OTIMIZAÇÃO DE PROCESSOS PRODUTIVOS NA INDUSTRIA 4.0

FILAS DE ESPERA

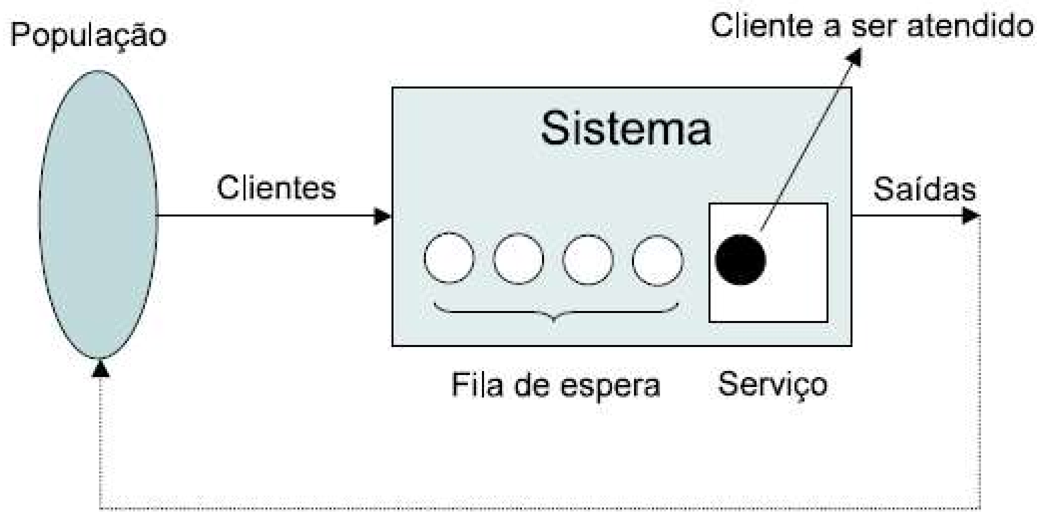
Slides retirados de:

Filas de espera, Transparências de apoio há leccionação de aulas teóricas – Por: Professor José Fernando Oliveira

INTRODUÇÃO

- Fenómeno corrente no dia-a-dia
  - clientes – pessoas, veículos ou outras entidades físicas ou conceptuais – que necessitam de um
  - serviço, pelo qual podem ter que esperar numa fila física ou conceptual (a fila pode só existir conceptualmente, p.ex. senhas com número de atendimento).
- Trabalho pioneiro de A. K. Erlang (início do séc. XX), cientista dinamarquês, sobre chamadas telefónicas aguardando linha para serem encaminhadas.

ESTRUTURA DE UM SISTEMA DE FILA DE ESPERA



- **Fonte** ou **população**, que gera os clientes que vão chegar ao sistema.
- **Fila**, constituída pelos clientes à espera de ser atendidos (não inclui o(s) cliente(s) em atendimento).
- **Serviço** ou **atendimento**, que pode ser constituído por um ou mais postos de atendimento.

Fila + Serviço = Sistema

Número de clientes no sistema (em cada instante) = **estado do sistema**

FONTE

- Dimensão da população
  - infinita: quando a probabilidade de ocorrer uma nova chegada não é influenciada pelo número de clientes que já se encontram no sistema;
  - finita.
- Dimensão da chegada
  - clientes chegam um a um;
  - clientes chegam em grupo.
- Controlo das chegadas
  - chegadas controláveis (p.ex. inscrições em dias fixos);
  - chegadas incontroláveis (p.ex. urgência de um hospital).

FONTE

- Distribuição das chegadas
  O padrão das chegadas pode ser descrito pelo tempo entre duas chegadas consecutivas (**tempo entre chegadas**) ou pelo número de chegadas por unidade de tempo (**distribuição das chegadas**).
  - constante: intervalos de tempo entre chegadas sucessivas fixos (p.ex. filas de montagem industriais);
  - aleatório: os intervalos de tempo entre chegadas sucessivas não podem ser previstos com certeza $\Rightarrow$ distribuições de probabilidade.
- Taxa de chegada (λ)
  Número médio de clientes que procuram o serviço por unidade de tempo.
  - independente do estado do sistema;
  - dependente do estado do sistema: λ_n, n – número de clientes no sistema.
- Atitude dos clientes
  - paciente: permanecem na fila até serem atendidos $\longrightarrow$ boa aproximação quando há poucas desistências;
  - impaciente: desistem de esperar ou simplesmente não se juntam à fila se esta for muito grande $\Rightarrow$ utilização de modelos de simulação.

FILA

- Número de filas
  - fila simples: uma única fila mesmo que o servidor tenha vários postos de atendimento;
  - fila múltipla: uma fila por posto de atendimento $\Rightarrow$ cada conjunto fila/posto de atendimento constitui um sistema separado de fila de espera. É usual repartir as chegadas igualmente pelas várias filas.
- Comprimento da fila
  - infinito: a capacidade máxima da fila é muito grande quando comparada com o número de elementos que habitualmente a constituem;
  - finito: a fila pode acolher apenas um número pequeno de clientes.
- Disciplina da fila
  - FIFO – “First In First Out”;
  - prioridades: p.ex. reservas, idade, emergência;
  - aleatória.

