

Culegere de probleme de Analiză numerică

Radu Tiberiu Trîmbițaș

2 martie 2020

Cuprins

Prefață	1
1 Formula lui Taylor și aplicații	2
2 Elemente de Analiză funcțională și teoria aproximării	7
2.1 Spații metrice, spații Banach, spații Hilbert	7
2.2 Spații Hilbert	13
2.2.1 Funcționale liniare în spații Hilbert	13
2.3 Serii Fourier	15
2.4 Polinoame ortogonale	18
2.4.1 Calculul polinoamelor ortogonale	18
2.4.2 Exemple de polinoame ortogonale	20
3 Teoria erorilor	35
3.1 Erori absolute și relative. Cifre semnificative corecte	36
3.2 Propagarea erorilor	37
3.3 Erorile pentru vectori și operatori	38
3.4 Aritmetică în virgulă flotantă	40
3.5 Condiționarea unei probleme	48
4 Rezolvarea numerică a sistemelor algebrice liniare	54
4.1 Descompunere LU	54
4.2 Descompunere LUP	56
4.3 Sisteme de ecuații	61
5 Calculul cu diferențe	67
6 Interpolare	78
6.1 Interpolare polinomială	78
6.2 Interpolare Lagrange	82
6.3 Interpolare Hermite	85

6.4	Interpolare Birkhoff	91
6.5	Interpolare rațională	93
6.6	Interpolare spline	97
7	Aproximări în medie pătratică	103
8	Operatori liniari și pozitivi	110
8.1	Operatorul lui Bernstein	110
8.2	B-spline	114
8.3	Alți operatori liniari și pozitivi	119
9	Aproximarea funcționalelor liniare	122
9.1	Derivare numerică	122
9.2	Formule de integrare numerică de tip Newton-Cotes	127
9.2.1	Formule Newton-Cotes închise	127
9.2.2	Formule Newton-Cotes deschise	130
9.3	Alte formule de tip interpolator	132
9.4	Cuadraturi repetate. Metoda lui Romberg	141
9.5	Formule de cuadratură de tip Gauss	142
10	Ecuatii neliniare	151
10.1	Ecuatii în \mathbb{R}	151
10.2	Sisteme neliniare	161
11	Rezolvarea numerică ecuațiilor diferențiale	164

Prefață

Aici ar veni prefața.

Capitolul 1

Formula lui Taylor și aplicații

Fie I un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de n ori în punctul $a \in I$.
Polinomul

$$(T_n f)(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

se numește *polinomul lui Taylor* de gradul n , atașat funcției f în punctul a .

Cantitatea

$$(R_n f)(x) = f(x) - (T_n f)(x)$$

se numește restul de ordinul n al formulei lui Taylor în punctul x .

Formula

$$f(x) = (T_n f)(x) + (R_n f)(x)$$

sau

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (R_n f)(x)$$

se numește *formula lui Taylor* de ordinul n pentru funcția f în vecinătatea punctului a .

Pentru rest avem

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} \omega(x), \text{ cu } \lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0.$$

Dacă $f \in C^{n+1}(I)$, atunci $\exists \theta \in (0, 1)$ astfel încât

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}$$

(restul în forma lui Lagrange)

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^{n+1} (1-\theta)^n f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{n!}$$

(restul în forma lui Cauchy)

$$(R_n f)(x) = \int_a^b \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

(restul în formă integrală).

Dacă în formula lui Taylor se ia $a = 0$, se obține formula lui MacLaurin

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + (R_n f)(x),$$

unde

$$(R_n f)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad \theta \in (0, 1).$$

Dăm formulele lui Taylor (MacLaurin) pentru câteva funcții uzuale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x); \quad (1.1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x); \quad (1.2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x); \quad (1.3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n+1} + R_{n+1}(x); \quad (1.4)$$

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \cdots + \binom{k}{n}x^n + R_n(x), \quad (1.5)$$

unde

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}.$$

Aplicații

I. La determinarea punctelor de extrem și inflexiune ale unor funcții.

Teorema 1.0.1 Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in I$. Dacă f admite derivată de ordinul n pe I , continuă pe I , și dacă

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ și } f^{(n)}(a) \neq 0$$

atunci

- dacă $n = 2k$ și $f^{(n)}(a) < 0$, atunci a este un punct de maxim relativ;
- dacă $n = 2k$ și $f^{(n)}(a) > 0$, atunci a este un punct de minim relativ;

- dacă $n = 2k + 1$ și a este un punct interior, atunci a este un punct de inflexiune.

II. Calculul aproximativ al funcțiilor în unul din următoarele moduri:

- (a) Fiind dat un punct $x \in I$, să se determine un număr natural n (cât mai mic posibil) astfel încât

$$|f(x) - (T_n f)(x)| < \varepsilon.$$

- (b) Să se determine n astfel încât inegalitatea $|f(x) - (T_n f)(x)| < \varepsilon$ să fie satisfăcută în toate punctele unui interval.

