

Geometrie pentru informaticieni

Seminarul 5: Dreapta și planul în spațiu (I)

Paul A. Blaga

Probleme rezolvate

Problema 1. Scrieți ecuațiile parametrice ale planului care trece prin:

- 1) punctul $M_0(1, 0, 2)$ și este paralel cu vectorii $\mathbf{a}_1(1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2(0, 3, 1)$;
- 2) punctul $A(1, 2, 1)$ și este paralel cu vectorii \mathbf{i}, \mathbf{j} ;
- 3) punctul $A(1, 7, 1)$ și este paralel cu planul xOz ;
- 4) punctele $M_1(5, 3, 2)$, $M_2(1, 0, 1)$ și este paralel cu vectorul $\mathbf{a}(1, 3, -3)$.
- 5) punctul $A(1, 5, 7)$ și prin axa Ox ;
- 6) prin originea coordonatelor și punctele $M_1(1, 0, 1)$, $M_2(-2, -3, 1)$.

Soluție. 1) Plecăm de la ecuația vectorială

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_{M_0} + u\mathbf{a}_1 + v\mathbf{a}_2,$$

adică

$$\mathbf{r}(u, v) = (1, 0, 2) + u(1, 2, 3) + v(0, 3, 1).$$

Obținem ecuațiile parametrice proiectând ecuația precedentă pe axele de coordonate. Avem:

$$\begin{cases} x &= 1 + u, \\ y &= 2u + 3v, \\ z &= 2 + 3u + v. \end{cases}$$

2) Ecuația vectorială este

$$\mathbf{r}(u, v) = (1, 2, 1) + u(1, 0, 0) + v(0, 1, 0),$$

deci ecuațiile parametrice sunt

$$\begin{cases} x &= u, \\ y &= 2 + v, \\ z &= 1. \end{cases}$$

3) Faptul că planul este paralel cu xOz înseamnă că este paralel cu vectorii \mathbf{i} și \mathbf{k} , deci ecuația vectorială este

$$\mathbf{r}(u, v) = (1, 7, 1) + u(1, 0, 0) + v(0, 0, 1),$$

de unde ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x &= 1 + u, \\ y &= 7, \\ z &= 1 + v. \end{cases}$$

4) Planul este determinat de punctul M_1 și este paralel cu vectorii \mathbf{a} și $\overrightarrow{M_1M_2}(-4, -3, -1)$. Este clar că cei doi vectori nu sunt coliniari, deci, împreună cu punctul, chiar determină un plan. Ecuația vectorială este

$$\mathbf{r}(u, v) = (5, 3, 2) + u(1, 3, -3) + v(-4, -3, -1),$$

deci ecuațiile parametrice sunt

$$\begin{cases} x &= 5 + u - 4v, \\ y &= 3 + 3u - 3v, \\ z &= 2 - 3u - v. \end{cases}$$

5) Planul trece prin axa Ox , deci trece și prin origine, așa că poate fi descris ca planul care trece prin origine și este paralel cu vectorii \mathbf{i} și $\overrightarrow{OA}(1, 5, 7)$. Astfel, ecuația vectorială a planului este

$$\mathbf{r}(u, v) = (0, 0, 0) + u(1, 0, 0) + v(1, 5, 7),$$

iar ecuațiile parametrice sunt

$$\begin{cases} x &= u + v, \\ y &= 5v, \\ z &= 7v. \end{cases}$$

6) Planul trece prin origine și este paralel cu vectorii $\overrightarrow{OM_1}(1, 0, 1)$ și $\overrightarrow{OM_2}(-2, -3, 1)$ care, în mod evident, nu sunt coliniari. Ecuația vectorială a planului este

$$\mathbf{r}(u, v) = (0, 0, 0) + u(1, 0, 1) + v(-2, -3, 1),$$

așadar ecuațiile parametrice sunt

$$\begin{cases} x &= u - 2v, \\ y &= -3v, \\ z &= u + v. \end{cases}$$

□

Problema 2. Scrieți ecuația generală a planului plecând de la ecuațiile sale parametrice:

(a)

$$\begin{cases} x &= 2 + 3u - 4v, \\ y &= 4 - v, \\ z &= 2 + 3u; \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x &= u + v, \\ y &= u - v, \\ z &= 5 + 6u - 4v. \end{cases}$$

Soluție. Ceea ce trebuie este să eliminăm cei doi parametri din cele trei ecuații.

