Teoria erorilor

precizia rez. unui calcul:
- erori la datele de intrare
- erori de rotunjire (calcule cu nr. repr. într-un nr. finit de cifre)
- erori de aproximare. (multe metode care se apropie de sol. exactă)

Exemplu: (P): calculați e $\quad\leadsto\quad$ (P)' – simplă

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \Big| +$$

calculăm e astfel

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}$$

TRUNCHIERE

Exemplu: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} \dots$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \Big| \quad \lim_{x \to h} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(h)$$

$f' \approx$ diferență

DISCRETIZARE

$$\boxed{\text{Prob. numerică} = \text{Prob. matematică} + \text{niște specificații de precizie asupra rezultatului.}}$$

Exemplu: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = ?$ unde $f(x) = y$ (dat, dat)

fie $x^* \approx x$ (poate fi repr. în calc.) $\quad f^* \approx f$ (poate fi scrisă în calc.)

În PC avem:

PN:

PM: x, f, se cere $f(x)$

SP: $|f(x) - f^*(x^*)| < \varepsilon$

ε dat

de pildă $x = 5$

$x^* = 5.00000002$

$\varepsilon = \frac{1}{100}$ (dat) $\quad \varepsilon = \frac{1}{10^{16}}$

$|x - x^*| < \varepsilon$ ok $\quad$ nu e ok $|x - x^*| < \varepsilon$

$1.2 + 1.3 = 2.4999\dots$

PN:
- evaluarea unei funcționale: derivată numerică, integrala numerică
- rez. ec. algebrice: sisteme de ec. liniare
- rez. ec. analitice: rez. numerică de ED, EDP
- pb. de optimizare

PM: $Fx = y$ $\quad\Big|\quad$ Alg. (input) = output

Alg. = ? – pb. de identificare

input = ? – pb. inversă – ex. sist. de ec.

output = ? – pb. directă – află cât e $\int_0^1 f$

Măsuri ale erorii $\quad x, x^*$ aprox.

$\Delta x = x - x^*$ eroare

$\|\Delta x\| = \|x - x^*\|$ eroare absolută

$\delta x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ eroare relativă

$f(x) = y$

$f(x + \underbrace{\Delta x}_{\text{ceva mic}}) = y^*$ propagată.

Aritmetică în virgulă flotantă (Reprezentarea)

- repr. are urm. param.: baza β (mereu pară), precizia p, exponent minim e^{min}, maxim e^{max} $\Big\}$ $\beta, p, e^{min}, e^{max} \in \mathbb{N}$

1.0001…
1.0002…

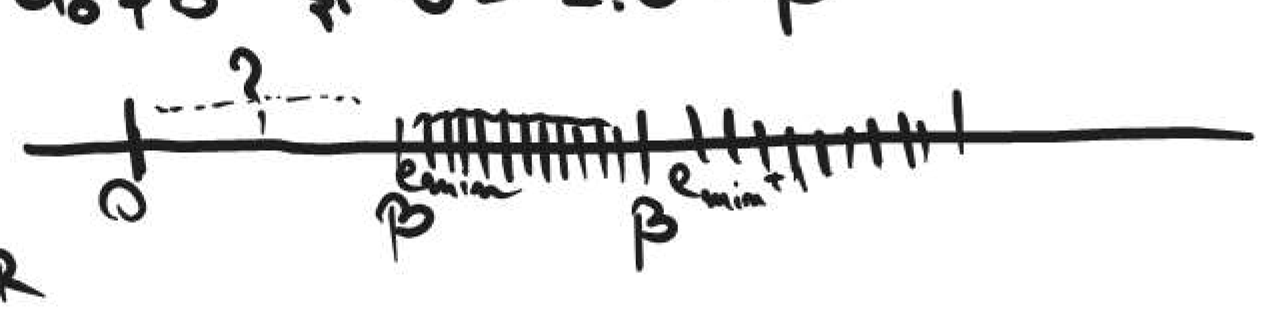
x – repr. lui în virgulă flotantă este:

$$x = \pm \underbrace{d_0.d_1d_2\dots d_{p-1}}_{\text{semnificant / mantisă}} \cdot \beta^{e} \quad \leftarrow \text{exponent}, \quad 0 \le d_i < \beta$$

valoarea efectivă a lui x este $\pm\left(d_0 + d_1\beta^{-1} + d_2\beta^{-2} + \dots + d_{p-1}\beta^{-(p-1)}\right)\beta^{e}$

$d_0 \neq 0$ și $0 = 1.0 \times \beta^{e_{min}-1}$

0.00000000123



se introduc și nr. de forma $0.d_1\dots d_{p-1}$ cu exp. $\beta^{e_{min}-1}$

$x \in \mathbb{R}$

$|x| > \beta \cdot \beta^{e_{max}}$ depășire sup. $\qquad |x| < 1.0 \cdot \beta^{e_{min}}$ depășire inferioară

IEEE 754 unde $\beta = 2$.

