

SCC 5900 - Projetos de Algoritmos
Lista de Exercícios 1 - Complexidade

1. Seja a seguinte definição: “Dadas duas funções, $f(n)$ e $g(n)$, diz-se que $f(n)$ é da ordem de $g(n)$ ou que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, se existirem inteiros positivos a e b tais que $f(n) \leq a * g(n)$ para todo $n \geq b$.” Verifique se as seguintes proposições estão corretas:

- (i) $7 \in \mathcal{O}(n)$
- (ii) $n \in \mathcal{O}(1)$
- (iii) $n + 7 \in \mathcal{O}(n)$
- (iv) $n + 7 \in \mathcal{O}(1)$
- (v) $n^2 + 2 \in \mathcal{O}(n)$
- (vi) $n + 2 \in \mathcal{O}(n^2)$
- (vii) $3n^3 + n \in \mathcal{O}(n^3)$
- (viii) $2n^4 \in \mathcal{O}(n^4)$
- (ix) $n^4 \in \mathcal{O}(2n^4)$
- (x) $3n^4 + 2n^3 \in \mathcal{O}(2n^4)$
- (xi) $2n^4 \in \mathcal{O}(3n^4 + 2n^3)$
- (xii) $\log n \in \mathcal{O}(1)$
- (xiii) $\log n + 1 \in \mathcal{O}(\log n)$
- (xiv) $\log n + 1 \in \mathcal{O}(n)$
- (xv) $\log n + 1 \in \mathcal{O}(n^2)$
- (xvi) $\log n + 1 \in \mathcal{O}(n^3)$
- (xvii) $n \cdot \log n \in \mathcal{O}(1)$
- (xviii) $n \cdot \log n + 1 \in \mathcal{O}(\log n)$
- (xix) $n \cdot \log n + 1 \in \mathcal{O}(n)$
- (xx) $n \cdot \log n + 1 \in \mathcal{O}(n^2)$
- (xxi) $n \cdot \log n + 1 \in \mathcal{O}(n^3)$
- (xxii) $2\log n \in \mathcal{O}(n \cdot \log n)$
- (xxiii) $3n \cdot \log n \in \mathcal{O}(\log n)$
- (xxiv) $2n + n \in \mathcal{O}(2^3)$
- (xxv) $n^2 \in \mathcal{O}(2^n)$
- (xxvi) $100n^4 \in \mathcal{O}(2^n)$
- (xxvii) $100n^4 \in \mathcal{O}(n^n)$

- (xxviii) $2^n \in \mathcal{O}(100n^4)$
 (xxix) $2^n \in \mathcal{O}(n^n)$
 (xxx) $n^n \in \mathcal{O}(2^n)$
 (xxxi) $n^{100} \in \mathcal{O}(n^n)$
 (xxxii) $n(n+1)/2 \in \mathcal{O}(n^3)$
 (xxxiii) $n(n+1)/2 \in \mathcal{O}(n^2)$
 (xxxiv) $n(n+1)/2 \in \Theta(n^3)$
 (xxxv) $n(n+1)/2 \in \Omega(n)$
2. Ordene as seguintes funções por suas taxas de crescimento: n , $\sqrt[3]{n}$, n^1 , 5 , n^2 , $n \log n$, $n \cdot \log \log n$, $n(\log n)^2$, $n \log n^2$, $2/n$, 2^n , $2^{n/2}$, 37 , $n^2 \log n$, n^3 , $(n-2)!$, $5 \log (n+100)^{10}$, 2_{2n} , $0,001n^4 + 3n^3 + 1$, $\log^2 n$, $\sqrt[3]{n}$, 3^n .
3. Para cada uma das seguintes funções, determine a classe $\Theta(g(n))$ a qual a função pertence. (Use $g(n)$ mais simples possível)
- $(n^2 + 1)^{10}$
 - $\sqrt{10n^2 + 7n + 3}$
 - $2n \log (n+2)^2 + (n+2)^2 \log n/2$
 - $2^{n+1} + 3^{n-1}$
 - $\lfloor \log n \rfloor$
4. Compare as duas funções n^2 e $\frac{2^n}{4}$ para vários valores de n . Determine quando a segunda se torna maior que a primeira.
5. Prove que todo polinômio de grau k , $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0$, com $a_k > 0 \forall k$ pertence a $\Theta(n^k)$.
6. Prove que as funções exponenciais a^n têm diferentes ordens de crescimento para diferentes valores de a .
7. Prove as seguintes proposições ou dê um contra-exemplo:
- $t(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow g(n) \in \Omega(t(n))$
 - $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n)) \forall \alpha > 0$
 - $\Theta(g(n)) = \mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
8. Encontre a ordem de crescimento dos seguintes somatórios:
- $\sum_{i=0}^{n-1} (i^2 + 1)^2$
 - $\sum_{i=2}^{n-1} (\log i^2)$
 - $\sum_{i=1}^n (i+1) \cdot 2^{i-1}$
 - $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} (i+j)$

9. Considere o seguinte algoritmo, sendo $n \geq 0$ e inteiro:

```
(i)   $s \leftarrow 0$ 
(ii) para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
(iii)     $s \leftarrow s + i * i$ 
(iv) devolve  $s$ ;
```

- (i) Qual a resposta dada ao executar este algoritmo?
 - (ii) Qual é a operação básica?
 - (iii) Quantas vezes essa operação é executada?
 - (iv) Qual é a classe de eficiência desse algoritmo?
 - (v) Existe um algoritmo melhor que responda ao mesmo problema? Descreva-o ou mostre que tal algoritmo não existe.
10. Considere um computador com *clock* de 2GHz, que realiza cada operação relevante em 1 ciclo. Estime, apenas com esses dados, o tempo necessário para que ele execute um algoritmo que realiza $(n^2 - n)/2$ operações relevantes, considerando que há 4M dados de entrada.
11. Idem, usando um algoritmo que realiza n^3 operações relevantes.
12. Idem, usando um algoritmo que realiza 2^n operações relevantes.
13. Idem, usando um algoritmo que realiza n^n operações relevantes.
14. Idem, para um computador com *clock* de 100MHz, ordenando a mesma seqüência, usando um algoritmo que realiza $4/3 * n \log n$ operações relevantes. Analise os resultados.

Referências

- [1] Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S. *Computer Algorithms*, Computer Science Press, 1998.
- [2] Nakamiti, G., *Listas de Exercícios de Estruturas de Dados II*, Engenharia de Computação. PUC-Campinas, 2007.
- [3] Tenenbaum, A. M., Langsam, Y., Augestein, M. J., *Estruturas de Dados Usando C*. Makron Books, 1995.
- [4] Levitin, A. V., *Introduction to the Design and Analysis of Algorithms*. Pearson Addison-Wesley, 2007.
- [5] Parte deste material foi adaptado das listas de exercícios do Prof. João Luís Garcia Rosa, ICMC/USP.