Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3 19 de junho de 2019

Exame Final (época normal) Duração: 2h30

Justifique devidamente as suas respostas. **O formulário encontra-se no verso.**

---

1. [**35**] Considere a série de potências $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,(4x-1)^n$.

   (a) Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.

   (b) Mostre que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ (para todo o x no intervalo de convergência da série).

2. [**20**] Considere a função $f(x) = e^{-2x}$.

   (a) Determine o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função f.

   (b) Usando o polinómio da alínea anterior, obtenha um valor aproximado de e^{-1} e indique um majorante para o erro cometido na aproximação, com base no resto de Lagrange.

3. [**40**] Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = 3 + x^3 + y^3 - 3xy$.

   (a) Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2,6)$.

   (b) Determine os pontos críticos de f e classifique-os (em minimizante local, maximizante local ou ponto de sela).

4. [**25**] Determine os extremos absolutos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = 3 + xy$, na circunferência $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 8\}$.

5. [**15**] Resolva a equação diferencial

$$y\cos x + 2xe^y + (x^2e^y - 1 + \operatorname{sen} x)\, y' = 0.$$

6. [**45**] Considere o seguinte problema de valores iniciais:

$$y'' - 6y' + 9y = 2e^{3t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

   (a) Resolva-o usando transformadas de Laplace.

   (b) Determine a solução do mesmo problema começando por resolver a respetiva equação pelo método dos coeficientes indeterminados.

7. [**20**] Considere a equação diferencial

$$y' = f(ax + by + c)\,, \tag{1}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$, e f é uma dada função contínua num certo intervalo I.

(**continua no verso**)

(a) Mostre que a substituição de variável $z = ax + by + c$ converte a equação (1) numa equação de variáveis separáveis (em x e z).

(b) Resolva a equação diferencial $y' = (x + y + 1)^2$.

Algumas fórmulas de derivação

$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha\, f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\, a^f\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f'\, \cos f$	$(\cos f)' = -f'\, \operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f'\, \sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f' \operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in]-1, 1[$
- $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

Algumas transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

função	transformada
$t^n \ \ (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$e^{at} \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$

função	transformada
$e^{\lambda t} f(t) \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t) f(t-a) \ \ (a > 0)$	$e^{-as} F(s)$
$f(at) \ \ (a > 0)$	$\frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$