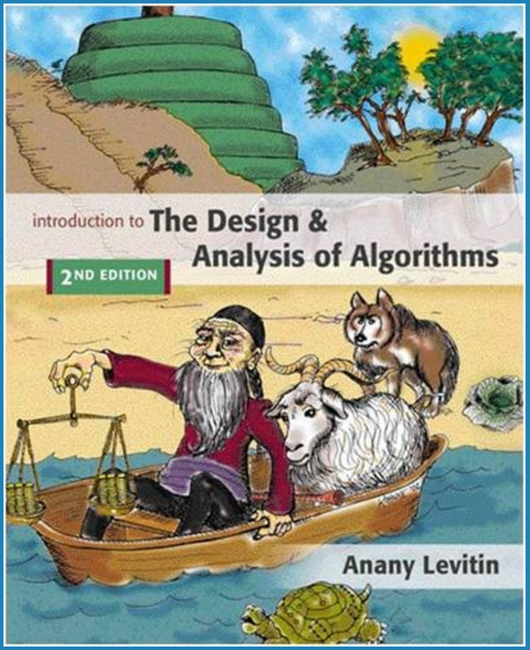
Chapter 10

Iterative Improvement



Copyright © 2007 Pearson Addison-Wesley. All rights reserved.

Abordagem

Greedy strategy: constrói a solução para um problema de otimização peça-por-peça, sempre adicionando um peça ótima local a uma solução parcial

Iterative Improvement strategy: começa com uma solução possível (que satisfaz todas as soluções do problema) e passa a melhora-la através da aplicação repetida de algum passo simples

- The Simplex Method
- The Maximum-Flow problem
- Maximum Matching in Bipartide Graphs
- The Stable Marriage Problem

The Simplex method

Problema geral: otimizar uma função linear de várias variáveis sujeitas a uma série de restrições lineares

Maximizar (ou minimizar)

$$c1x1 + \ldots + cnxn$$

Sujeito a

$$ai1x1 + \ldots\ ainxn \leq (ou \geq ou =)\ bi\ para\ i=1, \ldots, m$$

$$x1 \geq 0, \ldots, xn \geq 0$$

Kantorovich & Koopmans, Premio Nobel de Economia em 75

Dantzig, reconhecido como inventor do método simplex (1947), recebeu National Medal of Science em 1976 (entre muitos outros prêmios)

Método Simplex – interpretação geométrica

Maximizar $3x + 5y$

s.a. $x + y \leq 4$

$x + 3y \leq 6$

$x \geq 0, y \geq 0$

Solução factível é qualquer ponto (x,y) que satisfaz todas as restrições do problema

Região factível é o conjunto de todos os pontos possíveis

Lembrando que $ax + by = c$ ($a \neq 0, b \neq 0$) define reta que divide o plano em duas metades ($ax + by > c$ e $ax + by < c$), as duas inequações $x + y \leq 4$ e $x + 3y \leq 6$ a região factível é a interseção dos dois planos e o primeiro quadrante definido por $x \geq 0, y \geq 0$

A tarefa é encontrar uma solução ótima, um ponto na região factível com o maior valor da funcão objetivo $z=3x + 5y$

Graficamente

Região factível de

$$x + y \le 4$$
$$x + 3y \le 6$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

graficamente

Região factível de

$$x + y \le 4$$
$$x + 3y \le 6$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

Valores para função objetivo $z = 3x + 5y$

$3x + 5y = 20$ *(linhas de nível)*

$3x + 5y = 10$

$3x + 5y = 14$

graficamente

Região factível de

$$x + y \le 4$$
$$x + 3y \le 6$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

E se a função objetivo fosse $z=3x + 3y$?

$$3x + 3y = 20$$
$$3x + 3y = 10$$
$$3x + 3y = 14$$

graficamente

Região factível de (invertendo inequalidades)

$$x + y \geq 4$$
$$x + 3y \geq 6$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

Qual seria a região factível? *(unbounded problem)*

Mais que duas variáveis?

