SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II

Tarefa 5 - Aproximação numérica de EDOs de 2ª ordem

André Zanardi Creppe - 11802972

Professor:

Marcelo Areias Trindade

Julho de 2021

Conteúdo

1 Objetivos

Nesse trabalho, o nosso objetivo principal será determinar a **evolução do deslocamento angular** ($\theta(t)$) de um pêndulo simples (Figura 1) dado um intervalo de tempo e algumas condições iniciais.

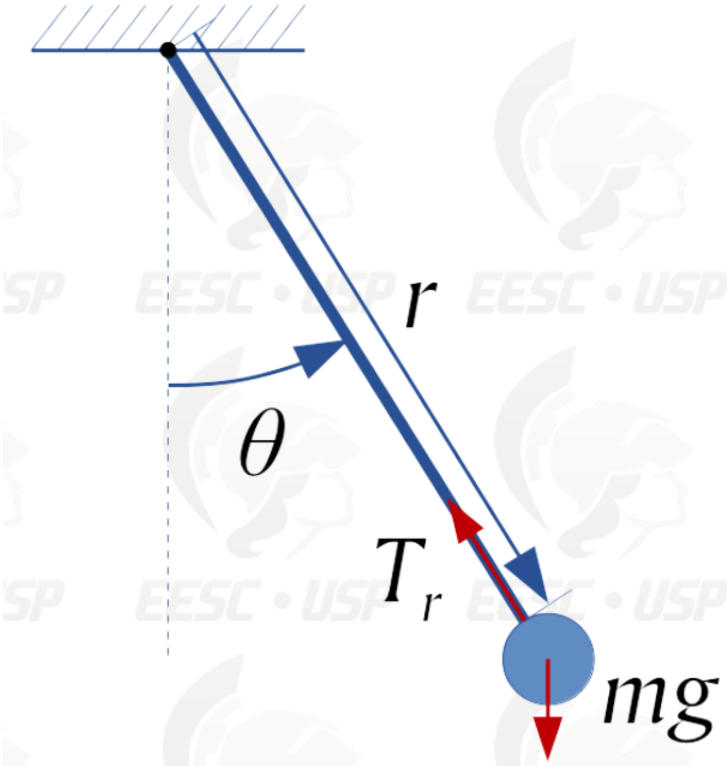

Figura 1: Representação do Pêndulo Simples a ser estudado.

Esse deslocamento $\theta(t)$ será encontrado utilizando um algorítimo de **integração numérica**, o qual permitirá construir gráficos de interesse para a analisar a evolução do problema com o passar do tempo.

Ademais, deseja-se utilizar tais informações numérica para determinar algumas características do movimento do sistema, como: **quantidade de voltas** completas pelo pêndulo antes de parar; evolução da **tração** no cabo; **frequência** de oscilação.

2 Equacionando o problema

Para começar a equacionar o problema, é necessário montar, primeiramente, um *diagrama de corpo livre* para a Figura 1 explicitando todas as forças e coordenadas que iremos utilizar.

