Seminarul 4

1. Produsele realizate printr-o tehnologie nouă se testează cu ajutorul a trei teste independente T_1, T_2, T_3. Fiecare dintre cele trei teste găseşte o posibilă defecţiune cu probabilitatea: 0,8 testul T_1, 0,7 testul T_2, 0,6 testul T_3. Care este probabilitatea ca pentru un produs ales aleator:
a) toate cele trei teste să detecteze o defecţiune?
b) cel puţin un test să detecteze o defecţiune?
c) exact două teste să detecteze o defecţiune?
R: T_i: "Testul i detectează o defecţiune", $i \in \{1,2,3\} \Rightarrow P(T_1) = 0{,}8,\ P(T_2) = 0{,}7,\ P(T_3) = 0{,}6$.
a) $P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1)P(T_2)P(T_3) = 0{,}336$.
b) P("cel puţin un test să detecteze o defecţiune")$= 1 - P$("niciun test nu găseşte o defecţiune") $= 1 - P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}976$.
c) $P\left((T_1 \cap T_2 \cap \bar{T}_3) \cup (T_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3) \cup (\bar{T}_1 \cap T_2 \cap T_3)\right) = P(T_1 \cap T_2 \cap \bar{T}_3) + P(T_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3) + P(\bar{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}224 + 0{,}144 + 0{,}084 = 0{,}452$.

• **Modelul urnei cu bile de 2 culori şi bilă nereturnată:** fie $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ cu $n \le n_1 + n_2$ şi fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \le n_1$ şi $n - k \le n_2$; considerând o urnă, care are iniţial n_1 bile albe şi n_2 bile negre, avem

$$\begin{aligned} p(k;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k \text{ bile albe din } n \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ &\quad \text{în care ordinea de extragere a bilelor nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k} \cdot C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^{n}}. \end{aligned}$$

▷ Acest model corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

2. Dintr-un set de 52 de cărţi de joc se extrag aleator, pe rând, fără returnare, 13 cărţi (*bridge hand*). Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A: nu s-a extras nicio treflă;
b) B: s-au obţinut 5 inimi;
c) C: s-a obţinut cel mult un as.
R: $P(A) = \dfrac{C_{39}^{13} \cdot C_{13}^{0}}{C_{52}^{13}}$;
$P(B) = \dfrac{C_{13}^{5} \cdot C_{39}^{8}}{C_{52}^{13}}$;
$P(C) = P(\text{nu s-a extras niciun as}) + P(\text{s-a extras exact un as}) = \dfrac{C_{48}^{13} \cdot C_{4}^{0}}{C_{52}^{13}} + \dfrac{C_{48}^{12} \cdot C_{4}^{1}}{C_{52}^{13}}$.

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă nereturnată:** fie n_i =numărul iniţial de bile cu culoarea i din urnă, $i = \overline{1,r}$;

$$\begin{aligned} p(k_1,\ldots,k_r;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i = \overline{1,r}, \\ &\quad \text{din } n = k_1 + \ldots + k_r \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ &\quad \text{în care ordinea de extragere a bilelor de diverse culori nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_{n_1+\ldots+n_r}^{n}}. \end{aligned}$$

▷ Cazul $r = 2$ corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

3. O echipă formată din 4 cercetători este aleasă aleator dintr-un grup de 4 matematicieni, 3 informaticieni şi 5 fizicieni. Care este probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 matematicieni, 1 informatician şi 1 fizician?

R: $\frac{C_4^2 C_3^1 C_5^1}{C_{12}^4}$.

4. Un sistem electronic are 80 de componente care funcţionează independent unele de altele. Fiecare componentă funcţionează cu probabilitatea 0,75. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de componente funcţionale ale sistemului. Determinaţi distribuţia lui X şi apoi calculaţi valoarea sa medie.
R: $X = X_1+\dots+X_{80} \sim \text{Bino}(80, 0{,}75)$, $X_i \sim \text{Bernoulli}(0{,}75)$ indică funcţionarea componentei i, $i = \overline{1, 80}$.
$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 80 \cdot \frac{3}{4} = 60$.

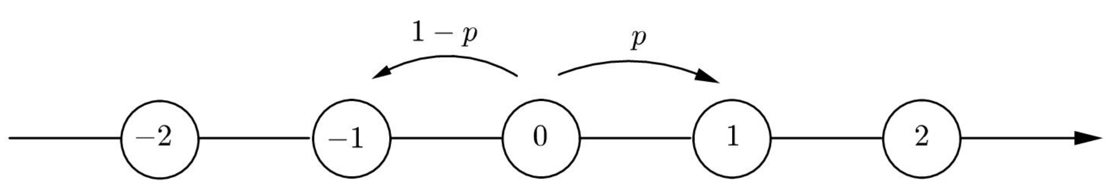
5. Un mesaj este transmis printr-un canal de comunicare cu perturbări. Probabilitatea ca mesajul să fie recepţionat este 10%. Dacă mesajul nu este recepţionat, atunci se reia transmisia mesajului, independent de transmisiile anterioare. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de transmisii până la prima transmisie în care este recepţionat mesajul. Determinaţi valoarea medie a lui X.

