

5 Identificare parametrică prin MMEP

Contextul de lucru

9 p

- Modelele de regresie liniară avînd **vectorul regresorilor nemăsurabil** necesită **metode de identificare mai complexe**.
- Astfel de modele se regăsesc atît în clasa **ARMAX**, cît și (mai ales) în clasa **RSISO**.

Exemple

ARMAX[na,nb,nc]

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n] = B(q^{-1})u[n] + C(q^{-1})e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2 \delta_0[n-m] \end{cases}$$

 $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\Phi^T[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -y[n-1] - y[n-2] \cdots - y[n-na] & | & u[n-1] u[n-2] \cdots u[n-nb] & | & \dots \\ & & & & \dots e[n-1] e[n-2] \cdots e[n-nc] \end{bmatrix}$$

3 componente,
ca și vectorul parametrilor

$$\theta^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{na} & | & b_1 & b_2 & \cdots & b_{nb} & | & c_1 & c_2 & \cdots & c_{nc} \end{bmatrix}$$

 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

BJ[nb,nc,nd,nf]

(Box Jenkins)

$$\begin{cases} y[n] = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u[n] + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2 \delta_0[n-m] \end{cases}$$

 $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\Phi^T[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -y[n-1] - y[n-2] \cdots - y[n-nd-nf] & | & u[n-1] u[n-2] \cdots u[n-nb-nd] & | & \dots \\ & & & & \dots e[n-1] e[n-2] \cdots e[n-nc-nf] \end{bmatrix}$$

3 componente

⊗ Ultima componentă
nu este măsurabilă.

$$\theta^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{nb} & | & c_1 & c_2 & \cdots & c_{nc} & | & d_1 & d_2 & \cdots & d_{nd} & | & f_1 & f_2 & \cdots & f_{nf} \end{bmatrix}$$

 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

4 componente



L.72





5 Identificare parametrică prin MMEP

Contextul de lucru

2 metode de identificare

MCMMP Extinsă (MCMMP)

mai puțin precisă,
dar mai simplă

- Strategia generală de identificare:

- ① Estimarea zgomotului care intervine în componenta nemăsurabilă cu ajutorul unui model avînd vectorul regresorilor complet măsurabil (dar mai puțin precis).
- ② Determinarea parametrilor originali ai modelului cu ajutorul vectorului regresorilor avînd componenta nemăsurabilă estimată în etapa precedentă.

Metoda Minimizării Erorii de Predicție (MMEP)

mai precisă,
dar mai complexă

- Strategia generală de identificare:

- ① Inițializarea procesului recursiv din etapa următoare folosind MCMMP.
- ② Determinarea recursivă a parametrilor modelului, plecînd de la inițializarea din etapa precedentă și folosind o metodă de optimizare (Metoda Gauss-Newton – MGN).

- Tipurile de modele cu care se operează în cadrul lucrării de laborator:

ARMAX[na,nb,nc]

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n] = B(q^{-1})u[n] + C(q^{-1})e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases}$$

$\forall n, m \in \mathbb{N}$

BJ[nb,nc,nd,nf]

$$\begin{cases} y[n] = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u[n] + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2\delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

5 Identificare parametrică prin MMEP

Contextul de lucru

MCMMPE

- ① Estimarea zgomotului care intervine în componenta nemăsurabilă cu ajutorul unui model aproximant de tip **ARX**.

ARMAX[na,nb,nc]

✂ Împărțire infinită trunchiată.

BJ[nb,nc,nd,nf]

$$\frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} \cong A_\alpha(q^{-1}) = 1 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{n\alpha} q^{-n\alpha}$$

$$\frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} \cong B_\beta(q^{-1}) = 1 + \beta_1 q^{-1} + \dots + \beta_{n\beta} q^{-n\beta}$$

$$\min\{n\alpha, n\beta\} \gg \max\{na, nb, nc\}$$

$$\frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})} \cong A_\alpha(q^{-1}) = 1 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{n\alpha} q^{-n\alpha}$$

$$\frac{B(q^{-1})D(q^{-1})}{C(q^{-1})F(q^{-1})} \cong B_\beta(q^{-1}) = 1 + \beta_1 q^{-1} + \dots + \beta_{n\beta} q^{-n\beta}$$

$$\min\{n\alpha, n\beta\} \gg \max\{nb, nc, nd, nf\}$$

ARX[nα,nβ]

