



SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II

Tarefa 1 - Zeros de Funções

ANDRÉ ZANARDI CREPPE - 11802972

Professor:

MARCELO AREIAS TRINDADE

Maio de 2021

Conteúdo

1	Objetivos	3
2	Equacionando o problema	4
2.1	Pontos de equilíbrio	4
2.2	Rigidez Efetiva	5
3	Resolução numérica e computacional	7
3.1	Pontos de equilíbrio	7
3.2	Rigidez Efetiva	8
3.3	Extra	11
4	Conclusões	12

1 Objetivos

Nessa atividade, o nosso principal objetivo é determinar uma **expressão para o deslocamento estático** provocado pelo peso de uma suspensão automotiva oblíqua, além de também encontrar um ou mais valores para os quais o **equilíbrio estático** é alcançado. Podemos ver um diagrama simplificado do problema na Figura 1 abaixo.

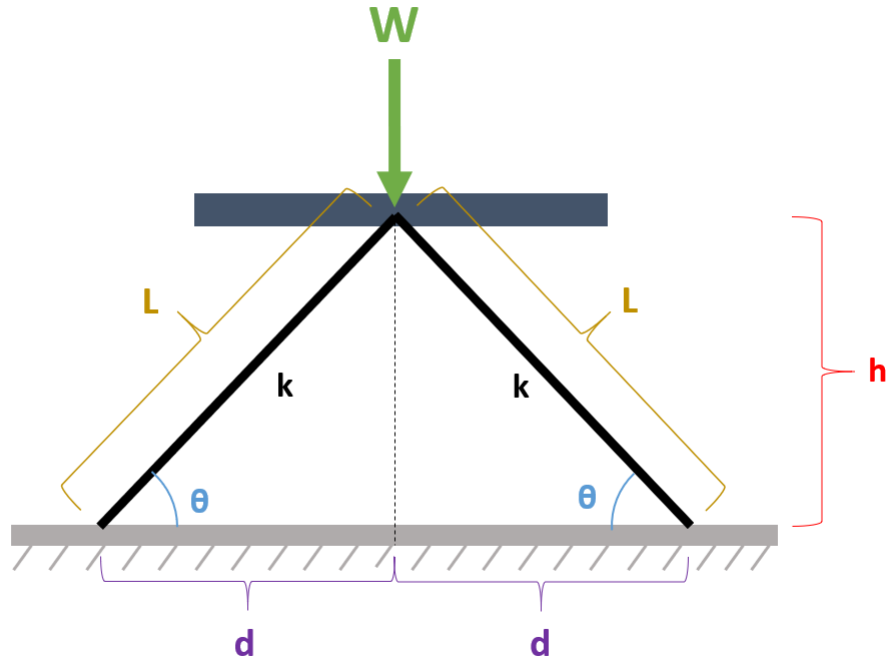


Figura 1: Diagrama da suspensão automotiva a ser analisada.

Ademais, deseja-se calcular e visualizar graficamente a **rigidez efetiva** em função do deslocamento, bem como o seu valor na proximidade das configurações de equilíbrio estático.

2 Equacionando o problema

2.1 Pontos de equilíbrio

Utilizando o diagrama fornecido pelo enunciado, podemos aplicar o deslocamento provocado pela força peso (W) e observar o aparecimento de uma reação devido a compressão da mola ($F = F_{el}$) bem como a diminuição de algumas dimensões, como o tamanho da mola (L) e a altura da suspensão (h). Colocamos todas essas informações na Figura 2, com a força elástica já decomposta no sentido mais interessante para o estudo.

