

Seminarul 4

1. Produsele realizate printr-o tehnologie nouă se testează cu ajutorul a trei teste independente T_1, T_2, T_3 . Fiecare dintre cele trei teste găsește o posibilă defecțiune cu probabilitatea: 0,8 testul T_1 , 0,7 testul T_2 , 0,6 testul T_3 . Care este probabilitatea ca pentru un produs ales aleator:

- a) toate cele trei teste să detecteze o defecțiune?
- b) cel puțin un test să detecteze o defecțiune?
- c) exact două teste să detecteze o defecțiune?

• **Modelul urnei cu bile de 2 culori și bilă nereturnată:** fie $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ cu $n \leq n_1 + n_2$ și fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \leq n_1$ și $n - k \leq n_2$; considerând o urnă, care are inițial n_1 bile albe și n_2 bile negre, avem

$$\begin{aligned} p(k; n) &= \text{probabilitatea de a obține } k \text{ bile albe din } n \text{ extrageri fără returnarea bilei extrase,} \\ &\quad \text{în care ordinea de extragere a bilelor nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^k \cdot C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n}. \end{aligned}$$

▷ Acest model corespunde **distribuției hipergeometrice**.

2. Dintr-un set de 52 de cărți de joc se extrag aleator, pe rând, fără returnare, 13 cărți (*bridge hand*). Calculați probabilitățile următoarelor evenimente:

- a) A : nu s-a extras nicio treflă;
- b) B : s-au obținut 5 inimi;
- c) C : s-a obținut cel mult un as.

• **Modelul urnei cu r culori și bilă nereturnată:** fie n_i = numărul inițial de bile cu culoarea i din urnă, $i = \overline{1, r}$;

$$\begin{aligned} p(k_1, \dots, k_r; n) &= \text{probabilitatea de a obține } k_i \text{ bile cu culoarea } i, i = \overline{1, r}, \\ &\quad \text{din } n = k_1 + \dots + k_r \text{ extrageri fără returnarea bilei extrase,} \\ &\quad \text{în care ordinea de extragere a bilelor de diverse culori nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot \dots \cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_{n_1 + \dots + n_r}^n}. \end{aligned}$$

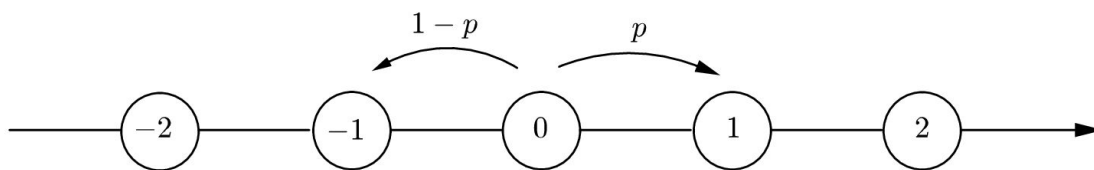
▷ Cazul $r = 2$ corespunde **distribuției hipergeometrice**.

3. O echipă formată din 4 cercetători este aleasă aleator dintr-un grup de 4 matematicieni, 3 informaticieni și 5 fizicieni. Care este probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 matematicieni, 1 informatician și 1 fizician?

4. Un sistem electronic are 80 de componente care funcționează independent unele de altele. Fiecare componentă funcționează cu probabilitatea 0,75. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de componente funcționale ale sistemului. Determinați distribuția lui X și apoi calculați valoarea sa medie.

5. Un mesaj este transmis printr-un canal de comunicare cu perturbări. Probabilitatea ca mesajul să fie recepționat este 10%. Dacă mesajul nu este recepționat, atunci se reia transmisia mesajului, independent de transmisiile anterioare. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de transmisi până la prima transmisie în care este recepționat mesajul. Determinați valoarea medie a lui X .

6. Un punct material se deplasează pe axa reală dintr-un nod spre un nod vecin, la fiecare pas, cu probabilitatea $p \in (0, 1)$ la dreapta și cu probabilitatea $1 - p$ la stânga. Nodurile sunt centrate în numerele întregi:



Fie X variabila aleatoare care indică poziția finală a punctului material după $n \in \mathbb{N}$ pași ai unei deplasări ce pornește din nodul 0. Determinați distribuția și valoarea medie lui X .

7. Considerăm vectorul aleator discret (X, Y) cu distribuția dată sub formă tabelară:

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash X \end{array}$	-2	1	2
1	0,2	0,1	0,2
2	0,1	0,1	0,3

- Să se determine distribuțiile de probabilitate ale variabilelor aleatoare X și Y .
- Calculați probabilitatea ca $|X - Y| = 1$, știind că $Y > 0$.
- Sunt evenimentele $X = 2$ și $Y = 1$ independente?
- Sunt variabilele aleatoare X și Y independente?
- Sunt evenimentele $X = 1$ și $Y = 1$ condițional independente, cunoscând $X + Y = 2$?
- Este variabila aleatoare X condițional independentă de Y , cunoscând $X + Y$?
- Calculați valoarea medie a variabilei aleatoare $2X + Y^2$.

8. O monedă este aruncată de 10 ori. Fie X variabila aleatoare care indică diferența dintre numărul de capete și numărul de pajuri obținute. Determinați:

- distribuția de probabilitate a lui X ;
- valoarea medie a lui X .