03 – Análise de Algoritmos (parte 1)

SCC5900 - Projeto de Algoritmos

Material gentilmente cedido pelo Prof. Moacir Ponti Jr.
Modificado por Joao Batista Neto
www.icmc.usp.br/~jbatista

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – USP

2011/1

Sumário

Prévias: notícias e páginas interessantes a visitar

- Foi provado que qualquer posição do Cubo Mágico pode ser resolvida com 20 movimentos. `http://www.reddit.com/tb/cz0ll`

Crescimento de funções

Análise assintótica de algoritmos

- geralmente baseada em uma descrição em pseudo-código (ao invés de código fonte em determinada linguagem)
- caracteriza a **complexidade de tempo** como uma **função do tamanho da entrada**, n
- um algoritmo assintoticamente mais eficiente é a melhor escolha para todas as entradas, *exceto as de tamanho pequeno*.
- permite analisar a complexidade de um algoritmo independente do sistema computacional utilizado

Sumário

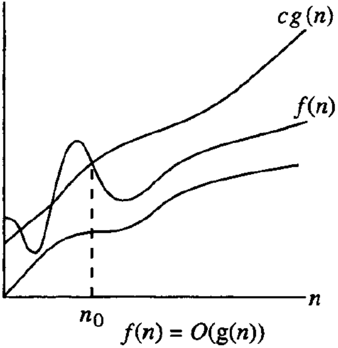
Notação assintótica: O (big oh)

- Para uma dada função $g(n)$, denotamos $O(g(n))$ o <u>*conjunto*</u> *de funções*:

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{existem constantes positivas } c \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \text{ para todo } n \geq n_0 \}$$

- uma função $f(n)$ pertence ao conjunto $O(g(n))$ se existe uma constante positiva c de forma que ela possa estar limitada por $c \cdot g(n)$ para um valor de n suficienemente grande
- podemos dizer que $f(n) \in O(g(n))$, mas em geral se escreve $f(n) = O(g(n))$ (abuso da notação de igualdade, não é simétrico)

Notação assintótica: O (big oh)



Fonte da figura: CORMEN et al.(2002)

- Para todos os valores de n à direita de n_0, o valor de $f(n)$ reside em $c \cdot g(n)$ ou abaixo desse.
- Formalmente, a função $g(n)$ é um **limitante assintótico superior** para $f(n)$
- Exemplo: $2n^2 = O(n^3)$
  – podemos pensar nessa equação como sendo $2n^2 \leq O(n^3)$ ou $2n^2 \in O(n^3)$
  – a taxa de crescimento de $2n^2$ é **menor ou igual** à taxa de n^3

Notação assintótica: O (big oh) — exemplos

- Exemplo 1: $2n + 10$ é $O(n)$
  - podemos realizar uma manipulação para encontrar c e n_0:
    $2n + 10 \leq c \cdot n$
    $c \cdot n - 2n \geq 10$
    $(c - 2)n \geq 10$
    $n \geq \frac{10}{c-2}$
  - a afirmação é válida para $c = 3$ e $n_0 = 10$.
- Exemplo 2: n^2 é $O(n)$
  - é preciso encontrar c que seja sempre maior ou igual a n para todo valor de um n_0:
    $n^2 \leq c \cdot n \Rightarrow n \leq c$
  - é impossível pois c deve ser constante.

Notação assintótica: O (big oh) — exemplos

- Exemplo 3: $3n^3 + 20n^2 + 5$ é $O(n^3)$
  - é preciso encontrar $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $3n^3 + 20n^2 + 5 \leq c \cdot n^3$ para $n \geq n_0$
  - como $3n^3 + 20n^2 + 5 \leq (3 + 20 + 5) \cdot n^3$, podemos tomar $c = 28$ e qualquer $n_0 > 1$
- Exemplo 4: $3 \log n + 5$ é $O(\log n)$
  - é preciso encontrar $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $3 \log +5 \leq c \cdot \log n$ para todo $n \geq n_0$
  - note que $3 \log n + 5 \leq (3 + 5) \cdot \log n$ se $n > 1$ $(\log 1 = 0)$
  - basta tomar, por exemplo, $c = 8$ e qualquer $n_0 = 2$
- Exemplo 5: 2^{n+2} é $O(2^n)$
  - é preciso $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $2^{n+2} \leq c \cdot 2^n$ para todo $n \geq n_0$
  - note que $2^{n+2} = 2^n + 2^2 = 4 \cdot 2^n$
  - assim, basta tomar, por exemplo, $c = 4$ e qualquer n_0

Notação de igualdade para conjuntos de funções: O

- a igualdade nesse tipo de caso será utilizada no sentido de "representatividade" e pode ser lida como "**é**".
- um conjunto em uma fórmula representa uma função anônima naquele conjunto.
- Exemplo 6:

  $$f(n) = n^3 + O(n^2)$$

  significa que existe um $h(n) \in O(n^2)$ de forma que $f(n) = n^3 + h(n)$.
- Exemplo 7:

  $$n^2 + O(n) = O(n^2)$$

  significa que, para qualquer $f(n) \in O(n)$ existe $h(n) \in O(n^2)$ de forma que $n^2 + f(n) = h(n)$.