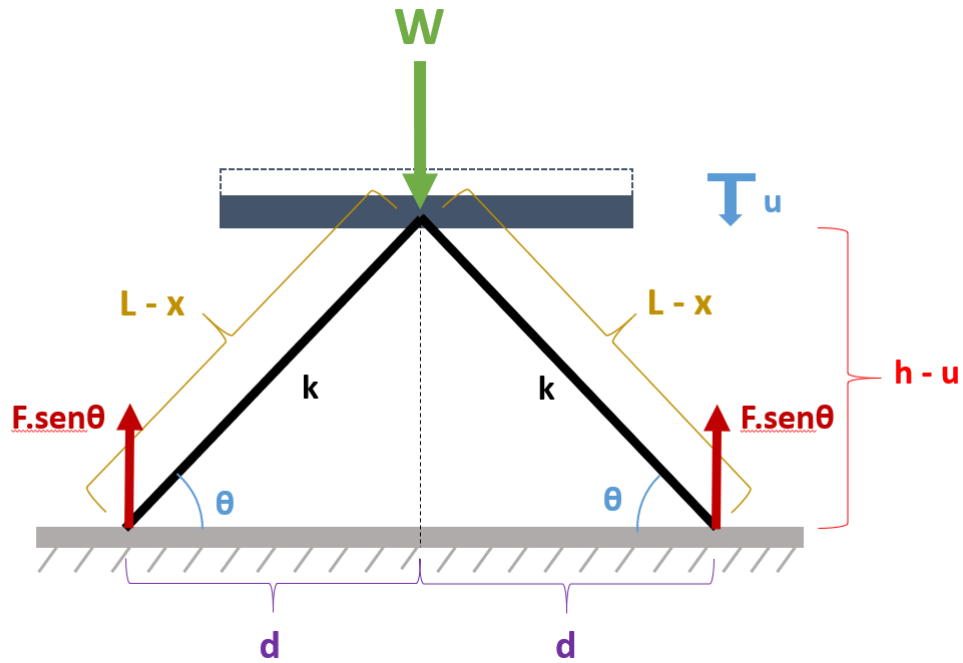


Figura 2: DCL com o deslocamento aplicado e o surgimento das forças.

Para equacionar o problema, podemos ver que o sistema sofre deslocamento apenas na direção vertical (y), portanto será ela que iremos analisar. Dessa forma, também conhecendo o fato de que estamos tratando o problema como uma situação estática, podemos dizer que:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$2F \text{sen}(\theta) - W = 0$$

$$2F \text{sen}(\theta) - mg = 0$$

Analisando a figura, podemos definir algumas dimensões geometricamente por causa do triângulo formado pela mola entre os 2 planos. Seriam elas a altura normal da suspensão (h)

$$L^2 = d^2 + h^2$$

$$h = \sqrt{L^2 - d^2}$$

e o comprimento da mola já comprimida ($L - x$)

$$(L - x)^2 = d^2 + (h - u)^2$$

$$(L - x) = \sqrt{d^2 + (h - u)^2}$$

para possibilitar reescrever o $\text{sen}(\theta)$ como:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{h - u}{L - x}$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{h - u}{\sqrt{d^2 + (h - u)^2}}$$

Da mesma forma, temos que a força elástica (F) pode ser definida por:

$$F = k\Delta x$$

$$F = k[L - (L - x)]$$

$$F = k(L - \sqrt{d^2 + (h - u)^2})$$

Assim sendo, juntando os novos termos teremos uma equação f em função do deslocamento (u) que, quando igualada a 0, nos fornecerá os valores para que o sistema se mantenha em equilíbrio estático:

$$f(u) = 2 \cdot k(L - \sqrt{d^2 + (h - u)^2}) \cdot \frac{h - u}{\sqrt{d^2 + (h - u)^2}} - mg \quad (1)$$

O nosso objetivo então será encontrar os zeros da função $f(u)$ pois eles indicarão para quais valores de u o sistema se mantém em equilíbrio.

2.2 Rigidez Efetiva

Para a segunda parte da atividade, precisaremos calcular a Rigidez Efetiva (k_{ef}) da mola de acordo com o deslocamento (u), que pode ser determinado isolando a força W (mg) na seguinte relação:

$$k_{ef}(u) = \frac{W}{u}$$

$$k_{ef}(u) = \frac{2k \cdot (L - \sqrt{d^2 + (h - u)^2}) \cdot (h - u)}{\sqrt{d^2 + (h - u)^2}} \cdot \frac{1}{u}$$

$$k_{ef}(u) = \frac{2k \cdot (L - \sqrt{d^2 + (h - u)^2}) \cdot (h - u)}{u \cdot \sqrt{d^2 + (h - u)^2}} \quad (2)$$

Além disso objetivamos montar um gráfico que mostre essa proporção conforme o deslocamento dado para também determinar qual é o seu valor para os deslocamentos em que o sistema se mantêm em equilíbrio.