Condiționarea unei probleme

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $y = f(x)$

$x \to \underbrace{x+\Delta x}_{\text{perturbație a lui } x}$? perturbația lui y față de perturbația lui x

gradul de sensibilitate $\leftarrow$ nr. de condiționare al aplicației f în punctul x

cond f - o prop. a funcției / aceasta nu depinde de implem.
dar cond f este f. relevantă pt. $\forall$ sol. algoritmică

$$y^* = f(x^*)$$

$x^* = x + \delta$, iar $\delta = \|x - x^*\|$ poate fi estim. în termeni de precizie ai mașinii

Obs. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = y$

$x \neq 0, y \neq 0$, $(\text{cond} f)(x) = \left| \dfrac{x f'(x)}{f(x)} \right|$

$x = 0, y \neq 0$, $(\text{cond} f)(x) = \left| \dfrac{f'(x)}{f(x)} \right|$

$x = 0, y = 0$, $(\text{cond} f)(x) = f'(x)$

Ex. sistem de ec. alg. (lin.) $Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = f(b)$
A fixată
b perturbat

$$\text{Cond } A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$x \in \mathbb{R}$, $|x|$ = norma lui x pe $\mathbb{R}$ (modul)

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$ $\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leftarrow$

$\|A\| = \max_{1 \le j \le m} |a_{ij}|$

Condiționarea unui algoritm

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $y = f(x)$

f + algoritm A $\Rightarrow y_A = f_A(x)$ (f deja în alg. repr.)

$$(\text{Cond } A)(x) \le \frac{\frac{\|x_A - x\|}{\|x\|}}{\text{eps}}$$

Eroare globală: erorile din date + eps $\to$ eroarea totală

$$\frac{\|y_A^* - y\|}{\|y\|} \le (\text{cond} f)(x) \left[\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} + \text{cond} A(x^*) \cdot \text{eps} \right]$$

Pb. prost condiționate / incorect puse

$(\text{cond} f)(x) >> 1$: erori rel. mici putem să ne așteptăm la erori foarte mari în output
(>> = mult mai mare)

Specificațiile de precizie: b.c. / p.c.

P.C.: $\dfrac{\|y^* - y_A^*\|}{\|y\|} < \tau$ și $(\text{cond} f)(x) \dfrac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \ge \tau$

$\Rightarrow$ problema este P.C.

ex. nr. răd. reale pt. o fct. / rangul unei matrici

Sisteme de ecuații liniare

Metode directe

- metoda lui Gauss

$$\begin{cases} x - y + 6z = 1 \\ 2x + y - 13z = 2 \\ x + y - z = 15 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -13 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 15 \end{array}\right) \underset{L_3 - L_1}{\overset{L_2 - 2L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & -25 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 14 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 - \frac{2}{3}L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{3} & 14 \end{array}\right)$$

$$-7 + \frac{2}{3} \cdot 25 = -7 + \frac{50}{3} = -\frac{21}{3} + \frac{50}{3} = \frac{29}{3}$$

$$14 - \frac{2}{3} \cdot 0 = 14$$

$x + y + z$
$-x + y + z$
$y + x + z$
$y - x + z$

Am obținut sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x - y + 6 = 1 \\ 3y - 25z = 0 \\ \frac{29}{3} z = 14 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{42}{29}$$

Altă versiune: Gauss-Jordan (în matricea extinsă se fac 0 sub diagonală și deasupra diagonalei)

- descompunere LU.
  - L - lower triunghiular
  - U - upper triunghiular

ex. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

rez. un sistem de ec. lin. cu aj. desc. LU.

$$AX = b$$
$$L(\underbrace{UX}_{y}) = b$$

$Ly = b$ unde $y = UX$

$UX = y$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{matrice triu. superioară}$$
(faceți 0 sub diag. prime)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{L_3 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A \checkmark$$

matrice hermitiană: A hermitiană $\Leftrightarrow A = \overline{A^t}$

matrice simetrică $A = A^t$

$\overline{a+bi} = a - bi$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

matrice pozitiv definită: A poz. def. $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: x^T A x > 0$.

Criteriul lui Sylvester

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = |1|$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} < 0$ nu e poz. def.

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

A poz. def. dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$

De rezolvat: 1-4.

Sist. de ec. lin. - Met. iterative

Exemplu: $\begin{cases} 5x+4y+3z=7 \\ 8x+3y+z=15 \\ 9x+y+4z=11 \end{cases}$

$\Delta, \nabla, \mathrm{div}$

FIZ Legea din fizică

$\Downarrow$ + modelare

MATE. T Ecuații cu deriv. parțiale

$\Downarrow$ + diferențe finite

NUMERICA $\downarrow$

Sistem de ec. lin.

direct $\swarrow$ Mat. sist. este "plină"

$\searrow$ iterativ: Mat. sist. este "sparse" = rară

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2+3x_3=7 \\ 8x_1+3x_2+x_3=15 \\ 9x_1+x_2+4x_3=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1+x_2+4x_3=11 \\ 5x_1+4x_2+3x_3=7 \\ 8x_1+3x_2+x_3=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1=11-x_2-4x_3 \\ 4x_2=7-5x_1-3x_3 \\ x_3=15-8x_1-3x_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1=11/9-(1/9)x_2-(4/9)x_3 \\ x_2=7/4-(5/4)x_1-(3/4)x_3 \\ x_3=15-8x_1-3x_2 \end{cases}}$$

Metoda lui Jacobi

- se alege o soluție inițială $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3^{(0)})$.
- se calculează $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$ până când $\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\|<\varepsilon$ unde ε este dat.

