Metoda Newton

Proiect realizat de Manea Andreea
Clasa a XII-a “T”
IPLT “Mircea Eliade”
profesor: Guţu Maria

Obiectivele

-Descrierea

-Exemplu

-Avantajele

În analiză numerică, **metoda Newton** este o metodă de determinare a rădăcinii unei funcții reale.

Descrierea metodei

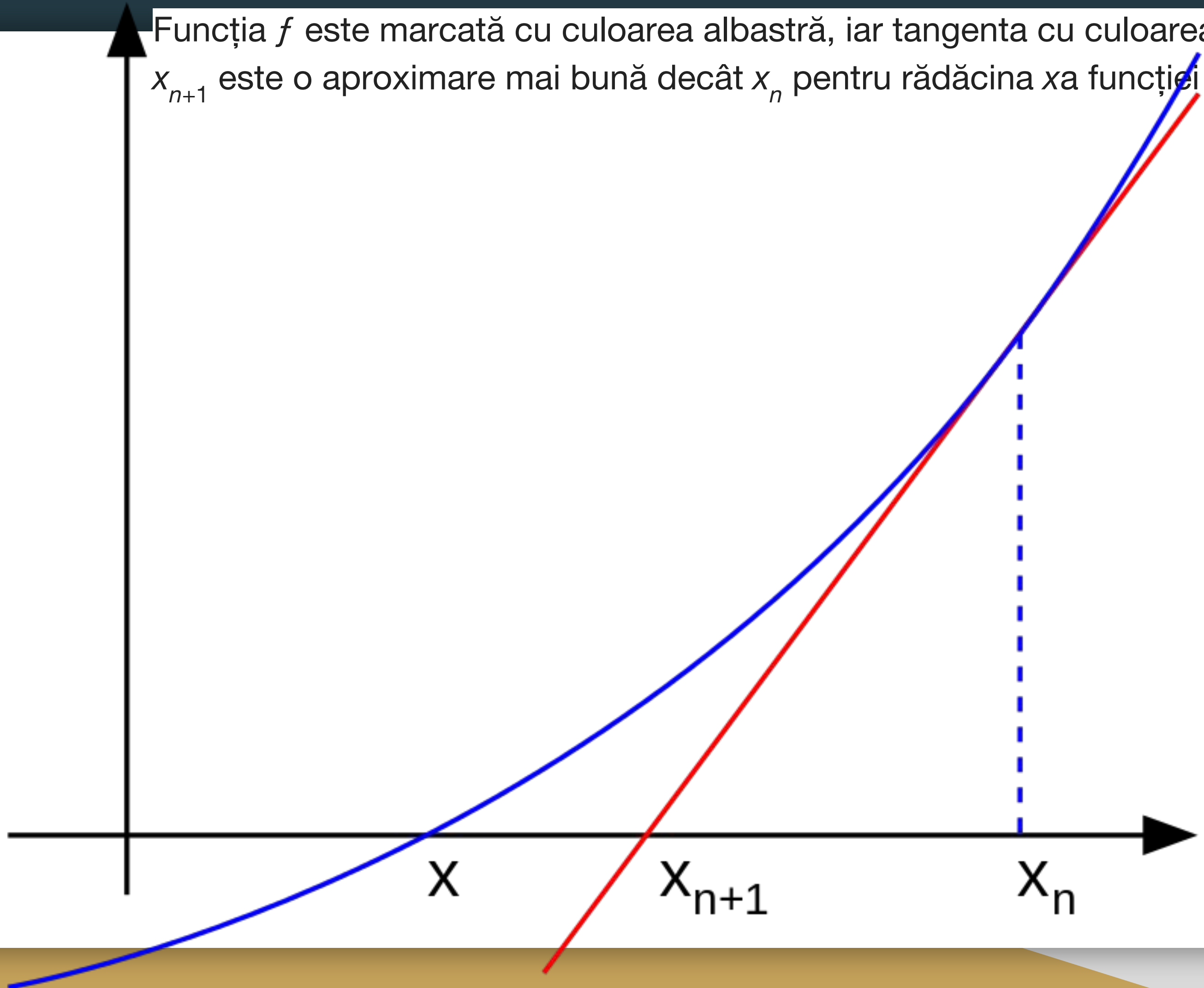
Fie dată funcția f (x), care posedă următoarele proprietăți:

1. f (x), continuă, pe segmentul [a, b] şi $f(a)f(b) < 0$.

2. Pe segmentul [a, b] există $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$, continui, şi semnul lor pe [a, b] este constant.

Urmează să se rezolve ecuația $f(x) = 0$ pentru $x \in [a, b]$Se va încerca rezolvarea problemei prin trasarea consecutivă a unor tangente la graficul funcției, prima dintre ele fiind construită prin extremitatea $E_0 (x_0, y_0)$ a segmentului [a, b], extremitate pentru care se respectă condiția: $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$.