- (c) Fiind dat un număr natural n să se determine intervalul în care are loc inegalitatea anterioară.

III. La calculul unor limite.

IV. La deducerea unor metode numerice.

Problema 1.0.2 Să se scrie formula lui MacLaurin pentru funcția $f : [-a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{a+x}$, $a > 0$.

Soluție. Scriem $f(x) = \sqrt{a+x} = \sqrt{a} \left(1 + \frac{x}{a}\right)$; se obține

$$f(x) = \sqrt{a} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{x}{a} + (-1)^1 \frac{1}{2^2} \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + (-1)^2 \frac{1}{2^3} \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{n! 2^n} \left(\frac{x}{a}\right)^n + (R_n f)(x) \right].$$

■

Problema 1.0.3 Să se scrie formula lui MacLaurin pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$. Care este raza de convergență?

Soluție. Pornim de la

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right).$$

Folosind apoi formula

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x+a} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}},$$

se obține pentru valoarea derivatei de ordinul $n + 1$ în 0

$$\begin{aligned} (\arctan x)^{(n+1)}|_{x=0} &= \frac{1}{2i}(-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \right] \Big|_{x=0} = \\ &= (-1)^{n+1} n! \left[\frac{1}{(-i)^{n+1}} - \frac{1}{(i)^{n+1}} \right] = (-1)^{n+1} n! \sin(n+1) \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Formula MacLaurin corespunzătoare este

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (R_{n+1}f)(x).$$

Raza de convergență este

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1.$$

■

Problema 1.0.4 Să se determine punctele de maxim și de minim ale următoarelor funcții:

a) $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^6 - x^3 + 3;$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \cos x + x^2.$

Soluție.

a) $f'(x) = 12x^5 - 3x^2 = 3x^2(4x^3 - 1)$ are rădăcinile reale $x_{1,2} = 0$ și $x_{3,4,5} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$

$$f''(x) = 60x^4 - 6x, f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = 240x^3 - 6 = 6(40x^3 - 1), f'''(0) = -6 \Rightarrow 0 \text{ punct de inflexiune.}$$

Funcția nu are puncte de extrem pe $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$

b) $f'(x) = -2 \sin x + x = 2(x - \sin x), f'(0) = 0,$

$$f''(x) = -2 \cos x + 2 = 2(1 - \cos x), f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 2 \sin x, f'''(0) = 0,$$

$$f^{IV}(x) = 2 \cos x, f^{IV}(0) = 2.$$

$x = 0$ este punct de minim și $f(0) = 2.$

■

Problema 1.0.5 Să se determine numărul natural n astfel ca pentru $a = 0$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$ $T_n f$ să aproximeze f în $[-1, 1]$ cu trei zecimale exacte.

Soluție. Impunem condiția

$$|(R_n f)(x)| = \left| \frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!} \right| < 10^{-3}.$$

Deoarece $\theta x < 1$, $e^{\theta x} < e < 3$, avem

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \Rightarrow n = 6.$$

În particular, luând $x = 1$, obținem

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{6!} \right) < \frac{1}{1000}.$$

■

Problema 1.0.6 Să se aproximeze $\sqrt[3]{999}$ cu 12 zecimale exacte.

Soluție. Avem

$$\sqrt[3]{999} = 10 \left(1 - \frac{1}{1000} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Folosim formula (1.5) pentru $k = 1/3$, $x = -\frac{1}{1000}$. Într-o serie alternată modulul erorii este mai mic decât modulul primului termen neglijat.

$$|(R_n f)(x)| < \left| \left(\frac{1}{3} \right) 10^{-3n} \right|.$$

Pentru $n = 4$ avem

$$|(R_n f)(x)| < \frac{10}{243} 10^{-12} = \frac{1}{24300000000000}.$$

■

Capitolul 2

Elemente de Analiză funcțională și teoria aproximării

2.1 Spații metrice, spații Banach, spații Hilbert

Problema 2.1.1 *Spațiul s al șirurilor numerice în care distanța dintre $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots)$ este dată de*

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

este un spațiu metric complet.

Soluție. Pozitivitatea și simetria se verifică imediat. Inegalitatea triunghiului: funcția $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ este crescătoare pentru $t \geq 0$, de unde

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} &\leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|} \\ d(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - z_k|}{1 + |x_k - z_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|z_k - y_k|}{1 + |z_k - y_k|} \\ &= d(x, z) + d(y, z) \end{aligned}$$

Completitudinea: Convergența în s înseamnă convergența pe componente.

$$x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots), \quad x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, \dots)$$

$$x_n \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(n)} = x_k^{(0)} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|} \leq d(x_n, x_0) \rightarrow 0 \Rightarrow x_k^{(n)} \rightarrow x_k^{(0)} \forall k \in \mathbb{N}$$

Din (2.1) rezultă că în

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|}$$

se poate trece la limită termen cu termen deoarece S este uniform convergentă (este majorată de seria numerică $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$) fiecare termen tinzând la zero rezultă $d(x_n, x_0) \rightarrow 0$. Dacă (x_n) este șir Cauchy, atunci fiecare componentă este Cauchy. Fie $x_k^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$.

$$x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, \dots), \quad x_n \rightarrow x_0.$$

■

Observația 2.1.2 s este un spațiu vectorial topologic.

