SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II

Tarefa 6 - Transformação de Vetores

André Zanardi Creppe - 11802972

Professor:

Marcelo Areias Trindade

Julho de 2021

Conteúdo

1 Objetivos

Nesse trabalho, o nosso objetivo principal será determinar e visualizar as **rotações** de um sólido retangular no espaço.

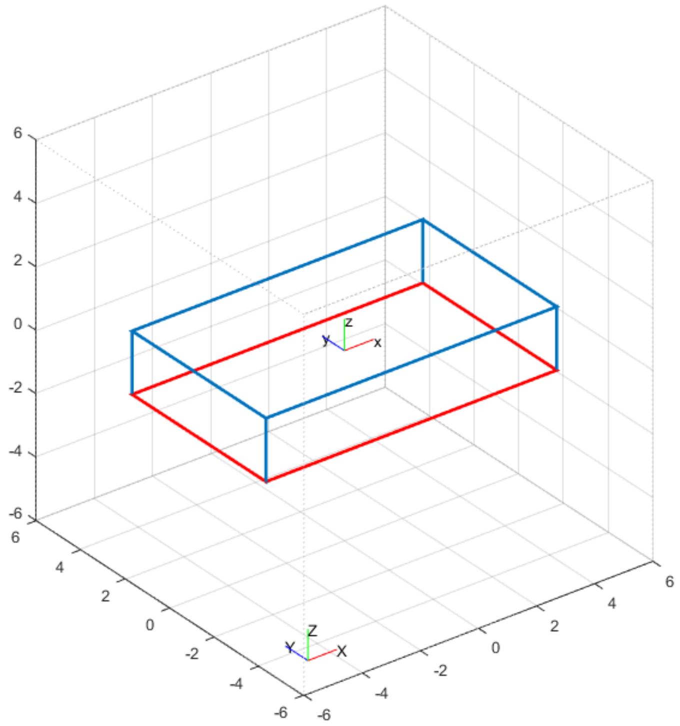


Figura 1: O sólido em questão na sua posição inicial (face vermelha de referência para baixo).

Tais rotações serão determinadas a partir de critérios predeterminados, como velocidade e ordem de giro de eixo, que nos permitirão analisar o comportamento da rotação em cada uma das direções coordenadas (eixos X, Y e Z), separadamente, bem como uma rotação em conjunto (os três eixos girando ao mesmo tempo).

2 Equacionando o problema

Para conseguir chegar em expressões capazes de realizar uma rotação no sólido da Figura 1, é necessário consolidar matematicamente o conceito de rotação. Uma forma boa de visualizar essa teoria será analisar a rotação de um plano conhecido, como o plano XY em torno do eixo Z. Esse deslocamento cria um novo plano x'y', que faz um ângulo θ com o plano original, como pode ser visto na Figura 2 abaixo.

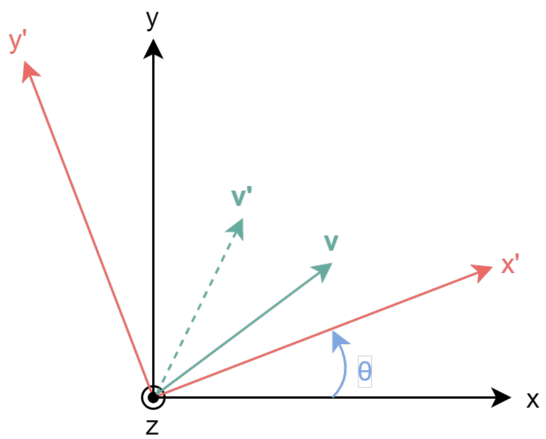


Figura 2: Diagrama da rotação do plano XY em torno de Z.

