



SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II

Tarefa 4 - Aproximação numérica de EDOs de 1a ordem

ANDRÉ ZANARDI CREPPE - 11802972

Professor:

MARCELO AREIAS TRINDADE

Junho de 2021

Conteúdo

1	Objetivos	3
2	Equacionando o problema	4
3	Resolução numérica e computacional	6
3.1	Códigos Fonte	9
4	Conclusões	11

1 Objetivos

Nesse trabalho, o nosso objetivo principal será determinar a **velocidade angular** ($\dot{\theta}$) de um corpo que percorrerá a trajetória desenhada na Figura 1 abaixo, com velocidade linear variável ($v(t)$).

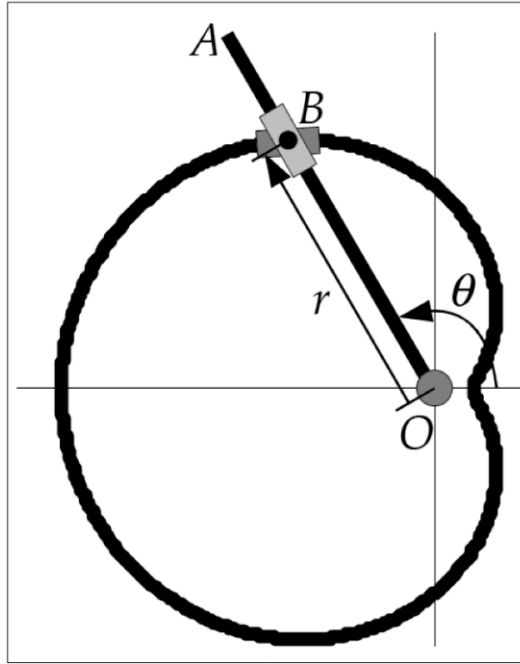


Figura 1: Trajetória a ser estudada. O seu formato característico é também conhecido por *limaçon*.

Utilizando um algoritmo de integração numérica, deseja-se calcular também a **evolução do deslocamento angular** ($\theta(t)$) e do **deslocamento radial** ($r(t)$) com o tempo, bem como o tempo decorrido para percorrer de 3 voltas completas ao longo dessa trajetória.

Ademais, deseja-se visualizar graficamente a **evolução** de tais deslocamentos e outras grandezas relacionadas ao problema ao longo do tempo a fim de poder comparar e estudar o seu comportamento, bem como validar os métodos de aproximação empregados para resolvê-lo.

2 Equacionando o problema

A partir dos dados iniciais do problema, temos que o raio da trajetória a ser percorrida no limaçon da Figura 1, em coordenadas polares, varia em função do ângulo, sendo dada por

$$r(\theta) = 600 - 400 \cos(\theta) \quad mm \quad (1)$$

e a sua velocidade (adaptando-a com o meu *Número USP* - final **72**) varia com o tempo, definida assim como:

$$v(t) = 0.05 (100 + \mathbf{72})(100 - t)$$

$$v(t) = 8.6 (100 - t)$$

$$v(t) = 860 - 8.6t \quad mm \quad (2)$$

Utilizando uma equação vetorial do movimento cinemático, podemos chegar que a velocidade angular ($\dot{\theta}$) varia de acordo com o estado atual da velocidade linear ($v(t)$) e o próprio ângulo (θ). Em outras palavras, isso quer dizer que o sistema pode ser definido como uma **Equação Diferencial Ordinária de 1ª ordem** (Equação 3), já que:

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$v(t)^2 = \dot{r}(\theta)^2 + r(\theta)^2 \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} = f(\theta, v(t)) \quad (3)$$

Ou seja, podemos resolver para $\dot{\theta}$ utilizando um método computacional de aproximação de EDOs. Para isso, precisamos então tratar a Equação 1 antes para ela ser aplicada na relação anterior em conjunto com a Equação 2. Assim sendo teremos:

$$\dot{r}(\theta) = 400 \sin(\theta) \cdot \dot{\theta} \quad (4)$$

para qual

$$v(t)^2 = \dot{r}(\theta)^2 + r(\theta)^2 \cdot \dot{\theta}^2$$

$$(860 - 8.6t)^2 = (400 \sin(\theta) \cdot \dot{\theta})^2 + (600 - 400 \cos(\theta))^2 \cdot \dot{\theta}^2$$

$$(860 - 8.6t)^2 = \dot{\theta}^2 \cdot [(400 \sin(\theta))^2 + (600 - 400 \cos(\theta))^2]$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{(860 - 8.6t)^2}{(400 \operatorname{sen}(\theta))^2 + (600 - 400 \operatorname{cos}(\theta))^2}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{(860 - 8.6t)^2}{(400 \operatorname{sen}(\theta))^2 + (600 - 400 \operatorname{cos}(\theta))^2}} \quad (5)$$

Com a Equação 5 em mãos, podemos agora partir para a elaboração dos códigos e efetuar a análise do problema.

