



LABORATÓRIO DE FÍSICA II

## Prática I - Rotações de corpos rígidos e conservação do momento angular

ANDRÉ ZANARDI CREPPE - 11802972

GABRIEL MAIA DE OLIVEIRA - 11819790

VITOR MALOSSO MICHELETTI - 10738291

Professores:

EMANUEL ALVES DE LIMA HENN

LEONARDO DE BONI

Setembro de 2020

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Materiais e métodos</b>	<b>4</b>
2.1	Determinação do Momento de Inércia de um disco . . . . .	4
2.2	Choques Rotacionais . . . . .	6
2.3	Conservação do Momento Angular . . . . .	8
2.4	Precessão do Giroscópio . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Resultados e discussão</b>	<b>13</b>
3.1	Determinação do Momento de Inércia de um disco . . . . .	13
3.2	Choques Rotacionais . . . . .	16
3.3	Conservação do Momento Angular . . . . .	26
3.4	Precessão do Giroscópio . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>37</b>
4.1	Determinação do Momento de Inércia de um disco . . . . .	37
4.2	Choques Rotacionais . . . . .	37
4.3	Conservação do Momento Angular . . . . .	38
4.4	Precessão do Giroscópio . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>40</b>

# 1 Objetivos

Nessa pratica procuramos entender como funciona a rotação de um corpo, mais especificamente um com formato cilíndrico (roda de Maxwell), e a relação entre a sua dinâmica de rotação com o momento angular a fim de calculá-lo. Queremos provar que ela se conserva em todos os momentos do experimento, e também analisar o que acontece quando esse corpo sofre uma colisão plástica enquanto esta rodando.

Além disso, queremos estudar o fenômeno da precessão de corpos que giram, utilizando um giroscópio como objeto de estudo, para entender quais são os agentes que causam esse fato.



Figura 1: Giroscópio

## 2 Materiais e métodos

### 2.1 Determinação do Momento de Inércia de um disco

Uma das montagens experimentais que utilizaremos nessa prática é a do Disco de Maxwell. Ela consiste num disco que está preso a um eixo e que possui dois fios de barbante amarrados nas extremidades. Isso permite que ele seja solto de uma altura qualquer e acelere para baixo ganhando energia cinética de translação e rotação, possibilitando fazer uma análise quantitativa desses dois fenômenos.

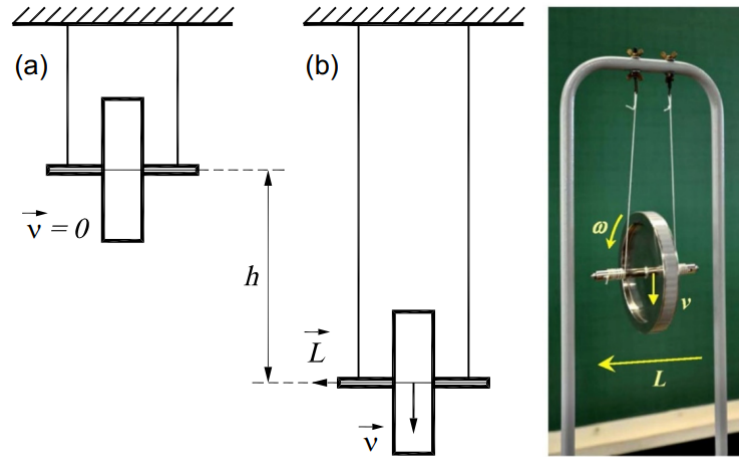


Figura 2: Montagem experimental do Disco de Maxwell

Num primeiro momento, desmontaremos o disco e utilizaremos as medidas de cada componente dele para determinar o seu momento de inércia, que será a soma dos momentos de cada componente. Como ele é feito de basicamente um cilindro inteiro (eixo) e 2 cilindros com furo (anel externo + disco), nós sabemos que o momento de inércia total será a soma dos momentos de inércia de cada peça:

$$I_T = I_E + I_A + I_D$$

Com a incerteza sendo a simples soma das incertezas de cada componente:

$$\Delta I_T = \Delta I_E + \Delta I_A + \Delta I_D$$

E o momento de inércia de cada um desses componentes pode ser calculado a partir dessas 2 fórmulas para cilindros inteiros (CI) e cilindros com furo (CF):

$$I_{CI} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_{CF} = \frac{1}{2}M(R^2 + R_1^2)$$

Propagando as incertezas nesses dois casos teremos:

$$\Delta I_{CI} = \frac{1}{2} (\Delta M \cdot R^2 + 2 \cdot R \cdot \Delta R \cdot M)$$

$$\Delta I_{CF} = \frac{1}{2} [\Delta M \cdot (R^2 + R_1^2) + (2 \cdot R \cdot \Delta R + 2 \cdot R_1 \cdot \Delta R_1) \cdot M]$$

Agora, vamos calcular por meio da queda o momento de inércia do disco. Para isso, primeiro precisaremos determinar uma altura  $h$  para ser o nosso referencial de energia potencial gravitacional. Podemos utilizar o fio totalmente estendido como o ponto mais baixo, e a partir daí enrolar da forma que desejar.

Após escolher tal altura será feito 3 medições do tempo de queda de acordo com o esquema (a) e (b) da figura anterior. Essas medições serão feitas com um cronômetro de precisão. Com 3 valores iniciais e finais para  $t_b$  - tempo para chegar no estado (b) - encontrados, faremos a subtração deles e depois uma média aritmética para achar  $\bar{t}_b$ , e a sua incerteza pelo desvio padrão dessas medidas:

$$\bar{t}_b = \frac{t_{b1} + t_{b2} + t_{b3}}{3}$$

$$\Delta \bar{t}_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (t_i - \bar{t})^2}{3}}$$

Com  $\bar{t}_b$  depois poderemos estimar o valor do momento de inércia  $I$  do disco em estudo e utilizando a seguintes fórmula que foram deduzidas na apostila do curso e nos vídeos, com  $r$  sendo o raio de giro, ou seja, o raio do eixo:

$$I = \left( \frac{g \bar{t}_b^2}{2h} - 1 \right) m r_e^2$$

E a incerteza  $\Delta I$  dessa medida será dada por:

$$\Delta I = \Delta P \cdot Q + \Delta Q \cdot P$$

Onde  $\Delta P$  é a propagação do que está dentro dos parênteses, e  $\Delta Q$  o termo do lado de fora.

$$\Delta P = \frac{g}{2} \left( \frac{\bar{t}_b^2 \cdot \Delta H + 2 \cdot \bar{t}_b \cdot \Delta \bar{t}_b \cdot h}{h^2} \right)$$

$$\Delta Q = 2mr\Delta r + \Delta mr^2$$

## 2.2 Choques Rotacionais

O segundo experimento consiste em analisar o choque rotacional de um sistema formado por duas peças cilíndricas rotacionando em torno do mesmo eixo de rotação, sem atrito. Em determinado instante de tempo, a peça que está acima (peça 2) é solta e cai sobre a peça que está abaixo (peça 1) no sistema. Então, devido ao atrito entre as superfícies das duas peças, o conjunto passa a girar a uma velocidade angular comum. O sistema pode ser representado com base na figura abaixo:

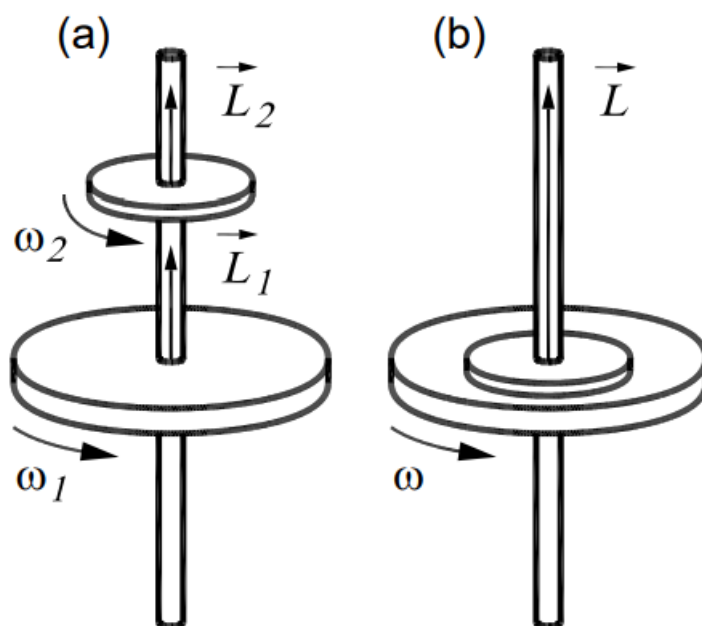


Figura 3: Sistema formado por duas peças cilíndricas que giram em torno do mesmo eixo de rotação com velocidades angulares distintas 1 e 2 (a). Em certo instante de tempo, as peças formam um conjunto que passa a girar a uma mesma velocidade angular (b).

Com base na figura anterior, pode-se caracterizar algumas grandezas que foram utilizadas durante o experimento:

Símbolo	Grandeza
$\omega_1$	Velocidade Angular inicial da Peça 1
$\omega_2$	Velocidade Angular inicial da Peça 2
$\omega$	Velocidade Angular final do conjunto
$L_1$	Momentum Angular inicial da Peça 1
$L_2$	Momentum Angular inicial da Peça 2
$L$	Momentum Angular final do conjunto

Tabela 1: Legenda das grandezas

As peças são caracterizadas como um disco maciço com eixo central (mesmo disco

utilizado no experimento anterior com a roda de Maxwell e referido como peça 1) e um cilindro oco (peça 2). Baseado na imagem, também é possível visualizar a direção e sentido dos vetores envolvidos na rotação das peças.

Então, inicialmente a peça 1 é colocada em rotação e a peça 2 na parte superior é mantida em repouso e segurada por uma porca (S) para não cair. Ao afrouxar a porca, a peça 2 cai e colide com a peça 1. As velocidades de rotação inicial e final foram medidas com um tacômetro óptico, que conta as franjas na lateral da peça 1.

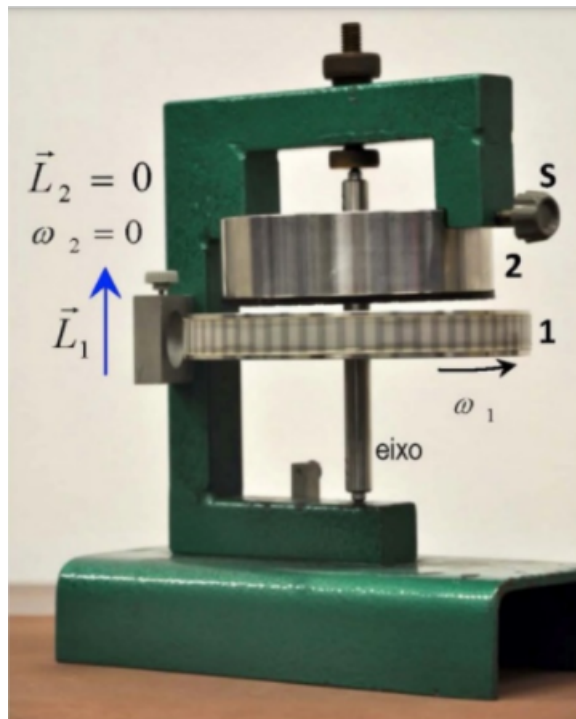


Figura 4: Montagem experimental real, com seus respectivos elementos, para analisar o choque rotacional entre duas peças cilíndricas.