$$\begin{cases} A_\alpha(q^{-1})y[n] = B_\beta(q^{-1})u[n] + v[n] \\ E\{v[n]v[m]\} = \lambda_v^2 \delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}^T[n] &\stackrel{\text{def}}{=} [-y[n-1] \dots -y[n-n\alpha] \mid u[n-1] \dots u[n-n\beta]] \\ \boldsymbol{\theta}_{\alpha\beta}^T &\stackrel{\text{def}}{=} [\alpha_1 \dots \alpha_{n\alpha} \mid \beta_1 \dots \beta_{n\beta}] \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = \{(u[n], y[n])\}_{n \in \overline{1, N}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

date măsurate

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\Psi}[n] \boldsymbol{\Psi}^T[n] \right)^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\Psi}[n] y[n] \right)$$

MCMMPE

$$\varepsilon[n, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha\beta}] \stackrel{\text{def}}{=} y[n] - \boldsymbol{\Psi}^T[n] \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha\beta}$$

zgomotul estimat $\forall n \in \overline{1, N}$



5 Identificare parametrică prin MMEP

Contextul de lucru

MCMMP (continuare)

- ② Determinarea parametrilor originali ai modelului cu ajutorul vectorului regresorilor avînd componenta nemăsurabilă estimată în etapa precedentă.



$$\varepsilon[n, \hat{\theta}_{\alpha\beta}] \stackrel{\text{def}}{=} y[n] - \psi^T[n] \hat{\theta}_{\alpha\beta}$$

zgomotul estimat

$$\forall n \in \overline{1, N}$$

Vectorul estimat al regresorilor

ARMAX[na,nb,nc]

$$\varphi_{\alpha\beta}[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -y[n-1] \cdots -y[n-na] & | & u[n-1] \cdots u[n-nb] & | & \cdots \\ \cdots & & \varepsilon[n-1, \hat{\theta}_{\alpha\beta}] \cdots \varepsilon[n-nc, \hat{\theta}_{\alpha\beta}] \end{bmatrix}$$

BJ[nb,nc,nd,nf]

$$\varphi_{\alpha\beta}[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -y[n-1] \cdots -y[n-nd+nf] & | & u[n-1] \cdots u[n-nb+nd] & | & \cdots \\ \cdots & & \varepsilon[n-1, \hat{\theta}_{\alpha\beta}] \cdots \varepsilon[n-nc+nf, \hat{\theta}_{\alpha\beta}] \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D} = \{(u[n], y[n])\}_{n \in \overline{1, N}}$$

date măsurate

MCMMP

$$\hat{\theta}_N \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_{\alpha\beta}[n] \varphi_{\alpha\beta}^T[n] \right)^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_{\alpha\beta}[n] y[n] \right)$$

$$\hat{\lambda}_N^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(y[n] - \varphi_{\alpha\beta}^T[n] \hat{\theta}_N \right)^2$$

În cazul modelului **BJ**, coeficienții celor 4 polinoame se determină cu ajutorul coeficienților vectorului parametrilor estimați, **prin identificarea rădăcinilor comune.**

5 Identificare parametrică prin MMEP

Contextul de lucru

MMEP

(algoritmul general)

Date de intrare

$\mathcal{D}_N = \{(u[n], y[n])\}_{n \in \overline{1, N}}$ (date intrare-ieșire măsurate)

$\varepsilon = f[n, \theta]$ (expresia **erorii de predicție**, cel puțin derivabile)

$\eta > 0$ (prag de precizie)

$$\varepsilon[n, \theta] = y[n] - \varphi^T[n] \theta$$

Inițializare

$$\hat{\theta}_{N,0} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$$

→ evaluat cu ajutorul MCMMPE

$$\alpha_0 \in \mathbb{R}^*$$

→ ales fie arbitrar, fie cu ajutorul unui algoritm specific

$$k = 0$$

→ indicele iterativ inițial

Bucă iterativă

① Se reactualizează aproximația optimului

Se utilizează iterația specifică din cadrul MGN.