Sumário

1. Análise Assintótica de Algoritmos
   - Crescimento de funções
   - Notação assintótica O
   - Notação assintótica Ω
   - Notação assintótica Θ
   - Uso e relação entre as notações O, Ω e Θ
   - Notações o e ω
   - Regras
2. Funções
3. Dicas de análise na prática

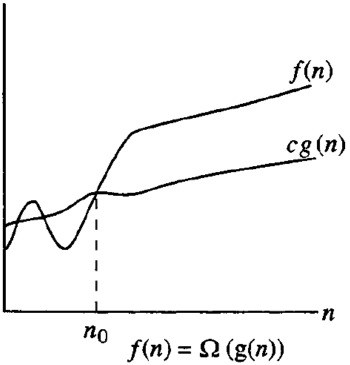
Notação assintótica: Ω (omega)

- Na maiora dos casos estamos interessados no limite superior, pois queremos saber no pior caso, qual a complexidade de tempo
- Em alguns casos também podemos analisar o limite assintótico inferior para expressar algo que esteja "pelo menos" em um dado comportamento.
- Para uma dada função $g(n)$, $\Omega(g(n))$ é o *conjunto de funções*:

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{existem constantes positivas } c \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \text{ para todo } n \geq n_0 \}$$

- uma função $f(n)$ pertence ao conjunto $\Omega(g(n))$ se existem uma constante positiva c tais que ela possa estar limitada por $c \cdot g(n)$ para um valor de n suficienemente grande

Notação assintótica: Ω (omega)



Fonte da figura: CORMEN et al.(2002)

- Para todos os valores de n à direita de n_0, o valor de $f(n)$ reside em $c \cdot g(n)$ ou acima desse.
- Exemplo: $3n^2 + n = \Omega(n)$
  – podemos pensar nessa equação como sendo $3n^2 + n \geq \Omega(n)$,
  – ou seja, a taxa de crescimento de $3n^2 + n$ é **maior ou igual** à taxa de n

Notação de igualdade para conjuntos de funções: Ω

- Exemplo:

$$\sqrt{n} = \Omega(\lg(n))$$

podemos ler: "raiz de n é, pelo menos, omega de $\lg(n)$" para um n suficientemente grande ($n \geq n_0$).

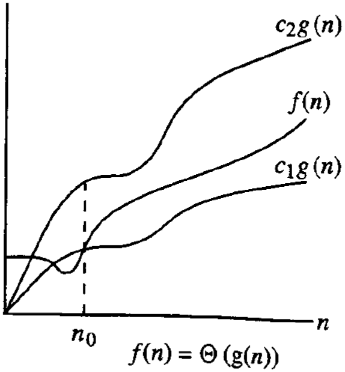
Notação assintótica: Θ (theta)

- Para uma dada função $g(n)$, denotamos $\Theta(g(n))$ o *conjunto de funções*:

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \text{existem constantes positivas } c_1,\ c_2 \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ para todo } n \geq n_0\ \}$$

- uma função $f(n)$ pertence ao conjunto $\Theta(g(n))$ se existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que ela possa estar limitada entre $c_1 g(n)$ e $c_2 g(n)$ para um valor de n suficienemente grande
- podemos dizer que $f(n) \in \Theta(g(n))$, mas em geral se escreve $f(n) = \Theta(g(n))$ (abuso da notação de igualdade)

Notação assintótica: Θ (theta)



- Para todos os valores de n à direita de n_0, o valor de $f(n)$ reside em $c_1 g(n)$ ou acima dele e em $c_2 g(n)$ ou abaixo desse.
- para todo $n > n_0$, $f(n) = g(n)$ dentro de um fator constante.
- $g(n)$ é um **limite assintoticamente restrito** para $f(n)$

Fonte da figura: CORMEN et al.(2002)

Notação assintótica: Θ (theta)

- Foi dito que poderíamos descartar os termos de mais baixa ordem e coeficientes do termo de mais alta ordem.
- para mostrar formalmente que, por exemplo, $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$:
- definiremos constantes positivas c_1, c_2 e $n0$ tais que:

$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2,$$

para todo $n \geq n_0$. Dividindo por n^2:

$$c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2,$$

- a desigualdade do lado direito pode ser considerada válida para $n \geq 1$ escolhendo $c_2 \geq 1/2$, e a do lado esquerdo pode ser considerada válida para $n \geq 7$ escolhendo $c_1 \geq 1/14$.
- para $c_2 = 1/2$, $n = 7$ e $c_1 = 1/14$, temos: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

Notação assintótica: Θ (theta)

- também é possível mostrar que $6n^3 \neq \Theta(n^2)$:
- suponha, a título de contradição, que existam c_2 e n_0 tais que: $6n^3 \leq c_2 n_2$ para $n \leq n_0$.
- mas $n \leq c_2/6$ não é válido para n grande pois c_2 é constante

- Exemplo: para dois algoritmos quaisquer, considere as funções de eficiência:
  - $f(n) = 1000n$
  - $g(n) = n^2$
- f é maior do que g para valores pequenos de n
- g cresce mais rapidamente, e finalmente resultará em maiores valores, sendo o ponto de mudança $n = 1.000$
- segundo as notações vistas, se existe um n_0 a partir do qual $c \cdot f(n)$ é pelo menos tão grande quanto $g(n)$, então, desprezando os fatores constantes e considerando $n_0 = 1.000$ e $c = 1$:
  - $1000n = O(n^2)$
  - ou $f(n) = O(n^2)$
- o mesmo aconteceria para $n_0 = 10$ e $c = 100$.

Notação assintótica: relações e teorema

Analogias

O	Ω	Θ
$\leq$	$\geq$	$=$

Teorema (1)

para duas funções $g(n)$ e $f(n)$, $f(n) = \Theta(g(n))$ se e somente se:

- $f(n) = O(g(n))$ *e*
- $f(n) = \Omega(g(n))$.

Utilidade

- utilizamos o teorema para demonstrar **limites assintoticamente restritos** a partir de limites assintotitos <u>superiores</u> e <u>inferiores</u>.

Sumário

Notações o e ω: notações "estritas"

- Muito parecidas com as notações O e Ω, respectivamente. No entanto, a desigualdade deve valer para qualquer constante c:
- Para uma função $g(n)$, denotamos $o(g(n))$ o *conjunto de funções*:

$$o(g(n)) = \{f(n) : \text{ para qualquer } c > 0 \text{ e } n_0 > 0 \text{ tais que } \\ 0 \leq f(n) < c \cdot g(n) \text{ para todo } n \geq n_0 \ \}$$

- e $\omega(g(n))$ o *conjunto de funções*:

$$\omega(g(n)) = \{f(n) : \text{ para qualquer } c > 0 \text{ e } n_0 > 0 \text{ tais que } \\ 0 \leq c \cdot g(n) < f(n) \text{ para todo } n \geq n_0 \ \}$$

- $f(n) \in \omega(g(n))$ se e somente se $g(n) \in o(f(n))$
- Intuitivamente, (se o limite existe),

para $\omega(g(n))$, $\lim_{n \to 0} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, e para $o(g(n))$ $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Notações o e ω

- Exemplo 1 : $2n^2 = o(n^3)$
  - n^2 é sempre menor que n^3 para um n suficientemente grande.
  - é preciso apenas determinar n_0 em função de c
- Exemplo 2 : $2n^3 \neq o(n^3)$
  - ignorando as constantes, não podemos dizer que n^3 é sempre menor que n^3 para um n suficientemente grande.
- Exemplo 3: $\frac{1}{2}n^2 = \Theta(n^2)$, mas
  - $\frac{1}{2}n^2 \neq o(n^2)$, e
  - $\frac{1}{2}n^2 \neq \omega(n^2)$

Sumário

1. Análise Assintótica de Algoritmos
   - Crescimento de funções
   - Notação assintótica O
   - Notação assintótica Ω
   - Notação assintótica Θ
   - Uso e relação entre as notações O, Ω e Θ
   - Notações o e ω
   - Regras
2. Funções
3. Dicas de análise na prática

Algumas regras

- Se $T_1(n) = O(f(n))$ e $T_2(n) = O(g(n))$, então:
  $T_1(n) + T_2(n) = \max\left[O(f(n)), O(g(n))\right]$ e
  $T_1(n) \cdot T_2(n) = O(f(n) \cdot g(n))$.
- $log_k n = O(n)$ para qualquer k pois logaritmos crescem muito lentamente

Notação assintótica

... Algumas regras

- Se $T(x)$ é um polinômio de grau n, então:
  $T(x) = \Theta(x^n)$.