Com base nas características geométricas e na massa do cilindro oco (Peça 2), foi determinado o Momento de Inércia ( $I_2$ ) com sua respectiva incerteza experimental. As medidas foram determinadas com auxílio de um paquímetro e de uma balança digital para o raio e a massa da peça, respectivamente.

Após isso, foi feita uma análise dos resultados representados no segundo vídeo (minuto 31:50 - 36:20) que mostra uma medida quantitativa da diminuição da velocidade angular de rotação da peça 1 devido a torques dissipativos. Com essa análise e o Momento de Inércia da peça 1 ( $I_1$ ) calculado no experimento anterior, foi construído um gráfico da energia de rotação da roda com função do tempo. E então, determinou-se a energia média perdida pelo sistema em um ciclo de oscilação.

Para esse experimento, foram realizados três choques rotacionais e em cada um deles foi determinado a velocidade angular imediatamente antes e depois da colisão. Nesse momento, os dados foram obtidos a partir de um software que calcula a velocidade angular com base em um sistema de infravermelho e arduino instalados previamente. O software fornece a velocidade angular em diversos momentos e devemos utilizar os pontos que correspondem ao momento imediatamente antes e depois da colisão.

Assumindo que houve conservação do momentum angular durante a colisão, determinou-se o Momento de Inércia  $I_1$  da peça 1 utilizando a seguinte equação:

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

Por fim, calculou-se as energias cinéticas rotacionais, antes e depois da colisão, e sua variação relativa, para, então, verificar se houve ou não conservação da energia cinética. Os resultados obtidos foram comparados ao experimento anterior da Roda de Maxwell para se discutir a confiabilidade de cada método.

## 2.3 Conservação do Momento Angular

Nessa parte do relatório, temos três subitens:

No primeiro deles, iremos tratar de uma análise do movimento de atletas e a sua relação com a conservação do momento angular. Dessa forma, usaremos vídeos e imagens dos esportistas em suas práticas e fim de entender a parte física das execuções, principalmente fazendo relação de suas rotações (ora mais rápidas ora mais lentas) com os conceitos de conservação de momento angular, utilizando a fórmula:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Na segunda parte, falaremos do experimento do banquinho giratório. Para realizá-lo, utilizaremos um banco - que pode girar praticamente sem atrito ao redor de um eixo vertical. Um colaborador vai sentar nesse banco, segurando dois halteres (de massa qualquer), inicialmente, com os braços abertos. Alguém irá impulsionar a pessoa sentada, que começará a girar com pequena velocidade angular. Em um dado instante, o colaborador irá fechar os braços, aproximando os halteres do peito e, por conta da conservação de momento angular, sua velocidade angular irá aumentar, como demonstrado pela fórmula:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$



Por fim, trataremos do experimento do banco giratório com a roda de bicicleta, que consiste num banco sem atrito - semelhante ao do tópico anterior - e uma roda de bicicleta presa a um eixo. Inicialmente, o colaborador senta-se no banco e segura a roda da bicicleta com o eixo na vertical - não havendo torques na direção vertical do sistema banco-colaborador-roda, havendo uma conservação da quantidade de movimento angular nesse eixo vertical. Coloca-se a roda em movimento, em torno de seu eixo com certa velocidade angular, mas o banco e o colaborador estão em repouso.

Algum tempo depois, inclina-se o eixo de rotação da roda a um ângulo  $\phi$ , em relação à horizontal - como mostra a figura 5. Assim, surge uma componente de momento angular na direção vertical, por conta da rotação da roda. Como o momento angular é constante na direção vertical - que é nulo nesse caso - é necessário que apareça outra componente de momento que anule a componente vertical criada pela inclinação da roda. Assim, essa nova componente surgirá e fará o banco rodar junto com a pessoa, no sentido contrário ao sentido de rotação da roda de bicicleta.

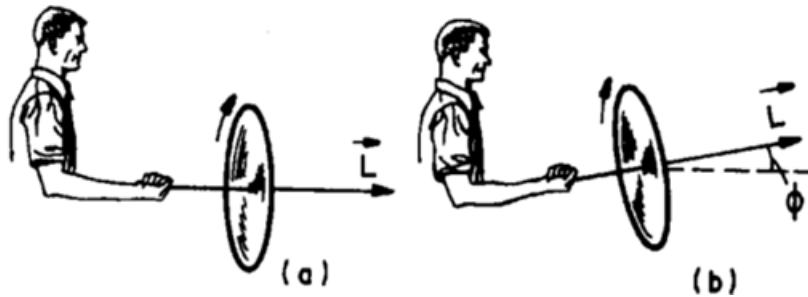
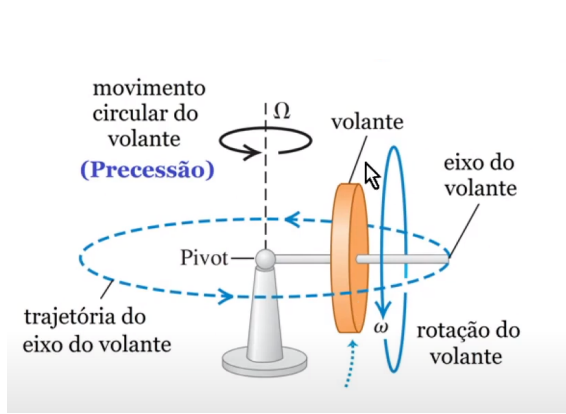


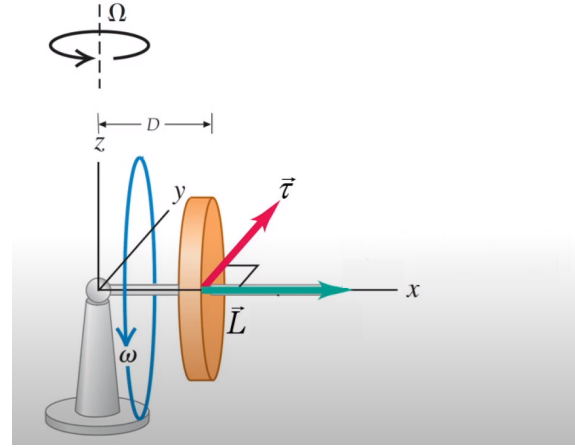
Figura 5: Roda de Bicicleta Giratória

## 2.4 Precessão do Giroscópio

O último experimento sobre esse tópico que vamos realizar é sobre giroscópios, mais precisamente o fenômeno da precessão que eles realizam, que consiste no movimento circular realizado em torno de um ponto de pivô por um objeto que gira, como pode ser visto nas figuras abaixo:



(a) Diagrama do movimento de precessão de um giroscópio



(b) Vetores que agem sobre o giroscópio

A partir dos diagramas acima, podemos realizar uma série de substituições de equações utilizando as equações básicas de rotação - como foi mostrado no vídeo dessa prática - para encontrar que a frequência da precessão  $\Omega_E$  de um giroscópio pode ser estimada pela seguinte equação:

$$\Omega_{Ei} = \frac{MgD}{I\omega_i}$$

Só que como vamos fazer 4 medidas, para podermos ter um resultado mais confiável, a frequência que utilizaremos será a média aritmética desses valores, e a incerteza dessa medida será dada pelo desvio padrão:

$$\overline{\Omega_E} = \frac{\sum_{i=1}^4 \Omega_{Ei}}{4}$$

$$\Delta\overline{\Omega_E} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 (\Omega_{Ei} - \overline{\Omega_E})^2}{4}}$$

Detalhe que para determinar  $I$  haverá uma diferença nesse caso do giroscópio, pois diferente do Disco de Maxwell (tópico 2.1), não será possível desmontar a peça para pesar cada componente individualmente. Precisaremos calcular a massa da forma indireta, utilizando o valor da densidade do material que ela é feita.

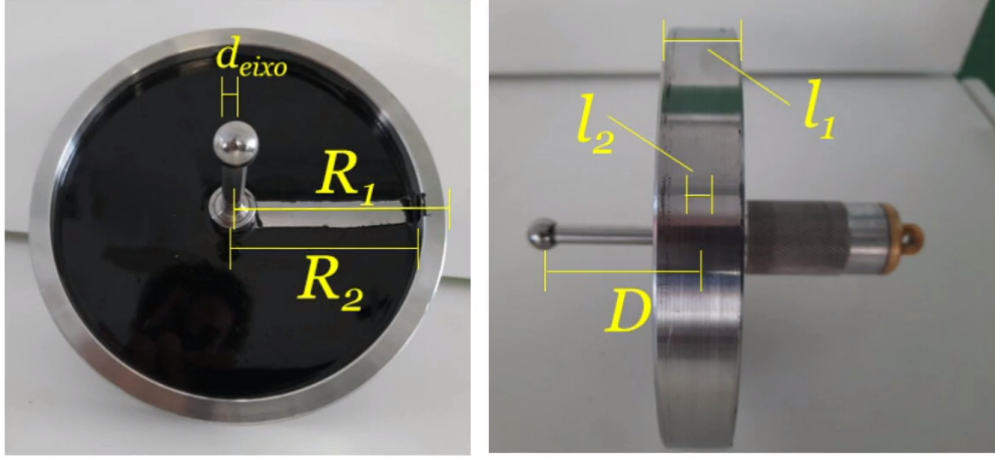


Figura 7: Dimensões do giroscópio a serem consideradas.

Considerando as dimensões acima, teremos que a massa de cada componente (eixo, disco e anel) pode ser calculada pelo volume vezes a densidade do material - que no caso será aço. As formulas então serão:

$$r_{eixo} = \frac{d_{eixo}}{2} \Rightarrow m_e = (2D\pi r_{eixo}^2) \cdot \rho_{aco}$$

$$m_d = (l_2\pi R_2^2) \cdot \rho_{aco}$$

$$m_a = (l_1\pi R_1^2) \cdot \rho_{aco}$$

E propagando as incertezas:

$$\Delta r_{eixo} = \frac{\Delta d_{eixo}}{2} \Rightarrow \Delta m_e = \rho_{aco} \cdot 2\pi (\Delta D \cdot r_{eixo}^2 + D \cdot 2 \cdot r_{eixo} \cdot \Delta r_{eixo})$$

$$\Delta m_d = \rho_{aco} \cdot \pi (\Delta l_2 \cdot R_2^2 + l_2 \cdot 2 \cdot R_2 \cdot \Delta R_2)$$

$$\Delta m_a = \rho_{aco} \cdot \pi (\Delta l_1 \cdot R_1^2 + l_1 \cdot 2 \cdot R_1 \cdot \Delta R_1)$$

Após os cálculos das massas, podemos estimar os momentos de inércia da mesma forma que na Roda de Maxwell, as fórmulas serão as mesmas para cada componente).