3 Resolução numérica e computacional

Utilizando então a função *ode45* para resolução de Equações Diferenciais conseguimos obter um conjunto de valores para o ângulo do sistema (θ) que satisfazem a Equação 5 dado um intervalo de tempo (t) variando de 0 até 20 com passo 0,1.

Devido a geometria do caminho percorrido pelo corpo, espera-se que exista trechos relativamente longos de variações quase lineares para θ (parte esquerda do limaçon) seguido por trechos curtos bem mais inclinados que o anterior (parte direita do limaçon). Podemos observar na Figura 2 que tal predição realmente se segue, suportando a veracidade do nosso método de resolução.

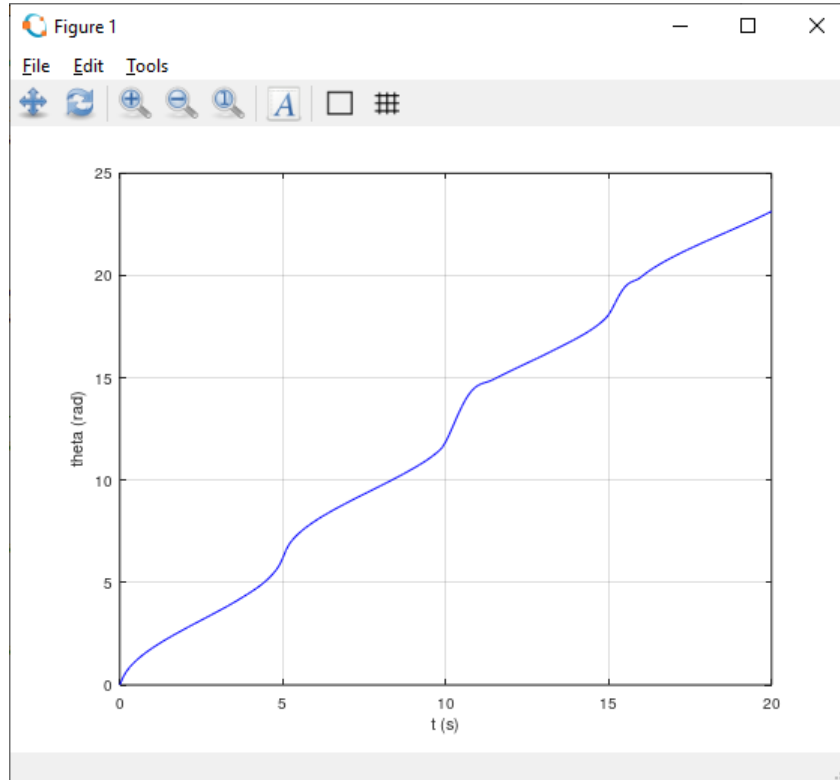


Figura 2: Variação de θ com o tempo.

Com essa aproximação numérica do deslocamento angular em mãos, foi possível percorrer o conjunto de dados de θ para encontrar o tempo que o corpo demora para completar **3 voltas completas**. Em radianos, essa quantidade equivale a

$$3 \cdot 2\pi \approx 18.850 \text{ rad}$$

e, ao procurar no vetor de valores θ utilizando um algoritmo de mínimo, foi possível encontrar que o tempo aproximado para dar essa quantidade de voltas no circuito é de

$$t_3 \approx 15.3 \text{ s}$$

$$(\theta(t_3) = 18.970 \text{ rad})$$

Prosseguindo na análise, podemos utilizar os valores de t obtidos pela *ode45* para aplicar na função da velocidade angular ($\dot{\theta}$) e assim gerar o gráfico presente na Figura 3. Note que esse gráfico representa a variação da inclinação da reta tangente à Figura 2 e complementa a precisão do nosso resultado obtido pela aproximação numérica, uma vez que os padrões cíclicos seguem rigorosamente o movimento no trajeto.

