

TP4D-1: 5ª feira, 27/05, 14h ; TP4D-2: 5ª feira, 27/05, 16h ; TP4D-3: 6ª feira, 28/05, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 26/05, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 28/05, 14h

- Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.  
 2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.  
 3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 68 a 70 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

- Notas: • Resolver antes da aula os integrais parciais do final desta planificação.  
 • A matéria desta aula não está nos slides (ver pag. 68 a 70 dos apontamentos)

## EDOs exatas

**Definição:** Uma EDO do tipo  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$  diz-se exata se existir uma função  $F(x,y)$  com derivadas parciais contínuas tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

- Critério para verificar se uma EDO é exata

A EDO  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$  é exata se e só se  
 (onde  $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}$  e  $\frac{\partial N}{\partial x}$  são contínuas)

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

- Solução da EDO  $\leadsto F(x,y) = c, c \in \mathbb{R}$ , onde a função  $F$  satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \end{cases}$$

- Procedimento para resolver este sistema

- Integra-se "parcialmente" a 1ª eq. em ordem a  $x$  ou a 2ª eq. em ordem a  $y$  (a constante de integração vai depender da outra variável)
- Derivar parcialmente a função obtida em ordem à outra variável
- Igualar esta derivada à equação do sistema que não foi integrada para determinar a constante de integração.

Exercício 1: Verifique se as seguintes EDOs são exatas e, caso sejam, resolva-as:

a)  $y' = -\frac{x^3 + y^3}{3xy^2 + \cos y}$

b)  $y + 2xe^y + (x^2e^y + x - 2y)y' = 0$

c)  $\sin y + (y^2 - x \sin y)y' = 0$

d)  $(y \cos(xy) - 1)dx + (x \cos(xy) + e^y)dy = 0$ ,  $y(1) = \frac{\pi}{2}$

**Fator integrante**  $\rightarrow$  usa-se para transformar uma EDO que não é exata numa EDO exata.

**Definição:** Chama-se fator integrante da EDO  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$  a toda a função  $\mu(x,y)$  não nula tal que a EDO

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

seja exata.

Exercício 2: Mostre que  $3y + 4xy^2 + (2x + 3yx^2)y' = 0$  não é uma EDO exata e verifique que  $\mu(x,y) = yx^2$  é um fator integrante para esta EDO.

**Método para determinar fatores integrantes**  $\rightarrow$  ver mais detalhes na pág. 70

1.º caso: Fator integrante que depende apenas de  $x$

Se  $g(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$  só depende de  $x$  então  $\mu(x) = e^{\int g(x)dx}$

2.º caso: Fator integrante que depende apenas de  $y$

Se  $h(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$  só depende de  $y$  então  $\mu(y) = e^{\int -h(y)dy}$

Exercício 3: Verifique que a EDO  $(5 + y^3 \sin x)dx + 3y^2 \cos x dy = 0$  não é exata e resolva-a usando um fator integrante.

TPCs: Folha prática 4: 11, 12, 13

2.º teste, 19/06/2019  $\rightarrow$  Ex 2c)

2.º teste, 13/06/2018  $\rightarrow$  Ex 2b)

1.º teste, 05/04/2017  $\rightarrow$  Ex. 5)

Ex. Final, 22/06/2017  $\rightarrow$  Ex. 4b)

Ex. Recurso, 10/07/2017  $\rightarrow$  Ex. 3



## Integração parcial ~ Exemplos e exercícios

- $\int f(x,y) dx$  ~ integra-se como se  $y$  fosse uma constante
- $\int f(x,y) dy$  ~ integra-se como se  $x$  fosse uma constante

Exemplos:

$$\int (x^2 - xy^3 + 5) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \cdot y^3 + 5x + \underbrace{C(y)}_{\text{função que só depende de } y}$$

$$\int (x^2 - xy^3 + 5) dy = x^2 y - x \cdot \frac{y^4}{4} + 5y + \underbrace{C(x)}_{\text{função que só depende de } x}$$

$$\int y^2 \cos(6xy^2) dx = \frac{1}{6} \int 6y^2 \cos(6xy^2) dx = \frac{1}{6} \sin(6xy^2) + C(y)$$

C-aux.  $u = 6xy^2$   
 $u'_x = (6xy^2)'_x = 6y^2$

Exercícios: (para resolver antes da aula)

Soluções

a)  $\int (x^2 y^4 - \cos(y)) dx$

a)  $\frac{x^3}{3} y^4 - \cos(y)x + C(y)$

b)  $\int e^{5x} \sin(y) dy$

b)  $-e^{5x} \cos(y) + C(x)$

c)  $\int e^{5x} \sin(y) dx$

c)  $\frac{1}{5} e^{5x} \sin(y) + C(y)$

d)  $\int \frac{xy}{xy^2 + 5x^3} dy$

d)  $\frac{1}{2} \ln |xy^2 + 5x^3| + C(x)$

e)  $\int yx^2 \cdot (y^2 + yx^3)^7 dx$

e)  $\frac{(y^2 + yx^3)^8}{24} + C(y)$