(a) Din ultimele două ecuații obținem $v = 4 - y$ și $v = \frac{z - 2}{3}$. Dacă înlocuim în prima ecuație, rezultă

$$x = 2 + 3(4 - y) + 4\frac{z - 2}{3}$$

sau

$$3x = 6 + 36 - 3y + 4z - 8$$

sau, în fine

$$3x + 3y - 4z - 34 = 0.$$

(b) Din primele două ecuații obținem imediat $u = \frac{x + y}{2}$ și $v = \frac{x - y}{2}$. Dacă înlocuim în ecuația a treia, rezultă

$$z = 5 + 3(x + y) - 2(x - y)$$

sau

$$x + 5y - z + 5 = 0.$$

□

Problema 3. Stabiliți ecuațiile parametrice ale planului plecând de la ecuația sa generală:

(a) $3x - 6y + z = 0$;

(b) $2x - y - z - 3 = 0$.

Soluție. Ecuația generală a planului este o ecuație de gradul întâi cu trei necunoscute. Tot ce avem de făcut este să identificăm o necunoscută principală și, în mod implicit, două necunoscute secundare (care vor juca rolul parametrilor) și să rezolvăm sistemul. La ambele cazuri putem alege z ca variabilă principală. Obținem reprezentările parametrice:

(a)

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = -3u + 6v; \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 2u - v - 3. \end{cases}$$

□

Problema 4. Stabiliți ecuația planului care trece prin punctul $A(3, 5, -7)$ și care taie pe axele de coordonate segmente de lungime egală.

Soluție. Utilizăm ecuația planului prin tăieturi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Condiția este ca segmentele tăiate de plan pe axe să aibă lungimi egale. Aceasta înseamnă că $|a| = |b| = |c| = \lambda$. Avem mai multe situații de considerat:

(i) $a, b, c > 0$. De data aceasta avem $a = b = c = \lambda$, deci ecuația planului se poate scrie sub forma

$$x + y + z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparține planului, atunci

$$3 + 5 - 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = 1$, deci ecuația planului este

$$x + y + z - 1 = 0.$$

(ii) $a, b > 0, c < 0$. Atunci $a = b = -c = \lambda$ și ecuația planului se scrie

$$x + y - z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparține planului, atunci

$$3 + 5 + 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = 15$, deci ecuația planului este

$$x + y + z - 15 = 0.$$

(iii) $a, c > 0, b < 0$. Atunci $a = -b = c = \lambda$ și ecuația planului se scrie

$$x - y + z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparține planului, atunci

$$3 - 5 - 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = -9$, soluție care nu convine, pentru că λ trebuie să fie pozitiv.

(iv) $b, c > 0, a < 0$. Atunci $-a = b = c = \lambda$ și ecuația planului se scrie

$$-x + y + z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparține planului, atunci

$$-3 + 5 - 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = -5$, soluție care nu convine, pentru că λ trebuie să fie pozitiv.

(v) $a, b < 0, c > 0$. Atunci $-a = -b = c = \lambda$ și ecuația planului se scrie

$$-x - y + z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparține planului, atunci

$$-3 - 5 - 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = -15$, soluție care nu convine, deoarece λ trebuie să fie pozitiv.

(vi) $a, c < 0, b > 0$. Atunci $-a = b = -c = \lambda$ și ecuația planului se scrie

$$-x + y - z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparține planului, atunci

$$-3 + 5 + 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = 9$, deci ecuația planului este

$$x + y + z - 9 = 0.$$

(vii) $b, c < 0, a > 0$. Atunci $a = -b = -c = \lambda$ și ecuația planului se scrie

$$x - y - z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparține planului, atunci

$$3 - 5 + 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = 5$, deci ecuația planului este

$$x + y + z - 5 = 0.$$

(viii) $a, b, c < 0$. Atunci $-a = -b = -c = \lambda$ și ecuația planului se scrie

$$x + y + z + \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparține planului, atunci

$$3 + 5 - 7 + \lambda = 0,$$

adică $\lambda = -1$, soluție care nu convine, deoarece λ trebuie să fie pozitiv.

□

Problema 5. Stabiliți care dintre următoarele plane se intersectează, sunt paralele sau coincid:

(a) $x - y + 3z + 1 = 0$ și $2x - y + 5z - 2 = 0$;

(b) $2x + 4y + 2z + 4 = 0$ și $4x + 2y + 4z + 8 = 0$;

(c)

$$\begin{cases} x = u + 2v, \\ y = 1 + v, \\ z = u - v \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} x = 2 + 3u' + v', \\ y = 1 + u' + v', \\ z = 2 - 2v'. \end{cases}$$

Soluție. (a) Pentru a studia poziția celor două plane studiem sistemul format din ecuațiile lor

$$\begin{cases} x - y + 3z + 1 = 0, \\ 2x - y + 5z - 2 = 0. \end{cases}$$

Rangul matricii sistemului este maxim (adică 2), ceea ce înseamnă că sistemul este compatibil, simplu nedeterminat, prin urmare planele se intersectează după o dreaptă.

