Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3

Soluções do Exame Final (22 de junho de 2017)

---

1. (a) O domínio de f é o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > \beta^2\}$.
   As curvas de nível $k \in \mathbb{R}$ de f são $\{(x,y) \in D : x^2 + y^2 = e^k + \beta^2\}$ (circunferências centradas na origem e raio $\sqrt{e^k + \beta^2}$).

   (b) Uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2\beta, 0)$ é
   $$\frac{4}{3\beta}\,x - z - \frac{8}{3} + \ln(3\beta^2) = 0.$$

2. Os pontos críticos de f são: $(0,0); (1,-1); (-1,1)$. Os pontos $(1,-1)$ e $(-1,1)$ são maximizantes locais (em ambos os casos o menor principal de segunda ordem é positivo, enquanto que o menor de primeira ordem é negativo). O ponto $(0,0)$ é um ponto de sela (apesar do estudo do hessiano ser inconclusivo, podemos concluir seguindo uma análise direta: $f(0,0) = 0$, mas na vizinhança de $(0,0)$ temos, por exemplo, $f(x,x) = -2x^4 < 0$ e $f(x,0) = x(1-x^3) > 0$ se $0 < x < 1$).

3. O máximo é $f(0, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$ e o mínimo é $f(0, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$.

4. (a) $y = -\ln(C - e^x)\,, \qquad C > 0;$

   (b) $x^3 y^2 + e^{xy} = C\,, \qquad C \in \mathbb{R};$

   (c) $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)\, e^{-x} + \dfrac{\cos x}{2}\,, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

5. $y = (2t^2 - 3)\, e^{-2t}$.

6. (a) O domínio de convergência é $]-7/2, -5/2]$. A série converge absolutamente no intervalo $]-7/2, -5/2[$ e converge simplesmente em $x = -5/2$.

   (b) $f(x) = -2\ln(7 + 2x)\,, \quad x \in\,]-7/2, -5/2]$.

7. Aplicar o Critério de Weierstrass...

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)} \,\mathrm{sen}\,((2n-1)x).$