SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II

Tarefa 2 - Aproximação de Integrais

André Zanardi Creppe - 11802972

Professor:

Marcelo Areias Trindade

Maio de 2021

Conteúdo

1 Objetivos

Nessa atividade, o nosso principal objetivo é determinar a **velocidade e aceleração** de um veículo em fução da distância percorrida em uma trajetória circular utilizando os conceitos de dinâmica de partículas. Podemos ver um diagrama simplificado do problema na Figura 1 abaixo.

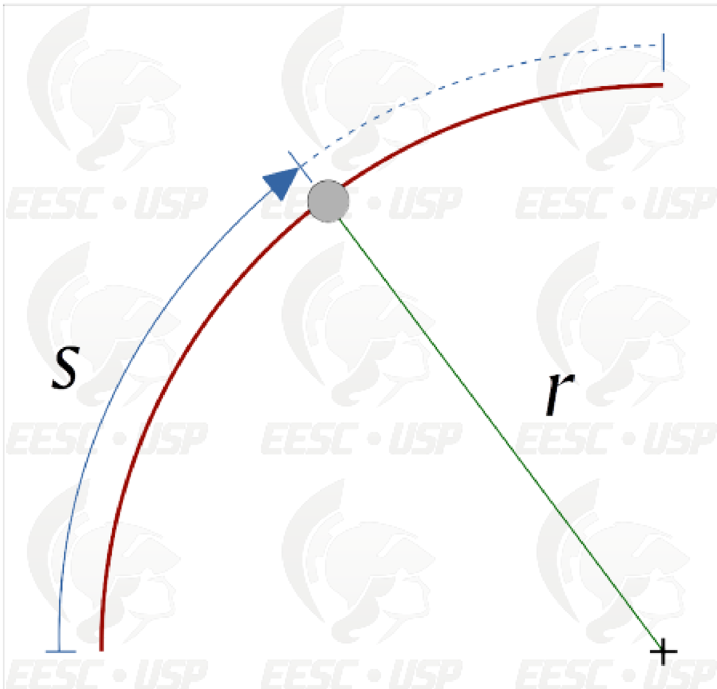

Figura 1: Representação simplificada do problema a ser estudado.

Ademais, deseja-se visualizar graficamente as relações entre **velocidade e deslocamento (v vs s)** e **aceleração e deslocamento (a vs s)**, bem como determinar o **tempo** necessário para o veículo percorrer uma certa distância utilizando um método numérico de aproximação de integrais.

2 Equacionando o problema

2.1 Movimento Circular Plano

Utilizando o diagrama e dados fornecidos pelo enunciado, pode-se começar a desenvolver as equações fundamentais do movimento circular plano para obter as relações mais interessantes para se resolver o problema. Começando pela determinação da velocidade em função do deslocamento *V(s)*, a qual é tangente à trajetória s, temos que:

$$a_t\, ds = V\, dV$$
$$\int_0^s a_t\, ds = \int_{V_0}^{V_f} V\, dV$$
$$\int_0^s (4 - 0.01\, s^2)\, ds = \int_{V_0}^{V_f} V\, dV$$
$$\left(4s - \frac{0.01\, s^3}{3}\right)\Bigg|_0^s = \frac{V_f^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}$$
$$\left(4s - \frac{0.01\, s^3}{3}\right) = \frac{V_f^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}$$
$$V_f^2 = -\frac{0.02}{3}s^3 + 8s + V_0^2$$

$$\mathbf{V_f = V(s) = \sqrt{-\frac{0.02}{3}s^3 + 8s + V_0^2}} \tag{1}$$

Partindo para a próxima etapa, queremos obter a equação que represente a aceleração do veículo. Como visto na também teoria da dinâmica, a aceleração geral em qualquer movimento circular é fruto de 2 componentes independentes: tangencial (a_t) e normal (a_n). A primeira foi definida pelo enunciado como uma função de s

$$a_t(s) = (4 - 0.01\, s^2) \tag{2}$$

enquanto a segunda advém da relação entre as dimensões da geometria do problema:

$$a_n = \frac{v^2}{r} \tag{3}$$

Como essas componentes são perpendiculares entre si, para encontrar a aceleração em função da trajetória *a(s)* basta utilizar o Teorema de Pitágoras:

$$a(s)^2 = a_t(s)^2 + a_n^2$$

$$\mathbf{a(s)} = \sqrt{\mathbf{a_t(s)^2 + a_n^2}} \tag{4}$$

As Equações 1 e 4 definem então as características do movimento desse carro ao longo da trajetória s.

