Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 20** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 25/05, 16h30

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 66,67,71,72,73 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 20 a 22 — **EDOs homogéneas**

Definição: Uma função $f(x,y)$ diz-se homogénea de grau zero se

$\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)}$, $\forall (x,y) \in D_f$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ tais que $(\lambda x, \lambda y) \in D_f$

Exercício 1: Verifique se as seguintes funções são homogéneas de grau zero:

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+3y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + 2x$

Definição: Uma EDO $y' = f(x,y)$ diz-se homogénea se f é homogénea de grau zero.

Notas:
- Para resolver EDOs homogéneas usa-se a mudança de variável
  $\boxed{y = zx}$ (onde z depende de x)
- Tem-se que $y' = (zx)' = z'x + z\underbrace{x'}_{=1} \Leftrightarrow \boxed{y' = z'x + z}$
- Usando esta mudança de variável, a EDO original transforma-se numa EDO de variáveis separáveis, que se resolve como na aula 19.
- Para obter o integral geral da EDO original, aplica-se a mudança de variável inversa $\boxed{z = \dfrac{y}{x}}$.

Exercício 2: Verifique que as seguintes EDOs são homogéneas e determine o seu integral geral.

a) $x e^{y/x} y' = y e^{y/x} + x$

b) $(x^3+y^3)dx - y^2 x\, dy = 0$

⇝ EDOs redutíveis a EDOs homogéneas

Nota: Esta matéria não está nos slides. Ver na observação 4.4. da pág. 67 dos apontamentos um caso mais geral do que o apresentado nesta planificação.

Definição: Uma EDO redutível a EDO homogénea é uma EDO da forma

$$\boxed{y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}}, \text{ onde } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ e } \boxed{a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0}$$

Estas EDOs convertem-se em EDOs homogéneas efetuando as mudanças de variáveis

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = w + \beta \end{cases}$$

, onde α e β são constantes a determinar por forma a que se verifique o sistema

$$\begin{cases} a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0 \\ a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

Depois resolve-se a EDO homogénea obtida pelo processo dado antes.

Exercício 3: Determine o integral geral da EDO $y' = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$.

Exercício 4: Resolver o exercício 5 do 2.º teste de 19/06/2019

Nota: Os exercícios 3 e 4 serão resolvidos na OT a seguir à aula.

Slides 16 a 18 — **EDOs lineares de 1.ª ordem**

Definição: Uma EDO linear de 1.ª ordem é uma equação do tipo

$$\boxed{a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)}$$

onde a_1, a_0, b são funções definidas num intervalo I com $a_1(x) \neq 0, \forall x \in I$. Dividindo por $a_1(x)$, a EDO anterior é equivalente a

$$\boxed{y' + p(x)\, y = q(x)}$$

com $p(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $q(x) = \dfrac{b(x)}{a_1(x)}$.

Notas:
- $b(x) \neq 0$ (ou $q(x) \neq 0$) ⇝ EDO linear completa
- $b(x) = 0$ (ou $q(x) = 0$) ⇝ EDO linear homogénea

Atenção: Não confundir EDO linear homogénea com EDO homogénea

Exemplos: 1) $\ln(x)\, y' + e^x y = 3$ ⇝ EDO linear completa

2) $2x' + y^5 x = 0$ ⇝ EDO linear homogénea (na variável x)

3) $y y' + 3y = \cos x$ ⇝ não é EDO linear pois o coeficiente de y' depende de y

4) $y' + x e^y = \operatorname{sen} x$ ⇝ não é EDO linear por ter e^y

Procedimento para resolver EDOs lineares de 1ª ordem

1.º Passo: Escrever a EDO na forma $y' + p(x)\, y = q(x)$

2.º Passo: Determinar o fator integrante: $\boxed{\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}}$

3.º Passo: Multiplicar a EDO por $\mu(x)$ e simplificar

$$y' + p(x)\, y = q(x) \quad \big) \times \mu(x)$$

$$\mu(x)\, y' + \mu(x)\, p(x)\, y = \mu(x)\, q(x)$$

$$\Updownarrow \; ⊛$$

$$(\mu(x)\, y)' = \mu(x)\, q(x)$$

4.º Passo: Integrar a eq. obtida em ordem a x

$$(\mu(x)\, y)' = \mu(x)\, q(x) \quad \big) \text{ integrando}$$

$$\mu(x)\, y = \int \mu(x)\, q(x)\, dx \iff \boxed{y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\, q(x)\, dx}$$

⊛ Justificação desta passagem

$$(\mu(x)\, y)' = \mu'(x)\, y + \mu(x)\, y' \overset{\text{c. aux}}{=} \mu(x)\, p(x)\, y + \mu(x)\, y'$$

c. aux. $\mu'(x) = \left(e^{\int p(x)\,dx}\right)' = \underbrace{\left(\int p(x)\,dx\right)'}_{p(x)} \underbrace{e^{\int p(x)\,dx}}_{\mu(x)} = p(x) \times \mu(x) = \mu(x) \times p(x)$

Exercício 5: Resolver as seguintes EDOs:

a) $xy' - y = x - 1 \,,\ x > 0$

b) $y' + \left(2 + \frac{1}{x}\right) y = x e^{-2x} \,,\ x > 0$

$\boxed{\text{Slide } 19}$ Existência e unicidade do PVI linear

Teorema: Se p e q são funções contínuas num intervalo I, então o PVI

$$\begin{cases} y' + p(x)\, y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exercício 6: Resolver o PVI $\begin{cases} y' + y = \dfrac{x \cos x}{e^x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

TPCs: Folha prática 4: 8, 9, 10, 14, 15

2.º teste, 19/06/2019 → Ex. 2b)

2.º teste, 13/06/2018 → Ex. 5a)

Ex. Recurso, 02/07/2018 → Ex. 6b)