Agora, como forma de comparação se soubermos o tempo que o giroscópio demora para fazer uma volta podemos calcular diretamente qual é a frequência de rotação  $\Omega_d$ . Esse valor pode ser obtido pela simples relação de em quanto tempo  $t_i$  o giroscópio efetuará uma 3 voltas completas:

$$\Omega_D = \frac{3 \cdot (2\pi)}{t_i} = \frac{6\pi}{t_i}$$

Da mesma forma que o anterior, utilizaremos a média ponderada dos 4 valores e contrado e propagando as incertezas pelo desvio padrão para essa medida, teremos:

$$\overline{\Omega_D} = \frac{\sum_{i=1}^4 \Omega_{Di}}{4}$$

$$\Delta \overline{\Omega_D} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 (\Omega_{Di} - \overline{\Omega_D})^2}{4}}$$

### 3 Resultados e discussão

#### 3.1 Determinação do Momento de Inércia de um disco

Baseado no vídeo disponibilizado, logo abaixo temos uma tabela que reuni os valores medidos experimentalmente e que utilizaremos nos nossos cálculos para determinar I fisicamente:

O que foi medido	Valor	Incerteza	Unidade
Massa do anel ( $m_a$ )	0,9238	$\pm 0,0001$	kg
Massa do disco ( $m_d$ )	0,4707	$\pm 0,0001$	kg
Massa do eixo ( $m_e$ )	0,12125	$\pm 0,00001$	kg
Raio do eixo ( $R_e$ )	0,0060	$\pm 0,0001$	m
Raio menor do disco ( $R_{d1}$ )	0,0060	$\pm 0,0001$	m
Raio maior do disco ( $R_d$ )	0,0625	$\pm 0,0001$	m
Raio menor do anel ( $R_{a1}$ )	0,0625	$\pm 0,0001$	m
Raio maior do anel ( $R_a$ )	0,0760	$\pm 0,0001$	m

Tabela 2: Dimensões e propriedades físicas do Disco de Maxwell

Utilizado esses valores, podemos calcular os momentos de inércia:

$$I_E = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot R_e^2$$

$$I_E = \frac{1}{2} \cdot 0,12125 \cdot (0,0060)^2 = 0,0000021825(kg \cdot m^2)$$

$$I_D = \frac{1}{2} \cdot m_d \cdot (R_{d1}^2 + R_d^2)$$

$$I_D = \frac{1}{2} \cdot 0,4707 \cdot [(0,0060)^2 + (0,0625)^2] = 0,0009278085(kg \cdot m^2)$$

$$I_A = \frac{1}{2} \cdot m_a \cdot (R_{a1}^2 + R_a^2)$$

$$I_A = \frac{1}{2} \cdot 0,9238 \cdot [(0,0625)^2 + (0,0760)^2] = 0,0044722313(kg \cdot m^2)$$

E consequentemente as incertezas desses valores serão:

$$\Delta I_E = \frac{1}{2} (\Delta m_e \cdot R_e^2 + 2 \cdot R_e \cdot \Delta R_e \cdot m_e)$$

$$\Delta I_E = \frac{1}{2} (0,00001 \cdot (0,0060)^2 + 2 \cdot 0,0060 \cdot 0,0001 \cdot 0,0001) = 0,000000000078(kg \cdot m^2)$$

$$\Delta I_D = \frac{1}{2} [\Delta m_d \cdot (R_{d1}^2 + R_d^2) + (2 \cdot R_d \cdot \Delta R_d + 2 \cdot R_{d1} \cdot \Delta R_{d1}) \cdot m_d]$$

$$\Delta I_D = \frac{1}{2} [0,0001 \cdot ((0,0060)^2 + (0,0625)^2) + (2 \cdot 0,0625 \cdot 0,0001 + 2 \cdot 0,0060 \cdot 0,0001) \cdot 0,4707]$$

$$\Delta I_D = 0,0000034214(kg \cdot m^2)$$

$$\Delta I_A = \frac{1}{2} [\Delta m_a \cdot (R_{a1}^2 + R_a^2) + (2 \cdot R_a \cdot \Delta R_a + 2 \cdot R_{a1} \cdot \Delta R_{a1}) \cdot m_a]$$

$$\Delta I_A = \frac{1}{2} [0,0001 \cdot ((0,0625)^2 + (0,0760)^2) + (2 \cdot 0,0760 \cdot 0,0001 + 2 \cdot 0,0625 \cdot 0,0001) \cdot 0,9238]$$

$$\Delta I_A = 0,0000132787(kg \cdot m^2)$$

Com os momentos de cada peça, podemos agora somá-los:

$$I_F = I_E + I_D + I_A$$

$$I_F = 0,0000021825 + 0,0009278085 + 0,0044722313 = 0,0054022223(kg \cdot m^2)$$

$$\Delta I_F = \Delta I_E + \Delta I_A + \Delta I_D$$

$$I_F = 0,000000000078 + 0,0000034214 + 0,0000132787 = 0,000016700178(kg \cdot m^2)$$

Assim, ajustando os algarismos temos que o momento de inércia da Roda de Maxwell do laboratório calculado fisicamente vale:

$$\therefore \mathbf{I_F = 0,00540 \pm 0,00002(kg \cdot m^2)}$$

Uma parte do experimento foi concluída. Agora, vamos determinar indiretamente o valor da incerteza utilizando o método da queda. Os dados obtidos estão na tabela abaixo (os intervalos foram calculados subtraindo o tempo final do inicial).

O que foi medido	Valor	Incerteza	Unidade
Altura (h)	0,467	$\pm 0,001$	m
Tempo de queda inicial 1 ( $t_{1i}$ )	0,219	$\pm 0,001$	s
Tempo de queda final 1 ( $t_{1f}$ )	0,312	$\pm 0,001$	s
Intervalo 1 ( $t_1$ )	0,093	$\pm 0,002$	s
Tempo de queda inicial 2 ( $t_{2i}$ )	0,219	$\pm 0,001$	s
Tempo de queda final 2 ( $t_{2f}$ )	0,311	$\pm 0,001$	s
Intervalo 2 ( $t_2$ )	0,092	$\pm 0,002$	s
Tempo de queda inicial 3 ( $t_{3i}$ )	0,222	$\pm 0,001$	s
Tempo de queda final 3 ( $t_{3f}$ )	0,312	$\pm 0,001$	s
Intervalo 3 ( $t_3$ )	0,090	$\pm 0,002$	s

Tabela 3: Dados experimentais da queda do Disco de Maxwell

Primeiramente vamos determinar o tempo médio de queda utilizando a média aritmética entre os intervalos calculados:

$$\bar{t}_b = \frac{t_{b1} + t_{b2} + t_{b3}}{3} = \frac{0,093 + 0,092 + 0,900}{3} = 0,0916666667(s)$$

$$\Delta \bar{t}_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (t_i - \bar{t})^2}{3}}$$

$$\Delta \bar{t}_b = \sqrt{\frac{(0,093 - 0,916666667)^2 + (0,092 - 0,916666667)^2 + (0,900 - 0,916666667)^2}{3}}$$

$$\Delta \bar{t}_b = 0,001247219(s)$$

Ajustando as incertezas do tempo teremos:

$$\therefore \bar{t}_b = 0,092 \pm 0,001(s)$$

Com o tempo médio, podemos aplicar todos os valores na nossa fórmula do momento para queda do Disco de Maxwell:

$$m = m_a + m_d + m_e = 0,9238 + 0,4707 + 0,12125 = 1,51575(kg)$$

$$I_E = \left( \frac{g\bar{t}_b^2}{2h} - 1 \right) m r_e^2$$

$$I_E = \left( \frac{9,80665 \cdot (0,092)^2}{2 \cdot 0,467} - 1 \right) \cdot 1,51575 \cdot (0,0060)^2$$

$$I_E = (0,91113117) \cdot 0,008754972 = 0,0049718(kg \cdot m^2)$$

E as incertezas para esses valores calculados acima se dão por:

$$\Delta m = \Delta m_a + \Delta m_d + \Delta m_e = 0,0001 + 0,0001 + 0,00001 = 0,00021(kg)$$

$$\Delta P = \frac{g}{2} \left( \frac{\bar{t}_b^2 \cdot \Delta h + 2 \cdot \bar{t}_b \cdot \Delta \bar{t}_b \cdot h}{h^2} \right)$$

$$\Delta P = \frac{9,80665}{2} \left( \frac{(0,092)^2 \cdot 0,001 + 2 \cdot 0,092 \cdot 0,001 \cdot 0,467}{(0,467)^2} \right) = 0,002122228$$

$$\Delta Q = 2mr\Delta r + \Delta m r^2$$

$$\Delta Q = 2 \cdot 1,51575 \cdot 0,0001 + 0,00021 \cdot (0,0060)^2 = 0,00003032256$$

$$\Delta I_E = \Delta P \cdot Q + \Delta Q \cdot P$$

$$\Delta I_E = 0,002122228 \cdot 0,008754972 + 0,00003032256 \cdot 0,91113117 = 0,0000462079(kg \cdot m^2)$$

Finalmente, ajustando os algarismos significativos teremos então:

$$I_E = 0,00497 \pm 0,00005(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

Com os dois resultados em mãos, podemos comparar os resultados. Poderemos dizer que ambos os valores calculados são *equivalentes* experimentalmente quando a desigualdade abaixo for satisfeita:

$$|I_F - I_E| < 2(\Delta I_F + \Delta I_E)$$

Dessa forma:

$$|0,00540 - 0,00497| < 2 \cdot (0,00002 + 0,00005)$$

$$0,00043 < 0,00014 \Rightarrow \text{FALSO}$$

Como podemos observar, a desigualdade não é satisfeita, por isso podemos afirmar que os valores de momento de inercia encontrados **não foram compatíveis experimentalmente**.

Isso quer dizer que houve algum parâmetro nas medições que fez com que os resultados se divergissem entre si. Alguns fatores que podem ter contribuído para essa diferença podem ter sido:

1. **Erros na medição do tempo** → Como nós que determinamos o tempo baseado na nossa capacidade de pausar o vídeo no momento certo, isso pode ter causado uma variação nos resultados que, caso tivéssemos utilizado um cronômetro automático, isso não teria acontecido;
2. **Atrito** → Nessa situação estamos considerando nosso sistema como se ele fosse ideal, mas não é. Por mais que seja pequeno, existe o atrito entre o barbante e o eixo enquanto ele cai, em conjunto com o arraste, além da dissipação de energia pela elasticidade da corda que está amarrada na roda.