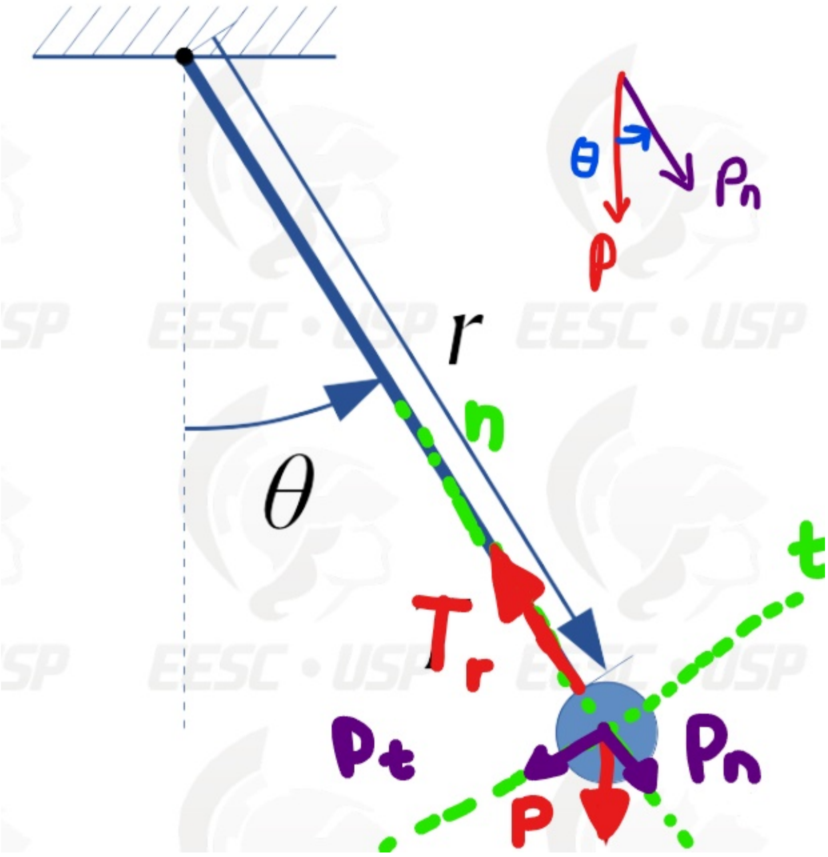

Figura 2: Diagrama de Corpo Livre do Pêndulo Simples.

A partir da Figura 2 acima, podemos ver que a força peso é decomposta na direções normal e tangencial e varia de acordo com o ângulo θ em que o pêndulo se encontra:

$$P_n = m \cdot g \cdot cos(\theta)$$

$$P_t = m \cdot g \cdot sen(\theta)$$

Além dessas forças, sabemos que existe um momento (M) em relação ao pino do pêndulo que vai resistir ao movimento da massa. Isso quer dizer que o sistema é um pendulo amortecido, indicando que a energia cinética será dissipada com o tempo. Tal momento é o resultado a aplicação de uma uma força F_m aplicada na massa, o que na hora de equacionar se traduz a:

$$M = F_m \cdot r \;\rightarrow\; F_m = \frac{M}{r}$$

Aplicando essas forças nas as equações do equilíbrio cinemático, podemos tirar que:

$$\Sigma F_n = T - P_n = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma F_t = -P_t - F_m = m \cdot a_t \tag{2}$$

Ou seja, de todas as variáveis acima apenas não obtivemos do enunciado a aceleração linear tangencial (a_t). Podemos facilmente contornar esse problema ao deixá-la em função de (θ), visto que a massa do pêndulo percorre uma trajetória D em arco:

$$D = \theta \cdot r \;\rightarrow\; \dot{D} = \dot{\theta} \cdot r \;\rightarrow\; \ddot{D} = \ddot{\theta} \cdot r$$

$$\therefore \ddot{D} = \ddot{\theta} \cdot r = a_t$$

Com as equações bases já descritas, podemos utilizar a expressão da direção tangencial (Equação 2) para substituir os valores e encontrar a nossa equação geral para o movimento:

$$-P_t - F_m = m \cdot a_t$$

$$-[m \cdot g \cdot sen(\theta)] - \left(\frac{M}{r}\right) = m \cdot (\ddot{\theta} \cdot r)$$

$$-[m \cdot g \cdot sen(\theta)] - \left(\frac{c \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}}{r}\right) = m \cdot \ddot{\theta} \cdot r$$

$$-\frac{m \cdot g \cdot sen(\theta)}{m \cdot r} - \frac{c \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}}{m \cdot r^2} = \ddot{\theta}$$

$$-\frac{g \cdot sen(\theta)}{r} - \frac{c \cdot \dot{\theta}}{m} = \ddot{\theta}$$

$$\therefore \; \ddot{\theta} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{m}} \cdot \dot{\theta} + \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{sen}(\theta) = \mathbf{0} \tag{3}$$

A Equação 3 pode ser definida como uma EDO de 2ª ordem e será a parir dela que conseguiremos fazer a análise computacional para solucionar o problema em questão.