$x^{(0)}=(\overset{x_1^{(0)}\dots}{1},1,1)$

Pe sist. de mai sus, iterația Jacobi arată în felul următor:

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)}=11/9-(1/9)x_2^{(m)}-(4/9)x_3^{(m)} \\ x_2^{(m+1)}=7/4-(5/4)x_1^{(m)}-(3/4)x_3^{(m)} \\ x_3^{(m+1)}=15-8x_1^{(m)}-3x_2^{(m)} \end{cases}$$

$$x_1^{(1)}=11/9-(1/9)x_2^{(0)}-(4/9)x_3^{(0)}=\frac{11}{9}-\frac{1}{9}-\frac{4}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$
$$x_2^{(1)}=7/4-(5/4)x_1^{(0)}-(3/4)x_3^{(0)}=\frac{7}{4}-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$
$$x_3^{(1)}=15-8x_1^{(0)}-3x_2^{(0)}=15-8-3=4$$

$\Rightarrow x^{(1)}=(\underline{\underline{\tfrac{2}{3}}},\underline{\underline{-\tfrac{1}{4}}},\underline{\underline{4}})$

$\|x^{(1)}-x^{(0)}\|=\|(\frac{2}{3},-\frac{1}{4},4)-(1,1,1)\|=\|(-\frac{1}{3},-\frac{5}{4},3)\|=\dots$

- $<\varepsilon$ STOP ALG.
- $>\varepsilon$ Calculați $x^{(2)}$ mai departe

Metoda Gauss-Seidel

- se alege o sol. inițială $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3^{(0)})$
- calculați $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$ până când $\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\|<\varepsilon$, unde ε este dat

$x^{(0)}=(\overset{x_1^{(0)}\dots}{1},2,3)$

Pe sist. de mai sus, iterația Gauss-Seidel arată în felul următor:

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)}=11/9-(1/9)x_2^{(m)}-4/9\,x_3^{(m)} \\ x_2^{(m+1)}=7/4-(5/4)x_1^{(m+1)}-(3/4)x_3^{(m)} \\ x_3^{(m+1)}=15-8x_1^{(m+1)}-3x_2^{(m+2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=11/9-(1/9)x_2^{(0)}-(4/9)x_3^{(0)}=11/9-2/9-12/9=-3/9=1/3 \\ x_2^{(1)}=7/4-(5/4)\cdot x_1^{(1)}-(3/4)x_3^{(0)}=7/4-5/4\cdot(-\frac{1}{3})-3/4\cdot 3=7/4+5/12-9/4 \\ \qquad =5/12-2/4=:a \\ x_3^{(1)}=15-8x_1^{(1)}-3x_2^{(1)}=15-8\cdot(-\frac{1}{3})-3a=\dots \end{cases}$$

$\Rightarrow x^{(1)}=(-\frac{1}{3},a,\dots)$

$\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$
- $<\varepsilon$ STOP PRINT $x^{(1)}$
- $\nless\varepsilon$ continuă cu $x^{(2)}$ ....

Interpolare Lagrange

anul	1960	1970	1980	1990	2000
pop. țânțari în Cluj	725.000	615.000	1.000.000	400.000	510.000

pop (2005) = ?
pop (1975) = ?
pop (2020) = ?

Poate fi prea complicat să găsim funcția analitică care modelează evoluția datelor moastre!!

Alegem iarăși polinoame.

Teoremă (Weierstrass) Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă. Atunci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P(x)$ un polinom a.î.

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in [a,b].$$

Taylor: acuratețea era concentrată în jurul punctului

Teoremă Fie $x_0, \dots, x_m$: $m+1$ noduri distincte și f o funcție pentru care $f(x_0), \dots, f(x_m)$ sunt cunoscute. Atunci $\exists!$ un polinom $P(x)$ de grad cel mult m a.î.

$$P(x_k) = f(x_k), \quad \forall k = \overline{0,m}$$

și P este dat de:

$$P(x) = f(x_0) \cdot L_{m,0}(x) + \dots + f(x_m) \cdot L_{m,m}(x)$$

unde $L_{m,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m} \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_k)}$

P — polinomul de interpolare Lagrange.

Exemplu: $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$, $x_2 = 4$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Pol. Lagrange

$f(3)$ de aproximat.