### 3.2 Choques Rotacionais

Conforme descrito na Metodologia, o primeiro dado a ser calculado é o Momento de Inércia da peça 2 conforme sua configuração geométrica e sua massa. Para realizar esse cálculo, utilizaremos a seguinte expressão para corpos cilíndricos ocos:

$$I_{CM} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$



sendo que:

O que foi medido	Valor	Incerteza	Unidade
Massa (M)	2,2429	$\pm 0,0001$	kg
Raio peça menor ( $R_1$ )	0,0325	$\pm 0,0001$	m
Raio peça maior ( $R_2$ )	0,0600	$\pm 0,0001$	m

Tabela 4: Dados experimentais do Choque Rotacional

Para o cálculo direto do Momento de Inércia da peça temos então:

$$I_{CM2} = \frac{1}{2} \cdot 2,2429 \cdot (0,0325^2 + 0,0600^2) = 1,12145 \cdot (0,00105625 + 0,0036)$$

$$I_{CM2} = 1,12145 \cdot (0,00465625)$$

$$I_{CM2} = 0,0052217516(kg.m^2)$$

Agora, resta calcular a incerteza experimental envolvida na aferição das medidas. Para isso, devemos utilizar as regras já conhecidas para propagação de incerteza, respeitando a hierarquia dos cálculos. Primeiramente, calculamos a incerteza envolvida em uma potência:

$$\Delta R_1^2 = 2 \cdot R_1 \cdot \Delta R = 2 \cdot 0,0325 \cdot 0,0001 = 0,0000065$$

$$\Delta R_2^2 = 2 \cdot R_2 \cdot \Delta R = 2 \cdot 0,0600 \cdot 0,0001 = 0,0000120$$

Feito essa etapa, a próxima envolvida é a soma de  $R_1^2$  e  $R_2^2$ , então basta somar as incertezas de ambas calculadas:

$$\Delta(R_1^2 + R_2^2) = \Delta R_1^2 + \Delta R_2^2 = 0,0000065 + 0,0000120 = 0,0000185$$

Por fim, basta calcular a incerteza envolvida no produto da massa M pela soma  $R_1^2 + R_2^2$ , não esquecendo da constante  $1/2$  envolvida. Chamando de  $\Delta z$  a incerteza propagada, temos:

$$\Delta z = \frac{1}{2} \cdot [M \cdot \Delta(R_1^2 + R_2^2) + (R_1^2 + R_2^2) \cdot M]$$

$$\Delta z = \frac{1}{2} \cdot [2,2429 \cdot 0,0000185 + 0,00465625 \cdot 0,0001]$$

$$\Delta z = \frac{1}{2} \cdot [0,0000414937 + 0,0000004656] = \frac{1}{2} \cdot [0,0000419593]$$

$$\Delta z = 0,0000209797 = 0,00002(kg.m^2)$$

Portanto, respeitando os algarismos significativos, temos que o Momento de Inércia da Peça 2 com sua respectiva incerteza experimental é:

$$\therefore I_2 = (0,00522 \pm 0,00002)kg.m^2$$

Antes de analisar os dados dos choques rotacionais, é necessário realizar um gráfico de energia de rotação da roda em função do tempo a partir do momento de inércia da peça 1 coletado no experimento da roda de Maxwell e da medida quantitativa da diminuição da velocidade angular de rotação devido a torques dissipativos apresentado no vídeo. Sabendo que  $I_{M1} = 0,00540 \text{ kg.m}^2$ , conhecendo a equação de energia de energia de rotação ( $E = 1/2 \cdot I \cdot \omega^2$ ) e tendo as velocidades angulares registradas no vídeo, temos a seguinte Tabela X com os dados:

Ponto Nº	Velocidade Angular $\omega$ (rad/s)	Energia de Rotação (J)	Tempo (ms)
1	20,010	1,0811	314
2	19,883	1,0674	316
3	19,574	1,0345	321
4	19,513	1,0280	322
5	19,215	0,9967	327
6	19,040	0,9788	330
7	18,925	0,9670	332
8	18,700	0,9442	336
9	18,480	0,9221	340
10	18,318	0,9060	343

Tabela 5: Dados das Velocidades Angulares e das Energias de Rotação em função do tempo.

Com os dados da Tabela X, podemos construir o gráfico da Energia de Rotação da Roda em função do tempo:

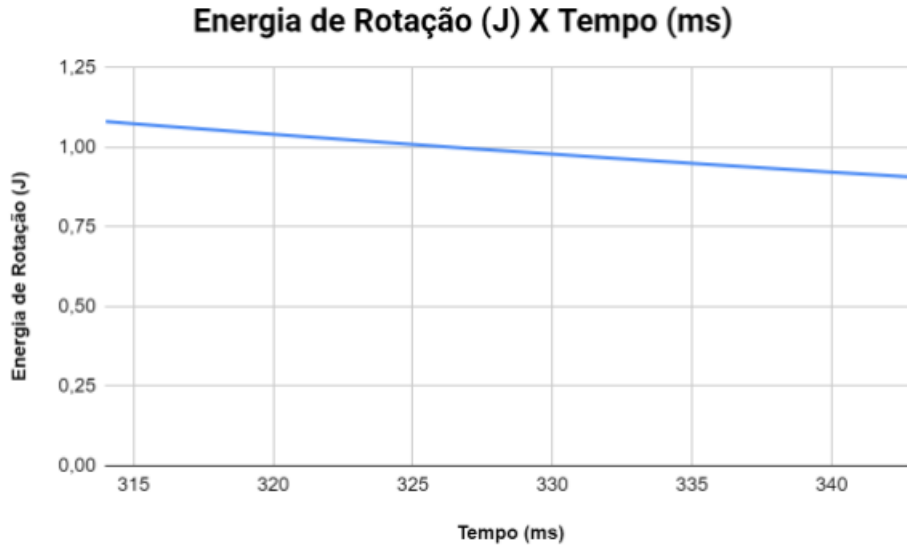


Figura 8: Energia de Rotação da roda em função do tempo.

Com base na Tabela X e no Gráfico 1, podemos determinar a energia média perdida pelo sistema em um ciclo de oscilação:

$$\Delta E = \frac{|E_f - E_i|}{E_i} \cdot 100 = \frac{|0,9060 - 1,0811|}{1,0811} \cdot 100$$

$$\Delta E = \frac{|-0,1751|}{1,0811} \cdot 100 = 0,1619 \cdot 100$$

$$\Delta E \approx 16\%$$

Portanto, podemos concluir que houve uma variação de cerca de 16% na Energia de rotação do sistema em um ciclo de oscilação. Isso indubitavelmente poderá interferir nos resultados do experimento, o que já era esperado se levarmos em consideração que há dissipação de energia de atrito durante o experimento. Entretanto, levando em consideração que há um cálculo de variação relativa ao final do experimento e que o experimento é repetido mais de uma vez, podemos utilizar os dados obtidos para uma aproximação de resultados e analisar os conceitos aplicados na prática. Se tratando das equações de conservação de momentum angular, é válido aplicá-las nesse contexto de repetição do experimento e obtenção de mais de um resultado para o cálculo da média.

Feito essa análise, os próximos dados coletados são os relativos às velocidades angulares obtidas imediatamente antes e depois da colisão rotacional. Assumindo que a Peça 2 apresenta velocidade angular inicial igual a zero ( $\omega_2 = 0$ ), que a velocidade imediatamente antes da colisão corresponde à velocidade angular da Peça 1 e que o experimento foi repetido três vezes, temos os dados registrados na Tabela a seguir:

	1º Choque Rotacional	2º Choque Rotacional	3º Choque Rotacional
Velocidade Angular Inicial da Peça 1 - $\omega_1$ (rad/s)	14,444	22,765	24,353
Velocidade Angular Inicial da Peça 2 - $\omega_2$ (rad/s)	0	0	0
Velocidade Angular Final - $\omega$ (rad/s)	7,453	12,177	13,629

Tabela 6: Velocidade Angular imediatamente antes e depois da Colisão Rotacional para três repetições.

Com os dados coletados acima e assumindo que há conservação de Momento Angular durante o experimento com a colisão, calculamos nesse instante o Momento de Inércia ( $I_1$ ) da Peça 1 através da equação já citada na metodologia:

$$\omega = \frac{I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_2}{I_1 + I_2}$$

$$I_1 = \frac{\omega - \omega_2}{\omega_1 - \omega} \cdot I_2$$

Como foram realizados três repetições, vamos calcular o momento de inércia da peça 1 para cada um deles:

1º) CHOQUE ROTACIONAL

$$I_1 = \frac{7,453 - 0}{14,444 - 7,453} \cdot (0,00522) = 1,066084 \cdot (0,00522) = 0,0055649635(kg.m^2)$$

2º) CHOQUE ROTACIONAL

$$I_1 = \frac{12,177 - 0}{22,765 - 12,177} \cdot (0,00522) = 1,150075 \cdot (0,00522) = 0,0060033944(kg.m^2)$$

3º) CHOQUE ROTACIONAL

$$I_1 = \frac{13,629 - 0}{24,353 - 13,629} \cdot (0,00522) = 1,270888 \cdot (0,00522) = 0,0066340339(kg.m^2)$$

Com os valores calculados para o Momento de Inércia da Peça 1, podemos construir uma tabela que sintetiza os dados obtidos:

	1º Choque Rotacional	2º Choque Rotacional	3º Choque Rotacional
Momento de Inércia da Peça 1 - $I_1$ (kg.m <sup>2</sup> )	0,0055649635	0,0060033944	0,0066340339

Tabela 7: Momento de Inércia da Peça 1 ( $I_1$ ) para os três Choques Rotacionais.

Agora, resta determinar a incerteza experimental do Momento de Inércia da peça 1, que pode ser calculada a partir do Desvio Padrão ( $\sigma$ ) dos valores de  $I_1$  nas três medidas. Isso acontece, pois, primeiramente, não houve registro das incertezas das velocidades angulares durante o experimento. Sem essa informação, não é possível determinar a propagação de incerteza baseado nas regras convencionais de derivação. O outro motivo pelo qual podemos determinar a incerteza experimental pelo desvio padrão ( $\sigma$ ) está no fato de que não há variação de grandezas envolvidas no cálculo do momento de inércia da peça 1, portanto a manipulação de suas incertezas se dá apenas pela variação dos valores numéricos.

Para determinar o Desvio Padrão ( $\sigma$ ), devemos calcular a média aritmética dos momentos de inércia obtidos nas três repetições e, após isso, aplicar a seguinte fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(I_i - \bar{I})^2}{N - 1}}$$

Então,primeiramente, vamos calcular a média aritmética dos três valores obtidos para o Momento de Inércia da peça 1:

$$\bar{I} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{3} = \frac{0,0055649635 + 0,0060033944 + 0,0066340339}{3} = 0,0060674639(kg.m^2)$$

Com a Média Aritmética  $\bar{I}$ , podemos sintetizar os próximos cálculos para o Desvio Padrão na Tabela a seguir:

	1º Choque Rotacional	2º Choque Rotacional	3º Choque Rotacional
$(I_i - \bar{I})$	-0,0005025004	-0,0000640695	0,00056657
$(I_i - \bar{I})^2$	2,525066 .10 <sup>-7</sup>	0,041049 .10 <sup>-7</sup>	3,210015 .10 <sup>-7</sup>
$\sum(I_i - \bar{I})^2$	5,776082 . 10 <sup>-7</sup>	-	-
$\frac{\sum(I_i - \bar{I})^2}{N-1}$	2,888. 10 <sup>-7</sup>	-	-
$\sqrt{\frac{\sum(I_i - \bar{I})^2}{N-1}}$	0,0005374012	-	-

Tabela 8: Dados para a determinação do Desvio Padrão dos valores de  $I_1$  nas três medidas.