$$\hat{\theta}_{N,k+1} = \hat{\theta}_{N,k} - \alpha_k \left[\sum_{n=1}^N \nabla \varepsilon[n, \hat{\theta}_{N,k}] \left[\nabla \varepsilon[n, \hat{\theta}_{N,k}] \right]^T \right]^{-1} \left[\sum_{n=1}^N \varepsilon[n, \hat{\theta}_{N,k}] \nabla \varepsilon[n, \hat{\theta}_{N,k}] \right]$$

$$\mathbf{R}_{N,k}^{-1}$$

$$\mathbf{r}_{N,k}$$

② Se reactualizează pasul variabil

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{\mathbf{r}_{N,k+1}^T \mathbf{R}_{N,k}^{-1} \mathbf{r}_{N,k}}{\mathbf{r}_{N,k}^T \mathbf{R}_{N,k}^{-1} \mathbf{R}_{N,k+1}^{-1} \mathbf{R}_{N,k}^{-1} \mathbf{r}_{N,k}}$$

NU

$$|\alpha_k| \cdot \|\mathbf{R}_{N,k}^{-1} \mathbf{r}_{N,k}\| < \eta$$

DA

Date de ieșire

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta}_{N,k+1} \\ k+1 \end{array} \right.$$

→ aproximația de precizie η

→ numărul de iterații efectuate

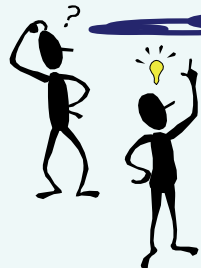


5 Identificare parametrică prin MMEP

Contextul de lucru

MMEP (continuare)

Cum se pot determina eroarea de predicție și gradientul acesteia?



Ar putea fi utilizată ecuația modelului de identificare, cu parametrii curent estimați.

Va fi analizat cazul modelului **ARMAX**. Cazul modelului **BJ** se analizează similar.

$$\hat{A}_{N,k}(q^{-1})y[n] = \hat{B}_{N,k}(q^{-1})u[n] + \hat{C}_{N,k}(q^{-1})\varepsilon[n, \hat{\theta}_{N,k}] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

modelul de identificare
estimat la pasul curent

✶ Ecuație recurentă pentru
determinarea erorii de predicție.

$$\begin{aligned} \varepsilon[n, \hat{\theta}_{N,k}] = & y[n] + \hat{a}_{1,k}^N y[n-1] + \dots + \hat{a}_{na,k}^N y[n-na] - \\ & - \hat{b}_{1,k}^N u[n-1] - \dots - \hat{b}_{nb,k}^N u[n-nb] - \\ & - \hat{c}_{1,k}^N \varepsilon[n-1, \hat{\theta}_{N,k}] - \dots - \hat{c}_{nc,k}^N \varepsilon[n-nc, \hat{\theta}_{N,k}] \end{aligned}$$

$$\theta^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \theta_a^T & \theta_b^T & \theta_c^T \end{bmatrix}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\nabla_{\theta_a} \varepsilon[n, \hat{\theta}_N[k]] = -\varphi_y[n] - \hat{c}_{1,k} \nabla_{\theta_a} \varepsilon[n-1, \hat{\theta}_N[k]] - \dots - \hat{c}_{nc,k} \nabla_{\theta_a} \varepsilon[n-nc, \hat{\theta}_N[k]]$$

$$\nabla_{\theta_b} \varepsilon[n, \hat{\theta}_N[k]] = -\varphi_u[n] - \hat{c}_{1,k} \nabla_{\theta_b} \varepsilon[n-1, \hat{\theta}_N[k]] - \dots - \hat{c}_{nc,k} \nabla_{\theta_b} \varepsilon[n-nc, \hat{\theta}_N[k]]$$

$$\nabla_{\theta_c} \varepsilon[n, \hat{\theta}_N[k]] = -\varphi_\varepsilon[n, \hat{\theta}_N[k]]$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$



Inițializare
cauzală

$$\begin{aligned} \nabla \varepsilon[n, \hat{\theta}_{N,k}] = \varepsilon[n, \hat{\theta}_{N,k}] = 0 \\ u[n] = y[n] = 0 \quad \forall n \leq 0 \end{aligned}$$



L.77





5 Identificare parametrică prin MMEP

Contextul de lucru

Procese generatoare de date

ARMAX[2,2,2]

$$(1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2})y[n] = (q^{-1} + 0.5q^{-2})u[n] + (1 - q^{-1} + 0.2q^{-2})e[n]$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

