Seminarul 2

1. Un cub de sticlă este vopsit pe fiecare faţă, apoi este împărţit în 1000 de cubuleţe de aceleaşi dimensiuni. Un cubuleţ este ales aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) A: ”cubuleţul are exact 3 feţe vopsite”. R: $\frac{8}{1000}$.

b) B: ”cubuleţul are exact 2 feţe vopsite”. R: $\frac{12\cdot 8}{1000}$.

c) C: ”cubuleţul are exact o faţă vopsită”. R: $\frac{6\cdot 8^2}{1000}$.

d) D: ”cubuleţul nu are nicio faţă vopsită”. R: $\frac{8^3}{1000}$.

2. X participă la un spectacol alături de un grup de prieteni format din m fete şi n băieţi ($m, n \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$). X şi prietenii săi au primit bilete pe un singur rând, pe care îl vor ocupa în întregime. Biletele lor au fost distribuite aleator. Care este probabilitatea ca X să aibe două vecine?

R: $\frac{(m+n-1)A_m^2(m+n-2)!}{(m+n+1)!}$, unde $m+n-1$ este numărul de alegeri ale locului pentru X (nu poate ocupa locurile din capetele rândului), A_m^2 este numărul de alegeri ale vecinelor lui X (se ţine cont de ordinea alegerii pentru partea stângă, resp. partea dreaptă, lui X), $(m+n-2)!$ este numărul de alegeri ale locurilor pentru celelalte persoane.

3. Presupunem că data naşterii unei persoane alese aleator este în oricare dintre lunile anului cu aceleaşi şanse (i.e. probabilitatea ca o persoană aleasă aleator să aibe data naşterii într-o anumită lună este $\frac{1}{12}$). Care este probabilitatea ca

a) într-un grup de 5 persoane să fie cel puţin 2 persoane care îşi serbează zilele de naştere în aceeaşi lună? R: $1 - \frac{A_{12}^5}{12^5} \approx 62\%$.

b) într-un grup de 5 persoane zilele de naştere să fie în exact două luni ale anului? R: $\frac{C_{12}^2(2^5-2)}{12^5}$, unde C_{12}^2 este numărul de alegeri ale lunilor pentru situaţia când toate persoanele sunt născute în exact 2 luni, iar 2^5-2 este numărul de funcţii surjective de la mulţimea persoanelor la mulţimea formată din 2 luni.

4. Se aruncă două zaruri. Calculaţi probabilitatea ca cel puţin un zar să indice numărul 6, ştiind că:

a) zarurile indică numere diferite. R: $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, 30 este numărul de perechi de numere distincte, 10 este numărul de perechi de numere distincte care au un 6.

b) suma numerelor indicate de zaruri este un număr par. R: $\frac{5}{18}$, unde 18 este numărul de perechi de numere care au suma pară, 5 este numărul de numărul de perechi care au cel puţin un 6 şi suma pară.

5. Un patron deţine 3 magazine, m_1, m_2, m_3, care au 50, 75, respectiv 100, de angajaţi, din care 50%, 60%, respectiv 70%, sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pentru un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul norocos să lucreze la magazinul m_3, ştiind că acesta este bărbat?

R.: $P(\text{“angajatul ales lucrează la } m_3\text{”} | \text{“angajatul ales este bărbat”}) = \frac{\frac{30}{225}}{\frac{25+30+30}{225}} = \frac{30}{85} = \frac{6}{17}$.

6. Într-o cutie sunt 10 mingi de tenis, din care 3 mingi sunt noi (nefolosite). Pentru un antrenament, un jucător alege aleator 3 mingi, pe care le repune la sfârşit înapoi în cutie. Mai târziu, un alt jucător alege aleator 3 mingi din cutie. Care este probabilitatea ca aceste 3 mingi să fie noi (nefolosite)?

R: Fie A_1:“primul jucător nu alege nicio minge nouă” şi A_2:“al doilea jucător alege 3 mingi noi”. Probabilitatea cerută este: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} \cdot \frac{C_3^3}{C_{10}^3}$.

