



SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II

Tarefa 3 - Solução de Sistemas Lineares

ANDRÉ ZANARDI CREPPE - 11802972

Professor:

MARCELO AREIAS TRINDADE

Junho de 2021

Conteúdo

1	Objetivos	3
2	Equacionando o problema	4
2.1	Discretização por Molas	4
2.2	Aplicação de Forças	4
2.3	Deslocamento da Extremidade Livre	6
3	Resolução numérica e computacional	8
3.1	Discretização por Molas	8
3.2	Aplicação de Forças	10
3.3	Deslocamento da Extremidade Livre	11
3.4	Código Geral	13
4	Conclusões	14

1 Objetivos

Nessa atividade, o nosso principal objetivo é determinar os **deslocamentos** de uma estrutura variável sujeita a um carregamento de forças por meio da discretização do problema utilizando um sistema de **molas em série** em duas situações distintas. Podemos ver um diagrama simplificado do problema na Figura 1 abaixo.

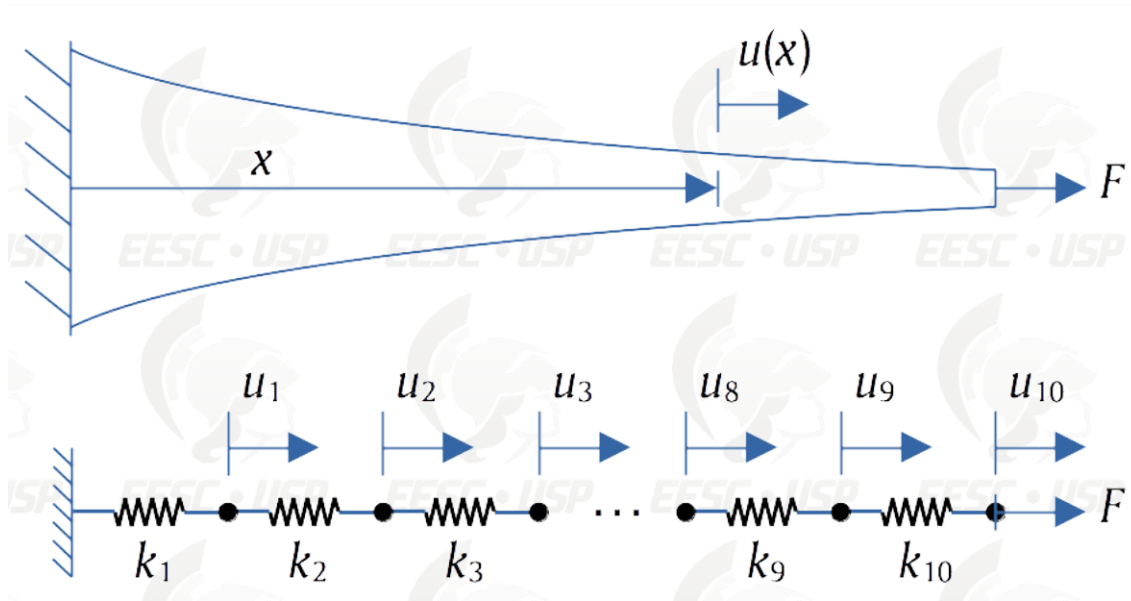


Figura 1: Representação simplificada do problema a ser estudado.

Ademais, deseja-se visualizar graficamente a evolução dos **deslocamentos de cada elemento-mola** para cada caso a fim de poder comparar e estudar o seu comportamento em diferentes situações.

2 Equacionando o problema

2.1 Discretização por Molas

Pelo motivo da nossa estrutura não ser uniforme, ao fazer a simplificação para um modelo de 10 molas discretas conectadas em série, o primeiro ponto a ser levado em conta antes do estudo dos casos é a **variação da rigidez (k)** por conta da diminuição da área da seção transversal.

Menos área significa menos interações intermoleculares na estrutura, resultando numa diminuição da sua capacidade de resistir o deslocamento provocado por uma força, o que em termos de materiais elásticos significa a diminuição da rigidez efetiva. No nosso problema, essa propriedade vai variar seguindo a lei definida pela Equação 1:

$$\mathbf{k_n} = \mathbf{k_{min}} + \Delta\mathbf{k} e^{-b\mathbf{n}} \quad (1)$$

Outro ponto importante a ser destacado é que quando uma força é aplicada a um sistema de molas conectadas em série e provoca um deslocamento do mesmo, a deformação que cada componente da série vai sofrer depende o seu k associado, porém a resultante elástica é a mesma para todas que estão sofrendo a influência dessa força.