BJ[2,2,2,2]

$$y[n] = \frac{q^{-1} + 0.5q^{-2}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}}u[n] + \frac{1 - q^{-1} + 0.2q^{-2}}{1 + 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}}e[n]$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

e → SPAB Gaussian sau bipolar de medie nulă și dispersie unitară

Date generate

$\mathcal{D}_{id} = \{u[n]\}_{n=1, \overline{N}} \cup \{y[n]\}_{n=1, \overline{N}} \rightarrow$ date măsurate pentru **identificare**

$N = 250$

$\mathcal{D}_{va} = \{u[n]\}_{n=1, \overline{N}} \cup \{y[n]\}_{n=1, \overline{N}} \rightarrow$ date măsurate pentru **validare**

$N = 250$

Indici structurali maximali

$$Na = Nb = Nc = 5$$

👉 Modelul BJ se poate identifica folosind un model ARMAX.

Teste structurale principale

Aceleași din cadrul **Lucrării de laborator #4**, dar adaptate la indicii structurali ai modelelor **ARMAX** și **BJ**.



Obiectiv

- Compararea performanțelor MCMMP & MMEP în cazul modelelor **ARMAX** și **BJ**.





5 Identificare parametrică prin MMEP

Probleme de simulare

Contextul de lucru

Rutine preliminare

[D,V,P] = gen_data(DP,N,sigma,lambda,bin) ; (generează date)

DP este obiectul de tip **IDMODEL** corespunzător modelului de proces furnizor de date; obiectul poate fi construit de exemplu cu ajutorul funcției **idpoly**; implicit, acest model este identic cu cel de tip **ARMAX**;

N este dimensiunea orizontului de măsură (implicit: **N=250**);

sigma este deviația standard a intrării SPAB (implicit: **sigma=1**);

lambda este deviația standard a zgomotului alb Gaussian (implicit: **lambda=1**);

bin este un parametru care arată tipul de intrări dorit: **bin=0** (intrare SPAB Gaussiană); **bin~=0** (implicit, intrare SPAB Gaussiană bipolară);

D este obiectul de tip **IDDATA** corespunzător datelor generate (intrarea se regăsește în **D.u**, iar ieșirea în **D.y**);

V este obiectul de tip **IDDATA** corespunzător zgomotelor generate (zgomotul alb se regăsește în **V.u**, iar zgomotul colorat (MA-filtrat) – în **V.y**).

P este obiectul de tip **IDMODEL** corespunzător modelului de proces furnizor de date.



5 Identificare parametrică prin MMEP

Probleme de simulare

Contextul de lucru

Rutine preliminare

Rutină de bibliotecă MATLAB-IS

ARMAX

- Apel: `Mid = armax(D, si) ;`
- Estimează parametrii unui model ARMAX folosind MMEP. Modelul identificat rezultat, `Mid`, este returnat ca obiect `IDMODEL`. Estimarea se efectuează pe baza datelor `D` (obiect `IDDATA`) și a informației de structură `si = [na nb nc nk]`, unde `na`, `nb` și `nc` sunt indicii structurali ai modelului, iar `nk` este întârzierea instrinsecă. Cu ajutorul acestei rutine se pot identifica atât modele AR cât și modele ARMA unidimensionale (însă nu și multi-dimensionale). Apelul rutinei este ușor diferit în acest caz:

- pentru modele AR: `Mid = armax(D.y, na) ;`
- pentru modele ARMA: `Mid = armax(D.y, [na nc]) ;`

Observați că datele de identificare sunt specificate acum doar sub forma unei *serii de timp* (`D.y`). Pentru identificarea modelelor AR, rutina apelează intern o funcție specializată numită `ar`, care este disponibilă și utilizatorului (cu apel similar lui `armax`).

O altă modalitate de a identifica modele AR și ARMA este de a folosi obiectul `D` împreună cu o informație de structură de forma: `si = [na 0 0 0]` (AR) sau `si = [na 0 nc 0]` (ARMA). Rutina nu funcționează însă decât dacă `na > 1` (nu și pentru `na = 1`). De aceea, se recomandă utilizarea rutinei cu argument serie de timp, pentru aceste modele.



