Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 3** (E@D)

TP4D-1: 5ª feira, 18/03, 14h ; TP4D-2: 5ª feira, 18/03, 16h ; TP4D-3: 6ª feira, 19/03, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 17/03, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 19/03, 14h

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 11 a 17 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 9 e 10 — Polinómio de Taylor

Objetivo: usar polinómios para aproximar outras funções
(ver introdução ao tema nas págs. 11 e 12 dos apontamentos)

Notação: $f^{(k)}(c) \rightsquigarrow$ derivada de ordem k da função f no ponto c

Seja f uma função com derivadas finitas até à ordem $n \in \mathbb{N}$ num ponto $c \in \mathbb{R}$

Polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto c

$$\hookrightarrow \quad T_c^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Nota: Se $\boxed{c=0}$, $T_0^n f(x)$ chama-se polinómio de Maclaurin e fica

$$T_0^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Observação: $T_c^n f(x)$ é o único polinómio de grau menor ou igual a n que satisfaz as condições:

$$T_c^n f(c) = f(c) \quad ; \quad (T_c^n f)'(c) = f'(c) \; ; \; \cdots ; \; (T_c^n f)^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$$

Exercício 1: Calcular $T_0^2 (\cos x)$

Nota: Ver exemplos e observações das págs. 13 e 14 dos apontamentos

Slides 11 e 12 **Fórmula de Taylor**

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$.

Fórmula de Taylor com resto integral $\rightsquigarrow$ Ver Teorema 1.4 e observação 1.9. das págs 14 e 15 dos apontamentos

Fórmula de Taylor com resto de Lagrange de ordem n de f no ponto c

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{\text{polinómio de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}_{\text{Resto de Lagrange}}, \quad \forall x \in I \setminus \{c\}, \text{ para algum } \theta \text{ entre } c \text{ e } x$$

$$= T_c^n f(x) + R_c^n f(x)$$

<u>Nota</u>: Quando $n=0$, a fórmula anterior corresponde ao Teorema de Lagrange dado em cálculo I, pois assegura a existência de θ entre c e x tal que

$$f(x) = f(c) + f'(\theta)(x-c), \text{ ou seja, } \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(\theta)$$

<u>Nota</u>: O polinómio de Taylor é uma aproximação da função: $f(x) \approx T_c^n f(x)$

O erro cometido nessa aproximação corresponde ao Resto de Lagrange pois $f(x) - T_c^n f(x) = R_c^n f(x)$.

Majorante do erro ao utilizar $T_c^n f(x)$ para aproximar $f(x)$

Supondo que a derivada de ordem $(n+1)$ de f é contínua em $[a,b]$, com $c \in [a,b]$, e tomando $M = \sup_{y \in [a,b]} |f^{(n+1)}(y)|$, o <u>majorante do erro é dado por</u>

$$\boxed{|R_c^n f(x)| = |f(x) - T_c^n f(x)| \leq M \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}, \text{ onde } x \in [a,b]$$

<u>Nota</u>: Rever conceitos de majorantes e supremo no slide 19

Exercícios: 2) Calcular a fórmula de Taylor de ordem n de $f(x) = e^{3x}$ em torno de $c = 2$.

3) Seja $f(x) = \frac{1}{x+5}$.

a) Determinar a fórmula de MacLaurin de ordem n de f.

b) Usando o polinómio de MacLaurin de ordem 2 de f calcule um valor aproximado de $\frac{1}{6}$.

c) Determinar um majorante para o erro cometido na aproximação anterior.

4) a) Escrever a fórmula de Taylor de ordem 2 no ponto 1 da função $f(x) = \ln x$.

b) Calcule um valor aproximado de $\ln(1,2)$.

c) Mostrar que o erro cometido nessa aproximação é inferior a 0,003.

TPCs : Folha prática 1: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Exames dos anos anteriores

- 1.º Teste, 10/04/2019 → Ex. 3
- Exame final, 19/06/2019 → Ex. 2
- 2.º Teste, 22/06/2017 → Ex. 6