Fazendo os devidos arredondamentos para os algarismos significativos, temos que o Desvio Padrão dos valores de  $I_1$  é igual a:

$$\sigma = 0,0005(kg.m^2)$$

Dessa forma, o Momento de Inércia (  $I_1$  ) da Peça 1 e sua respectiva incerteza experimental é:

$$\therefore I_1 = (0,0061 \pm 0,0005)kg.m^2$$

Por fim, resta calcular as Energias Cinéticas Rotacionais, antes e depois da colisão, e sua variação relativa. Podemos determinar as energias cinéticas a partir das seguintes equações:

$$E_{ci} = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \omega_1^2$$

$$E_{cf} = \frac{1}{2} \cdot (I_1 + I_2) \cdot \omega_f^2$$

onde  $I_1$  e  $I_2$  são os valores calculados nas etapas anteriores desse experimento, e as velocidades angulares, inicial e final, foram obtidas pelos dados registrados na Tabela. Portanto, teremos o registro de três energias cinéticas iniciais e finais, cada uma com a respectiva velocidade angular:

### 1º) CHOQUE ROTACIONAL

#### A)Energia Cinética Inicial

$$E_{ci} = \frac{1}{2} \cdot (0,0061) \cdot (14,444)^2 = 0,00305 \cdot (208,629136) = 0,6363J$$

#### B)Energia Cinética Final

$$E_{cf} = \frac{1}{2} \cdot (0,0061 + 0,005220) \cdot (7,453)^2 = \frac{1}{2} \cdot (0,01132) \cdot 55,547209 = 0,3144J$$

### 2º) CHOQUE ROTACIONAL

#### C)Energia Cinética Inicial

$$E_{ci} = \frac{1}{2} \cdot (0,0061) \cdot (22,765)^2 = 0,00305 \cdot (518,245225) = 1,5806J$$

D)Energia Cinética Final

$$E_{cf} = \frac{1}{2} \cdot (0,0061 + 0,005220) \cdot (12,177)^2 = \frac{1}{2} \cdot (0,01132) \cdot 148,279329 = 0,8393J$$

### 3º) CHOQUE ROTACIONAL

E)Energia Cinética Inicial

$$E_{ci} = \frac{1}{2} \cdot (0,0061) \cdot (24,353)^2 = 0,00305 \cdot (593,068609) = 1,8088J$$

F)Energia Cinética Final

$$E_{cf} = \frac{1}{2} \cdot (0,0061 + 0,005220) \cdot (13,629)^2 = \frac{1}{2} \cdot (0,01132) \cdot 185,749641 = 1,0513J$$

Podemos notar antecipadamente que, ao analisar as energias cinéticas rotacionais iniciais e finais para cada choque, claramente não há conservação de energia. Porém, para uma análise mais completa, calcularemos o Desvio Padrão para as três medidas para, então, comparar se houve ou não conservação de energia. Para isso, retomaremos a fórmula de desvio padrão já utilizado para o Momento de Inércia da peça 1

Então,primeiramente, vamos calcular a média aritmética dos três valores obtidos para a Energia Cinética Rotacional Inicial e para a Energia Cinética Rotacional Final :

$$\overline{E_i} = \frac{0,6363 + 1,5806 + 1,8088}{3} = 1,3419J$$

$$\overline{E_f} = \frac{0,3144 + 0,8393 + 1,0513}{3} = 0,7350J$$

Com as Médias Aritméticas  $\overline{E_i}$  e  $\overline{E_f}$ , podemos sintetizar os próximos cálculos para o Desvio Padrão nas Tabelas a seguir:

	<b>1º Choque Rotacional</b>	<b>2º Choque Rotacional</b>	<b>3º Choque Rotacional</b>
$(E_i - \bar{E})$	-0,7056	0,2387	0,4669
$(E_i - \bar{E})^2$	0,49787136	0,05697769	0,21799561
$\sum(E_i - \bar{E})^2$	0,77284466		
$\frac{\sum(E_i - \bar{E})^2}{N-1}$	0,38642233		
$\sqrt{\frac{\sum(E_i - \bar{E})^2}{N-1}}$	0,6216287719		

Tabela 9: Dados para a determinação do Desvio Padrão dos valores da Energia Cinética Rotacional Inicial  $E_i$  nas três medidas.

	<b>1º Choque Rotacional</b>	<b>2º Choque Rotacional</b>	<b>3º Choque Rotacional</b>
$(E_f - \bar{E})$	-0,4206	0,1043	0,3163
$(E_f - \bar{E})^2$	0,17690436	0,0108749	0,10004569
$\sum(E_f - \bar{E})^2$	0,28782854		
$\frac{\sum(E_f - \bar{E})^2}{N-1}$	0,14391427		
$\sqrt{\frac{\sum(E_f - \bar{E})^2}{N-1}}$	0,3793603432		

Tabela 10: Dados para a determinação do Desvio Padrão dos valores da Energia Cinética Rotacional Final  $E_f$  nas três medidas.

Fazendo os devidos arredondamentos para os algarismos significativos, temos que o Desvio Padrão dos valores de  $E_{inicial}$  e  $E_{final}$  são iguais a:

$$\sigma_{inicial} = 0,6J$$

$$\sigma_{final} = 0,4J$$

Dessa forma, as Energia Cinética Rotacional Inicial (  $E_i$ ) e a Energia Cinética Rotacional Final (  $E_f$ ), com suas respectivas incertezas experimental, são:

$$\mathbf{E_i = (1,3 \pm 0,6)J}$$

$$\mathbf{E_f = (0,7 \pm 0,4)J}$$

Com esses valores calculados, podemos determinar a Variação Relativa para então analisar se houve ou não conservação de energia durante o experimento. A Variação Relativa pode ser calculado fazendo a divisão da variação de energia pela energia inicial:

$$\Delta E_c(\%) = 100 \cdot \frac{|E_{ci} - E_f|}{E_{ci}}$$



$$\Delta E_c(\%) = 100 \cdot \frac{|1,3 - 0,7|}{1,3} = 100 \cdot 0,461538$$

$$\Delta E_c(\%) = 46(\%)$$

Então, podemos concluir que houve uma variação de aproximadamente 46% se compararmos as Energias Cinéticas Rotacionais inicial e final. Isso representa uma não conservação de energia, pois da quantidade de energia presente no início do experimento, cerca de 46% se dissiparam em alguma outra forma de energia. Isso pode ser justificado por alguns motivos: o primeiro deles está no fato do experimento envolver atrito entre o eixo de rotação e as peças girando, o que ocasiona uma dissipação de parte da energia; além disso, o choque em questão representa um choque perfeitamente inelástico (os corpos seguem juntos após a colisão com a mesma velocidade) que, por característica, não conserva a energia mecânica.

Podemos sintetizar todos os dados relevantes desse experimento na seguinte Tabela X a seguir:

Nº Choque	$\omega_1$ (rad/s)	$\omega_f$ (rad/s)	$I_1$ (kg.m <sup>2</sup> )	$I_2$ (kg.m <sup>2</sup> )	$E_{ci}$ (J)	$E_{cf}$ (J)	$\Delta E_c$ (%)
1	14,444	7,453	-	-	-	-	-
2	22,765	12,177	$0,0061 \pm 0,0005$	$0,00522 \pm 0,00002$	$1,3 \pm 0,6$	$0,7 \pm 0,4$	46%
3	24,353	13,629	-	-	-	-	-

Tabela 11: Valores obtidos no experimento de Choque Rotacional.

Comparando o valor obtido para o momento de Inércia da peça 1 ( $I_1 = 0,0061 \pm 0,0005$ ) com os valores obtidos a partir das características geométricas e do experimento com a roda de Maxwell ( $I_1 = 0,00540 \pm 0,00005$  e  $I_F = 0,00497 \pm 0,00002$ ), podemos observar que há uma relação de equivalência que pode ser comprovada pela seguinte relação:

$$|x_1 - x_2| < 2 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \longrightarrow \textit{Equivalente}$$

$$|x_1 - x_2| > 3 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \longrightarrow \textit{Discordante}$$

Então, temos entre os Momentos de Inércia da peça 1 ( $I_1$ ) dos dois experimentos:

$$|0,0061 - 0,00540| < 2 \cdot (0,0005 + 0,00005)$$

$$|0,0007| < 2 \cdot (0,00055)$$

$$|0,0007| < 0,0011$$

Portanto, os valores  $I_1 = 0,0061 \pm 0,0005$  e  $I_1 = 0,00540 \pm 0,00005$  são equivalentes.

$$|0,0061 - 0,00497| < 2 \cdot (0,0005 + 0,00002)$$

$$|0,00113| < 2 \cdot (0,00052)$$

$$|0,00113| < 0,00104 \longrightarrow \textit{Falso}$$

$$|0,0061 - 0,00497| > 3 \cdot (0,0005 + 0,00002)$$

$$|0,00113| > 3 \cdot (0,00052)$$

$$|0,00113| > 0,00156 \longrightarrow \textit{Falso}$$

Portanto, como os valores  $I_1 = 0,0061 \pm 0,0005$  e  $I_F = 0,00497 \pm 0,00002$  não atendem a nenhuma das duas situações, concluímos que a comparação desses dois dados não é suficientemente conclusivo para afirmar se há ou não equivalência entre as medidas.

Com base nesses dados, podemos apontar a confiabilidade dos métodos de obtenção do Momento de Inércia da peça 1, sendo que chegamos a uma relação de equivalência entre o método do Choque Rotacional e da medida obtida diretamente pelas características geométricas da peça. Isso torna o método do Choque Rotacional confiável para a obtenção do momento de inércia de uma peça, tendo como principal vantagem o fato de utilizar uma outra peça com geometrias mais simples para a obtenção do momento de inércia de uma peça mais complexa. Entretanto, pode-se apontar como desvantagem a utilização de um software para a obtenção das velocidades angulares, o que torna o método menos acessível.

### 3.3 Conservação do Momento Angular

Os conceitos da física estão presente em basicamente todas as nossas ações, e muitas vezes, não fazemos relação da teoria com a prática. Um caso muito elementar, mas muito interessante de ser analisado, são os movimentos de atletas de diferentes modalidades, os quais utilizam um mesmo conceito físico: conservação do Momento Angular.

A Lei de Conservação da Quantidade de Movimento (ou Momentum) Angular diz que “se o torque externo resultante sobre um sistema em relação a um ponto é zero, então a quantidade de movimento angular total do sistema em relação ao mesmo ponto permanece constante”. Dessa forma:

$$L = I\omega$$

$$T_{extsist} = \frac{\partial L_{sis}}{\partial t} = 0 \Rightarrow L_{sis} = cte$$

Na conservação de L:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Então se I aumenta,  $\omega$  diminui, para compensar e manter constante o momento angular do sistema.