SERVIÇO

- Configuração do serviço
  Número de servidores em paralelo (postos de atendimento) e número de fases de atendimento:
  - um servidor, uma fase;
  - um servidor, múltiplas fases;
  - múltiplos servidores, uma fase;
  - múltiplos servidores, múltiplas fases;
  - redes de filas de espera.
- Dimensão do serviço
  - simples;
  - em grupo (p.ex. um elevador atende vários clientes em simultâneo).

SERVIÇO

- Distribuição do tempo de serviço:
  - constante;
  - aleatório: distribuição exponencial negativa, Erlang, outra.
- Taxa de serviço (μ)
  Número médio de clientes que podem ser atendidos por cada servidor e por unidade de tempo. $\frac{1}{\mu}$ = duração média do serviço.
  Número médio de clientes efectivamente atendidos $\leq \mu \rightarrow$ pode haver momentos de inactividade.
  - dependente do estado do sistema (μ_n, n – número de clientes no sistema), p.ex. serviço de reclamações que atendesse mais depressa as reclamações quando a fila é maior: maior produtividade ou degradação da qualidade do serviço?
  - independente do estado do sistema.

MODELIZAÇÃO DOS SISTEMAS DE FILAS DE ESPERA: OBJETIVO

"Optimizar" o funcionamento das filas de espera, encontrando soluções equilibradas entre dois extremos:

Congestionamento – os clientes têm que esperar demasiado tempo na fila

$\rightarrow$ taxa de ocupação dos servidores próxima dos 100%.

Só aceitável quando o custo do servidor é muito maior do que o custo de espera do cliente.

Rarefacção – os servidores permanecem inactivos durante uma percentagem de tempo elevada (situação por vezes desejável, p.ex. serviços de bombeiros).

Estabelecimento de *trade-offs* entre o custo do serviço e o "custo" do tempo perdido pelos clientes na fila de espera $\rightarrow$ crescimento acentuado para tempos de espera elevados.

MEDIDAS DE DESEMPENHO

- comprimento médio da fila (L_q)
- número médio de clientes no sistema (L)
- tempo médio de espera na fila (W_q)
- tempo médio de espera no sistema (W)
- taxa média de ocupação (e desocupação) do serviço (percentagem de tempo durante o qual o serviço está ocupado)

Outras medidas (mais pormenorizadas) úteis:

- P_n = probabilidade de existirem n clientes no sistema
- $P(n \geq k) = \sum_{n=k}^{\infty} P_n$ = probabilidade de existirem no sistema k ou mais clientes
- $P(W_q = 0)$ = probabilidade de o tempo de espera na fila ser zero
- $P(W_q > t)$ = probabilidade de o tempo de espera na fila exceder t
- $P(W > t)$ = probabilidade de o tempo gasto no sistema exceder t

PARÂMETROS

λ taxa de chegada
(número médio de clientes que chegam por unidade de tempo)

$\frac{1}{\lambda}$ intervalo médio entre duas chegadas consecutivas;

$\lambda_{\mathbf{n}}$ taxa de chegada quando estão n clientes no sistema;

$\overline{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$ taxa média de entrada no sistema;

μ taxa de serviço
(número médio de clientes que cada servidor tem capacidade para atender por unidade de tempo);

$\frac{1}{\mu}$ tempo médio de serviço;

$\mu_{\mathbf{n}}$ taxa de serviço quando estão n clientes no sistema;

S número de servidores;

ρ taxa média de ocupação.

CARACTERIZAÇÃO DAS DISTRIBUIÇÕES DA CHEGADA E DO ATENDIMENTO

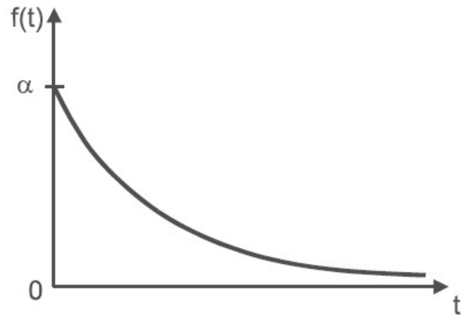
- Recolher informação sobre chegadas de clientes e seu atendimento.
- Descrever a informação recolhida, sobre chegadas de clientes e seu atendimento, através de histogramas e parâmetros amostrais (média, variância,...).
- Inferir dos parâmetros amostrais os parâmetros da população.
- "Ajustar" uma distribuição teórica ao histograma experimental, i.e., escolher uma distribuição estatística que descreva "adequadamente" o fenómeno analisado.