R: Observăm că $X \sim \text{Geo}(p)$, $p = \frac{1}{10}$. Pe baza criteriului raportului, seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k$ este convergentă.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k = (1-p)\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \\
&\overset{k=j+1}{=\!=} (1-p)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)p(1-p)^j = (1-p)\sum_{j=0}^{\infty} jp(1-p)^j + (1-p)\sum_{j=0}^{\infty} p(1-p)^j \\
&= (1-p)E(X) + (1-p) \Longrightarrow\ E(X) = \frac{1-p}{p}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow\ E(X) = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}} = 9$, deci vor fi în medie 9 transmisii eşuate până la recepţionarea mesajului.

4. Un punct material se deplasează pe axa reală dintr-un nod spre un nod vecin, la fiecare pas, cu probabilitatea $p \in (0,1)$ la dreapta şi cu probabilitea $1-p$ la stânga. Nodurile sunt centrate în numerele întregi:



Fie X variabila aleatoare care indică poziţia finală a punctului material după $n \in \mathbb{N}$ paşi ai unei deplasări ce porneşte din nodul 0. Determinaţi distribuţia şi valoarea medie lui X.
R: Dacă Y_i reprezintă pasul i, atunci $Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \Longrightarrow\ Y_i = 2X_i - 1$ cu $X_i \sim \mathit{Bernoulli}(p)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. $X = Y_1 + \ldots + Y_n = (2X_1 - 1) + \ldots + (2X_n - 1)$, $X_1 + \ldots + X_n \sim \mathit{Bino}(n,p) \Longrightarrow X \sim \begin{pmatrix} 2k-n \\ C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}$ şi $E(X) = 2np - n$.

5. Considerăm vectorul aleatoar discret (X, Y) cu distribuţia dată sub formă tabelară:

$X \backslash Y$	-2	1	2
1	0,2	0,1	0,2
2	0,1	0,1	0,3

a) Să se determine distribuţiile de probabilitate ale variabilelor aleatoare X şi Y.

b) Calculaţi probabilitatea ca $|X-Y|=1$, ştiind că $Y>0$.
c) Sunt evenimentele $X=2$ şi $Y=1$ independente?
d) Sunt variabilele aleatoare X şi Y independente?
e) Sunt evenimentele $X=1$ şi $Y=1$ condiţional independente, cunoscând $X+Y=2$?
f) Este variabila aleatoare X condiţional independentă de Y, cunoscând $X+Y$?
g) Calculaţi valoarea medie a variabilei aleatoare $2X+Y^2$.

R: a) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.
b) $P(|X-Y|=1 \big| Y>0) = \frac{P(|X-Y|=1, Y>0)}{P(Y>0)} = \frac{P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)}{P(Y>0)} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7}$.
c) $P(X=2, Y=1) = 0{,}1 = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = P(X=2) \cdot P(Y=1) \implies X=2$ şi $Y=1$ sunt independente.
d) $P(X=2, Y=2) = 0{,}3 \neq 0{,}25 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = P(X=2) \cdot P(Y=2) \implies X$ şi Y nu sunt independente.
e) $P(X=1, Y=1 | X+Y=2) = 1 = P(X=1 | X+Y=2) \cdot P(Y=1 | X+Y=2) \implies X=1$ şi $Y=1$ sunt condiţional independente, cunoscând $X+Y=2$.
f) $P(X=1, Y=2 | X+Y=3) = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(X+Y=3)} = \frac{0{,}2}{0{,}3} \neq \frac{0{,}2}{0{,}3} \cdot \frac{0{,}2}{0{,}3} = P(X=1 | X+Y=3) \cdot P(Y=2 | X+Y=3) \implies X$ şi Y nu sunt condiţional independente, cunoscând $X+Y$.
g) $E(2X+Y^2) = 2E(X) + E(Y^2) = 2(1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5) + (-2)^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}5 = 6{,}4$.

6. O monedă este aruncată de 10 ori. Fie X variabila aleatoare care indică diferenţa dintre numărul de capete şi numărul de pajuri obţinute. Determinaţi:
i) distribuţia de probabilitate a lui X;
ii) valoarea medie a lui X.
R: i) Dacă C şi P indică numărul de capete, respectiv de pajuri, atunci $C, P \sim \text{Bino}(10, \frac{1}{2})$, $P = 10 - C$ şi $X = C - P = 2C - 10 \implies X \sim \begin{pmatrix} 2k-10 \\ C_{10}^{k} \frac{1}{2^{10}} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,10}}$.
ii) $E(X) = E(C-P) = E(C) - E(P) = 0$, deoarece C şi P au aceeaşi distribuţie.