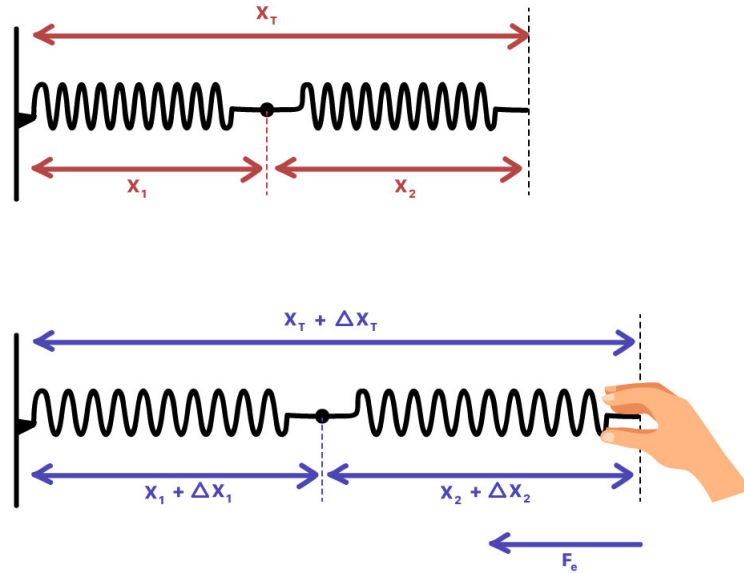


Figura 2: Representação da ligação de duas molas em série. Note que o sistema só ficará em equilíbrio caso a força entre elas seja a mesma.

2.2 Aplicação de Forças

O primeiro dos casos a serem estudados é o da aplicação de forças externas à estrutura a fim de determinar uma deformação. Na nossa viga em estudo, serão duas forças:

uma F_A aplicada na extremidade livre do corpo (na discretização representada pela mola 10 - u_{10}); e outra F_B , exercida na metade do corpo (na discretização representada pela mola 5 - u_5). Isso quer dizer que as molas 6 a 10 estarão sofrendo influência apenas da F_B enquanto as outras de 1 a 5 estão sob ação tanto da F_A quanto da F_B .

Utilizando a Lei de Hooke (Equação 2)

$$F = ku \quad (2)$$

e um diagrama mais simplificado do problema (Figura 3)

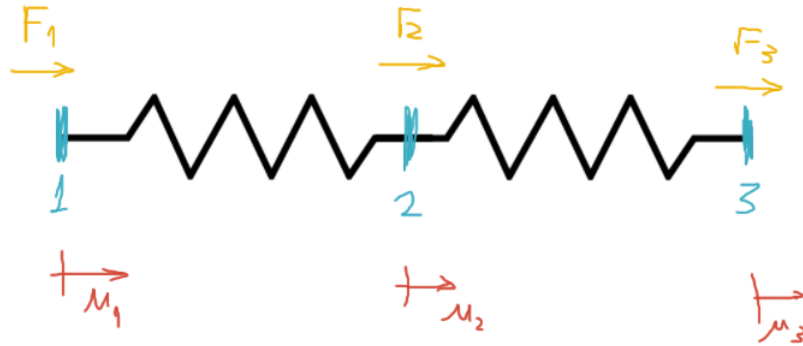


Figura 3: Diagrama simplificado do problema: duas molas ligadas em série.

conseguimos encontrar um sistema de equações para o equilíbrio utilizando o Método por equilíbrio de energia (Lagrange) que possui o seguinte formato:

$$\begin{cases} k_1 u_1 - k_2 u_2 + 0 \cdot u_3 = F_1 \\ -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3 = F_2 \\ 0 \cdot u_1 - k_2 u_2 + k_2 u_3 = F_3 \end{cases}$$