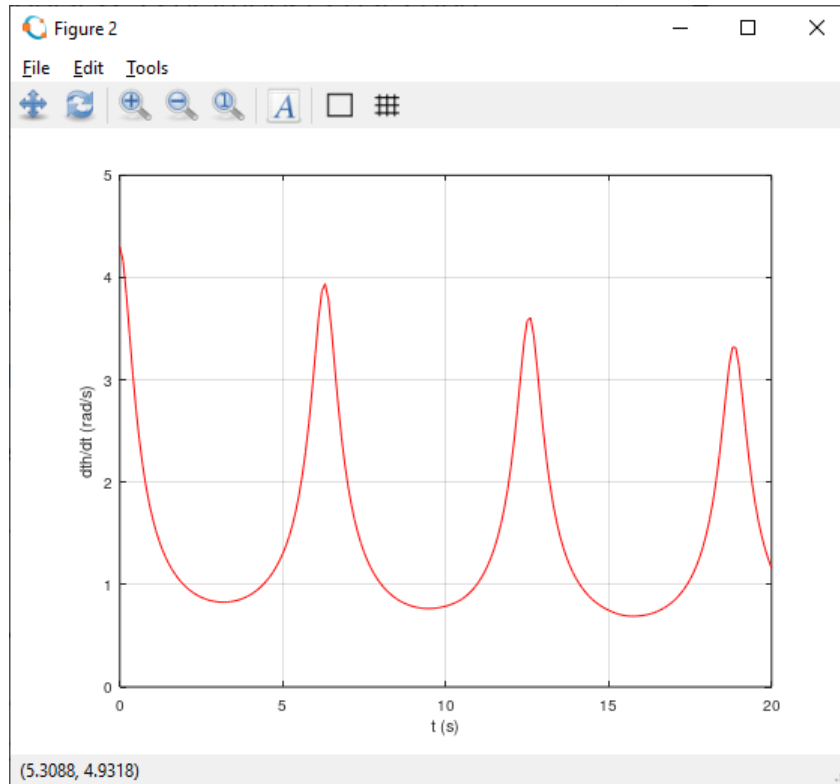


Figura 3: Variação de $\dot{\theta}$ com o tempo.

Depois de observar essa figura, fica claro que o sistema está desacelerando conforme o tempo aumenta. Tal diminuição é fruto da regra imposta pelo enunciado vista na Equação 2, pois o termo variante que é o tempo está negativo, indicando que a velocidade total irá diminuir, o que consequentemente afeta a velocidade angular. Utilizando mais uma vez o gráfico como ferramenta de análise, podemos ver que Figura 4 demonstra precisamente que a velocidade linear está diminuindo de acordo com a passagem do tempo.

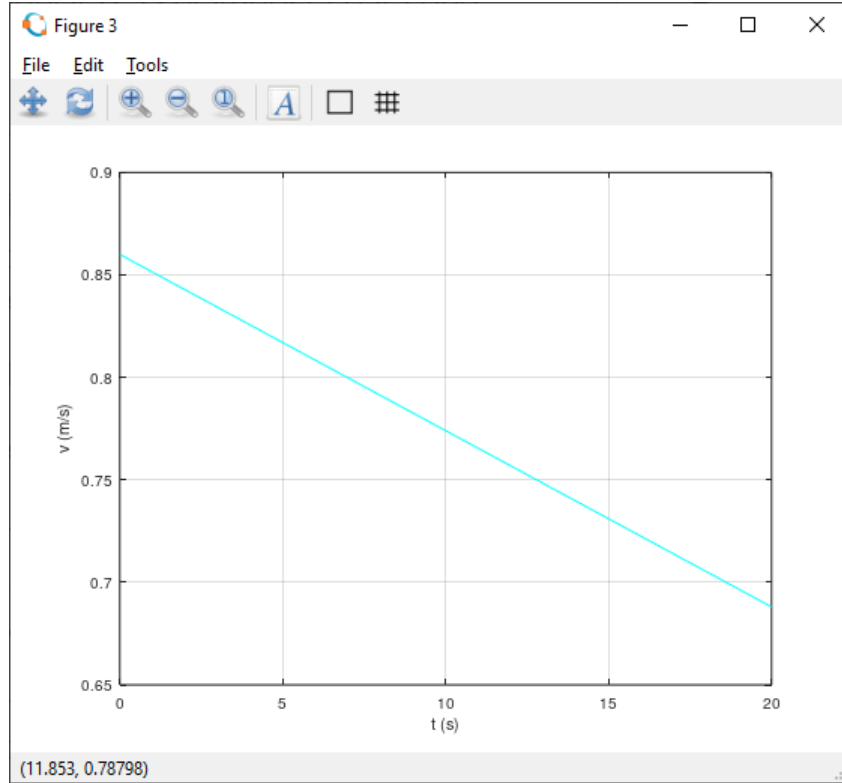


Figura 4: Variação de v com o tempo.

