Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3 10 de julho de 2017

Exame da Época de Recurso Duração: 2h30m

Justifique todas as respostas. O formulário encontra-se no verso.

---

1. **[40]** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$.

   (a) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0,2))$.

   (b) Mostre que f tem máximo absoluto, mas não tem mínimo absoluto (em $\mathbb{R}^2$).

   (c) Justifique que f possui extremos absolutos no círculo
   $$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$$
   e calcule tais extremos.

2. **[20]** Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
   $$f(x,y) = x^2y - xy^2 - x^2 + x.$$

3. **[20]** Considere a equação diferencial $(1+y^2)\,\mathrm{sen}\, x + y\varphi(x)\, y' = 0$ (onde φ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$).

   (a) Determine todas as funções φ que transformam a equação dada numa equação diferencial exata.

   (b) Escolha uma das funções φ encontradas na alínea anterior e resolva a equação correspondente.
   (Nota: no caso de não ter resolvido a alínea (a) considere $\varphi(x) = -2\cos x$).

4. **[35]** Resolva as seguintes equações diferenciais.

   (a) $(x-1)\, y^4 - x^3(y^2-3)\, y' = 0$;

   (b) $y'' + y = -xe^x$.

5. **[25]** Resolva o seguinte problema de valores iniciais usando transformadas de Laplace:
   $$y'' - y' = 2e^t \cos t\,, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

6. **[15]** Suponha que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ tem raio de convergência $R > 0$ e que ela converge absolutamente em $x = R$. Diga, justificando, qual é o domínio de convergência da série, indicando se tal convergência é simples ou absoluta em cada ponto desse domínio. Indique também o maior intervalo onde a convergência é uniforme.

v.s.f.f.

7. **[30]** Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n$.

   (a) Determine o domínio de convergência da série dada, indicando os pontos onde a convergência é simples e absoluta.

   (b) Justifique que f é integrável em $[1,2]$ e calcule o valor do integral $\int_1^2 f(x)\,dx$.

8. **[15]** Seja f a função periódica de período 2π, dada por $f(x) = 1 - |x|$ em $[-\pi, \pi]$. Determine a série de Fourier de f e represente graficamente a sua soma no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Formulário (Transformadas de Laplace)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f; \qquad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad s > s_g$$

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$e^{\lambda t} f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t)f(t-a) \quad (a > 0)$	$e^{-as}F(s)$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a}\,F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$