Estendendo então naturalmente essa lógica para um sistema com 10 molas e tratando a Equação 2 na forma matricial, teremos que o problema pode ser escrito como:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 + k_6 & -k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6 + k_7 & -k_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & k_7 + k_8 & -k_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_8 & k_8 + k_9 & -k_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_9 & k_9 + k_{10} & -k_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{10} & k_{10} \end{pmatrix}$$

$$K \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_A + F_B \\ F_A + F_B \\ F_A + F_B \\ F_A + F_B \\ F_A + F_B \\ F_A \\ F_A \\ F_A \\ F_A \\ F_A \end{pmatrix}$$

Para encontrar então o conjunto de deformações provocadas pelas forças do problema, basta determinar \mathbf{u} que satisfaça o sistema acima, ou seja, resolver a Equação 3:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} \quad (3)$$

2.3 Deslocamento da Extremidade Livre

Num segundo momento, vamos querer analisar o comportamento das componentes da estrutura ao mover um dos elementos discretos uma distância fixa. No caso do problema, pretendemos determinar os deslocamentos individuais ao deslocar a extremidade livre (u_{10}).

Para poder provocar esse deslocamento, será necessária a aplicação de uma força (F_t) que seja capaz de fazer com que a Mola 10 realmente se estenda u_{10} . Essa informação pode ser facilmente obtida pela Lei de Hooke novamente, como visto na Equação 4 abaixo:

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{k}_{10} \cdot \mathbf{u}_{10} \quad (4)$$

A partir disso, esse caso pode ser resolvido da mesma forma que o anterior, utilizando a Equação 3, com uma diferença sendo ela o vetor coluna \mathbf{F} , que aqui será composto de elementos iguais valendo F_t . Além disso, todos os vetores tiveram sua linha 10 removida e a matriz \mathbf{K} a sua coluna 10, já que o deslocamento u_{10} foi obtido de forma separada.

Dessa forma, o problema pode ser descrito como:

$$K_9 = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 + k_6 & -k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6 + k_7 & -k_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & k_7 + k_8 & -k_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_8 & k_8 + k_9 & -k_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_9 & k_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{10} \end{pmatrix}$$

$$K_9 \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_t \\ F_t \\ F_t \\ F_t \\ F_t \\ F_t \\ F_t \\ F_t \\ F_t \end{pmatrix}$$

E para encontrar o conjunto de deformações, basta resolver novamente a Equação 3, igual o caso anterior, substituindo \mathbf{K} por \mathbf{K}_9 .

3 Resolução numérica e computacional

Para conseguir resolver os sistemas lineares obtidos anteriormente, as equações foram implementadas em código para utilizarem operador *mldivide* (\backslash) do *Octave* foi empregado. Essa escolha vem da série de verificações automáticas que esse operador tem, com o objetivo final de determinar a melhor técnica matemática para resolver a equação linear (como é o nosso caso), minimizando erros.

3.1 Discretização por Molas

Antes de resolver os casos, precisamos encontrar as características de rigidez das molas do problema. Da Equação 1 temos que a expressão para as Rigidezes Específicas (k_n), ao substituir as constantes numéricas, é dada por:

$$\Delta k = 50 + (0.5 \cdot 72) = 86 \text{ kN/m}$$

$$k_n = 10 + 86 \cdot e^{-0.2 \cdot n} \text{ (kN/m)} \quad (5)$$

Programando a Equação 5 no *Octave*, obtivemos o Listing 1, cujos resultados gerados por ele, foi possível criar um gráfico e uma tabela, respectivamente representados pela Figura 4 e Tabela 1, da Rigidez da Mola (k) pela posição dela no sistema (n).

```
1 # rigidez.m
2 function [k, K] = rigidez()
3     % Dados do problema
4     dk = (50 + 0.5 .* 72); % 118029(72)
5     kmin = 10000.;
6     b = 0.2;
7
8     % Calculo da Rigidez
9     k = zeros(1, 10);
10    for i = 1:10
11        k(1,i) = kmin + (dk .* power(exp(1), -b .* i)) .* 1000;
12    end
13
14    %k = [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
15
16    K = zeros(10, 10);
17    for i = 1:10
18        K(i,i) = k(1, i);
19
20        if(i != 10)
21            K(i,i) += k(1, i+1);
22        end
23
24        if(i-1 > 0)
25            K(i-1, i) = -k(1, i);
26        end
27    end
```



```

28     if(i+1 < 11)
29         K(i+1, i) = -k(1, i+1);
30     end
31 end
32 end

```

Listing 1: Função para o cálculo dos Coeficientes de Rigidez e sua matriz.

