

Parte 1: Domínios; conjuntos de nível; derivadas parciais; gradientes.

1. Represente geometricamente os seguintes conjuntos:

(a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\};$

(b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x-1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\};$

(c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 < z \leq x + y\};$

(d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\};$

(e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\};$

Caracterize cada um dos conjuntos do ponto de vista topológico (usando a topologia usual em \mathbb{R}^2 e em \mathbb{R}^3).

2. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente:

(a) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2};$

(b) $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2};$

(c) $f(x, y) = \frac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2};$

(d) $f(x, y) = \ln(xy);$

(e) $f(x, y) = \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{|x| - |y|};$

(f) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{z}{x^2 + y^2};$

(g) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{9 - x^2 - y^2};$

(h) $f(x, y, z) = \operatorname{arcsen} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

3. Determine as curvas / superfícies de nível das seguintes funções e descreva-as do ponto de vista geométrico:

(a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}};$

(b) $f(x, y) = e^{xy};$

(c) $f(x, y, z) = x + y + 3z;$

(d) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2;$

(e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$

4. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xOy (admita que x e y são dados em quilómetros e a temperatura T em graus Celsius). Um indivíduo encontra-se na posição $(3, 2)$ e pretende dar um passeio.

Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se desejar desfrutar sempre da mesma temperatura.

5. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função f dada por

$$f(x, y, z) = e^x \sin x + \cos(z - 3y).$$

6. Calcule, caso existam, as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções nos pontos P indicados:

(a) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ $[P = (2, 2)]$;

(b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{4-x^2-2y^2}, & \text{se } x^2 + 2y^2 \neq 4 \\ 0, & \text{se } x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$ $[P = (2, 0)]$;

(c) $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ x \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$ $[P = (0, 0)]$.

7. Determine as derivadas parciais de primeira e de segunda ordens da função

$$f(x, y) = \ln(x + y) - \ln(x - y).$$

8. Determine uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^3 - 6x + \frac{y}{1+y^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

9. Mostre que não existe nenhuma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + xy^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = y^2$.

10. Sendo $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$, mostre que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

11. Mostre que a função $f(x, y) = \arctg(y/x)$ verifica a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{equação de Laplace}).$$

12. Considere a função $f(x, y) = \ln x + xy^2$.

- (a) Indique o domínio de f .
(b) Determine equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(1, 2, 4)$.

13. Seja $f(x, y, z) = x \sin(yz)$.

- (a) Determine o gradiente de f .
(b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1, 3, 0)$ segundo o vetor unitário \vec{u} com a direção e sentido de $v = (1, 2, -1)$.

14. Considere a função f definida por $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

- (a) Indique o domínio D de f e caracterize-o do ponto de vista topológico.
(b) Descreva as curvas de nível da função f .
(c) Escreva a expressão geral das derivadas direcionais de f no ponto $(1, 0)$.

15. Determine reta normal e o plano tangente à superfície cônica

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3 - z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

no ponto $(3, 4, -2)$.

16. Considere a função f dada por $f(x, y, z) = 3xy + z^2$.
- (a) Calcule o gradiente de f num ponto genérico.
 - (b) Determine uma equação do plano tangente à superfície de nível 4 de f , no ponto $(1, 1, 1)$.

Parte 2: Extremos globais, extremos locais e extremos condicionados.

17. Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ no domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.
- (a) Esboce graficamente o domínio D .
 - (b) Aplique cuidadosamente o Teorema de Weierstrass para garantir a existência de extremos absolutos de f e determine-os.
[Sug.: relacione o valor de f em cada ponto (x, y) com a norma desse ponto].
18. Sejam $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$ e $f(x, y, z) = z^2$. O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de f em \mathcal{S} ? Porquê?
19. Seja f a função definida em \mathbb{R}^2 por $f(x, y) = -x^2$. Justifique que f possui uma infinidade de maximizantes.
20. Considere $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
- (a) O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de f ? Justifique.
 - (b) Justifique, usando diretamente a definição, que $(0, 0, 0)$ é minimizante de f .
21. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.
- (a) Mostre que f não é diferenciável em $(0, 0)$.
 - (b) Justifique que $(0, 0)$ é maximizante absoluto de f .
22. Considere a função $g(x, y) = y$ e os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- (a) Justifique que g possui extremos globais em B .
 - (b) Identifique os extremantes globais de g em B .
 - (c) A função g possui extremantes globais em A ? Justifique.
23. Mostre que a função $h(x, y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$ não atinge o seu máximo global na origem.
24. Determine os pontos críticos das seguintes funções:
- (a) $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$;
 - (b) $f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y)$;
 - (c) $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$.
25. Mostre que a função $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1$ tem apenas um mínimo local e que este ocorre apenas no ponto $(1, 2)$.
26. Considere a função $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4(x - 2y)$ definida em $D = [0, 1] \times [0, 2]$.
- (a) Diga, justificando, se f possui pontos críticos no interior de D .

- (b) Prove a existência de extremos absolutos e determine-os.
27. Determine os extremos locais das seguintes funções:
- $f(x, y) = xy e^{-x-y}$;
 - $g(x, y) = x^3 - 2x^2y - x^2 + 4y^2$.
28. Verifique que $(-2, 0)$ e $(0, 0)$ são os pontos críticos da função $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$, mas que só o primeiro é extremante de f .
29. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x - y^3)^2 - x^3$.
- Verifique que $(0, 0)$ é ponto crítico de f .
 - Mostre que $(0, 0)$ não é extremante local de f .
30. Determine os extremos absolutos da função f definida por $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ no círculo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
31. Calcule os extremos globais da função f definida por $f(x, y) = xy$ no semicírculo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$.
32. Determine os pontos da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 80$ que estão à menor distância do ponto $(1, 2)$ e os pontos da mesma circunferência que estão à maior distância do mesmo ponto.
33. Determine o ponto do plano $x + 2y + z = 4$ que se encontra mais próximo do ponto $(0, 0, 0)$.
34. Determine a distância mais curta entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano de equação $x + 2y + z = 4$.
35. Determine os pontos da superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximo e mais distante do ponto $(3, 1, -1)$.
36. Seja f a função definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$ por $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.
- Represente geometricamente o domínio D e o gráfico de f .
 - Determine os pontos críticos da função f no interior do seu domínio.
 - Determine os extremos globais da função f em D .
37. Seja f a função definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq 1\}$ por $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$.
- Represente geometricamente o domínio D .
 - Determine o interior de D e diga, justificando, se f possui aí pontos críticos.
 - Determine os extremos globais da função f em D .
38. O lucro anual de uma empresa é calculado através da expressão

$$L(x, y) = -x^2 - y^2 + 22x + 18y - 102,$$

onde x representa o montante gasto em investigação e y o montante gasto em publicidade (L , x e y expressos em unidades de milhões de euros).

Determine o lucro máximo da empresa e os valores de x e y que o realizam.

39. Numa dada empresa, as funções *produção* (P) e *custo* (C) são dadas por

$$P = 3K^{1/3}L^{1/3} \quad \text{e} \quad C = K^2 + 2L + 8 \quad (K\text{-capital; } L\text{-trabalho}).$$

Calcule o custo mínimo para uma produção de 12 unidades.