Características mais importantes são mantidas

Em particular, regiões factíveis são em vários aspectos similares a polígonos convexos no plano 2D Cartesiano

- sempre possum um número finito de pontos extremos

- uma solução ótima para um problema de programação linear pode ser encontrada em um dos pontos extremos de sua região factível

Teorema do Ponto Extremo: qualquer problema de programação linear com região factível com borda não vazia possui uma solução ótima que pode sempre ser encontrada em um ponto extremo da região factível do problema

- Exceto para algumas instâncias degeneradas (como a maximização de $z=x+y$ s.a. $x+1=1$), se um problema de programação linear tem uma região factível sem borda (unbounded), ela também pode ser sempre encontrada em um ponto extremo da região factível

Implicações

O teorema implica que para resolver um problema de programação linear, pelo menos no caso de uma região factível com borda, podemos ignorar todos menos um conjunto finito de pontos na região factível.

Em princípio podemos resolver tal problema calculando o valor da função objetivo em cada ponto extremo e selecionar o melhor valor. Esse plano tem dois grandes obstáculos:

(a) é necessário um mecanismo para gerar todos os pontos extremos – e para isso um mecanismo algébrico foi descoberto

(b) sabe-se que o número de pontos extremos cresce exponencialmente com o tramanho do problema

Portanto busca exaustiva não é realística

Método Simplex

Algoritmo que inspeciona apenas uma pequena fração dos pontos extremos de uma região factível antes de identificar solução ótima

Método Simplex: a idéia “geometricamente”…

Começa pela identificação de um ponto extremo da região factível
Verifica se é possível obter valor melhor em um ponto extremo adjacente
Se não for possível o ponto atual é ótimo: parar
Se for possível, continua a verificação com o ponto extremo que tem melhor solução ótima
Depois de um número finito de passos, o algoritmo ou identifica o ponto extremo ótimo ou determina que tal solução não existe

Outline do Método Simplex

Antes de aplicar o Método Simplex, o problema tem que ser representado em sua forma padrão (standard form), que exige:

- O problema deve ser de maximização
- Todas as restrições devem estar na forma de equações lineares (e menos as restrições de não-negatividade)
- Todas as variáveis devem ser não-negativas

Problema geral na forma padrão com *m* restrições e *n* incógnitas:

maximizar $c1x1 + \ldots + cnxn$

s.a. $ai1x1 + \ldots ainxn = bi$ *para* $i=1, \ldots, m$

$x1 \geq 0, \ldots, xn \geq 0$

Forma compacta usando matriz

maximizar cx

s.a. $Ax=B$

$x \geq 0$

onde

$$c=[c1\ c2 \ldots cn],\quad x=\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ \ldots \\ xn \end{bmatrix},\quad A = \begin{bmatrix} a11 & a21 & \ldots & a1n \\ a21 & a22 & \ldots & a2n \\ & \ldots & & \\ am1 & am2 & \ldots & amn \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ \ldots \\ bn \end{bmatrix}$$

Forma padrão equivalente

Todo programa de programação linear pode ser colocado em sua forma padrão equivalente

Se função objetivo original era minimizar a função objetivo, pode ser substituída pelo problema equivalente de maximizar a mesma função objetivo com seus coeficientes *cj* trocados por *–cj, j=1..n*

Se restrição é dada como inequação, pode ser substituída por equação equivalente na qual é adicionado uma variável de folga (slack variable), que represena a diferença entre os dois lados da inequação original. Por exemplo, as duas inequalidades

$x + y \le 4$ e $x + 3y \le 6$ podem ser transformadas em
$x + y + u = 4, u \ge 0$ e $x + 3y + v = 6, v \ge 0$

Na maioria dos problemas as variáveis devem ser inicialmente não-negativas pois representam alguma quantidade física. Quando esse não é o caso na especificação inicial do problema, uma variável irrestrita *xj* pode pode ser substituída pela diferença entre duas novas variáveis não negativas $xj = x'j - x''j, x'j \ge 0, x''j \ge 0$