Rez. $f(x_0) = \frac{1}{2} = 0.5$, $f(x_1) = \frac{1}{2.75} = \frac{100}{275} = \frac{4}{11}$, $f(x_2) = \frac{1}{4}$

noduri	2	2.75	4
valori	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{4}$

$$P(x) = f(x_0) \underbrace{L_{2,0}}_{\text{pol. fundam. Lagrange}}(x) + f(x_1) L_{2,1}(x) + f(x_2) L_{2,2}(x)$$

$$P(x) = \frac{1}{2} L_{2,0}(x) + \frac{4}{11} L_{2,1}(x) + \frac{1}{4} L_{2,2}(x)$$

$$L_{2,0}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 0}}^{2} \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_0)} = \frac{(x - x_1)}{(x_1 - x_0)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_2 - x_0)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)}$$

$$= \frac{(x - 2.75)(x - 4)}{(2.75 - 2)(4 - 2)} = \frac{x^2 - 4x - 2.75x + 11}{0.75 \cdot 2}$$

$$= \frac{x^2 - 6.75x + 11}{1.5} = \frac{10}{15}(x^2 - 6.75x + 11)$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{0.9375}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{x^2 - 4.75x + 5.5}{2.5}$$

$$P(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{10}^{\,2}}{\cancel{15}_{\,3}}(x^2 - 6.75x + 11) + \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{0.9375}(x^2 - 6x + 8) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2.5}(x^2 - 4.75x + 5.5)$$

$$P(x) = 0.33(x^2 - 6.75x + 11) + 0.38(x^2 - 6x + 8) + 0.1(x^2 - 4.75x + 5.5)$$

$$P(x) = 0.81x^2 - 4.98x + 7.22$$

$P(2) = \frac{1}{2} = 0.5$

$P(3) \approx \frac{1}{3} = 0.333\dots$

$P(3) = 0.81 \cdot 9 - 4.98 \cdot 3 + 7.22 = -0.43 \overset{?}{\approx} 0.33$

Restul: $f(x) \overset{\text{PiL}}{=} P(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_m)$.

$f \in C^{m+1}[a,b]$, $\xi(x) \in (\min\{x_0, \dots, x_m\}, \max\{x_0, \dots, x_m\})$.

Diferențe divizate și interpolare Hermite

Diferențe divizate

$P_m(x)$ - polinomul de interpolare de grad $\leq m$ pt. care $P(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0,m}$.

! Cu toate că P_m este unic, reprezentarea algebrică nu este unică.

Ideea: $P_m(x) = \overset{?}{a_0} + \overset{?}{a_1}(x - x_0) + \overset{?}{a_2}(x - x_1)(x - x_0) + \dots + \overset{?}{a_m}(x - x_0)\dots(x - x_{m-1})$

Pentru găsirea constantelor o să ținem cont de urm. rel.:

$$P_m(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

Mai departe $a_1 = ?$

$$P_m(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \dots\dots$$

Atunci diferențele divizate sunt:

$f(x_i) = f[x_i]$ - dif. div. de ordin 0

Definim recurent:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{- dif. div. de ordin 1}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \quad \text{- dif. div. de ord. 2}$$

$\vdots$

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \quad \text{- dif. div. de ord. } k$$

$\vdots$

$$f[x_0, \dots, x_m] = \frac{f[x_1, \dots, x_m] - f[x_0, \dots, x_{m-1}]}{x_m - x_0} \quad \text{- dif. div. de ord. } m$$

Newton (DD): $$\boxed{P_m(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{m} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)\dots(x - x_{k-1})}$$

Pentru calcul dif. div. se folosește urm. schemă/tabel:

$$\begin{array}{c|llll}
 & 0 & & & \\
x_0 & f[x_0] & & & \\
x_1 & f[x_1] & \to f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} & \to f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} & \\
x_2 & f[x_2] & \to f[x_1, x_2] & \to f[x_1, x_2, x_3] & \\
x_3 & f[x_3] & \to f[x_2, x_3] & \to f[x_2, x_3, x_4] & \\
x_4 & f[x_4] & \to f[x_3, x_4] & \to f[x_3, x_4, x_5] & \\
x_5 & f[x_5] & \to f[x_4, x_5] & &
\end{array}$$

ex.

x_k	$\overset{x_0}{1}$	$\overset{x_1}{2}$	$\overset{x_2}{3}$
$f(x_k)$	1	0.5	0.3

$N_m(x) = ?$

$$N_2(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{2} f[x_0, \dots, x_k] \cdot (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1})$$

$$= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$= 1 + \underbrace{f[x_0, x_1]}(x - 1) + \underbrace{f[x_0, x_1, x_2]}(x - 1)(x - 2)$$

$$\begin{array}{cc}
x_k & f(x_k) \\
1 & 1 \\
2 & 0.5 \\
3 & 0.33
\end{array}$$

$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \dfrac{0.5 - 1}{2 - 1} = -0.5$