(b) Este analog punctului precedent și răspunsul este același.

(c) Putem deduce ecuațiile generale ale celor două plane, aplicând, pe urmă, aceeași metodă ca la punctele precedente. Preferăm să folosim o altă metodă. Este clar că două plane sunt paralele sau egale dacă și numai dacă vectorii lor normali sunt coliniari. Vom determina, mai întâi, vectorii normali la cele două plane.

În cazul primului plan, remarcăm imediat că vectorii directori sunt $\mathbf{a}_1(1, 0, 1)$ și $\mathbf{a}_2(2, 1, -1)$. Atunci un vector normal la suprafață este produsul vectorial al acestor doi vectori:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} = (-1, 3, 1).$$

Analog, pentru al doilea plan vectorii directori sunt $\mathbf{b}_1(3, 1, 0)$ și $\mathbf{b}_2(1, 1, -2)$, deci vectorul normal va fi vectorul

$$\mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = 2(-1, 3, 1) = 2\mathbf{n}_1,$$

prin urmare, cele două plane sunt paralele sau egale. Pentru a stabili în care situație ne aflăm, este suficient să verificăm dacă au un punct comun, pentru că dacă au, atunci toate punctele sunt comune.

Remarcăm imediat că punctul $A(0, 1, 0)$ aparține primului plan și verificăm dacă aparține și celui de-al doilea. În acest scop, trebuie să verificăm dacă sistemul

$$\begin{cases} 2 + 3u' + v' = 0, \\ 1 + u' + v' = 1, \\ 2 - 2v' = 0. \end{cases}$$

Din ultimele două ecuații obținem imediat că $u' = -1$ și $v' = 1$. Este ușor de verificat că aceste valori verifică și prima ecuație, deci cele două plane coincid. \square

Problema 6. Determinați proiecția ortogonală a punctului $A(1, 3, 5)$ pe dreapta de intersecție a planelor $2x + y + z - 1 = 0$ și $3x + y + 2z - 3 = 0$.

Soluție. Proiecția lui A pe dreapta dată se obține intersectând această dreaptă cu planul care trece prin A și este perpendicular pe dreaptă. Remarcăm că planul este perpendicular pe dreaptă dacă și numai dacă vectorul director al dreptei este perpendicular pe plan, adică este vector normal la plan.

Începem prin a determina vectorul director al dreptei. În acest scop, considerăm vectorii normali la cele două plane, $\mathbf{n}_1(2, 1, 1)$ și $\mathbf{n}_2(3, 1, 2)$. Produsul lor vectorial este un vector director al dreptei, dar este, în același timp, un vector normal la planul perpendicular pe dreaptă prin punctul dat:

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} = (1, -1, -1).$$

Astfel, ecuația planului perpendicular pe dreapta dată, care trece prin punctul A este $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) = 0$, adică

$$1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - 3) + (-1) \cdot (z - 5) = 0$$

sau

$$x - y - z + 7 = 0.$$

Proiecția punctului A pe dreaptă este la intersecția dintre dreaptă și planul care trece prin A și este perpendicular pe dreaptă, deci coordonatele sale se obțin rezolvând sistemul de ecuații format din ecuațiile dreptei și ecuația planului:

$$\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ 3x + y + 2z - 3 = 0, \\ x - y - z + 7 = 0. \end{cases}$$

După efectuarea calculelor, se obține punctul $A'(-2, 1, 4)$. \square

Problema 7. Determinați distanța dintre planele paralele $x - 2y - 2z + 7 = 0$ și $2x - 4y - 4z + 17 = 0$.

Soluție. Distanța dintre două plane paralele este distanța de la un punct oarecare dintr-unul dintre plane până la celălalt. Notăm cu Π_1 și Π_2 planele. Se observă imediat că $A(-7, 0, 0) \in \Pi_1$, deci

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = d(A, \Pi_2) = \frac{|-14 + 17|}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

\square

Altă soluție. Scriem ecuațiile planelor sub forma normală. Avem

$$\Pi_1 : -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{7}{3} = 0,$$

în timp ce

$$\Pi_2 : -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{17}{6} = 0.$$

Cum vectorii normal la cele două plane au același sens, planele sunt situate de aceeași parte a originii, deci distanța dintre ele este modulul diferenței termenilor liberi, adică

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = \left| \frac{17}{6} - \frac{7}{3} \right| = \frac{1}{2}.$$

□

Problema 8. Se dau vârfurile $A(1, 2, -7)$, $B(2, 2, -7)$, $C(3, 4, -5)$ ale unui triunghi. Să se scrie ecuațiile bisectoarei interioare a unghiului A .