Funcția f este marcată cu culoarea albastră, iar tangenta cu culoarea roşie. Se vede că x_{n+1} este o aproximare mai bună decât x_n pentru rădăcina xa funcției f.



Pasul 1. Verificam daca la capetele intervalului functia ia valori de semn opus.

Pasul 2. Alegem o aproximatie initiala pe intervalul [a, b].

Notam prin x_0, *capatul intervalului, unde* $f^2(x) > 0$.

Pasul 3. Calculam x_1 punctul de intersectie al tangentei duse la graficul functiei in punctul ($\boldsymbol{x_0}$, f($\boldsymbol{x_0}$)) cu axa Ox.

Pentru a determina acest punct, vom scrie ecuatia dreptei tangenta la grafic in punctul de coordonate *(x_0, $f(x_0)$)*, si anume: $\boldsymbol{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$.

Daca in ecuatia de mai sus punem *y=0*, obtinem un numar $\mathbf{x_1}$ reprezentind abscisa punctului de intersectie al dreptei cu axa Ox:

$\boldsymbol{f(x_0)=-f'(x_0)(x_1-x_0)}$ de unde rezulta: $\boldsymbol{x_1= -(f(x_0)/f'(x_0))+x_0}$

Pasul 4. Daca $f(x_1)=0$, atunci este radacina cautata, altfel se duce tangenta in punctul **$(x_1, f(x_1))$.**

Pasul 5. Daca **$b/2/a| x_0-x_1|^2 < e$,** atunci oprim executia algoritmului, iar in calitate de solutie se va lua valoarea x_1. In caz contrar iteram procesul pentru urmatoarea aproximare.

In cazul metodei Newton nu este necesar ca sa fie dat intervalul $[a, b]$, care sa contina radacina ecuatiei $f(x)=0$, dar este suficient sa se determine prima aproximare a radacinii $x = x_0$.

Utilizind metoda Newton este important sa tinem cont de urmatoarea regula: **In calitate de prima aproximare x_0 se alege acel capat al intervalului [a, b] cu solutia separata (daca acesta se cunoaste), sau alt careva punct din apropiere, pentru care f(x) are acelasi semn ca si derivata de ordinul doi** ***$f''(x)$.***

Exemplu

Fie dată funcția f(x) = X^3-$2x^2$+ x – 3. Să se scrie un program care va calcula soluția ecuației f(x) = 0 pe segmentul [2; 15] pentru 10 aproximări succesive, utilizînd metoda Newton.
Deoarece numărul de aproximări succesive este fixat, iar extremitățile segmentului cunoscute, atribuirile necesare se vor realiza direct în corpul programului.

```
program cn09;
var a, b, x, c : real;
i, n: integer;
function f(z:real):real;
 begin f:=z*z*z-2*z*z+z-3; end;
function fd1(z:real):real;
 begin fd1:=3*z*z-4*z+1; end;
```

```
begin a:=2.1; b:=15; n:=10; i:=0;
 c:=a-(f(a))/(f(b)-f(a))*(b-a);
 if f(c)*f(a)<0 then x:=a else x:=b;
 while i<n do
 begin i:=i+1;
 x:=x-f(x)/fd1(x);
 writeln('i=',i:2,' x=',x:15:12, ' f=',f(x):15:12);
 end;
end.
```

Rezultate: i= 1 x= 10.23214285700 f=869.11072454000
i= 2 x= 7.06207637180 f=256.52261987000
...
i= 9 x= 2.17455942470 f= 0.00000009329
i=10 x= 2.17455941030 f= 0.00000000001

_Algoritmul de calcul pentru un număr dat de aproximări succesive:

Pentru a realiza acest algoritm, este suficient să fie cunoscute descrierile analitice pentru f (x) şi f ′(x). Dacă descrierea f ′(x) nu este indicată în enunț, urmează să fie calculată. Aproximarea inițială se deduce utilizînd procedeul similar determinării extremității fixe pentru metoda coardelor.

Pasul 1. Determinarea aproximării inițiale x_0 : c⇐ a- f(a)*(b-a)/ (f(b)-f(a)).

dacă f(c) × f(a) < 0, atunci x_0 ⇐ a, altfel x_0 ⇐ b; n ⇐ 0.

Pasul 2. Se calculează x_{n+1} conform formulei $$x_{n+1} = x_n + h_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Pasul 3. Dacă n+1 = n, atunci soluția calculată x ⇐ x_{n+1}. SFÎRŞIT. În caz contrar, n⇐ n+1, apoi se revine la pasul 2.

Avantajul metodei lui Newton este faptul e o metoda rapid convergenta.

Dezavantajul metodei lui Newton este faptul ca e o metoda locala, adica punctul initial de plecare x_0 trebuie sa fie suficient de aproape de radacina cautata x^*.