Problema 2.1.3 Asemănător se arată că $C(K)$ este complet.

Demonstrație. Fie (x_n) un șir Cauchy în $C(K)$. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$ a.î. $\forall m, n \geq N_\varepsilon$

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in K} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

$$\forall t \in K \quad |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \quad (2.2)$$

Fixăm $t \in K$ $(x_n(t))$ șir numeric Cauchy $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x_0(t)$ $x_0 \in C(K)$?
 $x_n \rightarrow x_0$. Trecând la limită când $m \rightarrow \infty$ în (2.2) obținem

$$|x_0(t) - x_n(t)| \leq \varepsilon$$

$x_n \rightrightarrows x_0 \Leftrightarrow x_n \rightarrow x_0$ în $C(K) \Rightarrow x_0$ continuă ■

Problema 2.1.4 Spațiul $L_c(X, Y) = B(X, Y)$ al aplicațiilor liniare și continue definite pe X cu valori în Y , unde X și Y sunt spații liniare normate, este un spațiu liniar normat. Dacă Y este spațiu Banach atunci și $L_c(X, Y)$ este spațiu Banach.

Soluție. Fie $U \in L(X, Y)$.

Propoziția 2.1.5 U continuu în $x_0 \in X \Leftrightarrow U$ continuu pe X . (\Rightarrow) Fie (x_n) , $x_n \rightarrow x$ ($x, x_n \in \Omega$)

$$x_n = [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0)$$

$$x_0 + x_n - x \rightarrow x_0$$

$$Ux_n = U[x_0 + (x_n - x)] + U(x - x_0) \rightarrow U(x_0) + U(x - x_0)$$

(\Leftarrow) evidentă.

Definiția 2.1.6 $U \in L(X, Y)$, X, Y spații liniare normate. U mărginit dacă există $C \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\forall x \in X \quad \|Ux\| \leq C\|x\| \quad (2.3)$$

Teorema 2.1.7 U continuu $\Leftrightarrow U$ mărginit.

Demonstrație. (\Rightarrow) U continuu, fie $C_0 = \sup_{\substack{\|x\| \\ x \in X}} \|Ux\| < \infty$ Într-adevăr dacă $C_0 = \infty$, atunci există (x_n) ($x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$) astfel încât $\lambda_n = \|Ux_n\| \rightarrow \infty$. Fie (x'_n) $x'_n = \frac{x_n}{\lambda_n}$ $x'_n \rightarrow 0 \xrightarrow{(cont)} Ux'_n \rightarrow 0$, dar $\|Ux'_n\| = 1$ contradicție. Fie $x \neq 0$; $x \in X$ și $x' = \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow \|x'\| = 1$ $\|Ux'\| \leq C_0$; dar $Ux' = \frac{1}{\|x\|} Ux$ $\|Ux\| \leq C_0\|x\|$, deci (2.3) este adevărată pentru $C = C_0$. (\Leftarrow) (2.3) $\Rightarrow U$ continuă în 0 $\Rightarrow U$ continuu pe X . ■

În (2.3) luăm $C = C_0 = \|U\|$.

$$\|Ux\| \leq \|U\|\|x\| \quad (2.4)$$

Dacă am stabilit o inegalitate de tipul (2.3) pentru un anumit C , atunci $\|U\| \leq C$.

Să arătăm că $L_c(X, U) \leq L(X, Y)$ și că este normat. Fie $U_1, U_2 \in L_c(X, Y)$, $U = U_1 + U_2$. Avem $\|Ux\| \leq \|U_1x\| + \|U_2x\| \leq (\|U_1\| + \|U_2\|)\|x\|$ și $\|\lambda u\| = |\lambda|\|U\|$.

$$\|U\| = 0 \Rightarrow \|Ux\| = 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow U = 0$$

Completitudinea (U_n) Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall m, n \in N_\varepsilon$

$$\|U_m - U_n\| < \varepsilon \quad (2.5)$$

$$\forall x \in X \quad \|U_mx - U_nx\| < \varepsilon\|x\| \Rightarrow (U_nx) \text{ Cauchy} \quad (2.6)$$

$\xrightarrow{\text{complet. lui } Y} \exists U_x = \lim_{n \rightarrow \infty} U_nx$ ($x \in X$); (2.5) $\Rightarrow \|Ux - U_nx\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|U_mx - U_nx\| \leq \varepsilon\|x\| \Rightarrow V = U - U_n \in B(X, Y) \Rightarrow U = V + U_n \in \bar{B}(X, Y)$ (2.6) $\Rightarrow \|U - U_n\| \leq \varepsilon \Rightarrow U_n \rightarrow U$ ■

Corolar 2.1.8 Dacă X, Y s.l.n. $\Rightarrow L_c(X, Y)$ s.l.n.; X s.l.n., Y Banach $\Rightarrow L_c(X, Y)$ Banach

Observația 2.1.9 Interpretarea geometrică a lui $\|U\|$ - este marginea superioară a coeficientului de dilatare al unui vector prin operatorul U .