A partir desse diagrama, podemos imaginar que, dado um vetor $\vec{v}$ qualquer, presente no plano xy, para ele se manter com as mesmas coordenadas relativas ao novo plano x'y' após a operação rotação, será necessário que haja uma mudança de coordenadas para se adequar à nova base. Isto é, ele deverá ter suas novas componentes reescritas utilizando projeções do vetor antigo:

$$\begin{cases} v'_x = v_x\, cos(\theta) - v_y\, sen(\theta) \\ v'_y = v_y\, sen(\theta) + v_x\, cos(\theta) \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

Ou seja, para rotacionar qualquer vetor no plano, podemos passar esse conjunto de equações lineares para uma forma forma matricial:

$$\vec{v'} = \mathbf{R_z}\, \vec{v}$$

sendo $\mathbf{R_z}$ a matriz de rotação do vetor $\vec{v}$ no eixo Z, definida como:

$$\mathbf{R_z}(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

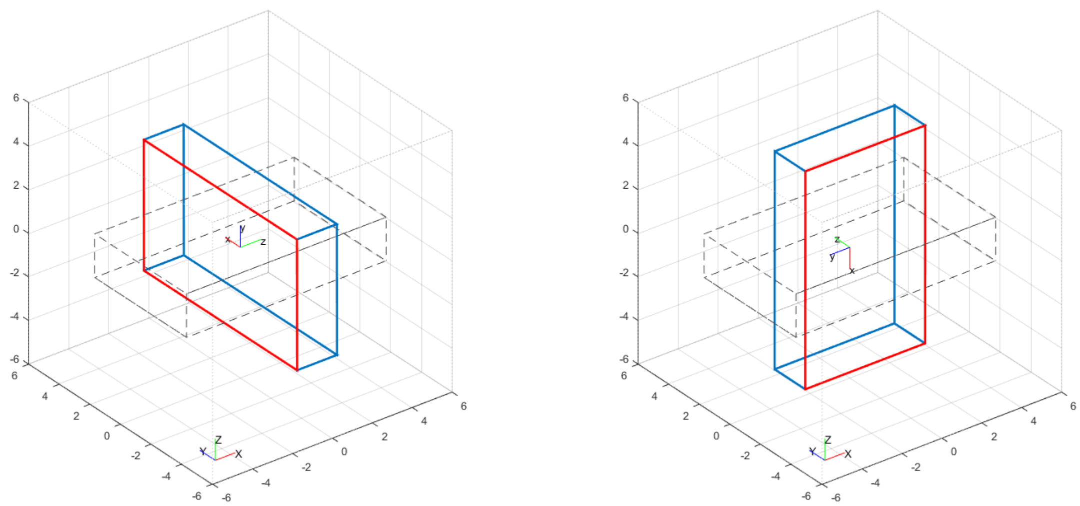
Aplicando a mesma lógica de rotação, podemos resolver para os casos em que o eixo X ou Y são colocados para girar, resultando nas matrizes de rotação $\mathbf{R_x}$ e $\mathbf{R_y}$, respectivamente:

$$\mathbf{R_x}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sen(\theta) \\ 0 & sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{R_y}(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & sen(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Para combinar rotações e produzir um movimento tridimensional, basta multiplicar tais matrizes de rotação para cada eixo que se deseja juntar a fim de produzir um movimento em conjunto. Vale destacar que, por estarmos trabalhando com operações matriciais, a **ordem de multiplicação** importa, podendo implicar em rotações finais totalmente diferentes, como pode ser visto na Figura 3 a seguir.

$$\mathbf{R_y}\,\mathbf{R_z} \neq \mathbf{R_z}\,\mathbf{R_y}$$



(a) Rotação em Y e depois em Z (b) Rotação em Z e depois em Y

Figura 3: Os resultados do giro do sólido da Figura 1 podem variar de acordo com a ordem de rotação imposta. O valor de θ para todas as rotações foi de 90°.

A vantagem de calcular rotações pensando em vetores e operações matriciais é poder interpretar qualquer objeto no espaço como um conjunto de vetores apontando para os seus vértices e, ao rotacioná-los, movemos o corpo como um todo. Será exatamente esse conceito que aplicaremos para mover o sólido retangular da Figura 1 neste problema.

