

**Nota:** O formulário encontra-se no verso. Nas alíneas 2(a) e 3(a) poderá ser útil usar uma das representações em série de MacLaurin indicadas no formulário.

1. [35] Determine o raio e o domínio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n(3n+1)}$ , indicando os pontos onde a convergência é absoluta e os pontos onde a convergência é simples.

2. [20] Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

(a) A soma da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\pi^2)^n}{2^{4n}(2n)!}$  é  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

- (b) Se a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$  (com  $a_n \in \mathbb{R}$ ) tem raio de convergência igual a 3, então a série numérica  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  é absolutamente convergente.

3. [50]

- (a) Desenvolva em série de MacLaurin a função  $\frac{2}{1+4x^2}$ , indicando o maior intervalo onde esse desenvolvimento é válido.

- (b) Considere a série de potências  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$ .

- i. Mostre que  $f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$  para qualquer  $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .  
ii. Calcule o valor da derivada  $f^{(31)}(0)$ .

4. [35]

- (a) Escreva a fórmula de Taylor de segunda ordem no ponto 1 da função  $\ln x$ .  
(b) Calcule um valor aproximado de  $\ln(1,2)$  usando o polinómio obtido na alínea anterior e mostre que o erro cometido nessa aproximação é inferior a 0,003.

5. [20] Determine a série de Fourier de cossenos da função  $f$ , definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = x$ .

6. [40] Considere a função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2)}$ .

- (a) Determine e represente geometricamente o domínio  $D$  da função  $f$ .  
(b) Identifique as curvas de nível  $k \neq 0$  da função  $f$ .  
(c) Determine as derivadas parciais  $f'_x$  e  $f'_y$ .

## Algumas fórmulas de derivação

$(k f)' = k f' \quad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f' \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f' a^f \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f' \cos f$	$(\cos f)' = -f' \operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f' \sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f' \operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

## Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in ]-1, 1[$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$