Corolar 2.1.10 X^* este Banach.

$$X^* = L_c(X, \mathbb{K})$$

$$f \in X^* \quad \|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} f(x)$$

Observația 2.1.11 Dacă $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, atunci $(\lambda f)(x) = \bar{\lambda} f(x)$.

Problema 2.1.12 Fie $C[a, b]$ și $f : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k x(t_k)$$

$t_1, \dots, t_n \in [a, b]$, $c_k \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este liniară și $\|f\| = \sum_{k=1}^n |c_k|$.

Soluție. Liniaritatea este imediată.

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^n c_k x(t_k) \right| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t)| \sum_{k=1}^n |c_k| = \sum_{k=1}^n |c_k| \|x\|$$

f continuă și $\|f\| \leq \sum_{k=1}^n |c_k|$

Să construim acum pe $[a, b]$ o funcție \tilde{x} , liniară pe porțiuni, care ia în t_1, t_2, \dots, t_n valorile

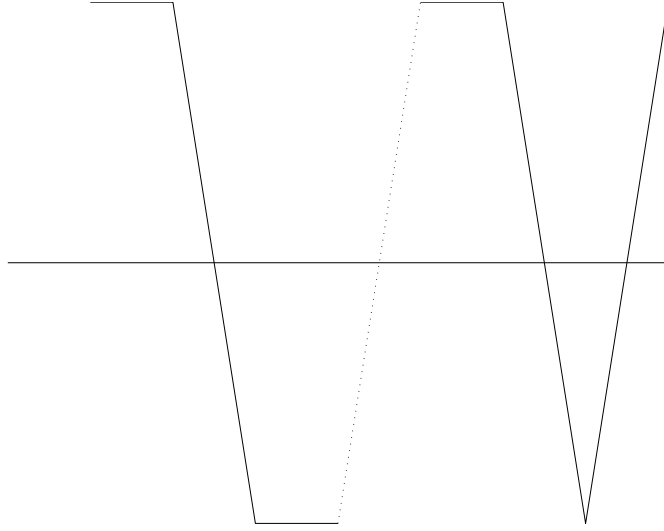
$$\tilde{x}(t_k) = \text{sign } c_k, \quad k = \overline{1, n},$$

și care să fie liniară pe intervalul $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ și constantă în $[a, t_1]$ și $[t_n, b]$ (vezi figura 2.1)

Evident $|\tilde{x}(t)| \leq 1$, adică $\|\tilde{x}\| \leq 1$ și

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \geq f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^n c_k \tilde{x}(t_k) = \sum_{k=1}^n c_k \text{sign } c_k = \sum_{k=1}^n |c_k|$$

■

Figura 2.1: Funcția \tilde{x} din problema 2.1.12

Problema 2.1.13 Se consideră următoarele trei norme pe \mathbb{R}^2

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}, \quad \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

Să se reprezinte grafic mulțimile $B_1(0)$ în raport cu toate cele 3 norme. Să se determine geometric cele mai mici constante a, b, c, d astfel încât

$$\begin{aligned} a\|x\|_1 &\leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1, \\ c\|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq d\|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Soluție. Avem inegalitățile:

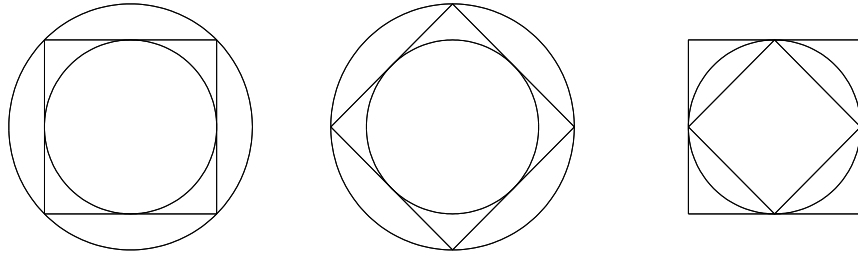
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} &\leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \leq 1 \\ 1 &\leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Graficele apar în figura 2.2.