Distribuições que mais frequentemente caracterizam as filas de espera reais:

chegadas seguindo uma **distribuição de Poisson**;
tempo de atendimento caraterizado por uma **distribuição exponencial negativa.**

CARACTERIZAÇÃO DAS DISTRIBUIÇÕES DA CHEGADA E DO ATENDIMENTO

Distribuição Exponencial Negativa



Função densidade de probabilidade de T

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

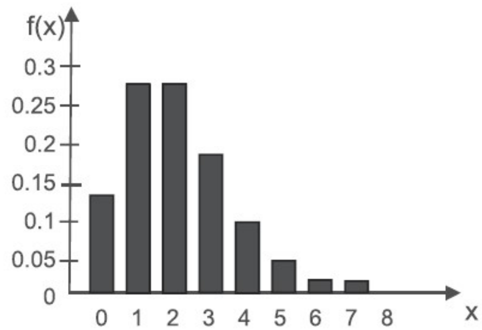
Distribuição acumulada

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0)$$

Média $E(T) = \frac{1}{\alpha}$

Variância $Var(T) = \frac{1}{\alpha^2}$

Distribuição de Poisson



Função densidade de probabilidade de uma variável com distribuição de Poisson (αt=2)

Função distribuição de probabilidade de X

$$f(x) = \frac{(\alpha t)^x e^{-\alpha t}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Distribuição acumulada

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0)$$

- αt parâmetro da distribuição
- α número médio de acontecimentos por unidade de tempo
- t comprimento do intervalo de tempo em análise
- x número de acontecimentos durante o intervalo t

Média $E(X) = \alpha t$

Variância $Var(X) = \alpha t$

PROPRIEDADES

- Se o tempo entre dois acontecimentos consecutivos segue uma distribuição exponencial negativa com parâmetro α, então o número de acontecimentos por unidade de tempo t segue uma distribuição de Poisson com parâmetro αt.
- A distribuição exponencial negativa não tem memória, i.e., a probabilidade de ocorrência de um acontecimento é independente do instante de tempo em que ocorreu o acontecimento imediatamente anterior.
- Sejam $T_1, T_2, \ldots, T_n$ variáveis aleatórias com distribuição exponencial negativa e parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. A variável $u = \min\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, que representa o tempo até que o primeiro de entre n acontecimentos ocorra, segue uma distribuição exponencial negativa com parâmetro $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Esta propriedade permite modelizar sistemas com k servidores idênticos (mesma distribuição) com parâmetro μ, operando em paralelo, como um único servidor com parâmetro $k\mu$ (o próximo cliente é atendido quando o primeiro servidor ficar livre).
- Desagregação — se a chegada de clientes seguir uma distribuição de Poisson com parâmetro λ, e esses clientes puderem ser divididos em diferentes tipos de tal forma que a probabilidade p_i de o cliente ser de um dado tipo i seja fixa e $\sum_i p_i = 1$, então a chegada de cada um dos clientes segue ainda uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda_i = p_i \lambda$.

RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

Relações fundamentais entre o número de elementos no sistema (L) e na fila (L_q), e os correspondentes tempos de espera no sistema (W) e na fila (W_q), para filas de espera em equilíbrio.

Admitindo taxas de chegada λ e de serviço μ constantes e independentes do estado do sistema:

$$
\begin{aligned}
L &= \lambda W & (3)\\
L_q &= \lambda W_q & (4)\\
W &= W_q + \frac{1}{\mu} & (5)\\
L &= L_q + \frac{\lambda}{\mu} & (6)
\end{aligned}
$$

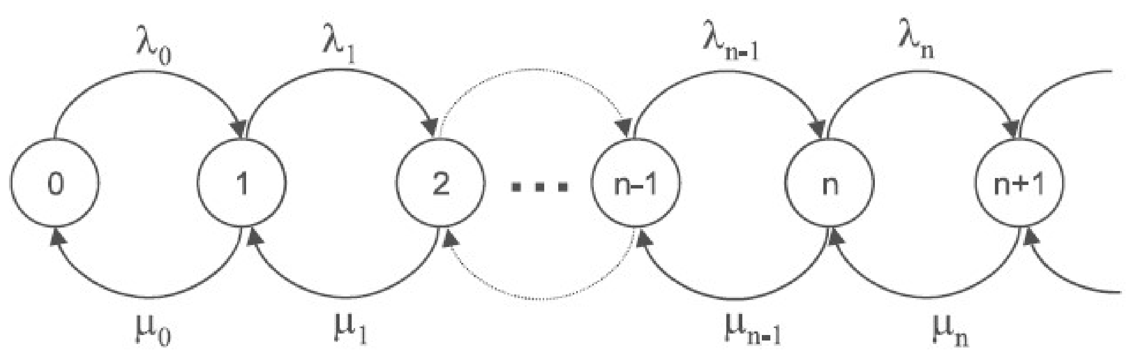
Se a taxa de chegada λ depender do estado do sistema, então λ deve ser substituído por $\overline{\lambda}$ nas equações (3) e (4).

A equação (5) é válida qualquer que seja o número de servidores, desde que o tempo médio de atendimento ($\frac{1}{\mu}$) seja igual para todos.