5 Identificare parametrică prin MMEP

☞ Probleme de simulare

Contextul de lucru

Rutine preliminare

Rutină de bibliotecă MATLAB-IS

BJ

- Apel: `Mid = bj(D, si) ;`
- Estimează parametrii unui model BJ folosind MMEP. Modelul identificat rezultat, `Mid`, este returnat ca obiect `IDMODEL`. Estimarea se efectuează pe baza datelor `D` (obiect `IDDATA`) și a informației de structură `si = [na nb nc nd nf nk]`, unde `na`, `nb`, `nc`, `nd` și `nf` sunt indicii structurali ai modelului, iar `nk` este întârzierea instrinsecă. În principiu, algoritmul implementat în cadrul acestei rutine este similar cu cel al rutinei `armax`, cu adaptările de rigoare impuse de utilizarea modelului BJ.

5 Identificare parametrică prin MMEP

➤ Probleme de simulare

Problema 6.1 (MMEP pentru modelul ARMAX)

A fost proiectat mini-simulatorul **ISLAB_6A** care evaluează estimația (parsimonioasă a) modelului ARMAX asociat procesului, folosind MMEP. Pentru aceasta, s-au parcurs următorii pași:

- Se generează 2 seturi de date: unul pentru identificare și altul pentru validare, folosind rutina **gen_data**.
- Pentru fiecare model identificat cu ajutorul MMEP (funcția **armax**), model obținut variind indicii na , nb și nc , se afișează 3 ferestre grafice: una pentru analiza modelului folosind datele de identificare și de validare și alte două pentru reprezentările poli-zero-uri (filtru sistem și filtru zgomot) cu discuri de încredere corespunzătoare unei raze de 3 ori mai mari decât deviațiile standard aferente. După fiecare fereastră s-a inserat o pauză de așteptare pentru a permite utilizatorului să analizeze informațiile afișate. Fiecare sub-fereastră a primei ferestre include 3 grafice aranjate pe verticală:

- ieșirile măsurate și simulate cu ajutorul modelului, grafic pe care se indică și valoarea funcției de potrivire, \mathcal{E}_N ;
- eroarea de predicție (reziduurile modelului), grafic pe care se indică și dispersia estimată a zgomotului, λ_N^2 ;
- secvența de auto-covarianță a erorii de predicție, grafic pe care se indică și indexul de validare.

Modelele obținute sunt memorate în vederea selectării unuia dintre ele, în urma aplicării testelor de determinare a indicilor structurali optimi și de validare.





5 Identificare parametrică prin MMEP

☞ Probleme de simulare

Problema 6.1 (final)

- c. Se afișează indicii structurali optimi selectați folosind:
- Testul F aplicat dispersiei estimate a zgomotului (adică erorii de predicție);
 - Testul F aplicat funcției de potrivire pentru datele de identificare;
 - Testul F aplicat funcției de potrivire pentru datele de validare;
 - criteriului GAIC în versiunea Rissanen.
- d. Se solicită utilizatorului să aleagă indicii structurali pe care îi consideră optimi.
- e. Pentru modelul ales, se afișează cele 3 ferestre grafice de la b. Modelul este returnat de către mini-simulator, în vederea unei utilizări ulterioare. Se recomandă returnarea și a seturilor de date de identificare și validare.

Pentru testarea mini-simulatorului **ISLAB_6A**, se vor iniția câteva rulări.

Sunt indicii structurali adevărați indicați de către majoritatea criteriilor utilizate sau ei diferă de la o rulare la alta? Justificați răspunsul.