2.2 Tempo por Integração

Como segunda parte, deseja-se obter o intervalo de tempo (Δt) em que o veículo percorre uma distância x na trajetória s. Tal intervalo deverá ser determinado especialmente por meio de uma integral, já que um dos objetivos dessa atividade é explorar o conceito de aproximação de integrais.

Dessa forma, pensando nesse pré-requisito, pode-se partir da definição fundamental de velocidade, onde:

$$V(s) = \frac{ds}{dt}$$

$$dt = \frac{1}{V(s)}\,ds$$

$$\int_{t_0}^{t_f} dt = \int_0^x \frac{1}{V(s)}\,ds$$

$$\mathbf{\Delta t} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{V(s)}}\,\mathbf{ds} \tag{5}$$

Encerrando com a Equação 5, agora é possível partir para a elaboração do algorítimo que resolverá os problemas elencados.

3 Resolução numérica e computacional

3.1 Movimento Circular Plano

Com as Equações 1 a 4 em mãos, foi possível traduzí-las para um *script* no *Octave* a fim de resolver o problema de forma automática baseado nos valores do enunciado, pois eles foram inseridos na forma de variáveis.

Em particular, objetivou-se determinar a velocidade e aceleração do veículo após percorrer **20m**, por isso que o intervalo escolhido para a análise, definido em s, foi de 0 a 20. O código feito para essa parte pode ser visto no Listing 1 abaixo:

```
# movimento.m
% Dados do enunciado

r = 100;
s = 0:0.1:20;
v0 = (10 + 0.1 .* 72); % 118029(72)

% Equacoes do movimento

v = sqrt((8 .* s) - ((0.02 ./ 3) .* power(s, 3)) + power(v0, 2));

at = 4 - (0.01 .* power(s, 2));
an = power(v, 2) ./ r;
a = sqrt(power(at, 2) + power(an, 2));

% Mostrando os resultados desejados

fprintf('Grandezas para S=20m\n');
fprintf('v(20) = %f m/s\n', v(end));
fprintf('a(20) = %f m/s^2\n', a(end));

% Graficos

figure
plot(s, v, 'b');
title('VELOCIDADE x DESLOCAMENTO');
xlabel('s (m)');
ylabel('v (m/s)');

figure
plot(s, a, 'r');
title('ACELERACAO x DESLOCAMENTO');
xlabel('s (m)');
ylabel('a (m/s^2)');
```

Listing 1: Script do movimento circular plano do automóvel.

Os gráficos obtidos pela execução do código para a análise desse trecho do movimento podem ser vistos nas Figuras 2 a 3 a seguir:

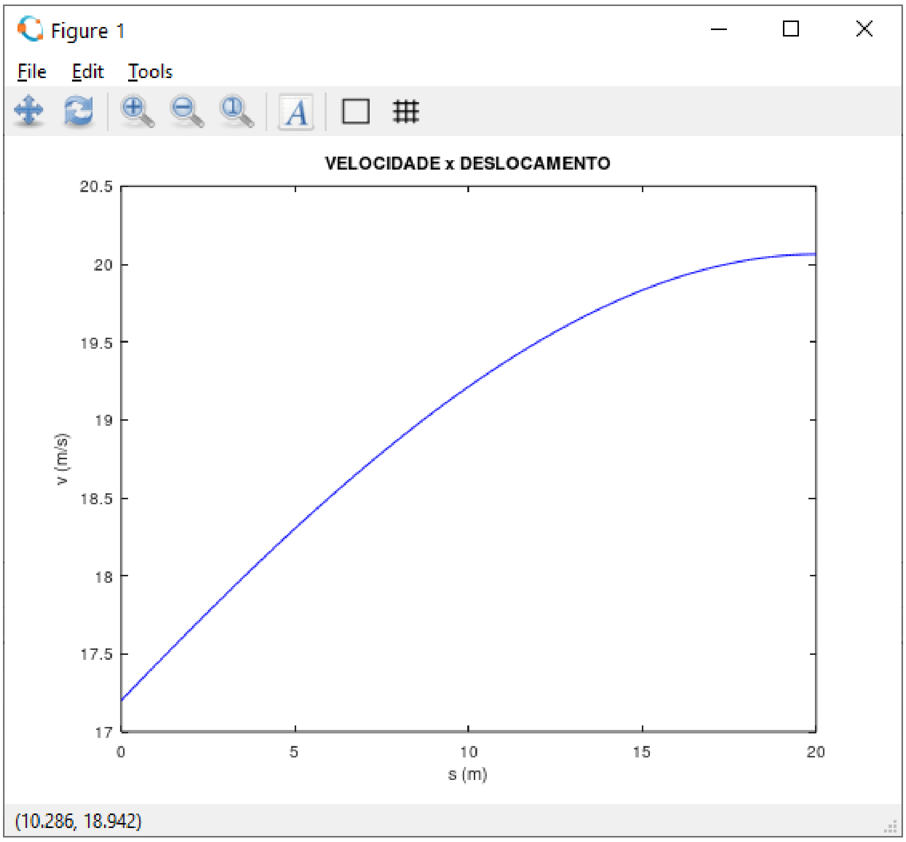

Figura 2: Gráfico da velocidade pelo deslocamento do automóvel.

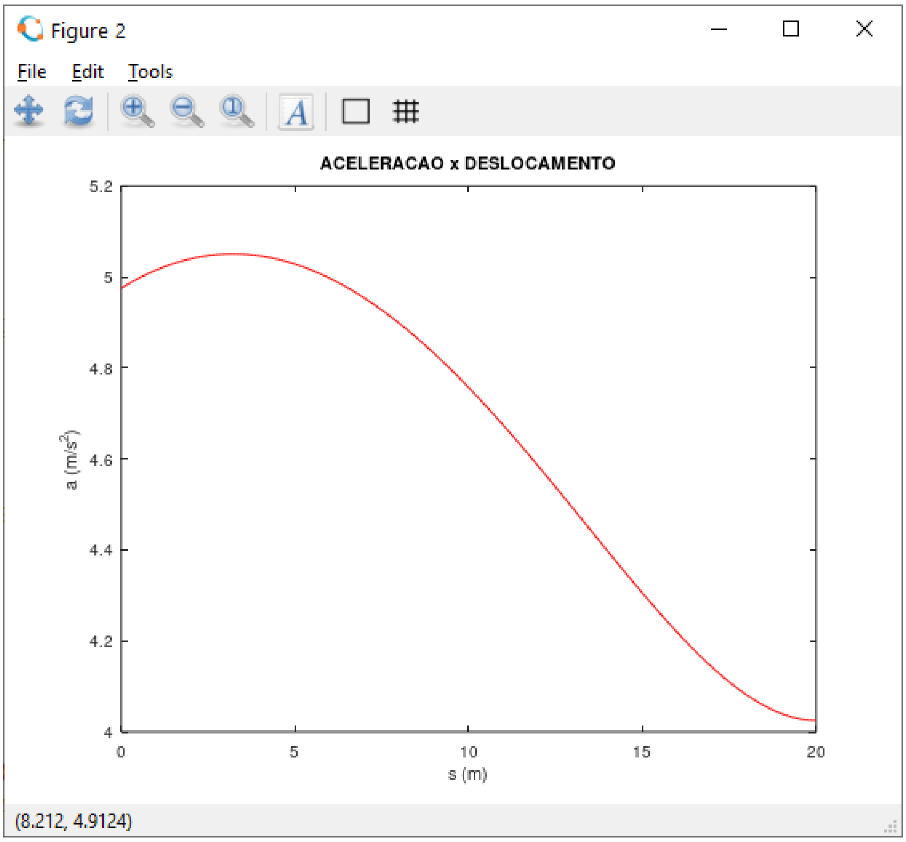

Figura 3: Gráfico da aceleração pelo deslocamento do automóvel.

Além disso, desejava-se obter numericamente a velocidade e aceleração após percorrer a distância especificada. Então ao pegar o último elemento dos *arrays* de velocidade e aceleração, uma vez que eles representam a distância desejada de 20m, foi obtido os valores a serem vistos na Figura 4:

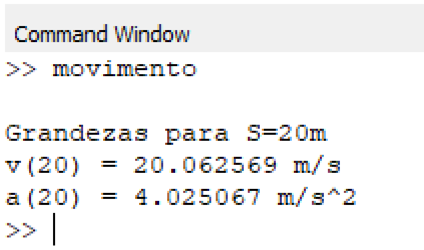

Figura 4: Resultado do cálculo da velocidade e aceleração após o deslocamento especificado.