**a) Baseado nos links fornecidos na vídeo-aula, escreva uma resenha sobre como muitos dos saltos acrobáticos realizados por atletas de alto desempenho podem ser entendidos utilizando a conservação do momentum angular.**

Com base em uma série de exemplos – incluindo aqueles apresentados nas vídeo-aulas dos experimentos – escolhemos algumas situações para exaltar o uso de tais conceitos no âmbito esportivo. Os casos mais comuns são os saltos ornamentais, a patinação no gelo, e a ginastica artística, seja nos movimentos de solo ou nas barras.

Usaremos esses exemplos para demonstrar como a conservação do momentum angular propicia tais feitos. Inicialmente, podemos falar do salto de trampolim. Sabemos que o centro de massa descreve uma trajetória parabólica e o atleta deixa o trampolim com um momento angular L em relação a um eixo horizontal que passa pelo centro de massa. Quando a mergulhadora está no ar, não fica sujeita a nenhum torque externo e, assim, o momento angular não varia. Quando a atleta fecha os braços e as pernas – levando-os para perto do corpo e conseqüentemente do centro de massa -, diminui o momento de inércia em torno desse eixo e assim, aumenta sua velocidade angular.

Quando a atleta abre as pernas e braços (passa da posição “carpada” para a posição esticada) no fim do movimento, o momento de inércia aumenta e sua velocidade angular diminui (mantendo a proporcionalidade do momento angular), permitindo que a atleta mergulhe quase sem espirrar água. Tal movimento só é possível graças à ausência de torque externo, que permite que o momento angular se conserve.

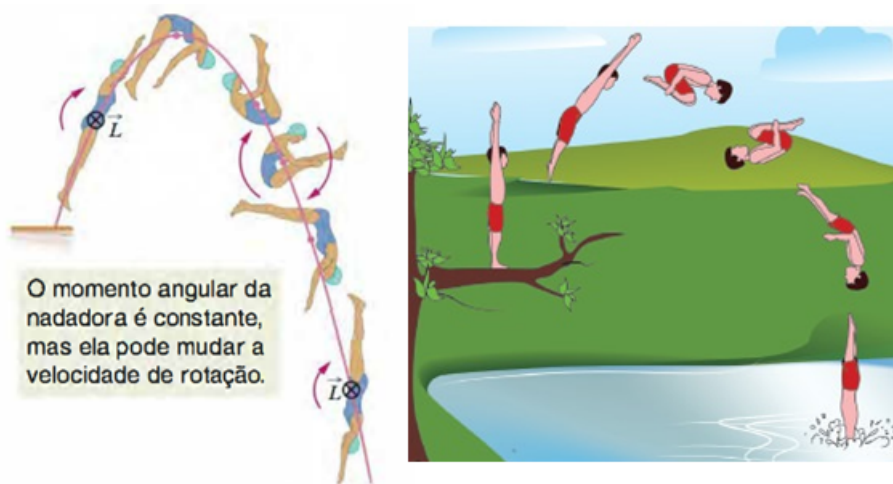


Figura 9: Saltos Ornamentais

O mesmo ocorre para os atletas da patinação no gelo. Como o torque exercido pelo piso de gelo no patinador é muito baixo – quase irrisório –, podemos considerar o momento angular praticamente constante, pois tratamos o sistema gelo + patinador como um sistema isolado. Dessa forma, quando ele recolhe os braços e pernas (aproximando-os do corpo), diminui consideravelmente seu momento de inércia, fazendo com que sua velocidade angular aumente e ele passa a girar com maior rapidez.

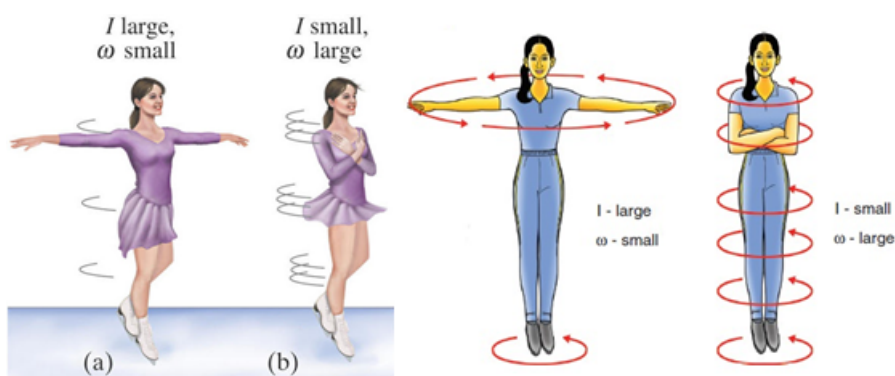


Figura 10: Patinação no Gelo

Analogamente, os ginastas das barras fixas utilizam a conservação do momento angular para realizarem seus movimentos de giro, ganhando ou perdendo velocidade conforme abrem ou fecham os braços e as pernas.

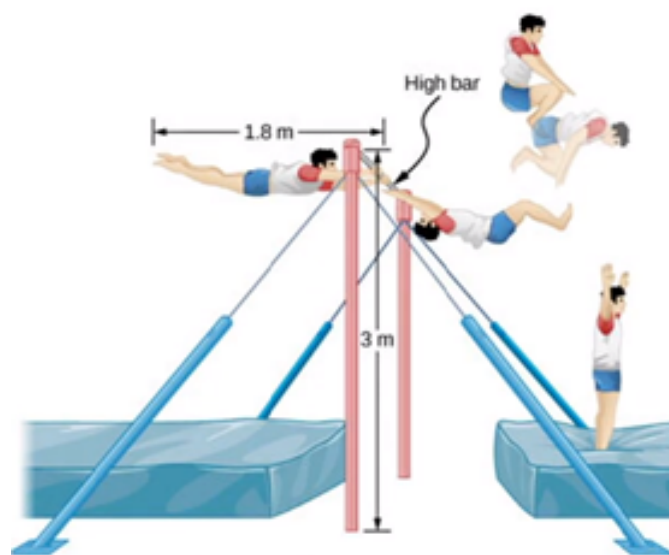


Figura 11: Ginástica - Barra Fixa

Então, mostramos a importância da lei de conservação do momento angular, que aplicada em sistemas isolados (ou quase isolados) nos fornece saltos e movimentos majestosos. Porém, em alguns casos essa conservação é motivo de alerta para nós.

Um exemplo desse, muito comum em veículos de manobras que realizam saltos, como motos e carros *off-road*, pode ser observado nas competições de Mini Baja. Quando o carro salta de uma rampa e está no ar, não há torques externos agindo nele, então consideramos seu momento angular praticamente constante. Dessa maneira, a rotação das rodas é a responsável pela velocidade angular desse sistema, portanto, se frearmos diminuimos essa velocidade, e o carro como um todo tende a rotacionar no mesmo sentido das rodas (para frente), para compensar a falta de giro das rodas – por conta da conservação de momento-, fazendo com que o carro capote se frearmos com ele no ar. Caso realizemos o contrário, acelerando o carro com ele no ar, o chassi como um todo irá rodar no sentido oposto do aumento de velocidade das rodas (para trás) para compensar essa velocidade angular “positiva” nas rodas, mantendo constante o momento angular do sistema.

**b) Explique a demonstração do momento de inércia variável (banquinho giratório) apresentado na vídeo-aula.**

Ao estudarmos o assunto da conservação do momento angular, alguns exemplos clássicos são apresentados aos alunos. Um dos mais famosos, que tem fácil execução e pode ser feito até em sala de aula, é o experimento do “Banquinho Giratório”. Nesse

exemplo, um banco – com pouco ou quase nenhum atrito – gira livremente em torno de um eixo vertical. Com a ajuda de rolamentos, que minimizam a força de atrito, podemos considerar o sistema banco + aluno como um sistema isolado, sem torques externos.

O estudante senta no banco e é posto em rotação com uma pequena velocidade angular inicial  $\omega_1$ , segurando dois halteres com os braços abertos. O vetor momento angular inicial  $L$  do aluno aponta para cima e está no mesmo eixo da rotação do banco. O estudante leva os halteres para próximo do peito, diminuindo o momento de inércia do valor inicial  $I_1$  para um valor menor  $I_2$  pois a massa dos halteres se aproxima do eixo de rotação. A velocidade angular do estudante aumenta consideravelmente, de  $\omega_1$  para  $\omega_2$ , para poder compensar a diminuição do momento de inércia, conservando o momento angular. O estudante pode reduzir sua velocidade angular abrindo os braços novamente, afastando os halteres do eixo de rotação. Como já ressaltado, nenhum torque externo resultante age sobre o sistema formado pelo estudante, o banco e os halteres. Assim, o momento angular do sistema em relação ao eixo de rotação permanece constante, não importando como o estudante segura os halteres.

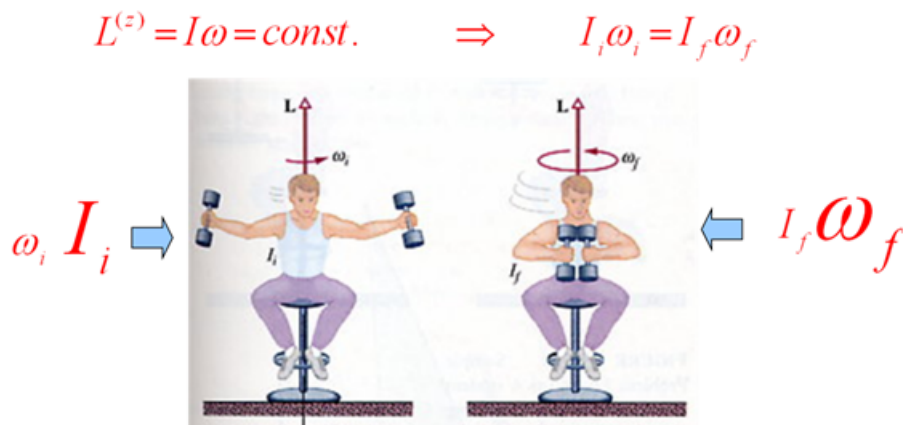


Figura 12: Banco Giratório

c) Na vídeo-aula é apresentado a famosa demonstração do banquinho giratório com a roda de bicicleta. Explique o que acontece. Nas duas situações apresentadas como A e B indique o sentido de rotação da roda de bicicleta, justificando a sua resposta.

Ainda podemos ressaltar um último experimento muito interessante que é o caso do banquinho giratório com a roda de bicicleta. Semelhantemente ao experimento anterior, um aluno senta em um banco, que gira sem atrito - não existindo torques externos

sobre o sistema estudante-banco-roda, sendo considerado isolado. O aluno segura uma roda de bicicleta e no começo do experimento tanto o banco quanto a roda estão em repouso.

Em um certo momento a roda de bicicleta – que se encontra na horizontal – é posta para girar, criando um momento angular de rotação da roda, vertical. Quando o aluno levanta a roda, cria-se uma componente do momento angular ao longo do eixo  $z$  (para cima). Como o sistema é isolado, o momento angular deve ser conservado, então o banco começa a girar no sentido oposto da rotação da roda, de modo a criar um momento angular contrário ao criado pela roda.