3 Análise Computacional

3.1 Descrição do movimento

Com a explicação de como funciona o mecanismo de rotação para corpos no espaço 3D, podemos partir para a resolução do problema imposto pelo enunciado. Como explicado pelo mesmo, o retângulo a ser estudado sofrerá uma rotação de θ graus definida pela seguinte expressão:

$$\theta = -\frac{90 + N}{4}$$

$$\theta = -\frac{90 + \mathbf{72}}{4}$$

$$\theta = -\frac{162}{4} = \mathbf{-40.5^\circ}$$

Além da quantidade de giro, temos também uma sequência específica imposta para realizar o movimento (lembrando que a ordem importa):

1. Rotação em torno de Z de ângulo θ;

2. Rotação em torno de Y de ângulo θ;

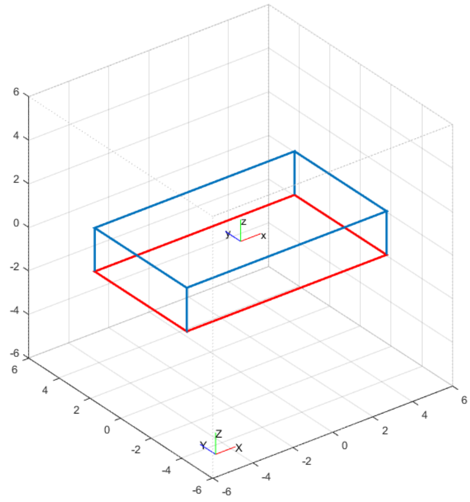
3. Rotação em torno de X de ângulo 4θ.

Essas imposições farão com que a matiz $\mathbf{R}$ de rotação global seja definida pela multiplicação em sucessão das matrizes de rotação seguindo a ordem dita anteriormente:

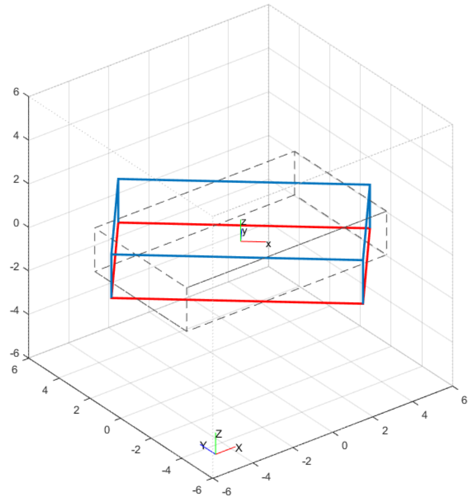
$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R_z}(\theta) \cdot \mathbf{R_y}(\theta) \cdot \mathbf{R_x}(4\theta)$$

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & sen(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(4\theta) & -sen(4\theta) \\ 0 & sen(4\theta) & cos(4\theta) \end{bmatrix}$$

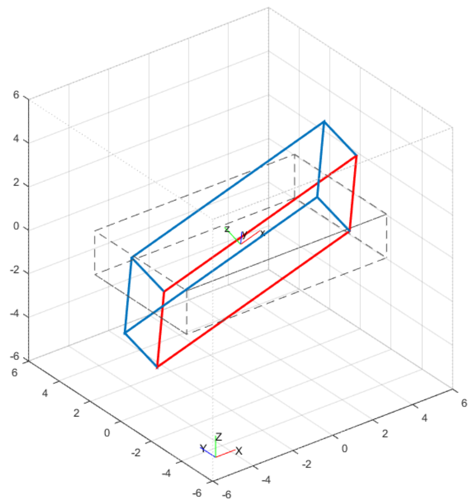
Ao aplicar essa matriz no modelo computacional do retângulo (Figura 1), foi possível obter a matriz resultante $\mathbf{R}$ e consequentemente fazer a evolução da rotação por etapas. Juntando essa sucessão de movimento, conseguimos obter a seguinte evolução:



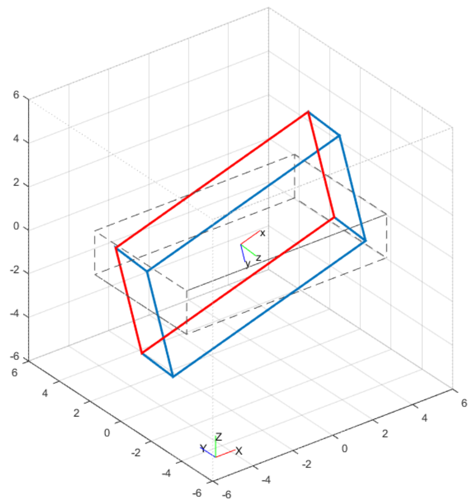
(a) Estado inicial.