Soluție. Așa cum am văzut în cazul triunghiurilor plane, ideea este să considerăm doi vectori de aceeași lungime, unul având aceeași direcție și sens cu \overrightarrow{AB} și celălalt cu aceeași direcție și sens cu \overrightarrow{AC} . Suma celor doi vectori este un vector director al bisectoarei interioare.

Avem $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$, în timp ce $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 2) = 2(1, 1, 1)$. Atunci vectorul $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 0, 0)$ are aceeași direcție și sens cu \overrightarrow{AB} și are modulul $\sqrt{3}$, în timp ce vectorul $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$ are aceeași direcție și sens cu vectorul \overrightarrow{AC} și are, de asemenea, modulul egal cu $\sqrt{3}$. Prin urmare, un vector director al bisectoarei interioare este $\mathbf{c} = (1 + \sqrt{3}, 1, 1)$. De aici rezultă că ecuațiile canonice ale bisectoarei sunt

$$\frac{x-1}{1+\sqrt{3}} = y-2 = z+7.$$

□

Problema 9. Stabiliți că dreapta $x = 1 - 2t$, $y = 3t$, $z = -2 + t$ este paralelă cu dreapta $x = 7 + 4s$, $y = 5 - 6s$, $z = 4 - 2s$ și determinați distanța dintre ele.

Soluție. Vectorul director al primei drepte este $\mathbf{a}(-2, 3, 1)$, în timp ce vectorul director al celei de-a doua drepte este $\mathbf{b}(4, -6, -2) = -2\mathbf{a}$, prin urmare cele două drepte sunt paralele, pentru că vectorii lor directori sunt coliniari.

Pentru a calcula distanța dintre cele două drepte, calculăm distanța de la un punct al primei drepte până la a doua dreaptă. Observăm imediat că $A(1, 0, -2)$ aparține primei drepte. De asemenea, punctul $B(7, 5, 4)$ aparține celei de-a doua drepte. Atunci, după cum știm, formula de calcul a distanței de la un punct la o dreaptă ne conduce la

$$d(\Delta_1, \Delta_2) \equiv d(B, \Delta_1) = \frac{\|(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Dar $\overrightarrow{AB} = (6, 5, 6)$, deci

$$\overrightarrow{AB} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-13, -18, 28),$$

deci

$$\|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{a}\| = \sqrt{169 + 324 + 784} = \sqrt{1277},$$

în timp ce $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, deci

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \sqrt{\frac{1277}{14}}.$$

□

Probleme propuse

Problema 10. Pentru ce valoare a parametrului m dreapta $x = -1 + 3t, y = 2 + mt, z = -3 - 2t$ nu are puncte comune cu planul $x + 3y + 3z - 2 = 0$?

Problema 11. Stabiliți ecuația unui plan care este paralel cu planul $2x - 2y - z - 6 = 0$ și care este situat la distanță de 7 unități de acesta. Este soluția problemei unică?

Problema 12. Stabiliți ecuațiile parametrice ale dreptei determinate de planele $x + y + 2z - 3 = 0$ și $x - y + z - 1 = 0$.

Problema 13. Demonstrați că dreapta $x = -3t, y = 2 + 3t, z = 1$ se intersectează cu dreapta $x = 1 + 5s, y = 1 + 13s, z = 1 + 10s$ și determinați coordonatele punctului de intersecție.

Problema 14. Stabiliți ecuația unui plan, știind că punctul $A(1, -1, 3)$ este proiecția ortogonală a originii pe acest plan.

Problema 15. Demonstrați că paralelipipedul care are trei fețe neparalele situate în planele $2x + y - 2z + 6 = 0, 2x - 2y + z + 8 = 0$ și $x + 2y + 2z + 10 = 0$ este dreptunghic.

Problema 16. Se dau vârfurile unui tetraedru: $A(2, 1, 0), B(1, 3, 5), C(6, 3, 4), D(0, -7, 8)$. Să se scrie ecuația planului care trece prin muchia AB și prin mijlocul muchiei CD .

Problema 17. Stabiliți ecuațiile parametrice ale dreptei care trece prin:

1. punctul $M_0(2, 0, 3)$ și este paralelă cu vectorul $\mathbf{a}(3, -2, -2)$;
2. punctul $A(1, 2, 3)$ și este paralelă cu axa Ox ;
3. punctele $M_1(1, 2, 3)$ și $M_2(4, 4, 4)$.