MODELAÇÃO POR PROCESSOS DE VIDA OU MORTE

Processos de Vida e Morte são processos estocásticos sem memória que, aplicados às filas de espera, associam **vida** a uma chegada à fila e **morte** à saída de um cliente depois de atendido.

- Dado que no instante t o sistema se encontra no estado n:
  - o tempo que separa t do próximo nascimento (chegada) segue uma distribuição exponencial negativa com parâmetro λ_n;
  - o tempo que separa t da próxima morte (serviço terminado) segue uma distribuição exponencial negativa com parâmetro μ_n.
- Nunca pode ocorrer simultaneamente mais do que um nascimento ou uma morte (transição apenas para estados adjacentes).



As setas representam as únicas transições possíveis entre os estados do sistema. Os valores associados às setas correspondem à taxa média para essa transição, quando o sistema se encontra no estado na base da seta.

MODELAÇÃO POR PROCESSOS DE VIDA OU MORTE

Pressuposto

Estados Estacionários / Estados de Equilíbrio

Excluem-se deste modelo estados transitórios, tais como:

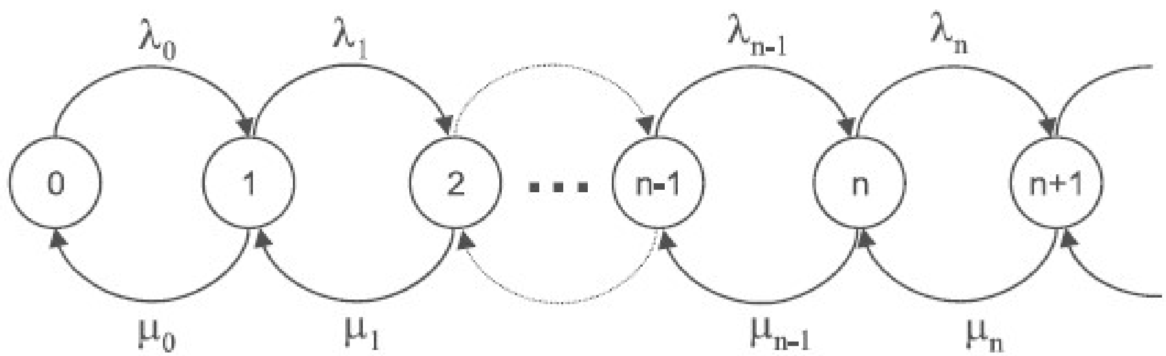
- a fila tende para infinito porque a taxa de chegada excede a capacidade de atendimento;
- a taxa de chegada varia ao longo do tempo;
- inícios de funcionamento com números anormais de clientes.

Princípio

Taxa média de entrada = Taxa média de saída

- Para qualquer estado do sistema n ($n = 0, 1, 2, ...$), a taxa média de entrada é igual à taxa média de saída
- A equação que expressa este princípio denomina-se de equação de equilíbrio para o estado n.
- Após construir as equações de equilíbrio para todos os estados, em função das probabilidades P_n desconhecidas, pode-se resolver esse sistema de equações (além de uma equação afirmando que as probabilidades devem somar 1) para encontrar essas probabilidades.

MODELAÇÃO POR PROCESSOS DE VIDA OU MORTE



Equações de Equilíbrio:

Estado 0:	$\mu_0 P_1$	$=\lambda_0 P_0$
Estado 1:	$\mu_1 P_2 + \lambda_0 P_0$	$=\mu_0 P_1 + \lambda_1 P_1$
	...	
Estado n:	$\mu_n P_{n+1} + \lambda_{n-1} P_{n-1}$	$=\mu_{n-1} P_n + \lambda_n P_n$
	...	

CLASSIFICAÇÃO DAS FILAS DE ESPERA: X/Y/Z/W

X, Y Distribuições do intervalo de tempo entre chegadas e do tempo de serviço, respetivamente:

- M distribuição exponencial negativa;
- G distribuição não especificada (qualquer distribuição);
- D chegadas ou atendimentos determinísticos.

Z número de servidores em paralelo.

W outras características do sistema, tais como comprimento da fila limitado ou população finita:

- **em branco ou** ∞ modelo-base sem qualquer restrição adicional;
- K comprimento da fila limitado, não podendo o número de elementos no sistema exceder K;
- N população finita.