Forma padrão

Maximizar $3x + 5y$

s.a. $x + y \le 4$

$x + 3y \le 6$

$x \ge 0, y \ge 0$

fica

Maximizar $3x + 5y + 0u + 0v$

s.a. $x + y + 1u = 4$

$x + 3y + 1v = 6$

$x, y, u, v \ge 0$

Forma padrão

Vantagem principal da forma padrão: provê mecanismo simples para identificação dos pontos extremos de uma região factível

No caso do exemplo anterior, precisamos setar 2 das 4 variáveis nas equações de restrição para 0 para obter um sistema com 2 equações lineares com duas incógnitas e resolver esse sistema

Para o caso geral de um problema com *m* equações e *n* incógnitas $(n \geq m)$, n-m variáveis devem ser setadas para 0 para se obter um sistema de *m* equações e *m* incógnitas. Se o sistema obtido tem uma única solução (qq. sistema linear $m \times m$ não-degerado tem), tem-se uma *solução básica* dada pela solução do sistema (álgebra linear…)

Solução básica factível

Se todas as coordenadas de uma solução básica são não-negativas, a solução básica é chamada *solução básica factível.* No exemplo:

$$x + y + 1u + 0v = 4$$
$$x + 3y + 0u + 1v = 6$$
$$x, y, u, v \geq 0$$

ao setar x e y para 0 e resolvendo o sistema resultante para u e v, a solução básica factível obtida é $(0, 0, 4, 6)$

ao setar x e u para 0 e resolvendo o sistema resultante para y e v, a solução básica obtida é $(0, 4, 0, -6)$, a qual não é factível

A importância de soluções básicas factíveis está na correspondência um-a-um que elas têm com os os pontos extremos da solução factível

Por exemplo (0,0,4,6) é um ponto extremo do problema do exemplo

O ponto (0,0,4,6) é o ponto de partida natural para aplicação do Simplex

Tableau para ponto de partida *(0,0,4,6)*

	x	*y*	*u*	*v*	
u	*1*	*1*	*1*	*0*	*4*
v	*1*	*3*	*0*	*1*	*6*
	-3	*-5*	*0*	*0*	*0*

em geral, um Tableau Simplex de um problema de programação linear na forma padrão com *m* equações de restrição e *n* incógnitas *(n≥m)*, *n-m* variáveis em *m+1* linhas e *n+1* colunas

cada uma das *m* linhas da tabela contém os coeficients da equação de restrição correspondente, a última coluna contém o valor do lado direito da equação

as colunas são rotuladas com os nomes das variáveis (menos a última)

as linhas são rotuladas pelas variáveis da solução básica factível representada no *tableau*

os valores das variáveis de base correspondente à solução estão na última coluna

as colunas rotulas pelas variávies da base foram uma matriz identidade *m x m*

a última linha, chamada linha objetivo, é inicializada pelos coeficientes da função objetivo com seus sinais invertidos (nas primeiras n colunas) e o valor da função objetivo no ponto inicial (na última coluna)

nas próximas iterações…

A linha objetivo é transformada da mesma maneira que as demais

- é utilizada pelo método para verificar se o tableau atual representa ou não uma solução ótima

- o que acontece quando todas as entradas da linha objetivo são não-negativas (com a última coluna como possível exceção)

- Por exemplo, no tableau anterior a solução *(0,0,4,6)* não é ótima

	x	y	u	v	
u	1	1	1	0	4
v	1	3	0	1	6
	-3	-5	0	0	0

Podemos aumentar o valor de *x*…

O valor negativo da coluna x da linha objetivo sinaliza que podemos aumentar o valor da função objetivo $z=3x + 5y+ 0u + 0v$ ao aumentar o valor da coordenada x na solução base atual $(0,0,4,6)$. De fato, como o valor do coeficiente da variável x na função objetivo é positivo, quanto maior o valor de x maior o valor da função. Naturalmente há necessidade de "compensar" qualquer acréscimo em x com ajustes nos valores das variáveis de base u e v de modo que o novo ponto ainda seja factível. Para ser esse o caso, as seguintes condições têm que ser satisfeitas ao mesmo tempo

$$x + u = 4 \quad \text{onde } u \geq 0$$

$$x + v = 6 \quad \text{onde } v \geq 0$$

o que significa $x \leq min\ \{4, 6\} = 4$

$$x = 4,\ x+v= 6,\ v=2$$

se aumentarmos o valor de x de 0 para 4, que é o maior valor possível, o ponto passa a ser $(4, 0, 0, 2)$, que é adjacente ao ponto extremo $(0,0,4,6)$ da região factível, com $z=12$