Utilizando mais uma vez o conjunto de valores θ gerados pela função de aproximação, foi possível também aplicá-los na Equação 1 e gerar assim os gráficos das Figuras 5 e 6, representando respectivamente, o deslocamento radial (r) a sua variação (\dot{r}) no tempo. Já que os ângulos inseridos nessa função estão diretamente ligados pelo intervalo descrito anteriormente, essas funções que variavam com θ podem ser apresentadas variando em t .

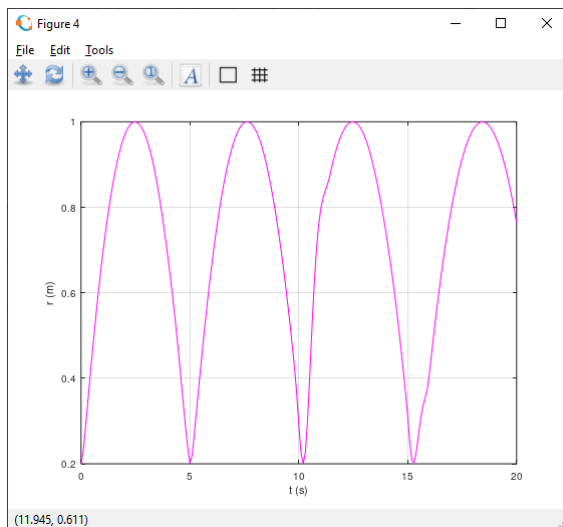


Figura 5: Variação de r com o tempo.

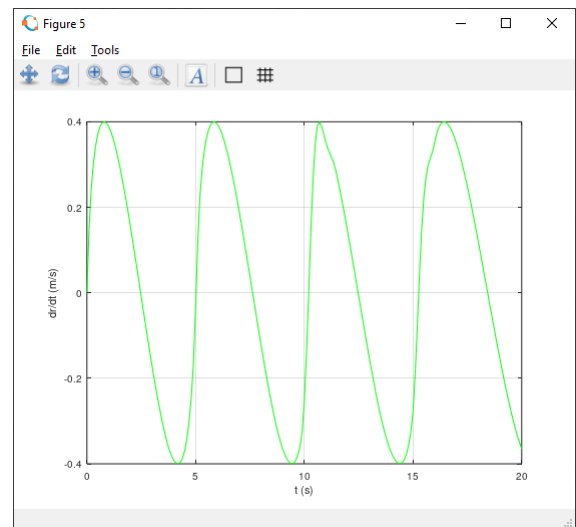


Figura 6: Variação de \dot{r} com o tempo.

Por fim, podemos observar na Figura 7 um gráfico relacionando a variação do deslocamento angular com a variação do deslocamento radial, as duas grandezas que determinam, no sistema de coordenadas polares, a posição do cursor no espaço. Unindo essa ideia de posição com a geometria do problema mais uma vez, podemos ver que existe uma harmonia cíclica nesse movimento, já que a rotação contínua provocará os ciclos de aumento e diminuição esperados do raio.