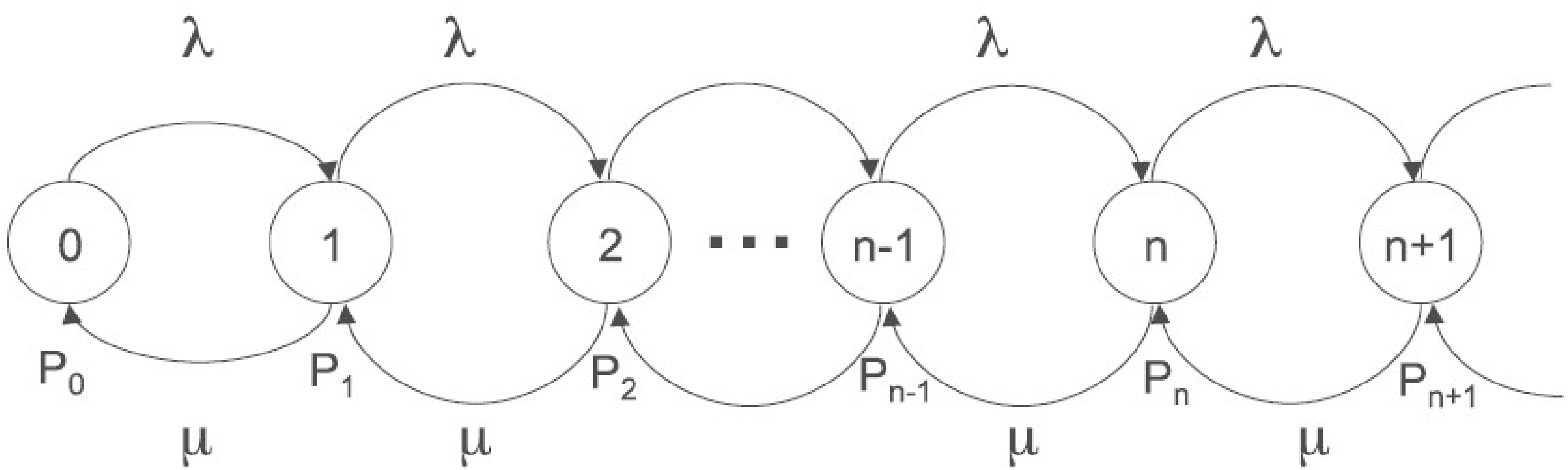
Exemplo: $M/M/1$

Fila de espera com chegadas Poissonianas, atendimentos exponenciais negativos e um servidor.

[14] Baseada na classificação proposta por Kendall, D. G. (1953). Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain. Annals of Mathematical Statistics, 24(3), 338-354.

MODELO BÁSICO DE 1 SERVIDOR: M/M/1

P_n – Probabilidade de estarem n clientes no sistema



Sistema em equilíbrio

capacidade de atendimento > número médio de clientes que procuram o serviço

taxa de ocupação $\rho < 1$

M/M/1: EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Estado 0

Número de entradas no estado 0 por unidade de tempo $= \mu P_1$
(passagem do estado 1 para o estado 0 por saída do sistema de um cliente atendido)

Número de saídas do estado 0 por unidade de tempo $= \lambda P_0$
(passagem do estado 0 para o estado 1 por chegada de um cliente ao sistema)

Equação de Equilíbrio do Estado 0

$$\mu P_1 = \lambda P_0 \quad \Leftrightarrow \quad P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

M/M/1: EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Estado 1

Número de entradas no estado 1 por unidade de tempo $= \lambda P_0 + \mu P_2$

(do estado 0 por chegada de um cliente ao sistema ou do estado 2 por saída do sistema de um cliente atendido)

Número de saídas do estado 1 por unidade de tempo $= \lambda P_1 + \mu P_1$

(para o estado 2 por chegada de um cliente ao sistema ou para o estado 0 por saída do sistema de um cliente atendido)

Equação de Equilíbrio do Estado 1

$$\lambda P_0 + \mu P_2 = \lambda P_1 + \mu P_1 \quad \Leftrightarrow \quad P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 + \frac{1}{\mu} \overbrace{(\mu P_1 - \lambda P_0)}^{=0 \text{ pela equação (7)}}$$

Usando novamente a equação (7) obtém-se:

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

M/M/1: EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Estado 2

Número de entradas no estado 2 por unidade de tempo $= \lambda P_1 + \mu P_3$
(do estado 1 por chegada de um cliente ao sistema ou do estado 3 por saída do sistema de um cliente atendido)

Número de saídas do estado 2 por unidade de tempo $= \lambda P_2 + \mu P_2$
(para o estado 3 por chegada de um cliente ao sistema ou para o estado 1 por saída do sistema de um cliente atendido)

Equação de Equilíbrio do Estado 2

$$\lambda P_1 + \mu P_3 = (\lambda + \mu) P_2 \quad \Leftrightarrow \quad P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 + \frac{1}{\mu} \overbrace{(\mu P_2 - \lambda P_1)}^{=0 \text{ pela equação (8)}} \quad \Leftrightarrow$$

$$P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

M/M/1: EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Estado n

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \rho^n P_0 \tag{10}$$

P_0 é obtido impondo a condição $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{P_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho} \quad \Leftrightarrow \quad P_0 = 1 - \rho$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ representa uma progressão geométrica de razão ρ, que será convergente se $\rho < 1$, sendo, nesse caso, a soma dada por $\frac{1}{1-\rho}$.