$f[x_0, x_2] = \dfrac{0.33 - 0.5}{3 - 2} = -0.17$

$\longrightarrow f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{-0.17 + 0.5}{3 - 1} = \dfrac{0.33}{2} = 0.165$

$$= 1 + 0.5(x - 1) + 0.165(x - 1)(x - 2)$$

Interpolarea Hermite

Teoremă Dc. $f \in C^1[a, b]$, $x_0, \dots, x_m \in [a, b]$ distincte, at. unicul polinom P de grad minim pentru care:

$$P(x_i) = f(x_i) \quad \text{și} \quad P'(x_i) = f'(x_i), \quad \forall i = \overline{1,m}$$

este polinomul Hermite de grad $2m+1$, dat de:

$$P(x) = H_{2m+1}(x) = \sum_{j=0}^{m} f(x_j) H_{m,j}(x) + \sum_{j=0}^{m} f'(x_j) \hat{H}_{m,j}(x)$$

unde $H_{m,j}(x) = [1 - 2(x - x_j) L'_{m,j}(x_j)] L^2_{m,j}(x)$

$$\hat{H}_{m,j}(x) = (x - x_j) L^2_{m,j}(x_j)$$

Hermite cu diferențe divizate:

$$H_{2m+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2m+1} f[z_0, \dots, z_k](x - z_0)\dots(x - z_{k-1})$$

unde, spre exemplu, schema de calcul este: $(x_0, \dots, x_2)$

$$\begin{array}{lll}
z & 0 & \\
z_0 = x_0 & f[z_0] = f(x_0) & \\
z_1 = x_0 & f[z_1] = f(x_0) & \to f[z_0, z_1] = f'(x_0) \quad \to f[z_0, z_1, z_2] = \dots, \\
z_2 = x_1 & f[z_2] = f(x_1) & \to f[z_1, z_2] \quad \to \\
z_3 = x_1 & f[z_3] = f(x_1) & \to f[z_2, z_3] = f'(x_1) \quad \to \\
z_4 = x_2 & f[z_4] = f(x_2) & \to f[z_3, z_4] \quad \to \quad \dots \\
z_5 = x_2 & f[z_5] = f(x_2) & \to f[z_4, z_5] = f'(x_2)
\end{array}$$

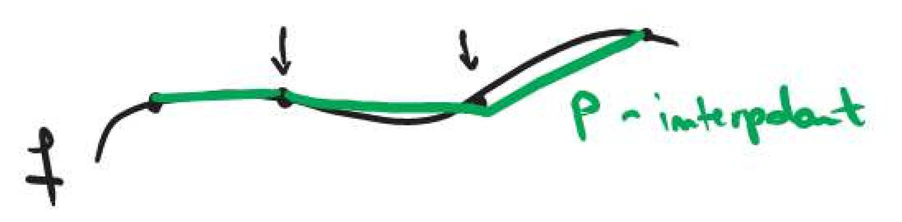
Interpolare Spline

De ce? Polinoamele de grad mare – fluctuație ↓ pe un subinterval ⟶

⟶ fluctuații mari pe tot intervalul.

Pt. a îndrepta: împărțim intervalul în subintervale – aprox. pe f pe fiecare subinterval cu un anumit polinom

- alegem $p(x) = ax+b$, atunci funcția de interpolare P nu e netedă ($P \in C^1$ de obicei)



- alegem Hermite: nod, f, f', calc. H_3, calc. $L_{0,0}$... însă de obicei nu se cunoaște f'

Soluție: $\boxed{\text{Spline cubic}}$ – un polinom de gradul 3 (pe porțiuni)

$\Downarrow$

4 constante

+ (Av.: fct. care interpolează este chiar de clasă C^2)

Obs. Construcția nu cere ca deriv. fct. de interpolare să fie aceleași cu deriv. funcției pe care o aprox. (nici măcar pe noduri)

Def. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ unde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ noduri. Spunem că funcția S este interpolant spline cubic, dacă S satisface simultan urm. cond.:

(a) $S(x)$ este un polinom cubic notat $S_j(x)$ pe $[x_j, x_{j+1}]$ $\forall j = \overline{0, m-1}$.

$$S(x) = \begin{cases} S_0 & [x_0, x_1] \\ S_1 & \\ \vdots & \vdots \\ S_{m-1} & [x_{m-1}, x_m] \end{cases}$$

(b) $S_j(x_j) = f(x_j)$ și $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$, $\forall j = \overline{0, m-1}$

(c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, $\forall j = \overline{0, m-2}$

(d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$, $\forall j = \overline{0, m-2}$

(e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$, $\forall j = \overline{0, m-2}$

(f) unul dintre următoarele seturi de condiții pe fr. să fie satisfăcut:

(i) $S''(x_0) = S''(x_m) = 0$ (naturală)

(ii) $S'(x_0) = f'(x_0)$ și $S'(x_m) = f'(x_m)$ (clamped)

Naturală – natural spline – a long flexible rod

Clamped – mai multă informație despre funcție, dar ca să aprox. cu clamped spline, la capete ai nevoie de $f'(x_0)$, $f'(x_m)$ sau de aprox. f. bune ale acestora.

Exemplu: Să se construiască spline-ul natural care trece prin punctele $(1,2)$, $(2,3)$ și $(3,5)$.

Rez.
$x_0 = 1$ $\quad f(x_0) = 2$
$x_1 = 2$ $\quad f(x_1) = 3$
$x_2 = 3$ $\quad f(x_2) = 5$

Funcția căutată S are 2 componente cubice (doar 2 intervale $[1,2]$ și $[2,3]$).