(b) Rotação de (a) em Z.



(c) Rotação de (b) em Y.



(d) Rotação de (c) em X.

Figura 4: Evolução da rotação do sólido dada as condições do enunciado.

Tanto essa rotação em etapas (um eixo de cada vez) quanto a rotação em conjunto (os três eixos se movendo ao mesmo tempo) foram registradas em vídeo.

3.2 Vídeos da rotação

Como a rotação é um movimento continuo, a análise apenas com imagens muitas vezes pode ser confusa, principalmente se o trajeto não for trivial - como o giro do problema em questão, que foi de -40.5°.

Visando isso, foi utilizada a função *VideoWriter* do *MATLAB* para salvar o resultado do giro para cada passo e assim obter um vídeo no formato *.avi* animando o movimento todo. Esse arquivo salvo foi então carregado para o *YouTube* e pode ser acessado utilizando os seguintes endereços eletrônicos:

- Rotação em Etapas: `https://youtu.be/wUAlwjYvI3k`
- Rotação em Conjunto: `https://youtu.be/RDisQjARIoo`

3.3 Códigos Fonte

Para conseguirmos estudar o movimento de rotação do sólido, as matrizes vistas anteriormente foram traduzidas para o *script* do Listing 1 no *MATLAB*, o que permitiu ter i controle das variáveis do movimento para gerar as imagens e animações.

```
% tarefa6.m
clear all
close all

% Ajustes de
% velocidade
    tick = 0.01;     % visualizacao
    %tick = 0.005    % gravacao

% Rotacao
    isSteps = true; % rotacao em etapas (steps) ou junta

% Gravacao
    canRecord = false;           % faz o video
    fileName = 'plotAnimado';    % nome.avi

% Enunciado
gradmax = -((90 + 72) / 4); % 119029(72)
thmax = gradmax * (pi/180);
th = [0:-tick:thmax];

% Preparo
if isSteps
    % Rotacao em Passos
    thxv = [th th(end)+0*th th(end)+0*th];
    thyv = [0*th th th(end)+0*th];
    thzv = [0*th 0*th th];
else
    % Rotacao Simultanea
    thxv = th;
    thyv = th;
    thzv = th;
end

% Rotacao
for id=1:length(thxv)
    thix = thxv(id);
    thiy = thyv(id);
    thiz = thzv(id);

    Rx = [
        1 0 0;
```

```
        0 cos(4*thix) -sin(4*thix);
        0 sin(4*thix) cos(4*thix)
    ];
    Ry = [
        cos(thiy) 0 sin(thiy);
        0 1 0;
        -sin(thiy) 0 cos(thiy)
    ];
    Rz = [
        cos(thiz) -sin(thiz) 0;
        sin(thiz) cos(thiz) 0;
        0 0 1
    ];

    R(:,:,id) = Rz*Ry*Rx;
end

% Visualizacao
fcnrot3d(R, canRecord, fileName)
```

Listing 1: Script utilizado para a resolução do problema.

