Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 8** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 13/04, 16h30

Aula 8 ①/2

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 45 a 49 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 48 a 54 **Convergência de uma série de Fourier**

Nota: A série de Fourier de uma função f nem sempre converge, e quando converge a sua soma pode ou não coincidir com a função f. (Ver applets slide 48)

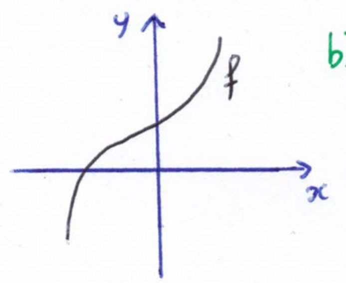
Definições: (slide 49)

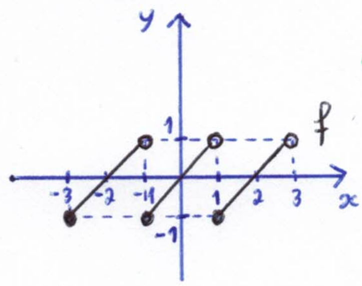
- f é seccionalmente contínua em $[a,b]$ se é contínua em $[a,b]$ ou se é descontínua apenas num n.º finito de pontos de $[a,b]$, nos quais os limites laterais são finitos.

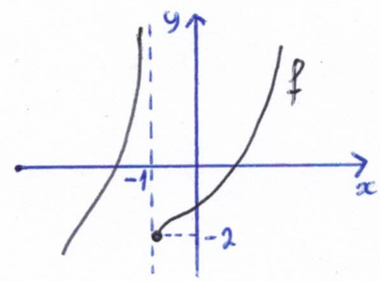
  f é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$ se for seccionalmente contínua em todo o intervalo $[a,b]$.

- f é seccionalmente diferenciável se f e f' são ambas seccionalmente contínuas.

Exercício 1: Diga se as seguintes funções são seccionalmente contínuas no seu domínio.

a) 

b) 

c) 

Teorema de Dirichlet (slide 50)

Sejam f uma função 2π-periódica e seccionalmente diferenciável e $c \in \mathbb{R}$. Então a série de Fourier converge em c para $\frac{f(c^+)+f(c^-)}{2}$ onde $f(c^+) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ e $f(c^-) = \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$.

Nota: Se f for contínua em c então $f(c^+)=f(c^-)=f(c)$, logo $\frac{f(c^+)+f(c^-)}{2} = \frac{2f(c)}{2} = f(c)$

Observação: Nas condições do Teorema de Dirichlet, a série de Fourier converge para a função soma

↳ importante

$$\boxed{S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ é contínua em } x \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{se } f \text{ não é contínua em } x \end{cases}}$$

Exercício 2: Faça um esboço da <u>função soma</u> da série de Fourier das seguintes funções 2π-periódicas:

a) $f(x) = |x|$, em $[-\pi, \pi]$

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

Exercício 3: Usando o ex. 2a) mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercício 4: Seja f 2π-periódica com $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

a) Desenhe o gráfico de f no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Determine a série de Fourier associada a f.

c) Qual o valor da série de Fourier em $x = \pi$ e em $x = \frac{\pi}{2}$?

d) Esboce o gráfico da soma da série de Fourier de f em $[-2\pi, 2\pi]$.

Exercício 5: Seja $f(x) = |x| \times (\pi - |x|)$ em $[-\pi, \pi]$.

a) Esboce o gráfico de f para $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

b) Mostre que a série de Fourier associada a f é uma série de cossenos, ou seja, é da forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$ e calcule a_0.

c) Sabendo que a série de Fourier associada a f é $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}$, mostre que ela converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$.

d) Usando a série dada mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

TPCs: Folha prática 2: 13, 15, 16 $\to$ difícil

1.º Teste, 10/04/2019 $\to$ Ex 7b)

2.º Teste, 22/06/2017 $\to$ Ex 7

Ex. Recurso, 10/07/2017 $\to$ Ex 8