3.2 Tempo por Integração

Nessa outra parte da atividade, para resolver a Equação 5 e determinar o intervalo de tempo necessário para percorrer também **20m** será utilizada a técnica computacional de aproximação de integrais por meio da **área de trapézios** (comando *trapz*). O funcionamento desta pode ser visto na Figura 5 a seguir, retirada da página oficial do *MATLAB*:

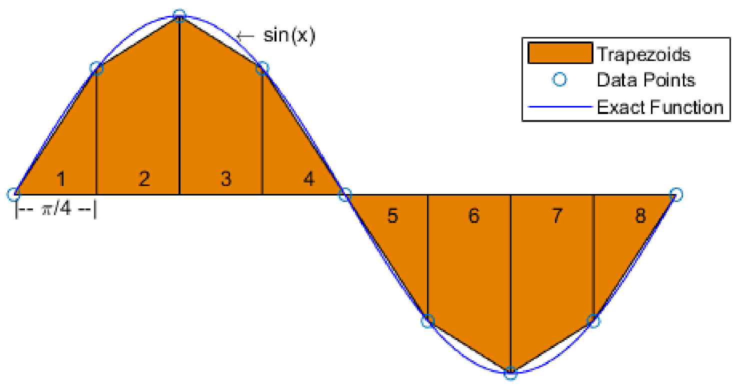

Figura 5: Ilustração do funcionamento do comando *trapz*

Como forma de comparar a precisão dessa função, foi utilizado o método *quad*, a qual resolve esse problema da área embaixo de uma curva, baseado na teoria mais sofisticada e precisa da *Quadratura de Simpson Adaptativa*.

Então, utilizando o ambiente proporcionado pelo *Octave*, foi desenvolvido um *script* atendendo às necessidades descritas anteriormente:

```
# tempo.m
% Dados do enunciado

r = 100;
s = 0:0.1:20;
v0 = (10 + 0.1 .* 72); % 118029(72)

% Equacoes do movimento

v = sqrt((8 .* s) - ((0.02 ./ 3) .* power(s, 3)) + power(v0, 2));

t = 1 ./ v;

% Mostrando os resultados desejados

fprintf('Tempo por area de trapezios\n');
areaT = trapz(s, t);
fprintf('tt = %f s\n', areaT);

fprintf('\nTempo por QUADPACK\n');
areaQ = quad(@tempvel, 0, 20);
fprintf('tq = %f s\n', areaQ);
```

Listing 2: Script para obter o tempo por aproximação de integrais.

```
# tempvel.m
% Funcao feita para poder ser passada como argumento ao comando quad
function t = tempvel(s)
  v0 = (10 + 0.1 .* 72); % 118029(72)

  v = sqrt((8 .* s) - ((0.02 ./ 3) .* power(s, 3)) + power(v0, 2));

  t = 1 ./ v;
end
```

Listing 3: Função de determinação do tempo dado deslocamento.

Tal *script* gerou como saída os seguintes resultados:

```
Command Window
>> tempo

Tempo por área de trapézios
tt = 1.053835 s

Tempo por QUADPACK
tq = 1.053834 s
>>
```

Figura 6: Tempo necessário para percorrer 20m por por diferentes métodos de aproximação.

Como podemos ver, utilizando uma variação de 0.1 para cada ponto a ser calculado, a área aproximada por trapézios desviou apenas na sexta casa decimal do método *quad*, mostrando que a aproximação por de trapézios é precisa e confiável.

4 Conclusões

Após toda a análise feita nessa tarefa pudemos encontrar as curvas *V(s)* (Equação 1) e *a(s)* (Equação 4) que descrevem as grandezas do movimento de acordo com a posição do automóvel na trajetória, como por exemplo:

$$\mathbf{V(20) = 20.062569\,m/s}$$

$$\mathbf{a(20) = 4.025067\,m/s^2}$$

Ademais, foi possível determinar o tempo t utilizando dois métodos distintos de aproximação de integrais

$$\mathbf{t_{trapz} = 1.053835\,s}$$

$$\mathbf{t_{quad} = 1.053834\,s}$$

que por sua vez provaram a precisão no método de aproximação de integrais por trapézios.

Do ponto de vista educacional, conseguimos resolver um problema de dinâmica em conjunto com uma análise da capacidade das ferramentas computacionais disponíveis para resolução de equações.