General: $S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$, $j = \overline{0, m-1}$

Pt. noi: $S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [1,2] \\ S_1(x), & x \in [2,3] \end{cases}$

$S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3$

$S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3$

$a_0, \ldots, d_1$ – 8 constante de găsit $\Rightarrow$ 8 condiții sau relații necesare.

$S_0(x_0) = f(x_0) \Rightarrow a_0 = 2$

$S_0(x_1) = f(x_1) \Rightarrow a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 3$

$S_1(x_1) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = 3$

$S_1(x_2) = f(x_2) \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 5$

- deriv de ord 1: $S'_0(2) = S'_1(2) \Rightarrow b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1$
- deriv de ord 2: $S''_0(2) = S''_1(2) \Rightarrow 2c_0 + 6d_0 = 2c_1$
- naturală: $S''_0(1) = 0 \Rightarrow 2c_0 = 0$

$S''_1(3) = 0 \Rightarrow 2c_1 + 6d_1 = 0$

$$S(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^3, & x \in [1,2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2)^3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

ex. clamped spline, $S'(1) = 2$, $S'(3) = 1$.

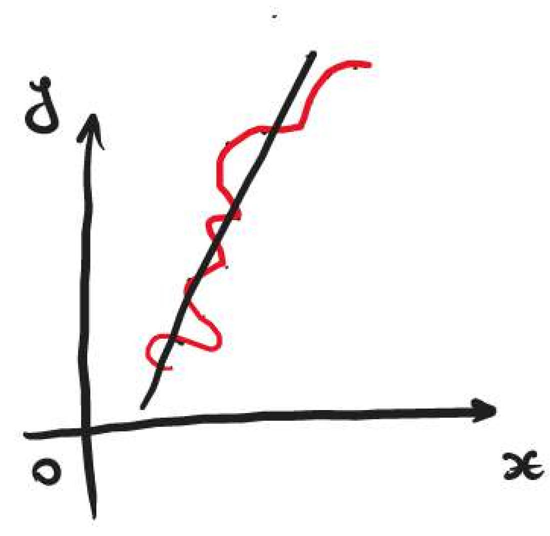
Tema: implementați pt. toate cele 4, metode de calcul plus exemple.

toate ex. de la Probleme 1-3.

Metoda celor mai mici pătrate

x_i	y_i
⋮	⋮

repr. grafică



← pare că dreapta aprox. bine
însă un polinom care să interpoleze nodurile şi replică val. fct. pe noduri introduce oscilaţii care nu sunt prezente în date.

Abordarea: Găseşte "cea mai bună" dreaptă de aproximare pentru datele noastre. (chiar dacă nu are exact aceeaşi valoare pe date)

$$y_i \approx \underbrace{a_1}_{\text{nec.}} x_i + \underbrace{a_0}_{\text{nec.}}$$

În loc să folosesc $|x-y| \searrow 0$ vom folosi $(x-y)^2 \searrow 0$

$$E(a_0,a_1) = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - (a_1 x_i + a_0)\right)^2 \longrightarrow \min$$

Rezolvând ac. pb. de minimizare, se obţine:

$$a_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{m\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$a_1 = \frac{m \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{m\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$y = a_1 x + a_0$ ↑ dr. căutată.

Obs.

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
	⋮	⋮		
Σ				

MCMMP pt. polinoame

x_i	y_i
⋮	⋮

$i = \overline{1,m}$

P_n - polinom care aproximează datele a.î. $n < m-1$.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Căutăm constantele $a_0, \dots, a_n$ a.î.

$$E(a_0,\dots,a_n) = E = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - P_n(x_i)\right)^2 \longrightarrow \min$$

Rezolvând pb. de minimizare, avem că $a_0,\dots,a_n$ sunt sol. sistemului:

$$\begin{cases} a_0 \sum x_i^0 + a_1 \sum x_i^1 + a_2 \sum x_i^2 + \dots + a_n \sum x_i^n = \sum y_i x_i^0 \\ a_0 \sum x_i^1 + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + \dots + a_n \sum x_i^{n+1} = \sum y_i x_i^1 \\ \vdots \\ a_0 \sum x_i^n + a_1 \sum x_i^{n+1} + a_2 \sum x_i^{n+2} + \dots + a_n \sum x^{2n} = \sum y_i x_i^n \end{cases}$$

Sistemul are sol. unică dacă x_i sunt distincte.

- MCMMP pentru aprox. funcţiilor

$f \in C[a,b]$ ce trebuie aproximată

Obiectivul: găsirea unui polinom de un grad $\le n$ a.î. ($P_n(x)$)

$$\int_a^b \left(f(x) - P_n(x)\right)^2 dx \longrightarrow \min$$

$$E(a_0,\dots,a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2 dx \longrightarrow \min$$

În urma rezolvării acestei probleme de minimizare, se obţin ec.:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx}, \quad \forall j = \overline{0,n}$$

$(n+1)$ - nec.: $a_0, \dots, a_n$

Sist. de ec. are sol. unică dacă $f \in C[a,b]$

! sistemul are sol. numerică mai greu de calculat

! calculul lui P_n nu minimizează dificultatea calculului lui P_{n+1}

Vrem să aproximăm cât mai general o funcţie f pe $[a,b]$.