Para tirar a quantidade de voltas (n_v) que a massa irá dar, podemos utilizar a assíntota do deslocamento angular (θ) - deslocamento máximo - dividido pelo comprimento total da trajetória D - uma circunferência:

$$n_v = \frac{\theta_{max}}{2\pi} \tag{4}$$

Outra característica do movimento que queremos estudar é o comportamento da Tração (T) ao longo do tempo. Utilizando a Equação 1 agora, facilmente tiramos tiramos que:

$$T = P_n$$

$$\therefore \mathbf{T}(\theta) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{cos}(\theta) \tag{5}$$

E por último, para encontrar a frequência do pêndulo, podemos utilizar uma fórmula já conhecida, deduzida nas aulas da disciplina de Física II, a qual seria:

$$f(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{2\pi} \tag{6}$$

Com todas essas equações em mãos, podemos partir para resolver o problema de forma computacional e assim obter os resultados numéricos desejados.

3 Resolução numérica e computacional

Considerando que a Equação 3 é uma EDO de ordem 2, para utilizar o solucionador numérico *ode45* do *Octave* será necessário reescreve-la. Para isso, o primeiro passo será deixar em evidência as derivações

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{m} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{r} \cdot sen(\theta) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{c}{m} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{r} \cdot sen(\theta) = 0$$

para aí transformá-la em um sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ \\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{c}{m} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} - \dfrac{g}{r} \cdot sen(\theta) \end{cases}$$

Dessa forma, conseguimos aplicar a operação de integração numérica o obter um vetor contendo valores de tempo, os quais correspondem com uma matriz a contendo outros dois vetores, com um deles representando o deslocamento angular (θ) e o outro a velocidade angular ($\dot{\theta}$). Para visualizar o resultado foi possível elaborar um gráfico (Figura 3) mostrando a variação dessas duas propriedades de acordo com o tempo.

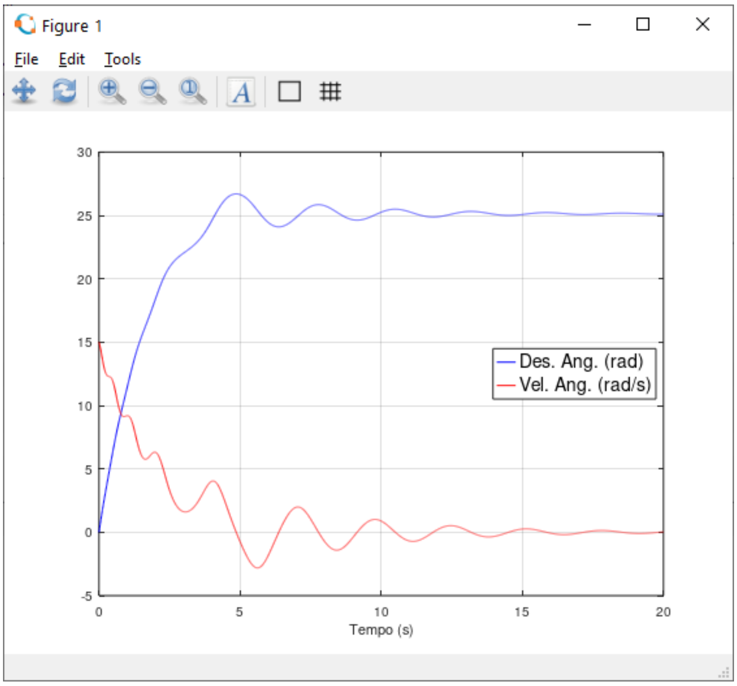

Figura 3: Variação de θ e $\dot{\theta}$ pelo tempo.