Substituindo P_0 por $1 - \rho$ na equação (10) obtém-se:

$$P_n = \rho^n (1 - \rho) \tag{11}$$

O número médio de clientes no sistema é, por definição, a média dos n estados possíveis do sistema, ponderados pelas respetivas probabilidades de ocorrência ($L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$).

Usando estes resultados e as relações fundamentais das filas de espera, chega-se ao seguinte conjunto de características para o modelo $M/M/1$.

M/M/1: CARACTERÍSTICAS

Chegada: Poissoniana
Taxa de chegada: $\lambda \frac{\text{clientes}}{\text{unid. de tempo}}$
População $= \infty$
Fila máxima $= \infty$

Tempo de atendimento: exponencial negativo
Taxa de atendimento: $\mu \frac{\text{clientes}}{\text{unid. de tempo e servidor}}$
N$^{\underline{o}}$ de servidores: 1

Taxa média de ocupação $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$
Taxa média de desocupação $1 - \rho$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$P_0 = 1 - \rho$
$P_n = \rho^n P_0$
$P(n > k) = \rho^{k+1}$

$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t}, \ t \geq 0$
$P(W_q > t) = \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t}, \ t \geq 0$
$P(W_q = 0) = P_0$

M/M/1: NOTA ADICIONAL

As questões relativas ao cálculo de probabilidades de acontecimentos em sistemas de filas de espera são respondidas a partir da determinação dos estados do sistema que cumprem as condições que definem esses acontecimentos. Exemplificando:

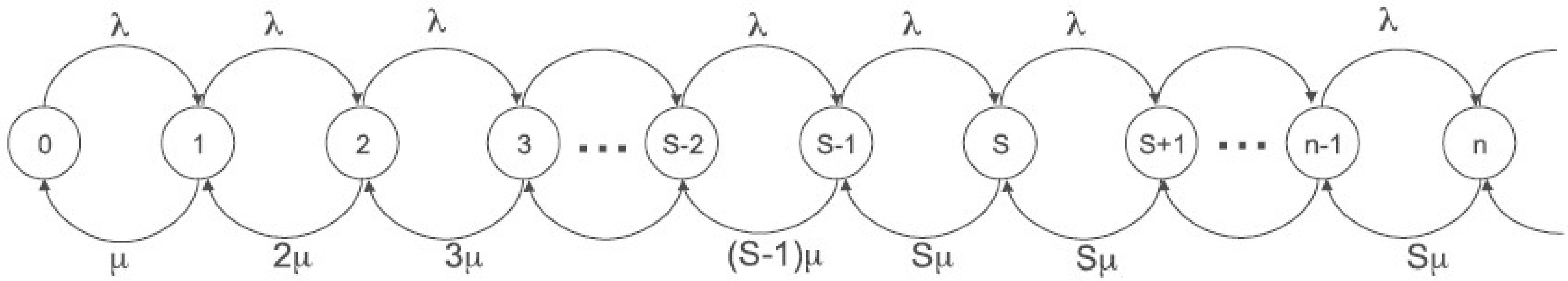
- **Num sistema M/M/1 qual é a probabilidade de se formar uma fila?**
  Os estados do sistema em que existe fila são os estados 2, 3, 4, etc..., ou seja, todos menos o estado 0 (não está ninguém no sistema) e o estado 1 (está apenas um cliente no sistema e, naturalmente, está a ser atendido, logo também não há fila).
  Assim, a probabilidade pedida será $1 - P_0 - P_1$.

- **Num sistema M/M/1 qual é a probabilidade de um cliente chegar e ser imediatamente atendido (isto é, qual é a probabilidade de não ter que esperar)?**
  Para que um cliente chegue e seja logo atendido é necessário que o servidor esteja livre, ou seja, que não esteja ninguém a ser atendido (e logo, que não esteja ninguém no sistema).
  Assim, a probabilidade pedida será P_0.

  Note-se que se estiver só um cliente no sistema (e logo, a ser atendido) não há fila, mas um cliente que chegue não pode ser logo atendido e terá que esperar. Esse cliente, ao entrar no sistema, fará o sistema mover-se do estado 1 para o estado 2, passando a haver uma fila com um cliente.

MODELO BÁSICO COM S SERVIDORES: M/M/S

Caso de uma fila de espera única, baseada num processo de vida e morte, em que existem S servidores em paralelo.



Taxa de chegada $= \lambda$ e é independente do estado do sistema;

Taxa de serviço $= \mu$, igual para todos os servidores (também denominada taxa de atendimento);

Capacidade de atendimento $= S \times \mu$ para o conjunto dos S servidores;

Taxa de ocupação $\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$; $\rho < 1$ para que o sistema esteja em equilíbrio;

Taxa de entrada $= \lambda$ e é independente do estado do sistema;

Taxa de saída $= min(n, S) \times \mu$, varia com o estado do sistema n.