Mola (n)	Rigidez Específica (k_n)	Unidade
1	80.411	kN/m
2	67.648	kN/m
3	57.198	kN/m
4	48.642	kN/m
5	41.638	kN/m
6	35.903	kN/m
7	31.207	kN/m
8	27.363	kN/m
9	24.216	kN/m
10	21.639	kN/m

Tabela 1: Resultado do cálculo da rigidez específica para cada N de mola.

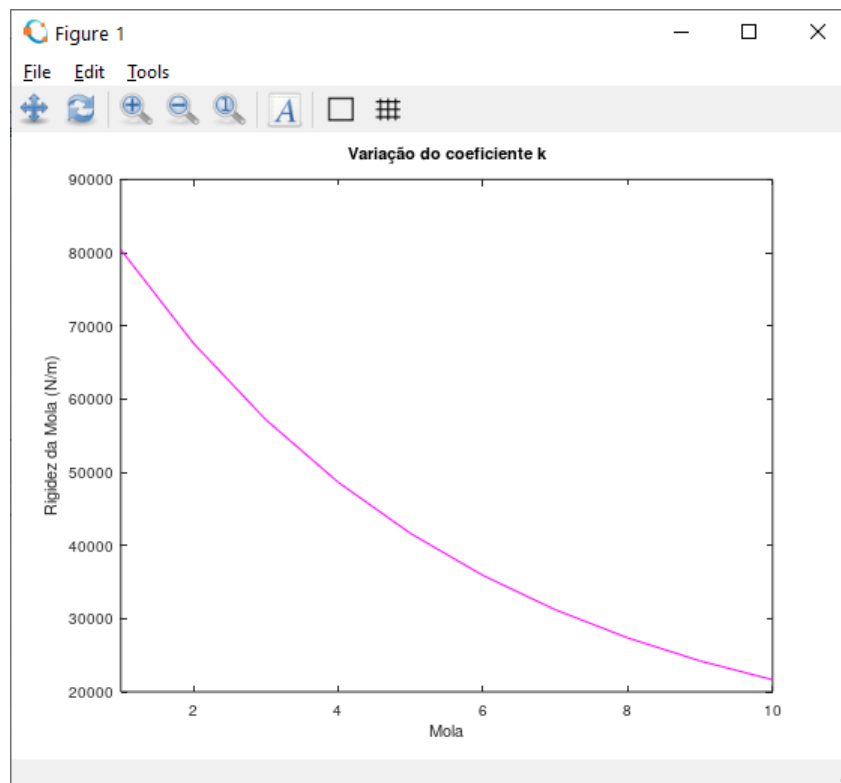


Figura 4: Decaimento rigidez específica para cada N de mola crescente.

Pelo gráfico e tabela podemos ver que, felizmente, a equação realmente representa o problema como previmos anteriormente, pois com a diminuição de área a medida que n aumenta, é esperado que k decresça.

3.2 Aplicação de Forças

Para o primeiro Caso, devemos primeiramente preencher a Equação 3 numericamente:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix} = K^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Com ela em mãos, foi possível criar uma função (Listing 2) a fim de resolver esse sistema linear de forma automática utilizando o *mldivide*. Os resultados numéricos obtidos para os deslocamentos de cada mola individualmente podem ser vistos na Tabela 2.

```

1 # caso1.m
2 function u = caso1(K)
3     F = [50 50 50 50 50 100 100 100 100 100]';
4
5     u = (K\F);
6 end

```

Listing 2: Função para o cálculo dos deslocamentos para o Caso 1.

Mola (n)	Deslocamento (u_n)	Unidade
1	09.327	mm
2	19.675	mm
3	31.039	mm
4	43.374	mm
5	56.583	mm
6	70.510	mm
7	83.327	mm
8	94.291	mm
9	102.550	mm
10	107.171	mm
Total	617.846	mm

Tabela 2: Resultado do cálculo do deslocamento para cada mola no Caso 1.