7. O persoană are în buzunar 2 zaruri roşii şi 3 zaruri albastre, dintre care alege aleator unul. Dacă a ales zarul roşu, atunci aruncă zarul ales de 3 ori, iar dacă a ales zarul albastru, atunci aruncă zarul ales de 2 ori. Calculaţi probabilitatea ca suma punctelor obţinute în urma aruncărilor să fie 10.

Rezolvare: Fie A:"zarul ales este albastru", R:"zarul ales este roşu" şi S:"suma punctelor obţinute în urma aruncărilor este 10". Formula probabilităţii totale implică $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|R)P(R) = \frac{3}{6^2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{27}{6^3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

8. Dacă este o zi ploioasă, o persoană întârzie la serviciu cu probabilitatea 0,2, iar dacă este o zi senină cu probabilitatea 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitatea 0,8. Care este probabilitatea ca:

a) persoana să ajungă ziua următoare la timp la serviciu?

b) ziua următoare să fie ploioasă, ştiind că persoana ajunge la timp la serviciu?

R: Fie I: "persoana întârzie la serviciu într-o zi" şi S:"ziua e senină". a) Formula probabilităţii totale implică $P(\bar{I}) = P(\bar{I}|S)P(S) + P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S}) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0{,}8 = 0{,}82$; b) Formula lui Bayes implică $P(\bar{S}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S})}{P(\bar{I})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}8}{0{,}82} = \frac{32}{41}$.

9. X are 2 monede în buzunar: una normală, care are pe o faţă *cap* şi pe cealaltă *pajură*, şi una măsluită, care are pe ambele feţe *pajură*. X scoate aleator o monedă din buzunar, o aruncă şi constată că aceasta indică *pajură*. Care este probabilitatea ca:

a) moneda să fie măsluită?

b) moneda să fie măsluită, ştiind că X a mai aruncat o dată moneda şi a obţinut din nou *pajură*?

R: Fie C_i:"se obţine *cap* la aruncarea i", $i = 1, 2$ şi M:"se alege moneda măsluită."

Fromula lui Bayes implică: a) $P(M|\bar{C}_1) = \frac{P(\bar{C}_1|M)P(M)}{P(\bar{C}_1|M)P(M)+P(\bar{C}_1|\bar{M})P(\bar{M})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$; b) $P(M|\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = \frac{P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2|M)P(M)}{P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2|M)P(M)+P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2|\bar{M})P(\bar{M})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} = \frac{4}{5}$.

10. În câte moduri se pot aşeza n obiecte distincte în 3 cutii, astfel încât n_1 să fie în prima cutie, n_2 în a doua cutie şi $n_3 = n - n_1 - n_2$ în a treia cutie.

R: $C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n-n_1-n_2} = \frac{n!}{n_1! n_2! (n-n_1-n_2)!}$.

11. Un grup de n persoane decide să facă un schimb de cadouri ($n \in \mathbb{N}^*$). Fiecare aduce un cadou. Cadourile sunt distribuite aleator, câte unul fiecărei persoane. Care este probabilitatea ca nicio persoană să nu îşi primească înapoi cadoul adus?

Indiciu: Pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$ fie A_i evenimentul "a i-a persoană îşi primeşte înapoi cadoul adus"; se calculează $1 - P\big(A_1 \cup ... \cup A_n\big)$, folosind principiul includerii şi excluderii.

R: Fie p_n probabilitatea cerută. Avem:

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P\Big(\bigcap_{i=1}^n A_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{(n-2)!}{n!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{0!}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot C_n^k \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}. \end{aligned}$$

Deci $p_n = 1 - P\big(A_1 \cup ... \cup A_n\big) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Observaţie: Folosind dezvoltarea în serie Maclaurin a funcţiei exp, deducem că $e^{-1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \implies \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e} \approx 0.3679$.