■

Problema 2.1.14 Fie $C^1[0, 1]$ și normele

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \\ \|f\|' &= |f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \end{aligned}$$

Figura 2.2: Normele $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ și $\|\cdot\|_\infty$

- (a) Să se verifice că $\|\cdot\|'$ este normă pe $C^1[0, 1]$.
- (b) Orice șir convergent în norma $\|\cdot\|$ este convergent și în norma $\|\cdot\|_1$; orice șir convergent în norma $\|\cdot\|'$ este convergent și în norma $\|\cdot\|$.
- (c) Să se studieze convergența șirurilor $f_n(t) = t^n$ și $g_n(t) = n^{-1} \sin nt$. Ce se poate afirma despre cele trei norme?

Soluție. a) $\|f\|' \geq 0$ $\|0\|' = 0$ $\|f\|' = 0 \Rightarrow f(0) = 0, f'(t) = 0 \Rightarrow |f(t)| = |f(t) - f(0)| = |tf'(\theta)| = 0 \Rightarrow f = 0$

$$|\lambda f'| = |\lambda f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |\lambda f'(t)| = |\lambda| \|f\|'$$

$$\|f + g\|' = |(f + g)(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |(f + g)'(t)| \leq$$

$$\leq |f(0)| + |g(0)| + \sup_{t \in [0,1]} (|f'(t)| + |g'(t)|) \leq \|f\|' + \|g\|'$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \|f_n - f\| \rightarrow 0 &\Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0 \Rightarrow \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \rightarrow 0 \\ f_n \rightarrow f \text{ în } \|\cdot\|' &\Rightarrow \|f_n - f\|' \rightarrow 0 \Rightarrow |f_n(0) - f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'_n(t) - f'(t)| \rightarrow 0 \\ 0 &\Rightarrow \|f_n - f\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left. \begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \\ \|f_n\| &= \sup_{t \in [0,1]} t^n = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_n \rightarrow 0 \text{ în } \|\cdot\|_1 \quad f_n \rightarrow f \text{ în } \|\cdot\| \Rightarrow \\ f_n \rightarrow f \text{ în } \|\cdot\|_1, \text{ adică } f &= 0, \|f\| = 1 \quad f_n \not\rightarrow \text{ în } \|\cdot\|_1 \Rightarrow \text{nu converge în } \|\cdot\| \end{aligned}$$

$$\|g_n\| = \sup_{t \in [0,1]} |n^{-1} \sin nt| \leq n^{-1} \|g_n\|' =$$

$$= |n^{-1} \sin 0| + \sup_{t \in [0,1]} |\cos nt| = 1$$

$g_n \rightarrow 0$ în $\|\cdot\|_1$ și $\|\cdot\|$ dar nu are limită în $\|\cdot\|'$. $\|f\|_1 \leq \|f\| \leq \|f\|'$, dar ele nu sunt echivalente. ■

Problema 2.1.15 Fie \mathbb{P} spațiul liniar al polinoamelor cu coeficienți reali.

a) $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, atunci $p(P) = |a_0| + \dots + |a_n|$ este o normă pe \mathbb{P} și $p(P_1P_2) \leq p(P_1)p(P_2)$.

b) Aplicația $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, $\varphi(P) = P'$ este o aplicație liniară care nu este continuă față de norma P .

c) Fie $p_1(P) = \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|$. Să se arate că p_1 este o normă dar p și p_1 nu sunt echivalente.

Soluție. a)

$$(PQ)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + \dots + a_nb_mX^{n+m}$$

$$p(PQ) = \sum_{k=0}^{n+m} \left| \sum_{i=0}^k a_ib_{k-i} \right| \leq \sum_{i,j=0}^{n,m} |a_ib_j| = p(P)p(Q)$$

b) $P_n(x) = n^{-1}X^n$ $p(P_n) = n^{-1}$ $P_n \rightarrow 0$ (în p) $p(P'_n) = 1$ $P'_n \not\rightarrow 0$

c) Se arată ușor că $p_1(P) \leq p(P)$ Presupunem că există $C \geq 0$ astfel încât $p(P) \leq Cp_1(P)$, $\forall p \in P$. Fie $P_n(x) = (n+1)^{-1}(1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n})$
 $p(P_n) = 1$ $P_n(x) = (n+1)^{-1} \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1 + x^2}$ $p_1(P_n) = (n+1)^{-1} \Rightarrow C \geq n+1$

$$P(p) = \frac{2n+1}{n+1}$$

$(P, \|\cdot\|)$ este o algebră normată. ■

2.2 Spații Hilbert

2.2.1 Funcționale liniare în spații Hilbert

Problema 2.2.1 Expresia generală a unei funcționale liniare într-un spațiu Hilbert.

Soluție. $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spațiu Hilbert. Pentru y fixat $\langle x, y \rangle$ este o funcțională liniară, continuă. Fie

$$f(x) = \langle x, y \rangle \quad (2.7)$$

$$|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \Rightarrow \|f\| \leq \|y\| \quad (2.8)$$

■

Să arătăm că funcționalele de forma (2.7) sunt singurele din H și că în (2.8) are loc egalitatea.