A função do Listing 2 abaixo é dedicada para desenhar o retângulo e foi fornecida pelo professor da disciplina durante a aula de explicação da atividade. Porém, ela foi modificada para possibilitar a criação do arquivo de vídeo que registrou a animação do sólido girando no espaço.

```
% fcnrot3d.m
function fcnrot3d(R, canRecord, fileName)
    figure;

    if canRecord
        myVideo = VideoWriter(fileName);
        myVideo.FrameRate = 30;
        open(myVideo)
    end

    set(1,'position',[1238 281 683 704])
    lx=5; ly=3; lz=1;
    vi(:,1)=[lx;ly;-lz];
    vi(:,2)=[-lx;ly;-lz];
    vi(:,3)=[-lx;-ly;-lz];
    vi(:,4)=[lx;-ly;-lz];
    vi(:,5)=[lx;ly;lz];
    vi(:,6)=[-lx;ly;lz];
    vi(:,7)=[-lx;-ly;lz];
    vi(:,8)=[lx;-ly;lz];

    hbk0=line([vi(1,1:4) vi(1,1) vi(1,5:8) vi(1,5:6) vi(1,2:3) vi(1,7:8) vi(1,4)],...
        [vi(2,1:4) vi(2,1) vi(2,5:8) vi(2,5:6) vi(2,2:3) vi(2,7:8) vi(2,4)],...
        [vi(3,1:4) vi(3,1) vi(3,5:8) vi(3,5:6) vi(3,2:3) vi(3,7:8) vi(3,4)]);
    set(hbk0,'linestyle','--','color',[1 1 1]*.3)
    hbk1=line([vi(1,1:4) vi(1,1) vi(1,5:8) vi(1,5:6) vi(1,2:3) vi(1,7:8) vi(1,4)],...
```

```
        [vi(2,1:4) vi(2,1) vi(2,5:8) vi(2,5:6) vi(2,2:3) vi(2,7:8) vi(2,4)],...
        [vi(3,1:4) vi(3,1) vi(3,5:8) vi(3,5:6) vi(3,2:3) vi(3,7:8) vi(3,4)]);
    set(hbk1,'linewidth',2)
    hbk2=line([vi(1,1:4) vi(1,1)],...
        [vi(2,1:4) vi(2,1)],...
        [vi(3,1:4) vi(3,1)]);
    set(hbk2,'linewidth',2,'color','r')
    mx=max([lx ly lz])+1;
    brd=line([vi(1,1:4) vi(1,1) vi(1,5:8) vi(1,5:6) vi(1,2:3) vi(1,7:8) vi(1,4)]/lx*mx,...
        [vi(2,1:4) vi(2,1) vi(2,5:8) vi(2,5:6) vi(2,2:3) vi(2,7:8) vi(2,4)]/ly*mx,...
        [vi(3,1:4) vi(3,1) vi(3,5:8) vi(3,5:6) vi(3,2:3) vi(3,7:8) vi(3,4)]/lz*mx);
    set(brd,'linestyle',':','color',[1 1 1]*.7)

    exx=1; exy=0; exz=0;
    eyx=0; eyy=1; eyz=0;
    ezx=0; ezy=0; ezz=1;
    ex=line([0 exx],[0 exy],[0 exz]); set(ex,'color','r')
    ey=line([0 eyx],[0 eyy],[0 eyz]); set(ey,'color','b')
    ez=line([0 ezx],[0 ezy],[0 ezz]); set(ez,'color','g')
    tx=text(exx,exy,exz,'x');
    ty=text(eyx,eyy,eyz,'y');
    tz=text(ezx,ezy,ezz,'z');
    mxE=mx*.9;
    Ex=line([0 exx]-mxE,[0 exy]-mxE,[0 exz]-mxE); set(Ex,'color','r')
    Ey=line([0 eyx]-mxE,[0 eyy]-mxE,[0 eyz]-mxE); set(Ey,'color','b')
    Ez=line([0 ezx]-mxE,[0 ezy]-mxE,[0 ezz]-mxE); set(Ez,'color','g')
    Tx=text(exx-mxE,exy-mxE,exz-mxE,'X');
    Ty=text(eyx-mxE,eyy-mxE,eyz-mxE,'Y');
    Tz=text(ezx-mxE,ezy-mxE,ezz-mxE,'Z');
    axis([-1 1 -1 1 -1 1]*max([lx ly lz])),
    axis equal,
    grid,

    for id=1:size(R,3)
        v=R(:,:,id)*vi;
        set(hbk1,'xdata',[v(1,1:4) v(1,1) v(1,5:8) v(1,5:6) v(1,2:3) v(1,7:8) v(1,4)],...
            'ydata',[v(2,1:4) v(2,1) v(2,5:8) v(2,5:6) v(2,2:3) v(2,7:8) v(2,4)],...
            'zdata',[v(3,1:4) v(3,1) v(3,5:8) v(3,5:6) v(3,2:3) v(3,7:8) v(3,4)])
        set(hbk2,'xdata',[v(1,1:4) v(1,1)],...
            'ydata',[v(2,1:4) v(2,1)],...
            'zdata',[v(3,1:4) v(3,1)])
        set(ex,'xdata',[0 R(1,1,id)],'ydata',[0 R(2,1,id)],'zdata',[0 R(3,1,id)])
        set(ey,'xdata',[0 R(1,2,id)],'ydata',[0 R(2,2,id)],'zdata',[0 R(3,2,id)])
        set(ez,'xdata',[0 R(1,3,id)],'ydata',[0 R(2,3,id)],'zdata',[0 R(3,3,id)])
        set(tx,'position',R(:,1,id))
        set(ty,'position',R(:,2,id))
        set(tz,'position',R(:,3,id))
```

```

        pause(0.01)

        if canRecord
            frame = getframe(gcf); % get frame
            writeVideo(myVideo, frame);
        end
    end

    if canRecord
        close(myVideo)
    end
end
```