Def. O funcţie $w: I \to \mathbb{R}$ s.n. fct. pondere dacă
$w(x) \ge 0$ pe I
$w(x) \not\equiv 0$ pe orice subinterval al lui I.

$v_1, v_2, \dots, v_n$ l.i. $\Leftrightarrow$ $\forall\ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0$

Ex. $w \equiv 1$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$

Fie $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ o mult. de fct. lin. indep. pe $[a,b]$.

Ex. $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ -||- pe $[0,1]$.

Fie w o fct. pondere pe $[a,b]$

Obiectivul: pentru $f \in C[a,b]$, căutăm $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$ a.î.

$$E = E(a_0,\dots,a_n) = \int_a^b w(x)\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)\right)^2 dx \longrightarrow \min$$

Sist. care se obţine este:

$$\int_a^b w(x) f(x) \phi_j(x) dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b w(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx, \quad \forall j = \overline{0,n}$$

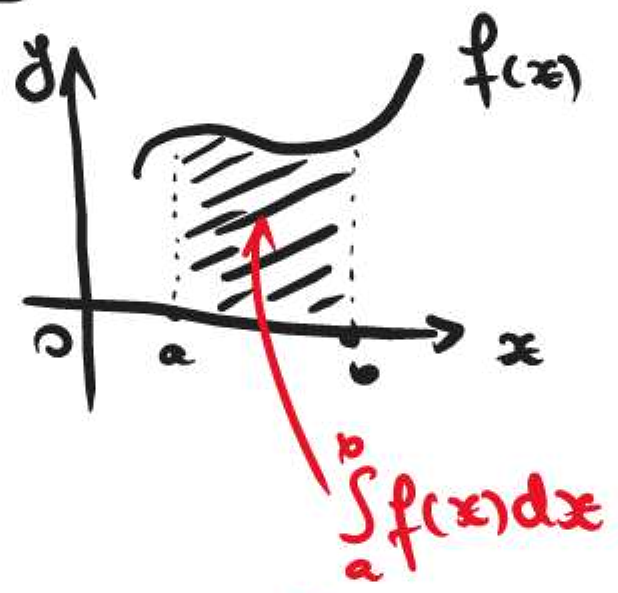
Dacă $\phi_1, \dots, \phi_n$ pot fi alese a.î.: $\int_a^b w(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & j \ne k \\ \alpha_j > 0, & j = k \end{cases}$

atunci sistemul devine: $\int_a^b w(x) f(x) \phi_j(x) dx = a_j \alpha_j$

$$\Rightarrow a_j = \frac{1}{\alpha_j} \int_a^b w(x) f(x) \phi_j(x) dx \quad \text{(pb. este simplificată)}$$

Integrare numerică

$\int_a^b f(x)dx$



- nu se poate afla explicit primitiva
- se poate afla foarte greu

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \underbrace{\sum_{i=0}^m a_i f(x_i)}$$

Se consideră un set de noduri $\{x_0,\dots,x_m\} \subset [a,b]$. Apoi integrăm polinomul de interpolare Lagrange.

$$P_m(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^m f(x_i)L_i(x)}$$

$f = P_m + R_m \mid \int_a^b \Rightarrow \dots$

termenul eroare (al f. de c.)

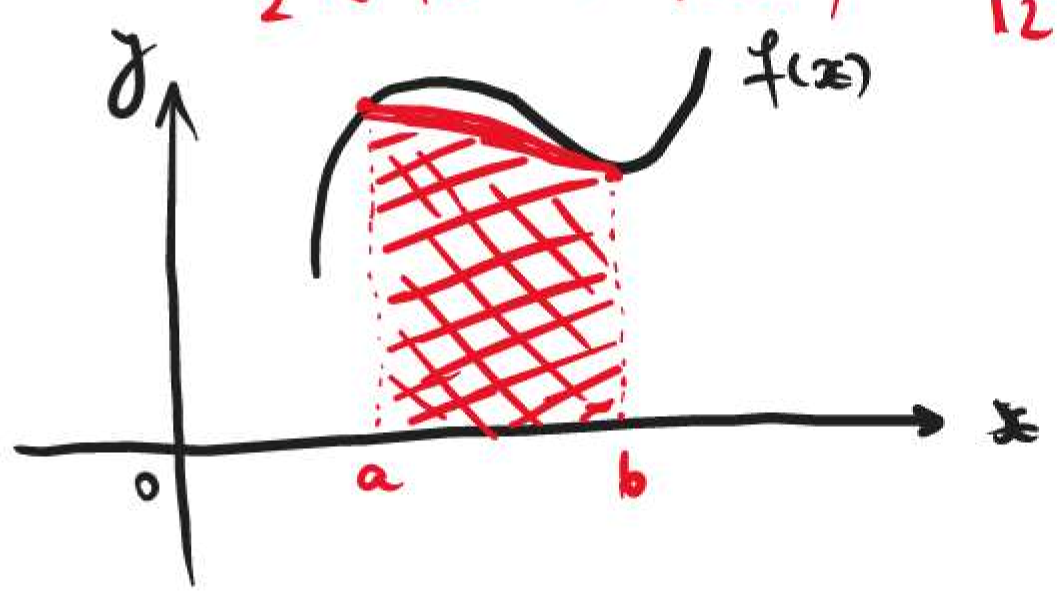
În acest caz: $a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$ iar $E(f) = \frac{1}{(m+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^m (x-x_i)\, f^{(m+1)}(\xi(x))\,dx$