Os valores encontrados serão analisados no próximo tópico, em conjunto com os do Caso 2.

3.3 Deslocamento da Extremidade Livre

Já no segundo caso, primeiramente precisamos encontrar a força que move o sistema resolvendo a Equação 4 para um deslocamento de 3 cm. Dessa forma, temos que

$$F_t = k_{10} \cdot u_{10}$$

$$F_t = 21639 \cdot 0.03$$

$$F_t = 649.17 \text{ N}$$

Com a força do sistema conhecida, podemos construir um esquema similar ao exercício anterior, já que também utilizaremos a Equação 3 para encontrar os deslocamentos.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = (K_9)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 649.17 \\ 649.17 \\ 649.17 \\ 649.17 \\ 649.17 \\ 649.17 \\ 649.17 \\ 649.17 \\ 649.17 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, a função programada do Listing 3 é praticamente a mesma do Listing 2, com a diferença sendo que F_t será calculado antes do sistema ser resolvido pelo *mldivide*, bem como a matriz modificada \mathbf{K}_9 . Os resultados numéricos obtidos para os deslocamentos de cada mola individualmente podem ser vistos na Tabela 3.

```
1 # caso2.m
2 function u = caso2(K)
3     Ft = K(10,10) .* 0.03;
4     F = (Ft + zeros(10, 1));
5
6     K9 = K(1:10, 1:9);
7
8     u = (K9\F);
9     u(10, 1) = 0.03;
10 end
```

Listing 3: Função para o cálculo dos deslocamentos para o Caso 2.

Mola (n)	Deslocamento (u_n)	Unidade
1	26.643	mm
2	49.387	mm
3	66.675	mm
4	77.013	mm
5	79.223	mm
6	72.784	mm
7	58.278	mm
8	37.917	mm
9	16.104	mm
10	30.000	mm
Total	514.025	mm

Tabela 3: Resultado do cálculo do deslocamento para cada mola no Caso 2.

Observando a Figura 5 abaixo conseguimos ver que, pela natureza decrescente dos coeficientes de rigidez das molas, é de se esperar que o deslocamento cresça a medida que o n aumenta. Ou seja, num gráfico de Deslocamento por Mola ($u_n \times n$) a curva tende a ficar mais inclinada.

