Seminarul 1

Noţiuni de combinatorică

1. *Principiul fundamental de numărare:* numărul de perechi de obiecte în care primul obiect poate fi ales în m moduri şi al doilea în n moduri $(m, n \in \mathbb{N})$ este $m \cdot n$.
Exemplu: În câte moduri poate o persoană să îmbrace 2 cămăşi distincte şi 3 blugi diferiţi? R: $2 \cdot 3 = 6$.

2. *Permutări de n* $(n \in \mathbb{N})$: alegeri de n obiecte distincte şi ordonate din n obiecte distincte date.

$$P_n = \text{“numărul de permutări de } n \text{ obiecte”} = n!.$$

Observaţie: Prin convenţie, $0! = 1$.
Exemplu: 1) În câte moduri se pot aşeza 3 persoane pe o bancă? R: $P_3 = 3!$.
2) Exemple în Octave online: `https://octave-online.net`

```
v=[1,4,8]
M=perms([1,4,8]) % toate permutarile lui v (M este matrice)
r=randperm(3)
v(r) %permutare aleatoare a lui v
factorial(3) % calculeaza 3!
```

3. *Permutări cu repetiţii:* Considerăm n obiecte care sunt împărţite în k grupuri $(n, k \in \mathbb{N}^*, k \leq n)$. Primul grup are n_1 obiecte identice, al 2-lea grup are n_2 obiecte identice,..., al k-lea grup are n_k obiecte identice $(n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*, n_1 + \ldots + n_k = n)$. Două obiecte alese arbitrar sunt distincte dacă şi numai dacă provin din grupuri diferite. Numărul de permutări ale acestor n obiecte este

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Exemple: 1) Câte anagrame ale cuvântului “MISSISSIPPI” sunt posibile? R:$\frac{11!}{1!4!4!2!}$.
2) Într-o urnă sunt trei bile albe şi patru bile roşii. În câte moduri se pot aranja aceste bile într-un rând? R:$\frac{7!}{3!4!}$.

4. *Aranjamente de n luate câte k* $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k)$: alegeri de k obiecte distincte şi ordonate din n obiecte distincte date.

$$\begin{aligned} A_n^k &= \text{“numărul de aranjamente de } n \text{ obiecte luate câte } k\text{”} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte coduri cu 3 cifre distincte se pot forma folosind cifrele: 0, 1, 2, 3, 4? R: $A_5^3 = \frac{5!}{2!}$.

5. *Numărul de funcţii* de la mulţimea $A = \{a_1, ..., a_k\}$ la mulţimea $B = \{b_1, ..., b_n\}$ $(k, n \in \mathbb{N}^*)$ este n^k.
Observaţie: O funcţie de la A la B poate fi identificată cu k alegeri de obiecte, nu neapărat distincte (i.e. un obiect poate fi ales de mai multe ori), ordonate, din n obiecte distincte date. Astfel, putem spune că funcţiile sunt *aranjamente cu repetiţii.*
Exemplu: În câte moduri se pot împărţi o portocală, un kiwi şi o banană la 4 copii? Un copil poate primi mai multe fructe, chiar toate.
R: Funcţiile $f : \{\text{“portocală”}, \text{“kiwi”}, \text{“banană”}\} \to \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ se pot construi în 4^3 moduri.

6. *Combinări de n luate câte k* $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k)$: alegeri de k obiecte distincte şi neordonate din n obiecte distincte date, i.e. alegeri de submulţimi de k elemente ale unei mulţimi de n elemente.

$$\begin{aligned} C_n^k &= \text{“numărul de combinări de } n \text{ elemente luate câte } k\text{”} \\ &= \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: În câte moduri se poate forma o echipă de 3 persoane dintr-un grup de 5 persoane? R: $C_5^3 = 10$.

```
w=nchoosek(5,3)
A=nchoosek([1,2,3,4,5],3)
```

7. *Combinări cu repetiţii de n luate câte k* ($n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$): alegeri de k obiecte, nu neapărat distincte (i.e. un obiect poate fi ales de mai multe ori), neordonate, din n obiecte distincte date (i.e. aranjamente cu repetiţii în care neglijăm ordinea). Numărul lor este

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Exemplu: 1) În câte moduri 5 bile (egale) se pot împărţi la 3 copii (C1,C2,C3)? (un copil poate primi o bilă sau mai multe bile sau niciuna)
Soluţie: 0 corespunde la *bilă*; exemple de distribuire:

C1	C2	C3
00		000
0	0	000
000	00	
		00000

Formăm şirul de cifre, unde 0 reprezină bilă, 1 simbolizează “peretele despărţitor” între copii:
0011000 ; 0101000 ; 0001001 ; 1100000.
Reformulăm: în câte moduri 5 zerouri şi 2 cifre 1 se pot distribui pe 7 poziţii? R: $C_7^5 = C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = 21$.
2) O cofetărie are 7 sortimente de îngheţată. În câte moduri poate un client să îşi aleagă sortimentele pentru 4 cornete? (fiecare cornet are câte un glob de îngheţată!) R: $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!}$.
8. *Definiţia clasică a probabilităţii:* într-un experiment în care cazurile posibile, finite la număr, au aceleaşi şanse de a se realiza, probabilitatea unui eveniment E este

$$P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile lui } E}{\text{numărul cazurilor posibile}}.$$

Probleme - Seminarul 1

1. În câte moduri se pot aşeza pe un raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică şi 4 romane, ştiind că fiecare carte are un autor diferit, astfel încât:
a) cărţile de acelaşi tip să fie alăturate?
b) doar romanele să fie neapărat alăturate?
c) doar culegerile de matematică, respectiv de informatică, să fie neapărat alăturate?
2. Câte coduri binare sunt formate din 4 biţi egali cu 1 şi 6 biţi egali cu 0 şi nu au doi biţi alăturaţi egali cu 1?
3. Se aruncă două zaruri. Determinaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A:“se obţine o dublă”.
b) B:“suma numerelor este un număr par.”
c) C:“suma numerelor este cel mult egală cu 10.”
4. 7 căluşari: $c_1, c_2, \ldots, c_7$ se aşează în cerc, într-o ordine aleatoare. Care este probabilitatea ca c_1 şi c_7 să fie vecini?
5. În câte moduri se pot aşeza în cerc caracterele următoare: A, A, A, B, B, 0, 0, 0, 1?
6. În câte moduri se pot distribui $m = 8$ bile identice în $n = 6$ cutii distincte (o cutie poate conţine o bilă sau mai multe bile sau niciuna)?
7. Câte coduri binare sunt formate din 10 cifre şi nu au două cifre alăturate egale cu 1?
8. a) Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$)?
b) Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$)?