verifique que $y=(x+c)^2$ é solução da EDO, $\forall c\in\mathbb{R}$.

b) Verifique que $y=x^2$ é uma solução particular da EDO. Indique outra.

c) Mostre que $y=0$ é solução da EDO. Como se classifica essa solução?

Exercício 4: Determinar a EDO correspondente à solução $y=c_1x^3+c_2$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Exercício 5: Determinar a EDO correspondente à solução $y=\ln(x^2+c)$, $c\in\mathbb{R}$.

Slides 10 a 12 **Problemas de Valores Iniciais (PVI)**
(ou Problemas de Cauchy)

Definição: Chama-se **problema de valores iniciais** (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma EDO de ordem n satisfazendo n condições dadas (ditas condições iniciais) num mesmo ponto x_0:

$$\begin{cases} F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \ , \ y'(x_0) = y_1 \ , \dots , \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad , \ x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$$

Notas:
- Nem todo o PVI tem solução $\rightsquigarrow$ ver ex. 4.11 da pág 61 dos apontamentos
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única $\rightsquigarrow$ ex. 4.10, pág 61

Exercício 6: Determine a solução do seguinte PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Problema de valores fronteiros $\rightarrow$ ver definição e exemplo no slide 12

Slides 13 a 15 **EDOs de Variáveis Separáveis**

Definição: A EDO $y' = f(x,y)$ diz-se de **variáveis separáveis** se puder ser escrita na forma

$$\boxed{y' = \frac{p(x)}{q(y)}}$$

$p(x) \rightarrow$ função que só depende de x
$q(y) \rightarrow$ " " " " " y

com p e q funções contínuas e $q(y) \neq 0$

Exemplo: $y' = \frac{2x}{y}$ é uma EDO de variáveis separáveis com $p(x) = 2x$ e $q(y) = y$.

Nota: Como $y' = \frac{dy}{dx}$ temos que

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)} \iff \boxed{q(y)\,dy = p(x)\,dx}$$

Procedimento para resolver uma EDO de variáveis separáveis

- Escrever a EDO na forma $q(y)dy = p(x)dx$
- Integrar ambos os membros da eq. anterior obtendo
$$\boxed{\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx}$$

Exercício 7: Determinar o integral geral da EDO $y' = \frac{2x}{y}$.

Exercício 8: Determinar a solução do PVI $y' = \frac{2x}{y}$ e $y(1) = 0$.

Exercício 9: Determinar o integral geral das EDOs:

a) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$

b) $y' \operatorname{sen}(x) + y\cos x = 0$

c) $y' \times e^{y-x^2} = 2x + xe^y$

Exercício 10: Determinar a solução da EDO $(1-x^2)y' - xy = xy^2$ que satisfaz $y(0) = 0{,}5$.

TPCs: Folha prática 4: 1 até 7

2.º Teste, 19/06/2019 → Ex. 2a)

Ex. Recurso, 08/07/2019 → Ex. 5a)

2.º Teste, 13/06/2018 → Ex. 3a)

Ex. Recurso, 02/07/2018 → Ex. 6a)

1.º Teste, 05/04/2017 → Ex. 4

Ex. Final, 22/06/2017 → Ex. 4a)

Ex. Recurso, 10/07/2017 → Ex. 4a)

Integrais para resolver antes da aula

a) $\int x^2 \cos(x^3)\,dx$

b) $\int \frac{x}{(5+x^2)^7}\,dx$

c) $\int \frac{3}{1+4x^2}\,dx$

d) $\int x^4 \ln x\,dx$ ⇝ por partes

e) $\int \frac{-x+7}{(x-1)(x-2)}$ ⇝ função racional

Soluções

a) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}(x^3)+c,\ c\in\mathbb{R}$

b) $-\frac{1}{12(5+x^2)^6}+c,\ c\in\mathbb{R}$

c) $\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(2x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

d) $\frac{x^5}{5}\left(\ln x-\frac{1}{5}\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$

e) $2\ln|x-1|-3\ln|x+2|+c,\ c\in\mathbb{R}$

Integração de funções racionais ⇝ Exercício resolvido

$$\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx = \int\left(\frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-2}\right)dx = 3\ln|x-3|-2\ln|x-2|+c,\ c\in\mathbb{R}$$

↳ ver c.aux.

C.aux. • $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x=3 \vee x=2$

Logo $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

• $$\frac{x}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{\underset{\times(x-2)}{x-3}} + \frac{B}{\underset{\times(x-3)}{x-2}}$$

$\Leftrightarrow x = A(x-2)+B(x-3) \Leftrightarrow x = Ax-2A+Bx-3B$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A-3B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1-B \\ -2(1-B)-3B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \end{cases}$$