Podemos aumentar o valor de *y*…

O valor negativo da coluna y na linha objetivo sinaliza que também é possível aumentar o valor da função objetivo $z=3x + 5y+ 0u + 0v$ ao aumentar o valor da coordenada y na solução base inicial $(0,0,4,6)$. De modo similar, como o valor do coeficiente da variável y na função objetivo é positivo, quanto maior o valor de y maior o valor da função. Naturalmente também há necessidade de "compensar" qualquer acréscimo em y com ajustes nos valores das variáveis de base u e v de modo que o novo ponto ainda seja factível. Para esse ser o caso, as seguintes condições têm que ser satisfeitas ao mesmo tempo

$y + u = 4 \quad \text{onde } u \geq 0$

$3y + v = 6 \quad \text{onde } v \geq 0$

o que significa $x \leq \min\{4/1, 6/3\} = 2$

$y + u= 4, u=2, 3y+v =6, \; 3.2 + v= 6, v = 6 - 6=0$

se aumentarmos o valor de y de 0 para 2, que é o maior valor possível, o ponto passa a ser $(0, 2, 2, 0)$, que é adjacente ao ponto extremo $(0,0,4,6)$ da região factível, com $z=10$

Qual variável entra na base?

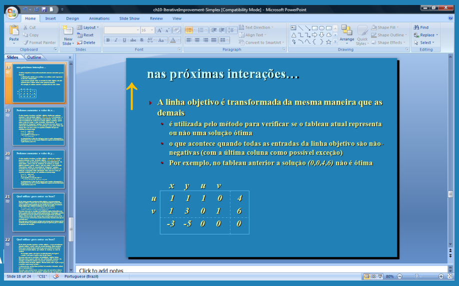
Se há várias entradas negativas na linha objetivo, a regra normalmente adotada é utilizar o maior valor em termos absolutos (mais negativo). Essa regra resulta da observação de que essa escolha leva ao maior acrescimo na função objetivo por unidade de mudança no valor da variável

No exemplo, mudar x de 0 para 1 em (0,0,4 6) muda z de 0 para 3

e mudar y de 0 para 1 muda o valor de z de 0 para 5

Devemos notar que as restrições de factibilidade impõem limites diferentes sobre o quanto cada uma das variáveis pode aumentar. No exemplo, a escolha da variável y em vez da variável x leva a um acrescimo menor da função objetivo. Mesmo assim, valor seguir a regra e escolher y para entrar na base …

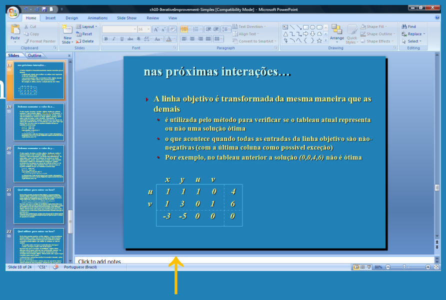
A coluna da nova variável base (variável de entrada) é chamada coluna pivô e é marcada com ↑



Qual variável sai da base?

Para uma nova variável entrar na base, outra tem que sair (o número total de variáveis da base em qualquer solução tem que ser igual a *m*, que é o número de equações de restrições)
Como, para chegar a um ponto extremo adjacente com um valor maior da função objetivo, é necessário aumentar o valor da variável que entra na base com o maior valor possível para fazer com que uma das antigas variáveis passe a ter valor zero preservando a não-negatividade de todas as demais. Esse observação pode ser traduzida na seguinte regra para escolher qual variável deixa a base no tableau:

- para cada *positiva* na coluna pivô, computar a razão-θ dividindo a entrada da última coluna pela entrada na coluna pivô. No tableau do exemplo as razões são $\theta u = 4/1=4$ e $\theta v = 6/3=2$
- a linha com menor razão θ é da variável que saída
- em caso de empates: escolhe-se arbitrariamente
- a variável de saída é indicada com ▪
- No exemplo, a variável de saída é *v*
- Se não houver valor positivo na coluna pivô, não pode calcular θ e o problem