3 Resolução numérica e computacional

3.1 Pontos de equilíbrio

Com a Equação 1 em mãos, foi possível traduzí-la para uma função no *Octave* a fim de resolver o problema de forma automática baseado nos valores iniciais, pois eles foram inseridos na forma de variáveis. O código para essa função pode ser visto no Listing 1 abaixo:

```
1 # suspensao.m
2 function res = suspensao(u)
3     % Dados providos do enunciado do problema
4     d = 0.2;
5     L = 0.5;
6     k = 10000;
7     g = 9.81;
8     m = 180 + 72; % 118029(72)
9
10    % Outros valores importantes que precisam ser calculados
11    h = sqrt(power(L, 2) - power(d, 2));
12    pit = sqrt(power(d, 2) + power((h-u), 2));
13
14    % Quebrando a equacao para facilitar leitura
15    a = 2 .* k .* (L-pit);
16    b = (h-u) ./ pit;
17    c = m .* g;
18
19    % Juntando de acordo
20    res = (a .* b) - c;
21 end
```

Listing 1: Função da equação de equilíbrio.

Para computar o gráfico, foi utilizado o intervalo $[0, h]$ pois, para o deslocamento ser real, ele não pode ultrapassar a altura do todo (h). Dessa forma, ao fazer um *plot* com incrementos de 0.01 em u conseguimos obter o gráfico presente na Figura 3.