Teorema 2.2.2 (Riesz) Pentru orice funcțională liniară și continuă, definită pe spațiul Hilbert H , $\exists! y \in H$ astfel încât $\forall x \in H, f(x) = \langle x, y \rangle$ și

$$\|f\| = \|y\|. \quad (2.9)$$

Demonstrație. Fie $H_0 = \{x \in H : f(x) = 0\} = \text{Ker } f$, f liniară și continuă $\Rightarrow H_0$ închis. Dacă $H_0 = H \Rightarrow y = 0$. Presupunem că $H_0 \neq H$. Fie $y_0 \notin H_0$. Scriem y_0 sub forma $y_0 = y' + y''$ ($y' \in H_0, y'' \perp H_0$) Evident $y'' \neq 0$ și $f(y'') \neq 0$. Putem lua $f(y'') = 1$.

Observația 2.2.3 $f(y_0) = \underbrace{f(y')} + f(y'') = f(y'')$
0

Putem lua $f(y'') = 1$. Să luăm $x \in H$ și punem $f(x) = \alpha$. Elementul $x' = x - \alpha y'' \in H_0$ căci

$$f(x') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0$$

Deci

$$\langle x, y'' \rangle = \langle x' + \alpha y'', y'' \rangle = \alpha \langle y'', y'' \rangle + \langle x', y'' \rangle$$

astfel încât

$$f(x) = \alpha = \left\langle x, \frac{y''}{\langle y'', y'' \rangle} \right\rangle$$

și deci putem lua $y = \frac{y''}{\langle y'', y'' \rangle}$. Unicitatea $\langle x, y \rangle = \langle x, y_1 \rangle \Rightarrow \langle x, y - y_1 \rangle = 0$ deci $y - y_1 \perp H$, posibil doar dacă $y = y_1$. Pe de altă parte

$$\|f\| \geq f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{\langle y, y \rangle}{\|y\|} = \|y\|.$$

■

Cazuri particulare.

$$\begin{array}{ll} L^2[a, b] & f(x) = \langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y}(t) dt \\ l^2 & f(x) = \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k \\ \mathbb{R}^n & f(x) = \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \xi_k \overline{\eta}_k \end{array}$$

Problema 2.2.4 Să se arate că dualul unui spațiu Hilbert este tot un spațiu Hilbert.

Soluție. X^* spațiu Banach. Să arătăm că norma este indusă de un produs scalar. $f, g \in X^* \Rightarrow \exists x, y \in X$ astfel încât $f(u) = \langle u, x \rangle$, $g(u) = \langle u, y \rangle$, $\forall u \in X$. Fie $\langle f, g \rangle = \langle y, x \rangle$. Să arătăm că aplicația astfel definită verifică axiomele produsului scalar.

$$\langle f, f \rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2 \geq 0$$

$$\langle f, g \rangle \stackrel{?}{=} \overline{\langle g, f \rangle}$$

Fie $f'(u) = \langle u, x' \rangle$

$$(f + f')(u) = f(u) + f'(u) = \langle u, x \rangle + \langle u, x' \rangle = \langle u, x + x' \rangle$$

$$\langle f + f', g \rangle = \langle y, x + x' \rangle = \langle y, x \rangle + \langle y, x' \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f', g \rangle$$

$$(\lambda f)(u) = \lambda f(u) = \langle \lambda u, x \rangle = \langle u, \bar{\lambda} x \rangle$$

$$\langle \lambda f, g \rangle = \langle y, \bar{\lambda} x \rangle = \lambda \langle y, x \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$$

■

2.3 Serii Fourier

Fie un sistem ortonormal $\{x_k\}$ într-un spațiu Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ și $x \in H$. Numelele

$$a_k = \langle x, x_k \rangle, \quad k \in \mathbb{N}$$

se numesc **coeficienți Fourier** ai elementului x în raport cu sistemul considerat, iar seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

seria Fourier a elementului x .

Considerăm subspațiul $H_n = \mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_n\})$.

Avem

Teorema 2.3.1 *Suma parțială $s_n = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ a seriei Fourier a unui element x este proiecția acelui element pe subspațiul H_n .*

Demonstrație. $x = s_n + (x - s_n)$ și pentru $s_n \in H_n$ este suficient să arătăm că $x - s_n \perp H_n$. $x - s_n \perp x_k$ ($x \perp E \Rightarrow x \perp \overline{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow x - s_n \perp H_n$). ■

Corolar 2.3.2 *Pentru orice element*

$$z = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \in H_n$$

avem

$$\|x - s_n\| = d(x, H_n) \leq \|x - z\|$$

Pe de altă parte

$$\|x\|^2 = \|s_n\|^2 + \|x - s_n\|^2 \geq \|s_n\|^2 \quad (2.10)$$

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \quad (2.11)$$

Corolar 2.3.3 (Inegalitatea lui Bessel)

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Trecând la limită pentru $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|x\|^2 \quad (2.12)$$

Dacă în (2.12) are loc egalitate pentru $x \in X$ spunem că este verificată **egalitatea lui Parseval** sau **ecuația de închidere**.