Obtenção do próximo tableau

com *pivoting* (similar ao passo de eliminação de Gauss-Jordan para resolução de sistemas de equações lineares)

primeiro, divide todas as entradas da linha pivô pelo valor do pivô, no exemplo:

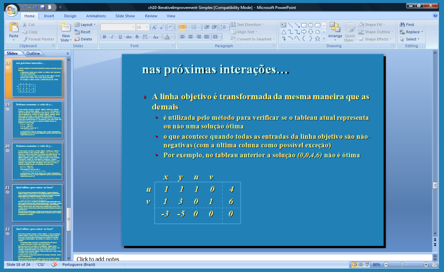
rownew: 1/3 1 0 1/3 2

a seguir, troca cada uma das outras linhas, incluindo a linha objetivo, pela diferença *row – c* rownew*

row 1– 1 rownew :* 2/3 0 1 -1/3 2

row 3– (-5) rownew :* -4/3 0 0 -5/3 10

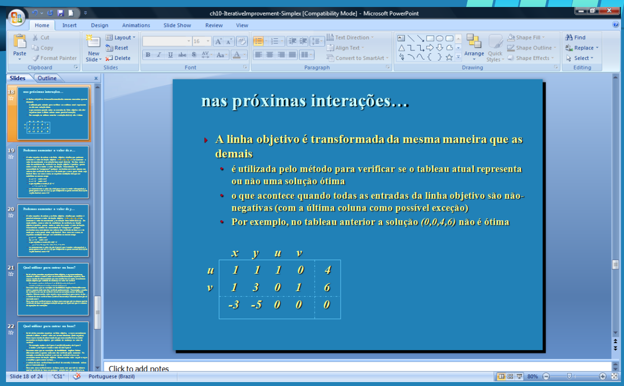
	x	y	u	v	
u	2/3	0	1	-1/3	2
y	1/3	1	0	1 /3	2
	-4/3	0	0	5/3	10



Continuando….

	x	y	u	v	
u	2/3	0	1	-1/3	2
y	1/3	1	0	1 /3	2
	-4/3	0	0	5/3	10

	x	y	u	v	
x	1	0	3/2	-1/2	3
y	0	1	-1/2	1/2	1
	0	0	2	1	14



Resumo

Passo 0: Inicialização
Passo 1: Teste de optimalidade
Passo 2: Encontrar variável que entra na base
Passo 3: Encontrar variável que sai da base
Passo 4: Formar próximo tableau