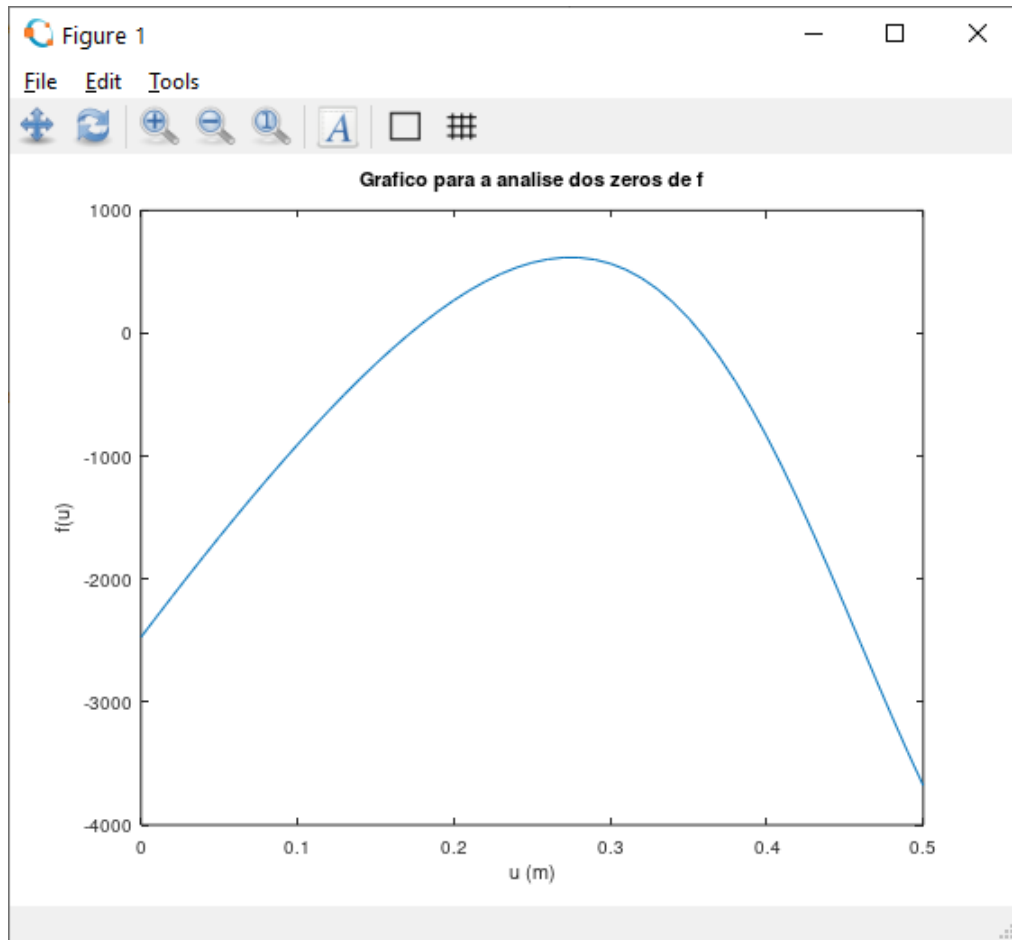


Figura 3: Grafico para a analise dos zeros de f .

Visualmente é possível identificar que a função possui dois pontos que cruzam o eixo das abscissas, ou seja, duas situações em que será possível obter um equilíbrio estático. Dentro do próprio ambiente do *Octave* é possível utilizar o comando *fzero* para calcular esses pontos, resultando em:

Workspace				
Filter <input type="checkbox"/>				
Name	Class	Dimensi	Value	Attribute
x1	double	1x1	0.1720	
x2	double	1x1	0.3583	

Figura 4: Resultados da execução de *fzero*.

Ou seja, para u valendo **0.1720m** ou **0.3583m** o sistema estará em equilíbrio.

3.2 Rigidez Efetiva

Prosseguindo na atividade, precisamos obter o gráfico da Rigidez Efetiva (k_{ef}) do sistema, definido pela Equação 2. Traduzindo-a para uma função obtivemos o código

definido no Listing 2 abaixo:

```
1 # rigidez.m
2 function res = rigidez(u)
3 % Dados providos do enunciado do problema
4 d = 0.2;
5 L = 0.5;
6 k = 10000;
7 g = 9.81;
8 m = 180 + 72; % 118029(72)
9
10 % Outros valores importantes que precisam ser calculados
11 h = sqrt(power(L, 2) - power(d, 2));
12 pit = sqrt(power(d, 2) + power((h-u), 2));
13
14 % Quebrando a equacao para facilitar leitura
15 a = 2 .* k .* (L-pit) .* (h-u);
16 b = u .* pit;
17
18 % Juntando de acordo
19 res = a ./ b;
20 end
```

Listing 2: Função da Rigidez Efetiva.

A partir dele, fizemos o mesmo procedimento visto anteriormente, com o intervalo igual de $[0, h]$ e passos de 0.01 em conjunto com o comando *plot*, para então conseguimos obter o gráfico da Figura 5.