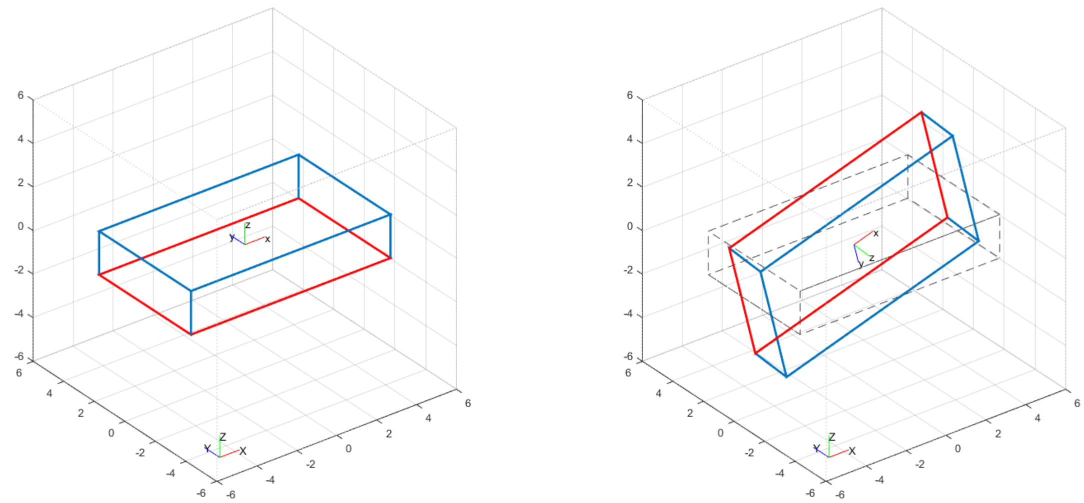
Listing 2: Função de desenho do sólido dada as coordenadas e gravação do seu movimento.

4 Conclusões

Após toda a análise feita nessa tarefa, vimos como definir uma operação de rotação dada certas condições iniciais

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & sen(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(4\theta) & -sen(4\theta) \\ 0 & sen(4\theta) & cos(4\theta) \end{bmatrix}$$

e também que é possível trabalhar na resolução de um problema envolvendo rotações utilizando apenas ferramentas computacionais, como o $MATLAB$ para definir o estado final de um objeto tridimensional.



(a) Estado inicial (b) Estado final

Figura 5: Resultado da aplicação da matriz de giro **R**(-40.5°).

Do ponto de vista educacional, aprender a aplicar tais técnicas computacionais para resolução de problemas e auxilia muito a fazer uma análise de engenharia para comportamento de problemas do mundo real.

Pessoalmente, esse trabalho foi muito prazeroso de ser feito, principalmente pela sua característica extremamente visual. Observar e testar as diversas rotações, bem como ver o resultado de forma animada do sólido girando, deixa a proposta de analisar e estudar essa teoria bem mais interessante.