Din această regulă putem deduce:

- $\boxed{\text{regula trapezului}}$ - $x_0 = a$, $x_1 = b$, $h := b-a$

$$P_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

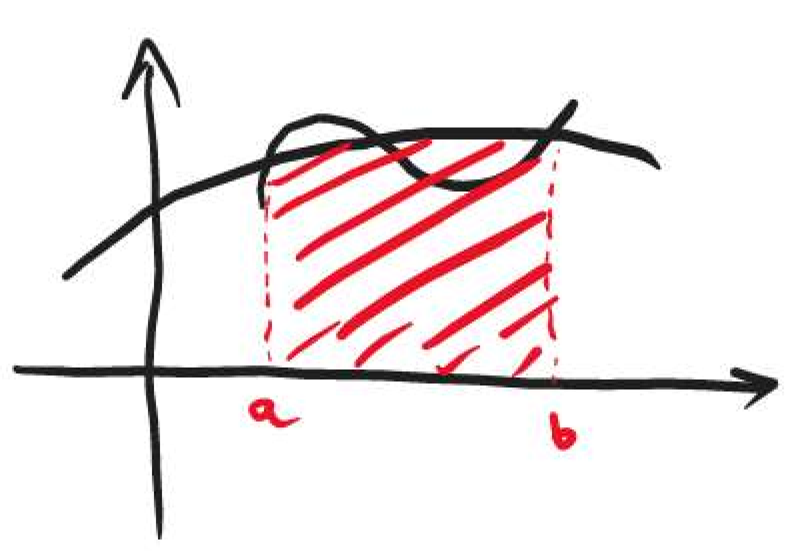
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right) - \frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad \xi \in (x_0,x_1).$$



- regula lui Simpson: $x_0 = a$, $x_2 = b$, $x_1 = a+h$ unde $h = \frac{b-a}{2}$.

Apelăm la polinomul lui Lagrange de gradul 2:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x_0,x_1).$$



Formule Newton-Cotes închise cu $(m+1)$ pct. :
(conțin capetele
interv. = ac. capete sunt noduri)

$x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0,m}$

$x_0 = a$
$x_m = b$, $h = \frac{b-a}{m}$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^m a_i f(x_i)$$

$$a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^m \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx.$$

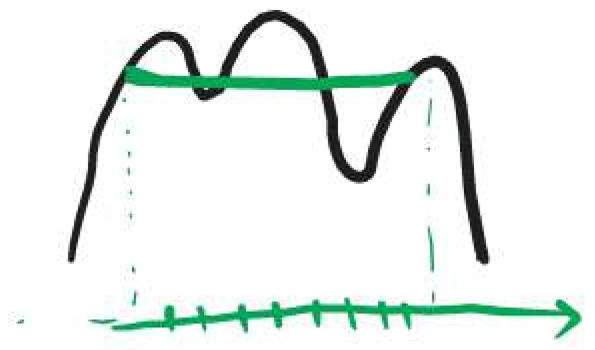
Cuadraturi Gauss

Formule Newton – Cotes (formule de cuadratură) – integrați un polinom de interpolare

↳ eroarea în această formulă cere derivata de ordinul $n+1$ a funcției pe care o aproximăm

⇒ formula este exactă când aproximăm integrala unui polinom de grad $\leq n$.

!! Newton – Cotes – noduri echidistante – problemă: acuratețea



Cuadratură Gauss: alegem nodurile optimal + coeficienții optimal

Alegem $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ și coef. $c_1, \dots, c_n$ pt. a minimiza erorile apărute în aprox.:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

Ex. Să se găsească c_1, c_2, x_1, x_2 a.î. cuadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

să fie exactă pentru f polinom de grad ≤ 3.

Rez. 4 nec. ⟶ gradul 3.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Formula este exactă pt. ∀ polinom de grad ≤ 3

$\Rightarrow (x^3, x^2, x, 1)$ – formula va fi exactă pentru aceste polinoame.

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 \iff 2 = c_1 + c_2$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \iff \dots$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 \iff \dots$$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 \iff \dots$$

sistem ce se rezolvă pentru a obține x_1, x_2, c_1, c_2.

$$c_1 = c_2 = 1, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Obs. Acuratețe îmbunătățită → se consideră polinoame ortogonale ⟶ ex. se aleg nodurile $x_1, \dots, x_n$ = rădăcinile polinoamelor Legendre.