Teorema 2.3.4 *Seria Fourier a oricărui element $x \in H$ converge întotdeauna și suma sa este proiecția lui H pe $H_0 = \overline{\mathcal{L}(\{x_k\})}$. Pentru ca suma seriei Fourier să fie egală cu un element dat x , este necesar și suficient ca ecuația de închidere să fie verificată pentru acel element.*

Demonstrație. (2.12) $\Rightarrow \sum_{k=1}^n |a_k|^2$ convergentă. Pentru sumele parțiale se obține

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{convergența seriei Fourier}$$

Fie $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$. Deoarece $s \in H_0$ și $x = s + x - s$ putem arăta ca în demonstrația teoremei 2.3.1 că $x - s \perp H_0$. Ținând cont de (2.11), (2.10) se rescrie

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \Rightarrow \text{concluzia.}$$

■

Dacă $\{x_k\}$ este complet, $H_0 = H$ și $\forall x \in H$ proiecția lui x pe H_0 coincide cu x .

Corolar 2.3.5 *Dacă $\{x_k\}$ este complet $\forall x \in H$ seria sa Fourier converge la x .*

Spunem că sistemul ortonormal $\{x_k\}$ este închis dacă ecuația de închidere este verificată pentru orice $x \in H$.

Corolar 2.3.6 $\{x_k\}$ închis $\Leftrightarrow \{x_k\}$ complet.

Demonstrație. Teorema 2 \Rightarrow ecuația de închidere are loc $\forall x \in H_0$, deci închiderea este echivalentă cu $H_0 = H$, adică completitudinea. ■

Exemplul 2.3.7 Să se determine seria Fourier trigonometrică pentru funcția:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

Soluție. Funcțiile de bază sunt

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dots, x_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, y_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \dots,$$

iar coeficienții

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2\sqrt{\pi}},$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} x \cos kx = \frac{2}{\sqrt{\pi}k} [(-1)^k - 1],$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin kx dx = 0.$$

$$s_n(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos kx.$$

■

Observația 2.3.8 Seria Fourier trigonometrică pe $[-l, l]$ are expresia:

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum \left(a_k \cos \frac{n\pi x}{l} + b_k \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

iar coeficienții sunt dați de formulele

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Problema 2.3.9 Fie $f(x) = x^2$. Se cere seria sa Fourier pe $[-\pi, \pi]$.

Soluție.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \\
 \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx &= \frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \\
 &= -\frac{2}{n} \left[-x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \\
 &= -\frac{2}{n} \left[-\pi \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n} \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2\pi}{n^2} \cos n\pi = \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n \\
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3} \pi^2 \\
 x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}
 \end{aligned}$$

Pentru $x = \pi$ $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. ■

Problema 2.3.10 Dezvoltați $f(x) = x$ pe $[-\pi, \pi]$ și $[0, 2\pi]$.

Soluție.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx = \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \\
 \Rightarrow x &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}
 \end{aligned}$$

■

2.4 Polinoame ortogonale

2.4.1 Calculul polinoamelor ortogonale

Se poate da o metodă generală de construire a unei familii de polinoame ortogonale în raport cu orice funcție pondere pe un interval finit $[a, b]$ sau pe o mulțime finită de puncte (în cazul unei mulțimi finite, familia va fi de asemenea finită). Se poate aplica procedeul Gramm-Schmidt mulțimii $\{1, x, x^2, \dots\}$, dar procedeul nu

face uz de proprietățile algebrice ale polinoamelor și este sensibil la erorile de rotunjire.

Fie $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}\}$ o familie ortonormală de polinoame, astfel încât gradul lui Q_i să fie i și fie $\overline{Q}_n \perp Q_i, i = 0, n-1$.

Să considerăm polinomul

$$\overline{Q}_n(x) - \alpha x Q_{n-1}(x)$$

Pentru o alegere convenabilă a lui $\alpha \neq 0$, acest polinom are gradul $\leq n-1$, deci

$$\overline{Q}_n - \alpha x Q_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i Q_i$$

Dacă $\langle \overline{Q}_n, Q_i \rangle > 0$ pentru orice $i = 0, n-1$ trebuie să avem

$$0 = \langle \overline{Q}_n, Q_{n-1} \rangle = \alpha \langle x Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle + \alpha_{n-1} \quad (2.13)$$

$$0 = \langle \overline{Q}_n, Q_{n-2} \rangle = \alpha \langle x Q_{n-1}, Q_{n-2} \rangle + \alpha_{n-2}$$

