Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 23** (presencial e E@D)

TP4D-1 e TP4D-2: 4ª feira, 02/06, 16h30 (E@D) ; TP4D-3: 6ª feira, 04/06, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 02/06, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 04/06, 14h

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 77 a 81 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 25 a 27 **EDOs lineares de ordem n**

Definição: Uma EDO linear de ordem n ($n \in \mathbb{N}$) é uma equação do tipo

$$\boxed{a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ são funções contínuas num certo intervalo I, com $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

Notas:
- $b(x) \neq 0 \rightsquigarrow$ EDO linear completa
- $b(x) = 0 \rightsquigarrow$ EDO linear homogénea
- $a_j(x) = \alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$ (constantes) $\rightsquigarrow$ EDO linear de coeficientes constantes
- Se $b(x) \neq 0$, chama-se EDO linear homogénea associada à EDO que se obtém da inicial substituindo $b(x)$ por zero.

Exercício 1: Indique quais das seguintes EDOs são lineares. Em caso afirmativo diga se são completas, homogéneas e/ou de coeficientes constantes.

a) $y'' + \frac{1}{x} y' + 3y = 1 + 5x$

b) $y''' + 2yy'' + \ln(x)\, y = 0$

c) $y^{(5)} + 3y' + 2y = 0$

d) $\operatorname{tg}(t)\, y'' + e^t y' + t^7 y = 5y$

e) $y^{(4)} + x(y'')^3 + y' + \ln(x)\, y = e^x$

Slide 28

Solução geral de EDOs lineares de ordem n

$y = y_H + y_p$ → y_p: uma solução particular (qualquer) da EDO linear completa

y: solução geral da EDO linear completa

y_H: solução geral da EDO linear homogénea associada

Procedimento para resolver EDOs lineares completas

1.ª Etapa: Determinar y_H (nesta aula)

2.ª Etapa: Determinar y_p (próximas aulas)

3.ª Etapa: A solução geral é $y = y_H + y_p$

Slides 29 a 33

Determinar y_H (caso geral)

Teorema: Uma EDO linear homogénea de ordem n, $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ admite um sistema fundamental de soluções (S.F.S.) $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ composto por n soluções linearmente independentes.

A solução geral da EDO linear homogénea é:

$$\boxed{y_H = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)}, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$$

Método para verificar se as soluções são linearmente independentes

O seguinte determinante, chamado Wronskiano, tem de ser $\neq 0$

$n = 2 \rightsquigarrow \{\varphi_1, \varphi_2\}$ são L.I. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} \neq 0$

$n = 3 \rightsquigarrow \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ são L.I. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \end{vmatrix} \neq 0$

Exercício 2: Considere-se a EDO linear homogénea $y'' + 4y' - 5y = 0$.
Verifique quais dos seguintes conjuntos formam um S.F.S. desta EDO e, nesse caso, escreva a sua solução geral.

a) $\{e^x\}$ b) $\{e^x; \operatorname{sen} x\}$ c) $\{e^x; e^{-5x}\}$ d) $\{e^x; 3e^x\}$

Slides 34 a 36 **Determinar y_H (EDO de coeficientes constantes)**

EDO linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes

↳ $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$

Equação característica da EDO anterior: $\underbrace{a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0}_{\text{polinómio característico}} = 0$

Exercício 3: Escrever a eq. característica da EDO $y''' - 3y'' + 2y = 0$

Exercício 4: Escrever a EDO cuja eq. característica é $r(r+1)(r-2) = 0$

Da resolução da eq. característica resultam n raízes (reais ou complexas) que vão definir o S.F.S. Temos 4 casos a considerar.
↳ zeros

Caso	Se a eq. característica contiver	O S.F.S. inclui as soluções
1	k raízes reais simples $r_1, r_2, \dots, r_k$ (distintas)	$e^{r_1 x}$; $e^{r_2 x}$; ... ; $e^{r_k x}$
2	uma raiz real r com multiplicidade $k>1$	e^{rx} ; xe^{rx} ; $x^2 e^{rx}$; $x^{k-1} e^{rx}$
3	um par de raízes complexas simples: $r = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$; $e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$
4	um par de raízes complexas $r = \alpha \pm \beta i$ com multiplicidade $k>1$	$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$; $xe^{\alpha x}\cos(\beta x)$; ...; $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$; $xe^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$; ...; $x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$

Exercício 5: Escrever a solução geral da EDO cuja eq. característica tem raízes

$r_1 = -2$; $r_2 = 3$; $r_3 = 3$; $r_4 = 2+4i$; $r_5 = 2-4i$

Exercício 6: Determinar a solução geral das seguintes EDOs lineares homogéneas

a) $y'' + 4y' + 3y = 0$

b) $y^{(4)} + y'' = 0$

c) $y''' + 2y'' + 5y' = 0$

d) $2y^{(5)} - 8y^{(4)} + 8y''' = 0$

e) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

TPCs: Folha prática 4: 24
2.º teste, 13/06/2018 → Ex. 7
1.º teste, 05/04/2017 → Ex. 7