Program
existent

ISLAB_6A

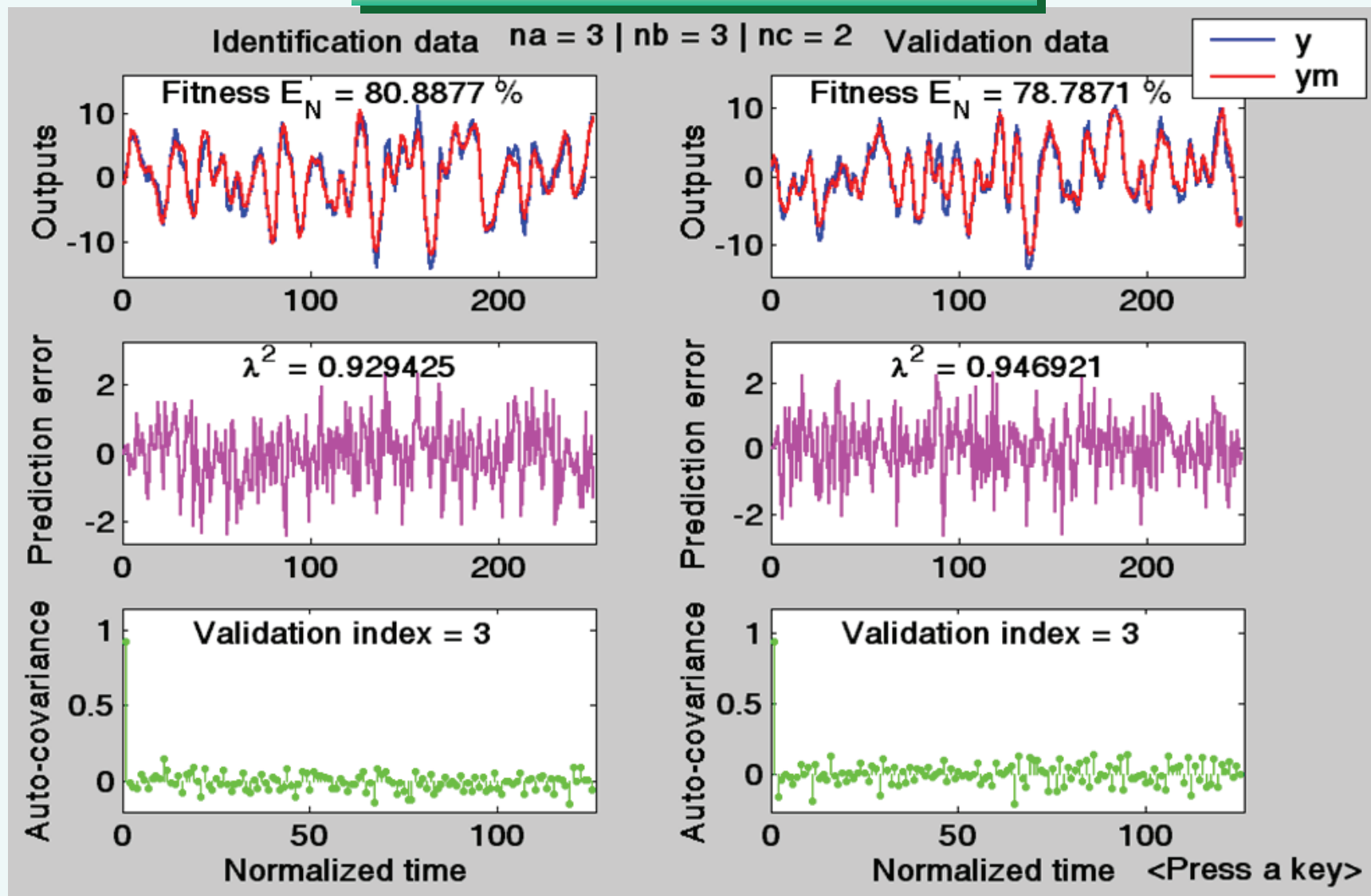


L.83



5 Identificare parametrică prin MMEP

Ce afișează mini-simulatorul **ISLAB_6A**



Performanțele modelului ARMAX identificat cu MMEP

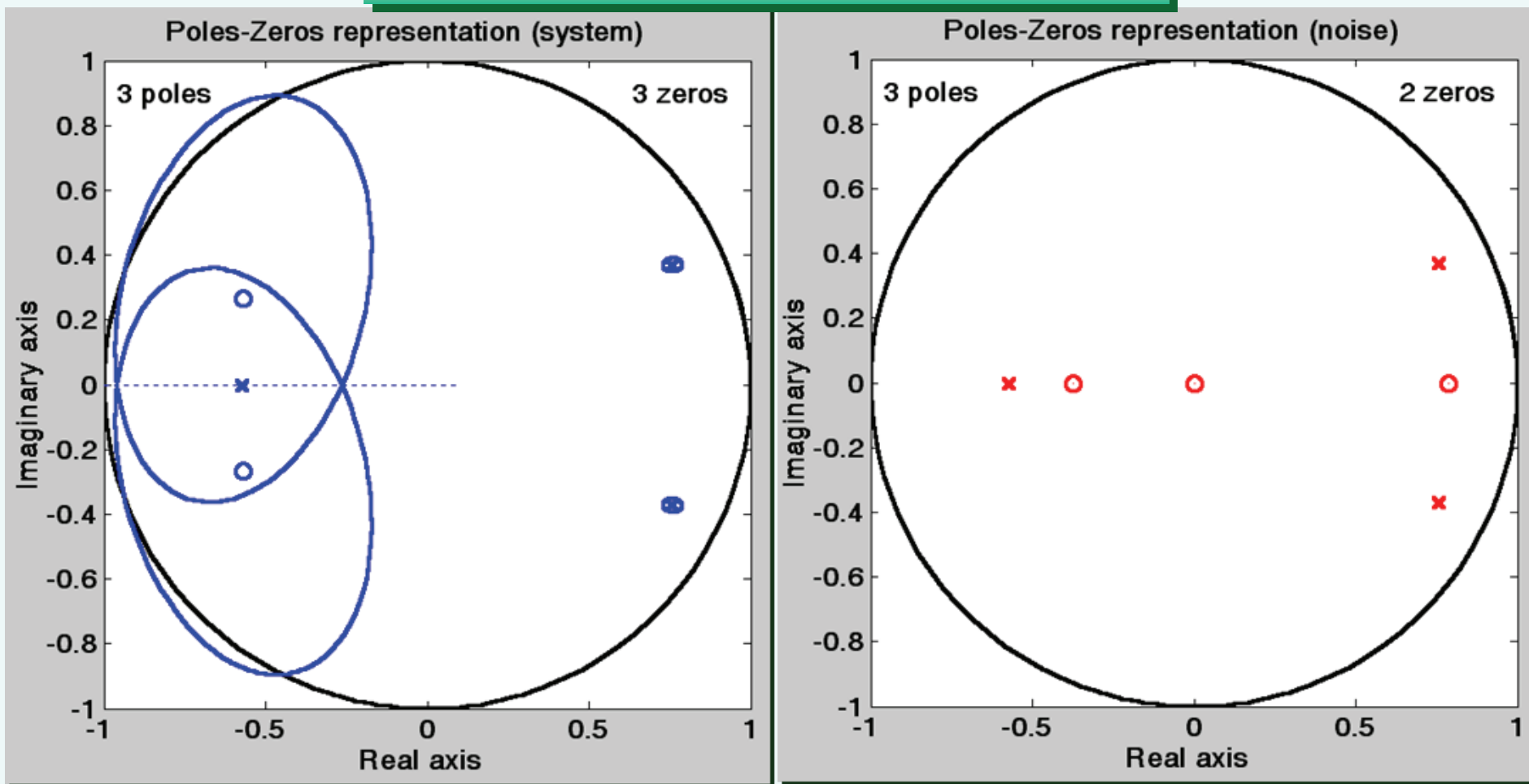


L.84



5 Identificare parametrică prin MMEP

Ce afișează mini-simulatorul **ISLAB_6A** (final)



Reprezentarea poli-zerouri a modelului ARMAX identificat cu MMEP



5 Identificare parametrică prin MMEP

☞ Probleme de simulare

Problema 6.2 (MMEP pentru modelul BJ)

Problema anterioară, 6.1, se va relua pentru modelul BJ. Mini-simulatorul rezultat va fi denumit **ISLAB_6B**. Testați mini-simulatorul și comentați rezultatele de estimare obținute.

Program ce trebuie proiectat

ISLAB_6B

Problema 6.3 (MCMMPPE pentru modelele ARMAX și BJ)

Biblioteca MATLAB dedicată domeniului IS nu dispune de funcții explicite care implementează MCMMPPE. Să se proiecteze două astfel de funcții: **armax_e** pentru identificarea modelelor ARMAX și **bj_e** pentru identificarea modelelor BJ. Apelul tipic al lor ar trebui să fie similar altor funcții cu obiectiv asemănător (estimarea parametrilor unui model cu structură dată; vezi de exemplu funcțiile **armax** și **bj**):

```
Mid = armax_e(D,si) ;
```

```
Mid = bj_e(D,si) ;
```

Informația de structură are forma: **si = [na nb nc nk]** pentru modelul ARMAX și **si = [na nb nc nd nf nk]** pentru modelul BJ. Încercați să folosiți funcția **armax_e** în cadrul funcției **bj_e**. Proiectați apoi mini-simulatorul **ISLAB_6C** similar celor din problemele precedente. Comparați performanțele acestui mini-simulator cu ale mini-simulateorilor precedente. Este MCMMPPE de preferat MMEP? Justificați răspunsul într-o manieră riguroasă.

Program ce
trebuie proiectat

ISLAB_6C

Rutine ce trebuie
proiectate

ARMAX_E

BJ_E