Como podemos esperar, devido a característica amortecida do movimento, a velocidade angular (em vermelho) diminui com o passar do tempo, implicando que a massa vai conseguir completar algumas voltas até que não tenha mais energia para girar completamente, o que iniciaria um movimento pendular até o pêndulo se estabilizar. Isso implica que o deslocamento angular (em azul) vai aumentar e depois se estabilizar também.

Uma outra forma de visualizar essa estabilização é com o gráfico de θ x $\dot{\theta}$ (Figura 4). Podemos ver com ele uma representação muito bonita do desenvolvimento do movimento, com o ponto de convergência da espiral sendo o estado estável após a energia cinética do problema zerar ($\theta = 0$ da Figura 1).

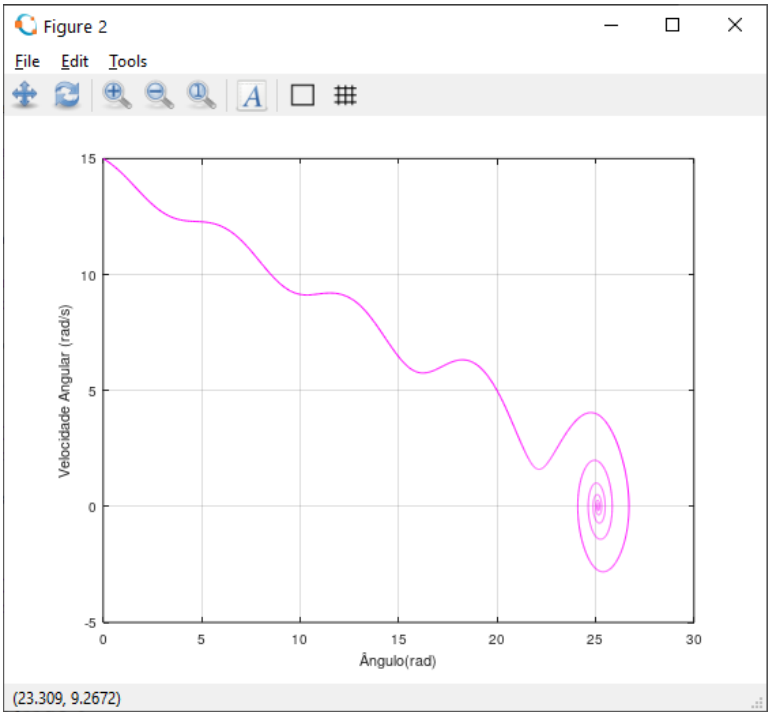

Figura 4: Variação de $\dot{\theta}$ por θ.

No caso estudado, graficamente podemos notar que o movimento pendular começa quando $\mathbf{t} \approx \mathbf{5s}$, visto que é a partir daí que a velocidade angular fica negativa e o deslocamento oscila. Além disso, utilizando a Equação 4 no *Octave* obtivemos que o total de voltas completas dadas foi

$$n_v = 3.994847 \; \rightarrow \; \mathbf{n_v \approx 4}$$

Prosseguindo no estudo, foi aplicado os resultados do vetor de θ na Equação 5 para obter a variação da tração pelo deslocamento angular, que por implicação é também a variação da tração pelo tempo. Com essa correção foi possível elaborar a Figura 5 abaixo.