Nesse experimento fica clara a conservação de momento angular na direção  $z$  (eixo para cima), pois inicialmente não havia momento nesse eixo. Ao inclinar a roda, surge uma componente de momento nesse eixo, no mesmo sentido da rotação imposta à roda de bicicleta. Mais que depressa, o banquinho começa a rodar no sentido oposto, para compensar a rotação que surge, buscando conservar o momento naquele eixo (que era nulo no início). No experimento do vídeo, não sabemos qual o sentido inicial de rotação da roda de bicicleta (que está coberta por um tampão), e são dadas duas situações:

- Ao levantar a roda, o banco gira no sentido HORÁRIO.
- Ao levantar a roda, o banco gira no sentido ANTI-HORÁRIO.

Desse modo, como já discutimos acima, quando surge a componente do momento no eixo  $z$ , o banco gira no sentido oposto da roda para compensar essa rotação, então:

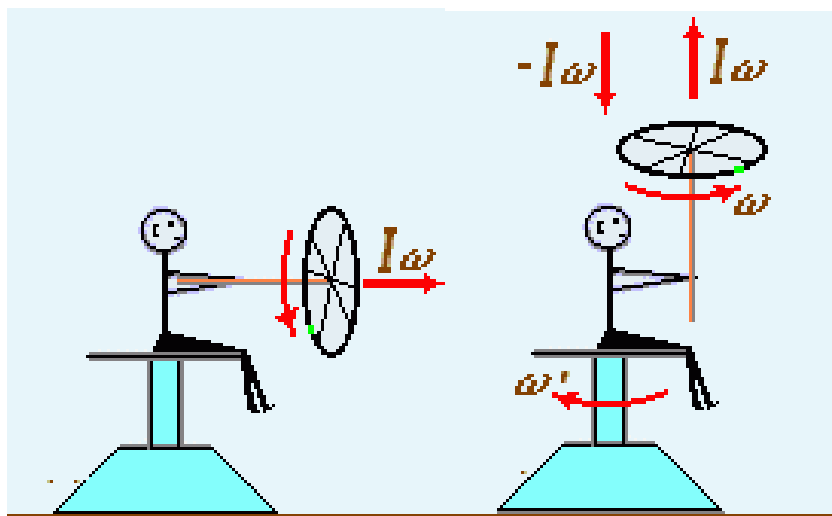


Figura 13: Banco Giratório com Roda de Bicicleta

- Como o banco gira no sentido HORÁRIO, a roda inicialmente foi posta para girar no sentido ANTI-HORÁRIO.
- Como o banco gira no sentido ANTI-HORÁRIO, a roda inicialmente foi posta para girar no sentido HORÁRIO.

### 3.4 Precessão do Giroscópio

Baseado no video disponibilizado para esse experimento os dados que temos disponíveis são os seguintes:

O que foi medido	Valor	Incerteza	Unidade
Meio eixo (D)	0,0565	$\pm 0,0001$	m
Diâmetro do eixo ( $d_{\text{eixo}}$ )	0,0070	$\pm 0,0001$	m
Raio externo ( $R_1$ )	0,0702	$\pm 0,0001$	m
Raio interno ( $R_2$ )	0,0625	$\pm 0,0001$	m
Largura externa ( $l_1$ )	0,0203	$\pm 0,0001$	m
Largura interna ( $l_2$ )	0,0043	$\pm 0,0001$	m
Massa do conjunto (M)	1,116	$\pm 0,001$	kg
Densidade do material ( $\rho_{\text{aco}}$ )	8000,0	-	$\text{kg}/\text{m}^3$

Tabela 12: Dados físicos do Giroscópio

Assim sendo, podemos começar a calcular as massas de cada peça do giroscópio:

$$r_{\text{eixo}} = \frac{d_{\text{eixo}}}{2} \Rightarrow m_e = (2D\pi r_{\text{eixo}}^2) \cdot \rho_{\text{aco}}$$

$$r_{\text{eixo}} = \frac{0,0070}{2} \Rightarrow m_e = (2 \cdot 0,0565 \cdot \pi \cdot (0,0035)^2) \cdot 8000,0 = 0,34789997(\text{kg})$$

$$m_d = (l_2\pi R_2^2) \cdot \rho_{\text{aco}}$$

$$m_d = (0,0043\pi(0,0625)^2) \cdot 8000,0 = 0,4221515(\text{kg})$$

$$m_a = (l_1\pi R_1^2) \cdot \rho_{\text{aco}}$$

$$m_a = (0,0203\pi(0,0702 - 0,0625)^2) \cdot 8000,0 = 0,302494(\text{kg})$$

Observe que se somarmos os valores acima obteremos 1,0725459 kg, que é bem próximo da massa do conjunto M, indicando que nossos cálculos estão no caminho certo (o resto da massa está no pedaço de alumínio que foi pedido para desconsiderarmos). Propagando as incertezas agora teremos:



$$\Delta r_{eixo} = \frac{\Delta d_{eixo}}{2} = \frac{0,0001}{2} = 0,00005(m)$$

$$\Delta m_e = \rho_{aco} \cdot 2\pi (\Delta D \cdot r_{eixo}^2 + D \cdot 2 \cdot r_{eixo} \cdot \Delta r_{eixo})$$

$$\Delta m_e = 8000,0 \cdot 2\pi (0,0001 \cdot (0,0035)^2 + 0,0565 \cdot 2 \cdot 0,0035 \cdot 0,00005) = 0,0010555751(kg)$$

$$\Delta m_d = \rho_{aco} \cdot \pi (\Delta l_2 \cdot R_2^2 + l_2 \cdot 2 \cdot R_2 \cdot \Delta R_2)$$

$$\Delta m_d = 8000,0 \cdot \pi (0,0001 \cdot (0,0625)^2 + 0,0043 \cdot 2 \cdot 0,0625 \cdot 0,0001) = 0,011168362(kg)$$

$$\Delta m_a = \rho_{aco} \cdot \pi (\Delta l_1 \cdot R_1^2 + l_1 \cdot 2 \cdot R_1 \cdot \Delta R_1)$$

$$\Delta m_a = 8000,0 \cdot \pi (0,0001 \cdot (0,0702)^2 + 0,0203 \cdot 2 \cdot 0,0702 \cdot 0,0001) = 0,019548648(kg)$$

Prosseguindo, podemos determinar os momentos de inércia de cada componente e consequentemente do giroscópio todo:

$$I_E = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot R_e^2$$

$$I_E = \frac{1}{2} \cdot 0,34789997 \cdot (0,0035)^2 = 0,0000021309(kg \cdot m^2)$$

$$I_D = \frac{1}{2} \cdot m_d \cdot (R_2^2 + R_e^2)$$

$$I_D = \frac{1}{2} \cdot 0,4221515 \cdot [(0,0625)^2 + (0,0035)^2] = 0,0008271003(kg \cdot m^2)$$

$$I_A = \frac{1}{2} \cdot m_a \cdot (R_1^2 + R_2^2)$$

$$I_A = \frac{1}{2} \cdot 0,302494 \cdot [(0,0702)^2 + (0,0625)^2] = 0,0013361599(kg \cdot m^2)$$

Propagando as incertezas:

$$\Delta I_E = \frac{1}{2} (\Delta m_e \cdot R_e^2 + 2 \cdot R_e \cdot \Delta R_e \cdot m_e)$$

$$\Delta I_E = \frac{1}{2} (0,0010555751 \cdot (0,0035)^2 + 2 \cdot 0,0035 \cdot 0,00005 \cdot 0,34789997)$$

$$\Delta I_E = 0,0000000369(kg \cdot m^2)$$

$$\Delta I_D = \frac{1}{2} [\Delta m_d \cdot (R_2^2 + R_e^2) + (2 \cdot R_e \cdot \Delta R_e + 2 \cdot R_2 \cdot \Delta R_2) \cdot m_d]$$

$$\Delta I_D = \frac{1}{2} [0,011168362 \cdot ((0,0625)^2 + (0,0035)^2) + (2 \cdot 0,0035 \cdot 0,00005 \\ + 2 \cdot 0,0625 \cdot 0,0001) \cdot 0,4221515] \\ \Delta I_D = 0,00002459394(kg \cdot m^2)$$

$$\Delta I_A = \frac{1}{2} [\Delta m_a \cdot (R_1^2 + R_2^2) + (2 \cdot R_1 \cdot \Delta R_1 + 2 \cdot R_2 \cdot \Delta R_2) \cdot m_a] \\ \Delta I_A = \frac{1}{2} [0,019548648 \cdot ((0,0702)^2 + (0,0625)^2) + (2 \cdot 0,0702 \cdot 0,0001 \\ + 2 \cdot 0,0625 \cdot 0,0001) \cdot 0,302494] \\ \Delta I_A = 0,0000903633(kg \cdot m^2)$$

Assim sendo, para  $I$  teremos:

$$I_T = I_E + I_D + I_A$$

$$I_T = 0,0010555751 + 0,011168362 + 0,019548648 = 0,00216539107(kg \cdot m^2)$$

$$\Delta I_T = \Delta I_E + \Delta I_A + \Delta I_D$$

$$\Delta I_T = 0,0000000369 + 0,00002459394 + 0,0000903633 = 0,00011499414(kg \cdot m^2)$$

Com o momento de inércia em mãos, podemos prosseguir para a próxima parte. Para isso, precisaremos dos outros dados do experimento, disponíveis na tabela abaixo (os valores para as velocidades angulares  $\omega_i$  )

O que foi medido	Valor	Incerteza	Unidade
Tempo 1 ( $t_1$ )	19,4	$\pm 0,1$	s
Velocidade 1 ( $\omega_1$ )	271,2	$\pm 0,1$	rad/s
Tempo 2 ( $t_2$ )	19,8	$\pm 0,1$	s
Velocidade 2 ( $\omega_2$ )	255,6	$\pm 0,1$	rad/s
Tempo 3 ( $t_3$ )	20,6	$\pm 0,1$	s
Velocidade 3 ( $\omega_3$ )	308,2	$\pm 0,1$	rad/s
Tempo 4 ( $t_4$ )	20,5	$\pm 0,1$	s
Velocidade 4 ( $\omega_4$ )	256,4	$\pm 0,1$	rad/s