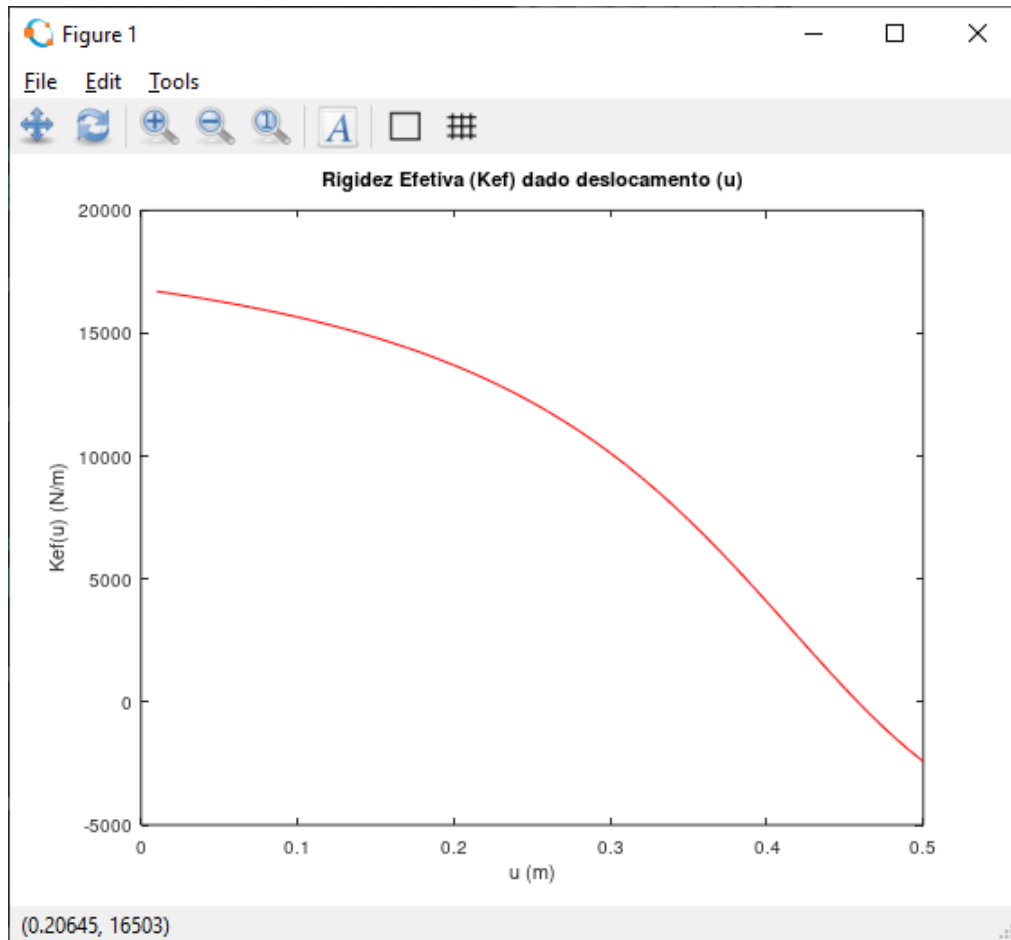


Figura 5: Grafico para a analise da Rigidez Efetiva do sistema.

E para obter os valores de k_{ef} nos deslocamentos de equilíbrio basta chamar a função passando os valores obtidos anteriormente na forma de argumentos:

Workspace				
Name	Class	Dimensio	Value	Attribute
r1	double	1x1	1.4374e+04	
r2	double	1x1	6900.4	
x1	double	1x1	0.1720	
x2	double	1x1	0.3583	

Figura 6: Resultados (r_i) da execução da função de *rigidez* para cada ponto de equilíbrio (x_i).

Dessa forma, podemos então dizer que k_{ef} para a primeira e segunda posição de equilíbrio, respectivamente, vale **14,374 kN** e **6,9 kN**.

3.3 Extra

Todos os gráficos e capturas de telas do Workspace do *Octave* foram obtidos a partir da execução do script presente no Listing 3 a seguir:

```
1 # tarefa1.m
2
3 % Grafico equacao de equilibrio
4 i = 0:0.01:0.5;
5 plot(i, suspensao(i));
6 xlabel("u (m)");
7 ylabel("f(u)");
8 title("Grafico para a analise dos zeros de f");
9
10 pause;
11
12 % Zeros da equacao de equilibrio
13 int = [0 0.25];
14 x1 = fzero(@suspensao, int);
15 int = [0.25 0.5];
16 x2 = fzero(@suspensao, int);
17
18 plot(i, rigidez(i), 'r');
19 xlabel("u (m)");
20 ylabel("Kef(u) (N/m)");
21 title("Rigidez Efetiva (Kef) dado deslocamento (u)");
22
23 r1 = rigidez(x1);
24 r2 = rigidez(x2);
```

Listing 3: Script para a obtenção dos gráficos e valores dessa tarefa.

4 Conclusões

Com toda a análise feita nessa tarefa pudemos encontrar a curva $f(u)$ (Equação 1) de comportamento do sistema de suspensão, na qual as raízes

$$u_1 = 0,1720\text{m}$$

$$u_2 = 0,3583\text{m}$$

indicaram posições de equilíbrio estável, dos quais conseguimos também determinar a Rigidez Efetiva (Equação 2) em cada ponto de equilíbrio

$$k_{ef1} = 14,374\text{kN}$$

$$k_{ef2} = 6,9\text{kN}$$

Do ponto de vista educacional, conseguimos resolver um problema mecânico com aplicação utilizando análise de corpos e forças em conjunto com ferramentas computacionais.