Observações

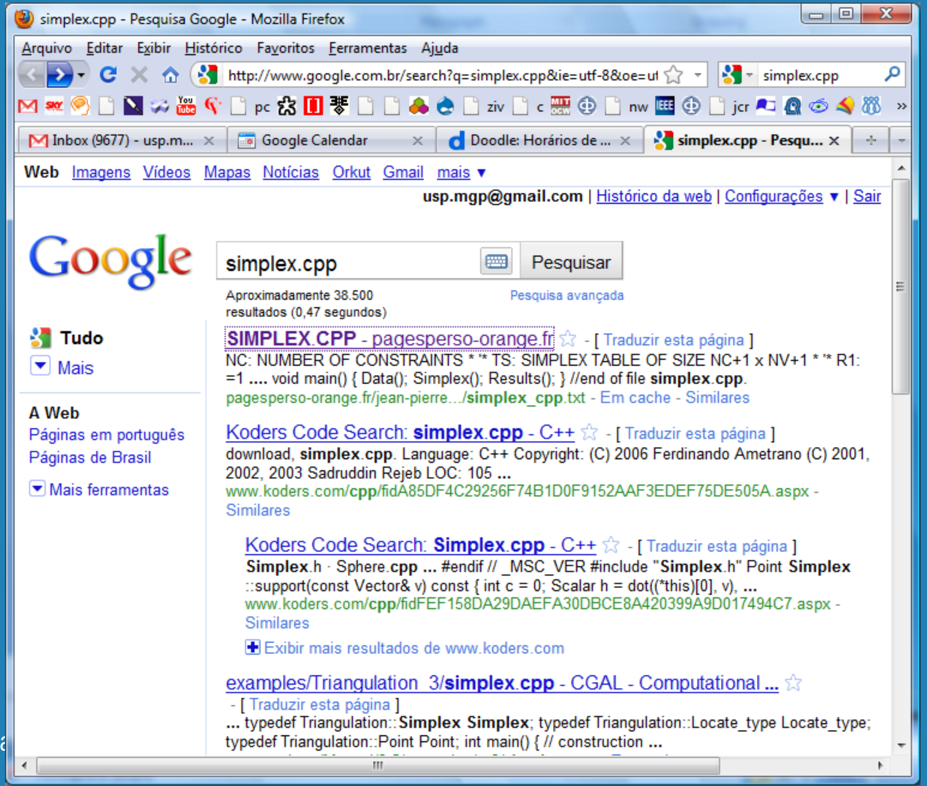
1) Provas formais: livros de programação linear
2) Cycling problem: quando uma ou mais variáveis da base são nulas, o valor da função objetivo pode ciclar em por várias iterações/forever em uma linha. Solução: (i) entre as colunas com valor negativo na função objetivo, escolher a com menor índice; (ii) resolver empate entre valores de razão-θ escolhendo a linha cúja variável tem rótulo de menor índice
3) Condições do Passo 0: OK se todas são restrições são inequalidades $a_{i1}+\ldots+a_{in}x_n \leq b_i$ sendo $b_i \geq 0$ para i=1,…,m: as variáveis artificiais oferecem solução básica factível natural. Entretanto, quando não é esse o caso encontrar uma solução inicial pode ser um obstáculo importante. Além disso, para problemas com região factível vazia, não existe solução inicial factível, e precisamos de mecanismo algoritmo que permita identificar tais problemas. Alternativa é o two-phase simplex method: em resumo, este método cria um conjunto de variáveis artificiais para as restrições de equações de modo que o novo problema tem uma solução básica factível óbvia; e a solução ótima para este problema leva a um tableau inicial para o problema original ou indica que a região factível inicial é vazia.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_simplex

1. Introduzir as variáveis de folga, uma para cada desigualdade;
2. Montar um quadro para os cálculos, colocando os coeficientes de todas as variáveis com os respectivos sinais e, na última linha, incluir os coeficientes da função objetivo transformada;
3. Estabelecer uma solução básica inicial, usualmente atribuindo valor zero às variáveis originais e achando valores positivos para as variáveis de folga;
4. Como próxima variável a entrar na base, escolher a variável não básica que oferece, na última linha, a maior contribuição para o aumento da função objetivo (ou seja, tem o maior valor negativo). Se todas as variáveis que estão fora da base tiverem coeficientes nulos ou positivos nesta linha, a solução atual é ótima. Se alguma dessas variáveis tiver coeficiente nulo, isto significa que ela pode ser introduzida na base sem aumentar o valor da função objetivo. Isso quer dizer que temos uma solução ótima, com o mesmo valor da função objetivo.
5. Para escolher a variável que deve deixar a base, deve-se realizar o seguinte procedimento:
    1. Dividir os elementos da última coluna pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base. Caso não haja elemento nenhum positivo nesta coluna, o processo deve parar, já que a solução seria ilimitada.
    2. O menor quociente indica a equação cuja respectiva variável básica deverá ser anulada, tornando-se variável não básica.
6. Usando operações válidas com as linhas da matriz, transformar o quadro de cálculos de forma a encontrar a nova solução básica. A coluna da nova variável básica deverá se tornar um vetor identidade, onde o elemento 1 aparece na linha correspondente à variável que está sendo anulada.
7. Retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.

problema

UVA 10498 Happiness!
UVA 802 Lead or Gold
http://www.topcoder.com/tc?module=Static&d1=tutorials&d2=findSolution#lp



Fluxo em redes

Material Gustavo Batista

Maximum Matching in Bipartide Graphs

The Stable Marriage Problem