Tabela 13: Dados experimentais do Giroscópio

Finalmente podemos calcular o valor de  $\Omega_e$ , para isso vamos repetir a formula 4 vezes, uma para cada velocidade angular medida com o tacômetro:

$$\Omega_{E1} = \frac{MgD}{I\omega_1}$$

$$\Omega_{E1} = \frac{1,116 \cdot 9,80665 \cdot 0,0565}{0,00216539107 \cdot 271,2} = \frac{0,618348509}{0,857254058} = 1,05294889(rad/s)$$

$$\Omega_{E2} = \frac{MgD}{I\omega_2}$$

$$\Omega_{E2} = \frac{1,116 \cdot 9,80665 \cdot 0,0565}{0,00216539107 \cdot 255,6} = \frac{0,618348509}{0,553473958} = 1,11721377(rad/s)$$

$$\Omega_{E3} = \frac{MgD}{I\omega_3}$$

$$\Omega_{E3} = \frac{1,116 \cdot 9,80665 \cdot 0,0565}{0,00216539107 \cdot 308,2} = \frac{0,618348509}{0,667373528} = 0,926654036(rad/s)$$

$$\Omega_{E4} = \frac{MgD}{I\omega_4}$$

$$\Omega_{E4} = \frac{1,116 \cdot 9,80665 \cdot 0,0565}{0,00216539107 \cdot 256,4} = \frac{0,618348509}{0,555206270} = 1,11372753(rad/s)$$

Então, a média dos valores de  $\Omega_E$  obtidos experimentalmente é:

$$\overline{\Omega_E} = \frac{\Omega_{E1} + \Omega_{E2} + \Omega_{E3} + \Omega_{E4}}{4}$$

$$\overline{\Omega_E} = \frac{1,05294889 + 1,11721377 + 0,926654036 + 1,11372753}{4} = 1,052636055(rad/s)$$

Dessa forma, podemos propagar as incertezas pelo método do desvio padrão:

$$\Delta\overline{\Omega_E} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 (\Omega_{Ei} - \overline{\Omega_E})^2}{4}}$$

$$\Delta\overline{\Omega_E} = \sqrt{\frac{0,251651305}{4}} = 0,250824294(rad/s)$$

Ajustando os valores, teremos então que:

$$\therefore \mathbf{\Omega_E = 1,1 \pm 0,3(rad/s)}$$

Agora na segunda parte desse experimento, vamos utilizar os valores de tempo  $t_i$  para determinar o  $\Omega_d$ :

$$\Omega_{D1} = \frac{6\pi}{t_1} = \frac{6\pi}{19,4} = 0,9716265939(rad/s)$$

$$\Omega_{D2} = \frac{6\pi}{t_2} = \frac{6\pi}{19,8} = 0,9519977738(rad/s)$$

$$\Omega_{D3} = \frac{6\pi}{t_3} = \frac{6\pi}{20,6} = 0,9150269865(rad/s)$$

$$\Omega_{D4} = \frac{6\pi}{t_4} = \frac{6\pi}{20,5} = 0,9194905328(rad/s)$$

Fazendo a média desses valores:

$$\overline{\Omega_D} = \frac{\Omega_{D1} + \Omega_{D2} + \Omega_{D3} + \Omega_{D4}}{4}$$

$$\overline{\Omega_D} = \frac{0,9716265939 + 0,9519977738 + 0,9150269865 + 0,9194905328}{4} = 0,93953547175(rad/s)$$

E de forma análoga ao anterior, propagaremos as incertezas pelo utilizando o desvio padrão:

$$\Delta\overline{\Omega_D} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 (\Omega_{Di} - \overline{\Omega_D})^2}{4}}$$

$$\Delta\overline{\Omega_D} = \sqrt{\frac{0.058045566}{4}} = 0.120463238(rad/s)$$

Ajustando teremos:

$$\therefore \Omega_D = 0,9 \pm 0,1(rad/s)$$

Para analisar esses valores, vamos utilizar a mesma desigualdade empregada no experimento 1, ou seja, o absoluto da diferença entre  $\Omega_E$  e  $\Omega_D$  deve ser menor que o dobro da soma das suas respectivas incertezas:

$$|1,1 - 0,9| < 2 \cdot (0,3 + 0,1)$$

$$0,2 < 0,8 \Rightarrow \text{VERDADEIRO}$$

Ou seja, os valores encontrados para a frequência de precessão do giroscópio foram **compatíveis experimentalmente!** Isso quer dizer que o nosso modelo matemático foi observado com uma certa exatidão na prática.

Alguns fatores como o atrito do eixo do giroscópio com a base de rotação, o arraste do ar fazendo a roda diminuir sua velocidade e mais importante, a dificuldade de pesar com exatidão cada componente para determinar o momento de inércia são alguns fatores que diminuíram a nossa precisão no resultado, mas mesmo assim não atrapalharam muito, indicando que fomos bem criteriosos na montagem e realização do experimento.

## 4 Conclusões

### 4.1 Determinação do Momento de Inércia de um disco

Após realizarmos o experimento, calculando todos os valores necessários para a obtenção dos momentos de inércias e suas incertezas - encontrados fisicamente e experimentalmente - comparamos os valores para testar sua *equivalência*, pela fórmula:

$$|I_F - I_E| < 2(\Delta I_F + \Delta I_E)$$

Como a desigualdade para nossos valores é *falsa*, concluímos que os momentos de inércia encontrados por nós - fisicamente ( $I_F$ ) e experimentalmente ( $I_E$ ) - **não são compatíveis**.

Dessa forma, imaginamos que algum fator nas medições influenciou para que os resultados fossem incompatíveis. Alguns parâmetros que podem ter causado essa diferença nos resultados, podendo citar:

1. **Erros na medição do tempo** → A determinação do tempo foi feita por nós pausando o vídeo no momento desejado, uma maneira pouco precisa de estimar tempos muito pequenos. Assim, pode ter ocorrido uma diferença em nossos valores, causada pela imprecisão desse método, algo que talvez não acontecesse se tivéssemos usado um método mais preciso para medir os tempos - como cronômetros digitais;
2. **Atrito** → Em nosso experimento, tomamos o sistema como ideal - não levando em conta as dissipações de energia -, quando na verdade, existem pequenas dissipações de diversas naturezas. Entre os fatores que causaram variações nos valores, podemos destacar o atrito entre o fio e o eixo enquanto ele cai, o arraste do ar em contato com a peça, além da dissipação na forma de energia elástica - pela elasticidade da corda que está amarrada à roda.

### 4.2 Choques Rotacionais

Após a análise do comportamento de um sistema formado por duas peças em processo de choque rotacional, chegamos a resultados satisfatórios. Por meio das dimensões geométricas e da massa da peça, calculamos o Momento de Inércia da Peça 2 ( $I_2$ ) e chegamos ao seguinte resultado:  $I_2 = (0,00522 \pm 0,00002) \text{ kg.m}^2$ .

A partir da análise dos dados obtidos no experimento anterior (Roda de Maxwell) e da coleta das velocidades angulares no vídeo, construímos um gráfico da Energia

de Rotação em função do Tempo, que apresentou um comportamento linear. Esse comportamento linear foi suficiente para determinarmos aproximadamente a variação de energia durante o movimento de rotação da peça no eixo. Essa perda de energia foi justificada pela dissipação da energia devido ao atrito do eixo com a peça.

Após isso, conhecendo apenas as velocidades angulares iniciais e finais para três repetições, e o Momento de Inércia da Peça 2, determinamos indiretamente o Momento de Inércia da Peça 1 ( $I_1$ ):  $I_1 = (0,0061 \pm 0,0005)kg.m^2$ .

Com os valores calculados para o Momento de Inércia da Peça 1 e da Peça 2, utilizamos as velocidades angulares obtidas no vídeo para determinar as Energias Cinéticas de Rotação Inicial ( $E_{ci}$ ) e Final ( $E_{cf}$ ) com suas respectivas incertezas:  $E_{ci} = 1,3 \pm 0,6J$  e  $E_{cf} = 0,7 \pm 0,4J$ .

Através do cálculo da Variação Relativa, determinamos em porcentagem a quantidade aproximada de energia dissipada durante o choque rotacional:  $\Delta E_c(\%) = 46(\%)$ . Isso significa que durante o experimento não, houve conservação de energia já que ao comparar a energia cinética rotacional inicial e final houve uma diferença considerável. Esse resultado já era esperado, sendo justificado pelo gráfico desenhado em etapas anteriores, que mostram a perda de energia durante a rotação da peça em torno do eixo, e pelo fato do experimento representar um choque perfeitamente inelástico que por característica não envolve conservação de energia.

Por fim, comparamos os resultados obtidos para o Momento de Inércia da Peça 1 dos experimentos da Roda de Maxwell e do Choque Rotacional. Concluímos que houve equivalência entre os valores obtidos de  $I_1$  quando comparado o experimento do Choque Rotacional com a obtenção direta pelas características geométricas da peça 1. Isso confirma a confiabilidade dos dois métodos, sendo que cada um possui suas vantagens e desvantagens próprias. Entretanto, quando comparado o método do Choque Rotacional com o método a partir do lançamento da peça de uma altura H (Roda de Maxwell), não chegamos a um resultado suficiente para afirmarmos se houve ou não equivalência dos valores.

### 4.3 Conservação do Momento Angular

Com o estudo da conservação do momento angular, vimos casos de conservação total em sistemas - nos quais não existe torques externos-, e casos de conservação em apenas um eixo - como no caso do banco giratório com roda de bicicleta-, podendo entender melhor como se dão os saltos, ou as variações de velocidade de rotação, e por que isso ocorre.

Na ausência de torques externos,  $L_{sis}$  é constante:

$$T_{extsist} = \frac{\partial L_{sis}}{\partial t} = 0 \Rightarrow L_{sis} = cte$$

Compreendemos também, como variações nos raios de rotação, alteram a distribuição de massa dos corpos, interferindo diretamente em seu momento de inércia inicial  $I_1$ , fazendo com que ele mude para um momento de inércia final  $I_2$ , mudando diretamente sua velocidade angular de  $\omega_1$  para  $\omega_2$ .

Na conservação:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Após os três experimentos dessa seção, podemos destacar a importância da conservação do momento angular para inúmeras situações do nosso cotidiano, exaltando a importância de entender a parte física dos movimentos para compreender melhor o funcionamento de coisas simples, como giros e saltos.

#### 4.4 Precessão do Giroscópio

Fechando com chave de ouro nossa prática, o experimento em que determinamos a frequência de precessão do giroscópio, calculando todos os valores necessários para a obtenção dessa grandeza e suas incertezas - encontradas de forma direta e indireta - comparamos os valores para testar sua *equivalência*, pela fórmula de comparação:

$$|\Omega_E - \Omega_D| < 2(\Delta\Omega_E + \Delta\Omega_D)$$

Como a desigualdade para nossos valores é *verdadeira*, concluímos que as frequências de precessão encontradas por nós - direta ( $\Omega_D$ ) e indireta ( $\Omega_E$ ) - **são compatíveis**.

Dessa forma, mesmo com fatores que influenciariam de forma negativa no experimento, obtivemos uma boa precisão nos resultados, e o fator de vivermos num mundo não idealizado, com várias forças dissipativas não foi páreo para um bom cuidado e boas habilidades matemáticas.

## 5 Bibliografia

1. SCHNEIDER, José F., AZEVEDO, Eduardo R. *Laboratório de Física II: Livro de Práticas*. São Carlos, 2018.
2. HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de Física - Volume 1*. 10a ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2018 vol 1;
3. TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene, *Física para Cientistas e Engenheiros - Volume 1*, 6a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012;