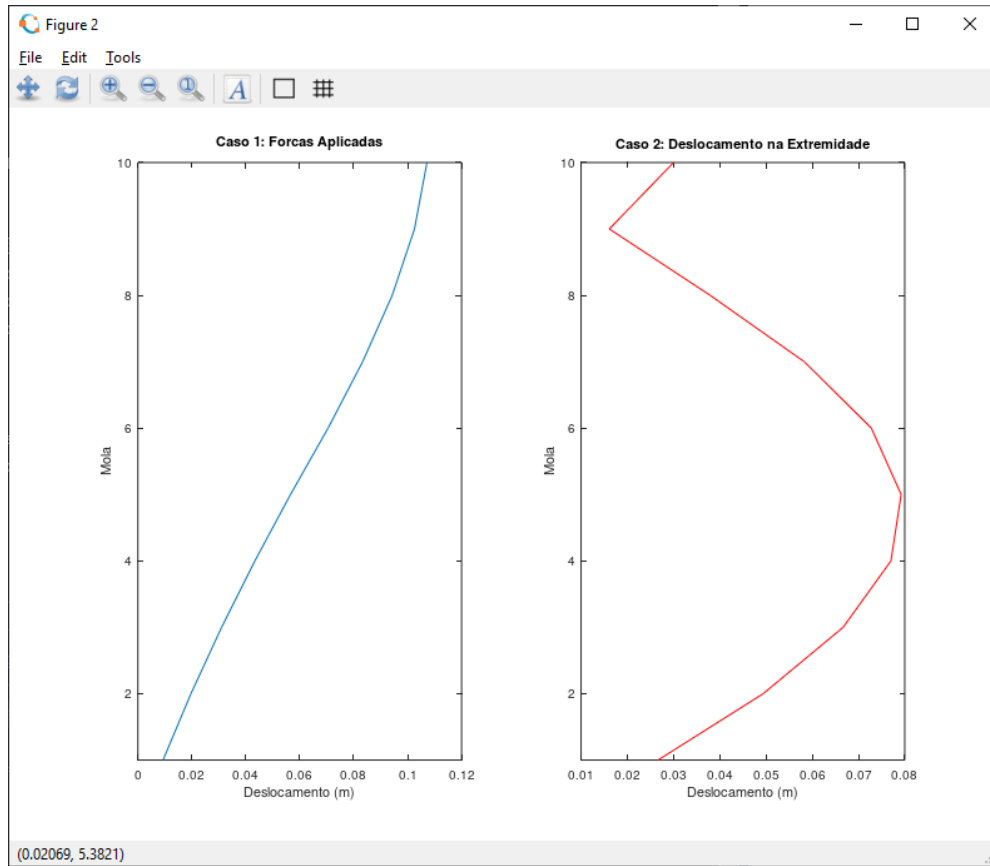


Figura 5: Gráficos do deslocamento por mola do Caso 1 e 2, respectivamente.

Além disso, podemos ver que a forma de aplicação das forças determina completamente o comportamento dos deslocamentos do sistema. Comparando as Tabelas 2

e 3, bem como a Figura 5, fica evidente que uma força atuando apenas na extremidade livre (Caso 2) promove um crescimento dos valores seguindo um arco, pois toda a estrutura será influenciada por apenas ela. Já quando introduzimos forças extras em outros pontos (Caso 1), criam-se trechos sob influência diferentes, o que provoca variações diferentes na inclinação entre os deslocamentos das molas.

3.4 Código Geral

O script utilizado para organizar a obtenção das informações numéricas e elaboração de gráficos vistos anteriormente pode ser encontrado no Listing 4 abaixo.

```

1 # tarefa3.m
2 clear all;
3 close all;
4
5 % Matriz de Rigidez do Sistema
6
7 [k, K] = rigidez();
8
9 % Caso 1: Forças Aplicadas Simultaneamente
10
11 u1 = caso1(K)
12 u1tot = sum(u1)
13
14 % Caso 2: Deslocamento na Extremidade Livre
15
16 u2 = caso2(K)
17 u2tot = sum(u2)
18
19 % Graficos
20
21 n = 1:10;
22
23 figure
24 plot(n, k, 'm');
25 xlabel('Mola');
26 xlim([1 10]);
27 ylabel('Rigidez da Mola (N/m)');
28 title('Variacao do coeficiente k');
29
30 figure
31 subplot(1,2,1, 'align');
32     plot(u1, n);
33     xlabel('Deslocamento (m)');
34     ylabel('Mola');
35     ylim([1 10]);
36     title('Caso 1: Forças Aplicadas');
37 subplot(1,2,2, 'align');
38     plot(u2, n, 'r');
39     xlabel('Deslocamento (m)');
40     ylabel('Mola');
41     ylim([1 10]);
42     title ('Caso 2: Deslocamento na Extremidade');

```

Listing 4: Script para a resolução dessa tarefa.

4 Conclusões

Após toda a análise feita nessa tarefa conseguimos discretizar uma estrutura para um modelo de molas a fim de utilizar um método de solução linear para resolver a Equação 3 e encontrar a matriz dos deslocamentos para o Caso 1 (U_1) e Caso 2 (U_2)

$$U_1 = \begin{pmatrix} 9.3271 \\ 19.675 \\ 31.039 \\ 43.374 \\ 56.583 \\ 70.510 \\ 83.327 \\ 94.291 \\ 102.55 \\ 107.17 \end{pmatrix} mm \quad U_2 = \begin{pmatrix} 26.643 \\ 49.387 \\ 66.675 \\ 77.013 \\ 79.223 \\ 72.784 \\ 58.278 \\ 37.917 \\ 16.104 \\ 30.000 \end{pmatrix} mm$$

os quais representam deformações de casos distintos de cargas aplicadas a uma estrutura, totalizando em

$$\Delta u_1 = 617.846 mm \quad \Delta u_2 = 514.025 mm$$

Do ponto de vista educacional, conseguimos resolver um problema utilizando conceitos de Cálculo Numérico e Estática em conjunto com o entendimento e manipulação de ferramentas computacionais disponíveis para resolução de sistemas lineares de equações.