Seminarul 6

1. Un jucător de darts ocheşte discul roşu (denumit "bullseye") cu centrul în centrul ţintei şi diametru 1 cm. La o aruncare, distanţa dintre centrul ţintei şi punctul nimerit de săgeata jucătorului urmează distribuţia uniformă pe intervalul $[a, b]$, unde $0 \le a < b$, cu valoarea medie $\frac{3}{2}$ cm şi deviaţia standard $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Aruncările jucătorului sunt independente. Determinaţi:
a) probabilitatea ca jucătorul să nimerească discul roşu;
b) probabilitatea ca jucătorul să nimerească de 2 ori discul roşu din 10 aruncări.

Funcţia de densitate pentru distribuţia uniformă $Unif[a, b]$ este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$.

2. a) Fie datele statistice $(x_i)_{i=\overline{1,10}}$: 2, 1, 3, 1, 5, 2 ,3, 5, 1, 1. Să se calculeze expresia funcţiei de repartiţie empirice corespunzătoare acestor date

$$\mathcal{F}_{10} : \mathbb{R} \to [0, 1] \text{ definită prin } \mathcal{F}_{10}(x) = \frac{\#\{i \in \{1, \dots, 10\} : x_i \le x\}}{10}.$$

b) Fie $(X_n)_n$ un şir de variabile aleatoare independente care au aceeaşi distribuţie. Notăm cu F funcţia de repartiţie comună.

b$_1$) Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat şi se consideră pentru $n \in \mathbb{N}^*$ v.a. $Y_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X_n(\omega) \le x \\ 0, & \text{dacă } X_n(\omega) > x. \end{cases}$

Ce distribuţie au Y_n, respectiv $Y_1 + ... + Y_n$?

b$_2$) Spre ce valoare converge a.s. şirul $\left(\frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n)\right)_n$?

b$_3$) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fie

$$\mathcal{F}_n : \mathbb{R} \times \Omega \to [0, 1] \qquad \mathcal{F}_n(x, \omega) = \frac{\#\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i(\omega) \le x\}}{n},$$

funcţia de repartiţie empirică calculată în punctul $x \in \mathbb{R}$.

Ce relaţie există între cele două v.a. $\frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n)$ şi $\mathcal{F}_n(x, \cdot)$?

b$_4$) Este $\mathcal{F}_n(x, \cdot)$ un *estimator nedeplasat* şi *consistent* pentru $F(x)$?

3. Durata (în minute) a unei plăţi pentru o factură la un ghişeu într-o bancă urmează distribuţia continuă $Unif[1, 3]$. Ştiind că duratele oricăror plăţi sunt independente, demonstraţi că:
i) media aritmetică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la 2 minute, când $n \to \infty$.
ii) media geometrică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{3\sqrt{3}}{e}$ minute, când $n \to \infty$.
iii) media armonică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{2}{\ln 3}$ minute, când $n \to \infty$.

4. Un computer este conectat la două imprimante: I_1 and I_2. Computerul trimite printarea unui document lui I_1 cu probabilitatea 0,4, respectiv lui I_2 cu probabilitatea 0,6. Ştiind că a fost aleasă imprimanta I_1, un poster $A2$ este printat în T_1 secunde, unde T_1 are distribuţia $Exp(\frac{1}{5})$. Ştiind că a fost aleasă imprimanta I_2, un poster $A2$ este printat în T_2 secunde, unde T_2 are distribuţia uniformă $Unif[4, 6]$. Un inginer solicită printarea unui poster A2 de pe computer. Calculaţi valoarea medie şi deviaţia standard pentru timpul (în secunde) de printare a posterului.

5. Fie v.a. $U \sim Unif[1, 3]$. Să se justifice de ce U^2 *nu* urmează distribuţia $Unif[1, 9]$! Indicaţie: Se pot folosi proprietăţi ale valorii medii!

6. Fie v.a. independente $U_1, U_2 \sim Unif[0, 3]$. Să se justifice de ce $U_1 + U_2$ *nu* urmează distribuţia $Unif[0, 6]$! Indicaţie: Se pot folosi proprietăţi ale varianţei!