Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3 2 de julho de 2018

Exame da Época de Recurso Duração: 2h30

Nota: Justifique devidamente as suas respostas. O formulário encontra-se no verso.

---

1. [**30**] Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1}\,(x-1)^n$.
   Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.

2. [**20**] Represente em série de MacLaurin a função $f(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)^2}$, indicando o maior intervalo onde tal representação é válida.
   (Sug.: comece por representar $\dfrac{1}{1-x^2}$ e derive a série correspondente)

3. [**20**] Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências com raio de convergência igual a 2. Indique, justificando:
   (a) Um intervalo onde a série é uniformemente convergente;
   (b) A natureza da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

4. [**30**] Determine e classifique os pontos críticos da função g definida em $\mathbb{R}^2$ por
   $$g(x,y) = y^3 + x^2 + xy.$$

5. [**25**] Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x + y$ e a superfície esférica
   $$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$
   (a) Justifique que f possui extremos absolutos no conjunto S.
   (b) Calcule os extremos de f em S.

6. [**45**] Resolva as seguintes equações diferenciais:
   (a) $3(1+e^x)y^2y' = e^x$;
   (b) $x\cos(y/x)\,y' = x + y\cos(y/x)$; (Sug.: efetue a mudança de variável $y = zx$)
   (c) $y'' - 6y' + 8y = x$.

7. [**30**] Resolva o seguinte problema de Cauchy usando transformadas de Laplace:
   $$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Algumas fórmulas de derivação

$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha\, f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\, a^f\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f' \cos f$	$(\cos f)' = -f' \operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f' \sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f' \operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in]-1,1[$
- $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

Algumas transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

função	transformada
$t^n \ \ (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$\mathrm{e}^{at} \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$

função	transformada
$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t) f(t-a) \ \ (a > 0)$	$e^{-as} F(s)$
$f(at) \ \ (a > 0)$	$\frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$