M/M/S: CARACTERÍSTICAS

Chegada: Poissoniana

Taxa de chegada: $\lambda \frac{\text{clientes}}{\text{unidade de tempo}}$

População $= \infty$

Fila máxima $= \infty$

Tempo de atendimento: exponencial negativo

Taxa de atendimento: $\mu \frac{\text{clientes}}{\text{unidade de tempo e servidor}}$

Nº de servidores: S

Taxa média de ocupação $\rho = \frac{\lambda}{S\mu} < 1$

Taxa média de desocupação $1 - \rho$

$$L_q = \sum_{n=S}^{\infty}(n-S)P_n = \frac{P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!}\frac{1}{1-\rho}}$$

$$P(W > t)_{t\geq 0} = e^{-\mu t}\left(1 + \frac{P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!(1-\rho)}\frac{1-e^{-\mu t(S-1-\lambda/\mu)}}{S-1-\frac{\lambda}{\mu}}\right)$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}P_0, & \text{se } 0 \leq n \leq S \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{S!S^{n-S}}P_0, & \text{se } n \geq S \end{cases}$$

$$P(W_q > t)_{t\geq 0} = [1 - P(W_q = 0)]e^{-S\mu(1-\rho)t}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

Filas de Espera $M/M/S$ | Tabela prática para o cálculo de P_0

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de servidores (S) 2	3	4	5
0.15	0.8605	0.8607	0.8607	0.8607
0.20	0.8182	0.8187	0.8187	0.8187
0.25	0.7778	0.7788	0.7788	0.7788
0.30	0.7391	0.7407	0.7408	0.7408
0.35	0.7021	0.7046	0.7047	0.7047
0.40	0.6667	0.6701	0.6703	0.6703
0.45	0.6327	0.6373	0.6376	0.6376
0.50	0.6000	0.6061	0.6065	0.6065
0.55	0.5686	0.5763	0.5769	0.5769
0.60	0.5385	0.5479	0.5487	0.5488
0.65	0.5094	0.5209	0.5219	0.5220
0.70	0.4815	0.4952	0.4965	0.4966
0.75	0.4545	0.4706	0.4722	0.4724
0.80	0.4286	0.4472	0.4491	0.4493
0.85	0.4035	0.4248	0.4271	0.4274
0.90	0.3793	0.4035	0.4062	0.4065
0.95	0.3559	0.3831	0.3863	0.3867

$\frac{\lambda}{\mu}$	Número de servidores (S) 2	3	4	5
1.00	0.3333	0.3636	0.3673	0.3678
1.20	0.2500	0.2941	0.3002	0.3011
1.40	0.1765	0.2360	0.2449	0.2463
1.60	0.1111	0.1872	0.1993	0.2014
1.80	0.0526	0.1460	0.1616	0.1646
2.00		0.1111	0.1304	0.1343
2.20		0.0815	0.1046	0.1094
2.40		0.0562	0.0831	0.0889
2.60		0.0345	0.0651	0.0721
2.80		0.0160	0.0521	0.0581
3.00			0.0377	0.0466
3.20			0.0273	0.0372
3.40			0.0186	0.0293
3.60			0.0113	0.0228
3.80			0.0051	0.0174
4.00				0.0130
4.20				0.0093
4.40				0.0063
4.60				0.0038
4.80				0.0017

Serviço de Emergência

O serviço de emergência dum pequeno hospital tem um médico em serviço permanente.

Os doentes chegam segundo uma distribuição de Poisson com razão média de 2,4 por hora. O médico garante o tratamento de emergência a aproximadamente 3 doentes por hora. A distribuição do tempo de atendimento do médico por doente pode ser aproximada por uma exponencial negativa.

1. Em média, que parte do tempo do médico é gasta a prestar serviço de emergência?
2. Em média, quanto deverá esperar um doente até ser atendido pelo médico?
3. Quanto, em média, deverá um doente esperar até ser visto por um médico, numa situação em que um médico e um assistente façam parte dum sistema do tipo $M/M/1$, com razão de serviço de 6 doentes por hora, mantendo a razão de chegada em 2,4 doentes por hora?
4. Se o hospital melhorar a qualidade do atendimento de emergência, ao acrescentar um médico ao serviço permanente (sistema $M/M/2$), qual passará a ser a utilização do tempo dos médicos?
5. Com dois médicos disponíveis, quanto deverá esperar, em média, um doente até ser atendido?
6. Para as duas situações anteriores: atendimento assegurado por dois médicos e atendimento assegurado por um médico e um assistente calcule quanto tempo cada doente passará no serviço de emergência. Discuta as vantagens e desvantagens de cada um dos sistemas de atendimento.

Serviço de Veterinária

Edmundo Terra é um dos críticos ao funcionamento do Serviço de Veterinária da Cooperativa Agrícola de Belos Ares. Edmundo afirma que sempre que chama um veterinário ele nunca vem no mesmo dia.

Atualmente o Serviço de Veterinária tem dois veterinários e cada um atende em média 5 chamadas por dia. Quanto aos pedidos de apoio a animais doentes verifica-se que chegam aleatoriamente, seguindo um processo de Poisson, à razão de 9 por dia. O serviço pode ser neste caso considerado M/M/2.

