Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3

Soluções do exame da Época de Recurso (10 de julho de 2017)

---

1. (a) $4y + 25z - 13 = 0$.

   (b) Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tem-se $1 + x^2 + y^2 \geq 1$ e, portanto, $f(x, y) \leq 1$. Como $f(0, 0) = 1$ então este é o máximo absoluto da função f. Por outro lado, temos que $f(x, y) > 0$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como, por exemplo, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x, 0) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0^+$, então f não possui mínimo absoluto em $\mathbb{R}^2$.

   (c) O conjunto C é fechado e limitado em $\mathbb{R}^2$ e, por outro lado, f é contínua em C (pelas propriedades das funções contínuas). Nestas condições o Teorema de Weierstrass garante que f possui extremos absolutos em C. O máximo é $f(0, 0) = 1$ pois $(0, 0) \in C$ e já sabemos que o máximo absoluto de f é atingido em $(0, 0)$. Ora, a função f é diferenciável no interior de C e não possui aí pontos críticos distintos de $(0, 0)$. Então o mínimo absoluto de f em C é atingido na fronteira definida pela condição $x^2 + y^2 = 2$. Em tais pontos, o valor de f (logo o seu mínimo absoluto) é precisamente $\frac{1}{3}$.

2. Os pontos críticos são: $(0, 1)$; $(0, -1)$; $(2, 1)$; $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
   O ponto $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ é um maximizante local. Os restantes pontos críticos são pontos de sela (o hessiano é negativo em tais pontos).

3. (a) As funções φ são da forma $\varphi(x) = K - 2\cos x$ com $K \in \mathbb{R}$.

   (b) Escolhendo $\varphi(x) = -2\cos x$ (tomando $K = 0$), obtemos a equação diferencial exata $(1+y^2)\operatorname{sen} x \, dx - 2y \cos x \, dy = 0$. O integral geral é $(1+y^2)\cos x = C$, com $C \in \mathbb{R}$.

4. (a) $\dfrac{1}{y^3} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} = C\,, \quad C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é uma solução singular);

   (b) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \dfrac{e^x}{2}(1 - x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

5. $y(t) = 1 + e^t(\operatorname{sen} t - \cos t)\,, \quad t \geq 0$.

6. Sabe-se que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$ converge absolutamente em $x = R$. Portanto, para $x = -R$, a correspondente série dos módulos, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \, (-R)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, R^n$ é também convergente. Como a convergência é sempre absoluta no intervalo de convergência $]-R, R[$, podemos afirmar que o domínio de convergência da série é $[-R, R]$, sendo a convergência absoluta em todo o domínio. O maior intervalo onde a convergência é uniforme é também $[-R, R]$.

7. (a) O domínio de convergência da série é $]0,4[$, verificando-se convergência absoluta em todos os pontos deste intervalo.

   (b) Como f é contínua em $]0,4[$ também o é no intervalo $[1,2]$. Consequentemente, é integrável neste intervalo. Integrando a série termo a termo, obtemos

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \int_1^2 (x-2)^n dx = \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}.$$

8. A função f é par (pois $f(-x) = f(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$). A série de Fourier é, portanto, uma série de co-senos, nomeadamente

$$f(x) \sim 1 - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A função f verifica as condições do Teorema de Dirichlet. Sendo contínua em todo o domínio, podemos concluir (por aquele teorema) que a soma da série coincide com a própria função f:

$$f(x) = 1 - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$