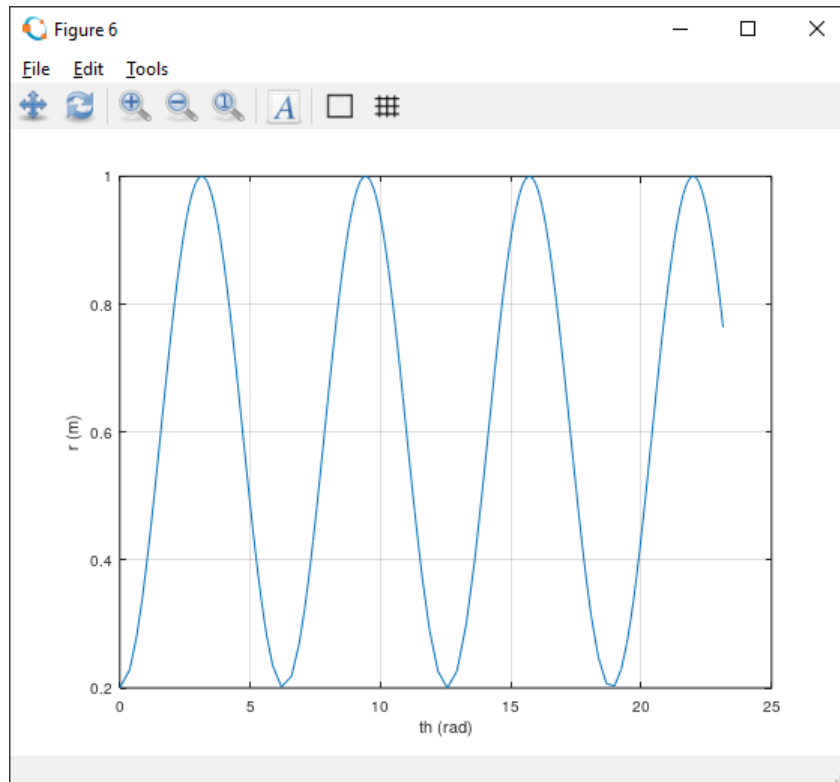


Figura 7: Variação do ângulo θ com o raio r .

3.1 Códigos Fonte

Para conseguirmos fazer as análises numéricas desejadas, as equações obtidas na seção anterior foram traduzidas para um *script* a executado dentro do ambiente *Octave*. Tais códigos podem ser encontrados nos Listings 1 e 2 abaixo:

```

1 # tarefa4.m
2 close all
3
4 % Velocidade Angular (Aproximacao de EDO)
5 int = [0:0.1:20];
6 [t, th] = ode45(@(t, th) velang(t, th), int, 0);
7
8 % Raio e sua variacao
9 r = 600 - 400 .* cos(th);
10 drdt = 400 .* sin(th);
11
12 % Velocidade Linear

```

```

13 v = 860 - 8.6 .* t;
14
15 % Valor de t mais proximo de 3 voltas
16 rot = 3 .* (2 .* pi);
17 [dif, index] = min(abs(th - rot));
18 temp = t(index);
19
20 fprintf('Tempo mais proximo de 3 voltas: %f s\n', temp);
21
22 % Graficos
23 figure
24 plot(t, th, '-b'); grid;
25 xlabel('t (s)'); ylabel('theta (rad)');
26
27 figure
28 plot(t, velang(th, t), '-r'); grid;
29 xlabel('t (s)'); ylabel('dth/dt (rad/s)');
30
31 figure
32 plot(t, v/1000, '-c'); grid;
33 xlabel('t (s)'); ylabel('v (m/s)');
34
35 figure
36 plot(t, r/1000, '-m'); grid;
37 xlabel('t (s)'); ylabel('r (m)');
38
39 figure
40 plot(t, drdt/1000, '-g'); grid;
41 xlabel('t (s)'); ylabel('dr/dt (m/s)');
42
43 figure
44 plot(th, r/1000); grid;
45 xlabel('th (rad)'); ylabel('r (m)');

```

Listing 1: Script utilizado para a resolução do problema.

```

1 # velang.h
2 function dthdt = velang(t, th)
3     num = (860 - 8.6 .* t).^2;
4     den1 = (400 .* sin(th)).^2;
5     den2 = (600 - 400 .* cos(th)).^2;
6
7     dthdt = sqrt(num ./ (den1 + den2));
8 end

```

Listing 2: Função da Equação de Velocidade Angular do corpo.

4 Conclusões

Após toda a análise feita nessa tarefa, vimos que é possível trabalhar na resolução de um problema envolvendo equações diferenciais utilizando apenas ferramentas computacionais de aproximação numérica. Tais algoritmos fornecem dados que, ao serem dispostos em gráficos, tornam-se úteis para analisar o problema, como visto na Figura 2 (evolução do deslocamento angular - $\theta(t)$) e Figura 5 (evolução do deslocamento radial - $r(t)$).

Além disso, foi possível utilizar esse conjunto de dados para obter estados do sistema, como o tempo necessário para que o corpo desse 3 voltas completas na trajetória

$$t_3 \approx 15.3 \text{ s}$$

Do ponto de vista educacional, aprender a aplicar técnicas computacionais facilita muito o estudo e resolução de equações complicadas, como a Equação 5, e auxilia a análise de engenharia para problemas do mundo real.