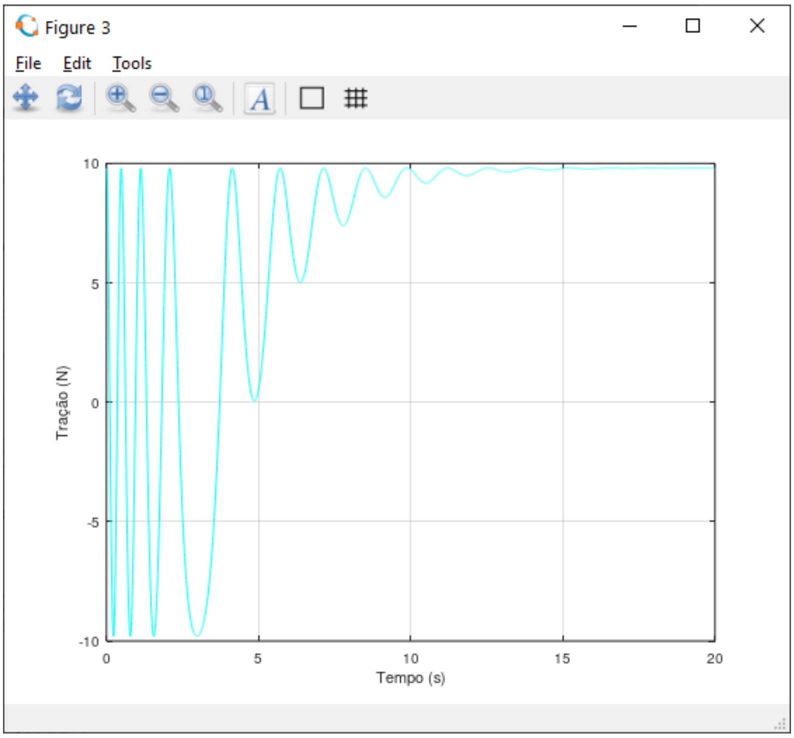

Figura 5: Variação da Tração (T) pelo tempo (t).

Podemos ver que no começo do movimento, devido a alta velocidade, o ângulo θ da corda em relação ao eixo vertical variava muito, o que consequentemente mudava a todo instante a componente normal do peso e assim a tensão que tal corda sofria nas diferentes posições do pêndulo. Com a subsequente perda de energia, a massa eventualmente se estabilizará na posição vertical para baixo, a qual representa o maior valor do peso (quando $cos(\theta) = 1$):

$$\mathbf{(P_n)_\infty = 9.807\ N}$$

Por fim, a frequência, dada pela Equação 6, varia no tempo pela mesma lógica aplicada no estudo da Tração. Ela também possui um comportamento previsível, uma vez que o termo $\dot{\theta}$ aparece no numerador da sua equação e o mesmo tende a 0 com o passar do tempo (movimento amortecido). Tal raciocínio pode ser confirmado pela assíntota formada na Figura 6, valendo:

