Cálculo II – 2020/2021

Aula 2

1/3

Planificação **Aula 2** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 16/03, 16h30

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 7 a 11 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

$\boxed{\text{Slides 6 a 8}}$ **Raio de Convergência / Intervalo e Domínio de Convergência**

**Teorema:** Qualquer que seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$, verifica-se uma e só uma das condições:

(i) a série converge absolutamente em $x=c$ e diverge se $x \neq c$

(ii) a série converge absolutamente em todo $x \in \mathbb{R}$

Raio de Convergência

(iii) existe um único $R>0$ para o qual a série converge absolutamente se $x \in ]c-R, c+R[$ e diverge se $x \in ]-\infty, c-R[ \cup ]c+R, +\infty[$

Intervalo de Convergência (I.C.)

Nota: no caso (i) $\rightsquigarrow$ $R=0$ e $I.C. = \{c\}$

no caso (ii) $\rightsquigarrow$ $R=+\infty$ e $I.C. = \mathbb{R}$

Exercício 1: Determinar o raio e intervalo de convergência das séries do exercício 3 da aula 1.

Procedimento para determinar o domínio de convergência de uma série de potências (usando o raio de convergência)

(ver justificação teórica nas págs. 8 e 9 dos apontamentos teóricos)

**Importante:** Temos sempre de escrever a série na forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ antes de aplicarmos este procedimento.

tem de estar assim

(ver os exercícios 2d) e 2e) do final desta aula e o exemplo 1.6 e observação 1.4. das págs. 10 e 11 dos apontamentos teóricos)

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ uma série de potências com $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$

**1.º Passo:** Calcular o Raio de Convergência da série usando uma das fórmulas:

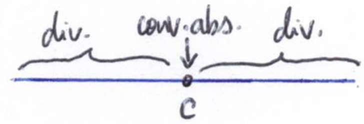
$$\boxed{R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} \quad \text{ou} \quad \boxed{R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

(se os limites existirem)

Podem ocorrer 3 casos ⇝ 1.º caso: $R=0$ ; 2.º caso: $R=+\infty$ ; 3.º caso: $R>0$

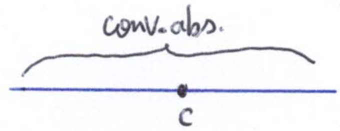
**2.º Passo:** Determinar o I.C. e o D.C.

1.º caso: $\boxed{R=0}$



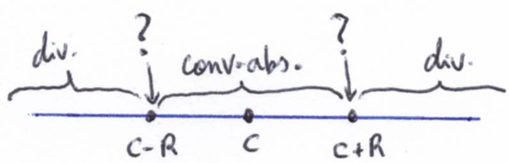

A série conv. abs. em $x=c$ e diverge em $\mathbb{R}\setminus\{c\}$. Logo $\underline{I.C. = D.C. = \{c\}}$

2.º caso: $\boxed{R=+\infty}$




A série conv. abs. $\forall x \in \mathbb{R}$ . Logo $\underline{I.C. = D.C. = \mathbb{R}}$

3.º caso: $\boxed{R>0}$




A série conv. abs. em $]c-R; c+R[$ e diverge em $]-\infty, c-R[ \cup ]c+R, +\infty[$

$\underline{I.C. = ]c-R, c+R[}$

Nada se pode concluir sobre a natureza da série nos pontos $x=c-R$ e $x=c+R$

**3.º Passo:** (só se aplica no 3.º caso)

Estudar a natureza da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ quando $x=c-R$ e quando $x=c+R$
(passamos a ter uma série numérica)

Dependendo desse estudo, o D.C. pode ser:

$]c-R, c+R[$ ou $[c-R, c+R[$ ou $]c-R, c+R]$ ou $[c-R, c+R]$

**Exercício 2:** Determine o raio e o domínio de convergência das séries seguintes, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!\,(x-2)^n}{n-1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n^{2n}}\, x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n (x+5)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,6^n} (3x-2)^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9^n\sqrt{n+1}}\, x^{2n}$

**Exercício 3:** Folha Prática 1 → Ex. 2

TPCs: Folha prática 1: 1 g) h) i) k) l)

Exames anos anteriores (agrupamento 3)

- 1.º Teste, 10/04/2019 → Ex 1
- 1.º Teste, 13/04/2018 → Ex 1
- 2.º Teste, 22/06/2017 → Ex 2a)

Podem repetir os TPCs dos exames da aula 1 aplicando agora este novo procedimento