Sensível às críticas dos membros da Cooperativa, a direção decidiu discutir o caso, admitindo mesmo contratar um novo veterinário.

Avalie a situação, contribuindo com informação que possa ser útil para uma tomada de decisão sobre a referida contratação.

Filas de Espera $M/M/S$ | Estação de correios

Uma estação de correios pretende redimensionar e reorganizar o seu atendimento ao público. O esquema de atendimento, em que todos os funcionários atendem todo o tipo de clientes, pedidos de informação, reclamações, aquisição de selos, vales postais, etc..., será no entanto mantido. Também se manterá o horário de atendimento ao público num total de 8 horas por dia.

Para avançar com o redimensionamento do atendimento foi necessário recolher informação sobre o número de chegadas de clientes, bem como sobre os tempos de atendimento. Dessa recolha concluiu-se que as chegadas seguiam aproximadamente uma distribuição de Poisson com parâmetro λ =1,56 chegadas por minuto, enquanto os tempos de serviço seguiam uma distribuição exponencial negativa com média igual a 66,24 segundos, a que corresponde uma taxa de atendimento $\mu = 1/66{,}24 \times 60 = 0{,}906$ atendimentos por minuto.

O custo horário de cada funcionário é de 10€. Quanto aos clientes, considerou-se um custo horário de espera igual ao custo dos funcionários dos correios.

Filas de Espera $M/M/1/K$ |Porto de Mar

http://www.planete-tp.com/en/solid-cargo-in-bulk-a389.html

Um porto que recebe navios graneleiros tem uma única estação de descarga (móvel) que permite descarregar, em média, 5 navios por dia. O porto tem um cais que permite a acostagem de apenas 2 navios, pelo que, quando o cais está ocupado, navios adicionais que pretendam acostar são desviados para outro porto, acarretando um custo de 20 000€ por navio desviado. A imobilização de navios no porto tem um custo de 12 000€ por dia e por navio.

As chegadas dos navios podem ser consideradas Poissionianas, com uma taxa de 3 navios por dia, sendo os tempos de descarga exponenciais negativos.

Pretende-se avaliar a viabilidade económica de ampliar o cais de modo a poder receber 3 navios, ampliação essa a que corresponderia um encargo adicional de 1 000€ por dia.

Recorra às equações de equilíbrio na resolução deste exercício.

Boeingavela

O Boeingavela, um pronto-a-comer de um aeroporto, tem atualmente apenas uma empregada ao balcão que atende em média 10 clientes por hora. Verificou-se que os clientes chegam à razão de 7 por hora, seguindo este processo de chegada uma distribuição de Poisson. O tempo de atendimento segue uma distribuição exponencial.

A gerência admite a hipótese de contratar mais uma empregada de balcão o que permitirá, ao duplicar a razão média de atendimento, melhorar a qualidade de serviço.

1. Analise o desempenho do sistema de espera no estado atual calculando, nomeadamente, a taxa de ocupação, a probabilidade de não haver nenhum cliente no pronto-a-comer, o comprimento médio da fila de espera, o número médio de pessoas no pronto-a-comer, o tempo que um cliente aguarda, em média, para ser atendido e o tempo que um cliente passa, em média, no pronto-a-comer.
2. Se as pessoas desistem sempre que já há 3 clientes (no sistema), qual é a percentagem de potenciais clientes perdidos? Recorra às equações de equilíbrio para responder a esta questão.
3. Como melhora o desempenho do sistema de espera, no caso de ser contratada mais uma funcionária? Deverá recorrer ao tipo de indicadores utilizados na primeira alínea.

Faça alguns comentários, que ache oportunos, sobre as situações que estudou nas várias alíneas.

Gasolineira

Uma bomba de gasolina tem dois lugares para abastecer carros e dois lugares para os carros formarem uma fila de espera para o abastecimento. Admita que alguns clientes que chegam à bomba e verificam que o número de carros parados é elevado decidem não entrar. Quando os clientes potenciais verificam que os dois lugares de abastecimento e os dois lugares da fila de espera estão ocupados, não entram na bomba e procuram outra para abastecer o carro. Nestas condições, as taxas de entrada dos clientes (λ) dependem do número de clientes no sistema (n), e são as seguintes:

n=0 $\Rightarrow \lambda = 4/15$ minutos

n=1 $\Rightarrow \lambda = 4/15$ minutos

n=2 $\Rightarrow \lambda = 2/15$ minutos

n=3 $\Rightarrow \lambda = 1/15$ minutos

n=4 $\Rightarrow \lambda = 0$

O tempo de abastecimento segue uma distribuição exponencial negativa, com média igual a 5 minutos.

1. Calcule o número médio de clientes na fila de espera e no sistema (i.e., na fila e a abastecer).
2. Calcule a percentagem de clientes potenciais perdidos (admitindo que os clientes potenciais chegam à bomba com uma taxa $\lambda = 4/15$ minutos).
3. Calcule o tempo médio que os clientes estão na fila de espera e no sistema.