$$\mathbf{f_\infty = 0}$$

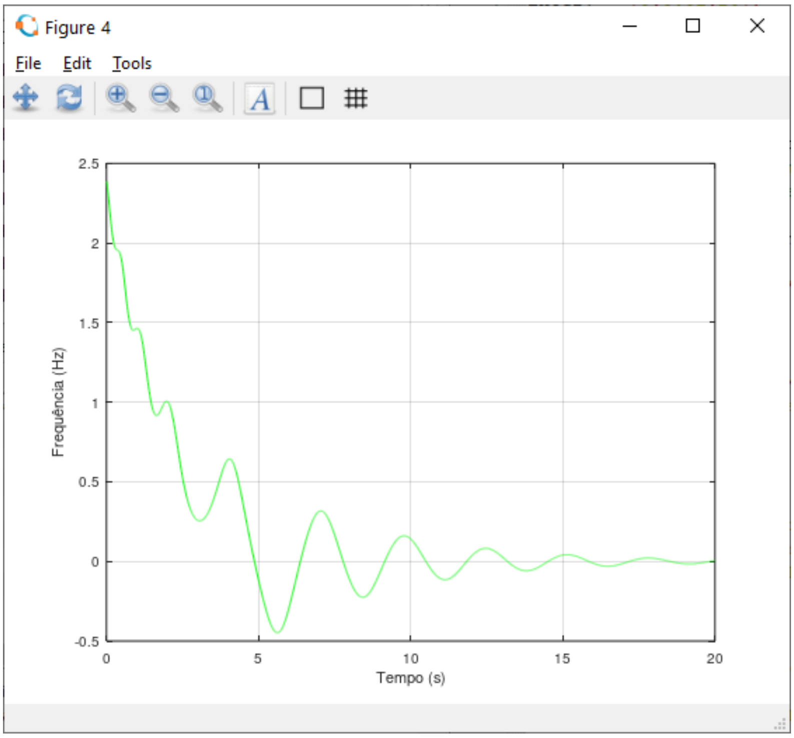

Figura 6: Variação da Frequência (f) pelo tempo (t).

Assim, terminamos a análise dos pontos de interesse desse problema.

3.1 Códigos Fonte

Para conseguirmos fazer as avaliações e manipulações numéricas anteriores, as equações obtidas no equacionamento foram reunidas em *scripts* que foram executados dentro do ambiente *Octave*. Tais códigos podem ser encontrados nos Listings 1 e 2 abaixo:

```
# tarefa5.m
clear all
close all

% Problema

interv = [0:0.01:20];
theta0 = [
  0; % th0
  15 % (dth/dt)0
];

[t, theta] = ode45(@pendulum, interv, theta0);
% theta(:, 1) = deslocamento angular theta
% theta(:, 2) = velocidade angular dth/dt

T = 1 .* 9.807 .* cos(theta(:, 1));

f = theta(:, 2) ./ (2 .* pi);

```

```
% Respostas Numericas

turns = theta(end, 1) ./ (2 .* pi);
fprintf('Total de voltas dadas: %f\n', turns);

% Graficos

figure
plot(t, theta(:, 1), '-b', t, theta(:, 2), '-r'); grid;
lel = legend({'Des. Ang. (rad)', 'Vel. Ang. (rad/s)'}, 'location', '
    east');
  set(lel, 'fontsize', 14);
xlabel('Tempo (s)');

figure
plot(theta(:, 1), theta(:, 2), '-m'); grid;
xlabel('Angulo(rad)');
ylabel('Velocidade Angular (rad/s)');

figure
plot(t, T, '-c'); grid;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Tracao (N)');

figure
plot(t, f, '-g'); grid;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Frequencia (Hz)');
```

Listing 1: Script utilizado para a resolução do problema.

```
# pendulum.m
function d2thetadt2 = pendulum(t, theta)
  % Dados do Enunciado
  m = 1;
  c = 0.5;
  r = 1.75;
  g = 9.807;

  % EDO
  d2thetadt2 = [
    theta(2);
    (-c ./ m) .* theta(2) + (-g ./ r) .* sin(theta(1));
  ];
end
```

Listing 2: Representação computacional na forma de função da EDO do problema.

4 Conclusões

Após toda a análise feita nessa tarefa, vimos que é possível trabalhar na resolução de um problema envolvendo equações diferenciais de segunda ordem, como a que representa um movimento pendular amortecido

$$\ddot{\theta} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{m}} \cdot \dot{\theta} + \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{sen}(\theta) = \mathbf{0}$$

utilizando apenas ferramentas computacionais de aproximação numérica. Tais algorítimos fornecem dados que, ao serem dispostos em gráficos, tornam-se úteis para analisar o problema, como visto nas Figuras 3 a 6 anteriormente.

Além disso, foi possível utilizar esse conjunto de dados para obter informações de interesse para o sistema, como a quantidade de voltas que o pêndulo deu

$$\mathbf{n_v} \approx \mathbf{4}$$

e o tempo de início do movimento pendular

$$\mathbf{t_p} \approx \mathbf{5\ s}$$

Do ponto de vista educacional, aprender a aplicar técnicas computacionais facilita muito o estudo e resolução de equações trabalhosas, como a Equação 3, e auxilia a análise de engenharia para problemas do mundo real.