Relembrando

- um polinômio de grau n é uma função na forma:
  $$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0 \cdot x + a_0$$
- classificação em função do grau
  - 0: polinômio constante
  - 1: função afim (ou polinômio linear, se $a_0 = 0$)
  - 2: polinômio quadrático
  - 3: polinômio cúbico

Funções importantes (1/3)

- Constante: ≈ 1
  - independente do tamanho de n, operações executadas um número fixo de vezes.
- Logarítmica: $\approx \log_b n$
  - típica de algoritmos que resolvem um problema transformando-o em problemas menores.
  - para dobrar $\log_2 n$ é preciso fazer $\log_2 n^2$.
  - a base também muda pouco os valores: $\log_2 n \approx 20$ e $\log_{10} n \approx 6$ para $n = 1.000.000$.
- Linear: $\approx n$
  - em geral, uma certa quantidade de operações é realizada sobre cada um dos elementos de entrada.
  - melhor situação para quando é preciso processar n elementos de entrada e obter n elementos de saída.

Funções importantes (2/3)

- Log linear (ou n-log-n): $\approx n \cdot \log_b n$
  - típico de algoritmos que resolvem um problema transformando-o em problemas menores, resolvem cada um de forma independente e depois ajunta as soluções.
  - para dobrar $n \cdot \log_2 n$ é preciso fazer aproximadamente $n \cdot \log_2 2n$.
- Quadrática: $\approx n^2$
  - ocorre frequentemente quando os dados são processados aos pares, com laços de repetição aninhados.
  - sempre que n dobra, o tempo de execução é multiplicado por 4.
  - podem ser úteis para resolver problemas de tamanho relativamente pequeno.
- Cúbica: $\approx n^3$
  - ocorre em multiplicações de matrizes, com três estruturas de repetição aninhadas.
  - sempre que n dobra, o tempod e execução é multiplicado por 8.
  - podem ser úteis para resolver problemas de tamanho relativamente pequeno (ou quando não se tem outra opção!).

Funções importantes (3/3)

- Exponencial: $\approx a^n$
  - geralmente ocorre quando se usa uma solução de força bruta.
  - para o caso 2^n, sempre que n dobra, o tempo de execução é elevado ao quadrado.
  - não são úteis do ponto de vista prático.
- Fatorial: $\approx n!$
  - é muitas vezes dito ter complexidade "exponencial", apesar de o fatorial ter comportamento muito pior.
  - geralmente ocorre quando se usa uma solução de força bruta.
  - para $n = 20$, $n! \approx 2,4 \times 10^{18}$,
  - – para o dobro $n = 40$, $n! \approx 8,2 \times 10^{47}$.
  - definitivamente, **não** são úteis do ponto de vista prático.

Funções e tempo cronológico

segundos
minutos
séculos

Características Aproximadas do Hardware	
Número de Instruções executadas por Ciclo do relógio (IPC)	8
Freqüência (1 / período do ciclo em min.)	3E+09
No. de Instruções por minuto	24E+09

$T(n)$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 80$
n	5,3E-08	1,1E-07	1,6E-07	2,1E-07
$n \log n$	2,3E-07	5,7E-07	9,5E-07	1,3E-06
n^2	1,1E-06	4,3E-06	9,6E-06	1,7E-05
n^3	2,1E-05	1,7E-04	5,8E-04	1,4E-03
2^n	2,8E-03	48,9	1,0	1,0E+06
3^n	0,2	5,4E+08	1,9E+18	6,6E+27

Fonte da figura: notas de aula do Prof. Ricardo Campello

Exercício

- Um algoritmo tradicional e muito utilizado possui complexidade $n^{1,5}$, enquanto um algoritmo novo proposto é da ordem de $n \log n$:
  - $f(n) = n^{1,5}$
  - $g(n) = n \log n$
- Qual algoritmo adotar?
- Uma possível solução:

$$f(n) = \frac{n^{1,5}}{n} = n^{0,5} \quad \Rightarrow \quad (n^{0,5})^2 = n$$

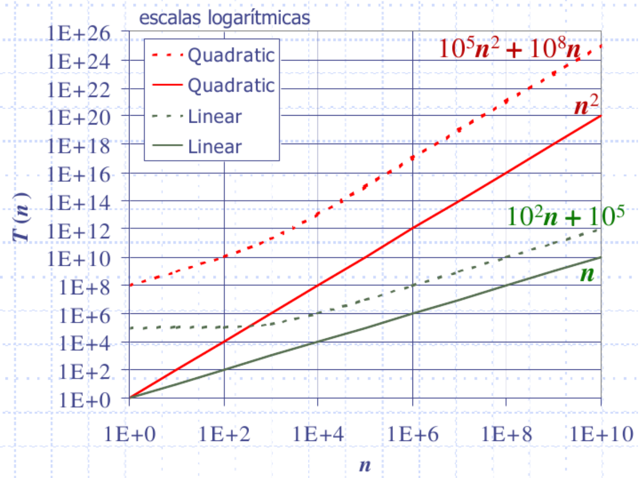
$$g(n) = \frac{n \log n}{n} = \log n \quad \Rightarrow \quad (\log n)^2 = \log^2 n$$

- Como n cresce mais rapidamente do que qualquer potência de log, o algoritmo novo é mais eficiente.

Dicas de análise na prática

- Se $f(n)$ for um polinômio de grau d então $f(n)$ é $O(n^d)$
  - despreze os termos de menor ordem
  - despreze os fatores constantes
- Use a menor classe de funções possível
  - $2n$ é $O(n)$, ao invés de $2n$ é $O(2n)$
- Use a expressão mais simples
  - $3n + 5$ é $O(n)$, ao invés de $3n + 5$ é $O(3n)$

Dicas de análise na prática



Exemplo: n^2 vs. $10^5 n^2 + 10^8 n$ e n vs. $10^2 n^2 + 10^5$

Fonte da figura: notas de aula do Prof. Ricardo Campello

Dicas de análise na prática

- Há casos em que a análise assintótica ignora fatores assintoticamente irrelevantes, mas relevantes na prática: em especial quando temos interesse em entradas relativamente pequenas.
- Ao comparar dois algoritmos com tempo de execuçao:
  - $f(n) = 10^{100}n$, e
  - $g(n) = 10n \log n$

  pela análise assintótica, o primeiro é mais eficiente
- No entanto, 10^{100} é o número estimado (por alguns astrônomos) como o limite superior para a quantidade de átomos no universo observável
  - $10n \log n > 10^{100}n$ apenas para $n > 2^{10^{99}}$

Dicas de análise na prática

- **Repetições**: o tempo de execução é pelo menos o tempo dos comandos dentro da repetição multiplicada pelo número de vezes que é executada.
    - o exemplo abaixo é $O(n)$

```
para i de 1 ate n faca
   a = a*i
```

- **Repetições aninhadas**: análise feita de dentro para fora
    - o tempo total é o tempo de execução dos comandos multiplicado pelo produto do tamanho de todas as repetições.
    - o exemplo abaixo é $O(n^2)$

```
para i de 1 ate n faca
   para j de 0 ate n-1 faca
      a = a*(i+j)
```

Dicas de análise na prática

- **Condições**: o tempo nunca é maior do que o tempo do teste mais o tempo do <u>maior</u> entre os comandos dentro do bloco do "então" e do "senão"
  - o exemplo abaixo é $O(n)$

```
se (a < b) entao
   a = a + 1
senao
   para i de 1 ate n-1 faca
      a = a*i
```

- **Chamadas à subrotinas**:
  - a <u>subrotina deve ser analisada primeiro</u> e depois ter suas unidades de tempo incorporadas ao programa que a chamou

Exercício

- Quantas unidades de tempo são necessárias para rodar o algoritmo abaixo? Qual a ordem de complexidade de tempo?

```
inicio
   i, j: inteiro
   A: vetor inteiro de n posicoes
   i = 1
   enquanto (i < n) faca
      A[i] = 0
      i = i + 1
   para i = 1 ate n faca
      para j = 1 ate n faca
         A[i] = A[i] + (i*j)
fim
```

Bibliografia

- CORMEN, T.H. et al. **Algoritmos: Teoria e Prática** (Caps. 1–3). Campus. 2002.
- ZIVIANI, N. **Projeto de algoritmos**: com implementações em Pascal e C (Cap. 1). 2.ed. Thomson, 2004.
- FEOFILOFF, P. **Minicurso de Análise de Algoritmos**, 2010. Disponível em: `http://www.ime.usp.br/~pf/livrinho-AA/`.
- DOWNEY, A.B. **Analysis of algorithms** (Cap. 2), Em: Computational Modeling and Complexity Science. Disponível em: `http://www.greenteapress.com/compmod/html/book003.html`
- ROSA, J.L. **Notas de Aula de Introdução a Ciência de Computação II**. Universidade de São Paulo. Disponível em: `http://coteia.icmc.usp.br/mostra.php?ident=639`
- CAMPELLO, R. **Notas de Aula de Introdução a Ciência de Computação II**. Universidade de São Paulo. Disponível em: `http://coteia.icmc.usp.br/mostra.php?ident=611`