Putem alege $\alpha = 1$, deoarece înmulțirea cu o constantă nu afectează ortogonalitatea. Deci α_{n-1} și α_{n-2} se pot obține din ecuațiile de mai sus. Aplicând raționamente similare lui Q_i pentru $i < n-2$ obținem $\alpha_i = 0$ pentru $i < n-2$. Aceasta sugerează următoarea formulă de recurență pentru calculul lui \overline{Q}_n :

$$\overline{Q}_n(x) = (x + a_n)Q_{n-1}(x) + b_n Q_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \quad (2.14)$$

$$Q_n = \frac{\overline{Q}_n}{\|\overline{Q}_n\|}$$

și

$$a_n = -\langle x Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle \quad (2.15)$$

$$b_n = -\langle x Q_{n-1}, Q_{n-2} \rangle \quad (2.16)$$

Se verifică că pentru a_n și b_n astfel determinate avem $\langle \overline{Q}_n, Q_i \rangle = 0, i = 0, n-2$ și că \overline{Q}_n cu a_n și b_n determinate de (2.15) și (2.16) este unic determinat.

Deci (2.14) ne dă o formulă de recurență pentru calculul polinoamelor ortogonale (ortonormale) în $L_w^2[a, b]$. Vom începe punând $Q_0 = b_0$, unde b_0 este o constantă astfel încât $\|Q_0\| = 1$ și luăm $\overline{Q}_1 = (x + a_1)Q_0$. Din

$$\langle \overline{Q}_1, Q_0 \rangle = \langle x Q_0, Q_0 \rangle + a_1 = 0$$

se determină

$$a_1 = -\langle x Q_0, Q_0 \rangle$$

și se continuă.

Exemplul 2.4.1 Pentru polinoamele Cebîșev I aplicând (2.14)-(2.16) se obține

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

2.4.2 Exemple de polinoame ortogonale

I. Polinoamele lui Cebîșev de speța I

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad t \in [-1, 1]$$

Ele sunt ortogonale pe $[-1, 1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

Are loc relația de recurență

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$$

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t$$

II. Polinoamele lui Hermite

$$h_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$a = -\infty, \quad b = \infty, \quad w(t) = e^{-t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} h_m(t) h_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n \end{cases}$$

$$h_{n+1}(t) = 2t h_n(t) - 2n h_{n-1}(t)$$

$$h_0(t) = 1, \quad h_1(t) = 2t$$

III. Polinoamele lui Laguerre

$$g_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$$

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad w(t) = e^{-t}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} g_m(t) g_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

$$g_{n+1}(t) = \frac{2n+1-t}{n+1} g_n(t) - n g_{n-1}(t)$$

$$g_0(t) = 1, \quad g_1(t) = 1 - t$$

IV. Polinoamele lui Hermite

$$w(t) = e^{-t^2} \quad \text{pe } \mathbb{R} \quad (a = -\infty, b = \infty)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} h_n(t) h_m(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n \end{cases}$$

$$h_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$h_{n+1}(t) = 2th_n(t) - 2nh_{n-1}(t)$$

$$h_0(t) = 1, \quad h_1(t) = 2t$$

Proprietăți ale polinoamelor ortogonale

P1. Rădăcini reale, distincte, situate în (a, b) .

P2. Relația de recurență dată de ecuațiile (2.14), (2.15) și (2.16).

P3. $\tilde{p}_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$, $\|\tilde{p}_n\| = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|p\|$

P4. Caracterizarea cu ajutorul ecuațiilor diferențiale.

Fie $P_n = \{p_0, \dots, p_n\}$ o mulțime de polinoame ortogonale pe intervalul $[a, b]$ în raport cu ponderea w .

Avem

$$\int_a^b w(t) p_i(t) t^k dt = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 0, \dots, i-1. \quad (2.17)$$

Se consideră funcția U_i astfel încât

$$w(t) p_i(t) = U_i^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}$$

Din (2.17) se obține

$$\int_a^b U_i^{(i)}(t) t^k dt = 0, \quad k = 0, \dots, i-1$$

Se integrează de $k+1$ ori prin părți

$$[U_i^{(i-1)}(t) t^k - k U_i^{(i-2)}(t) t^{k-1} + \dots + (-1)^k k! U_i^{(i-k-1)}(t)]_c^b = 0$$

pentru $k = 0, 1, \dots, i-1$ condiții satisfăcute dacă

$$\begin{cases} U_i^{(i-1)}(a) = U_i^{(i-2)}(a) = \dots = U_i(a) = 0 \\ U_i^{(i-1)}(b) = U_i^{(i-2)}(b) = \dots = U_i(b) = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Întrucât $\frac{1}{w} U_i^{(i)} = p_i \in \mathbb{P}_i$, funcția U_i poate fi obținută ca soluție a ecuației diferențiale

$$\frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}} \left[\frac{1}{w(t)} U_i^{(i)}(t) \right] = 0$$

de ordinul $2i+1$ cu condițiile la limită (2.18).

Deci U_i se determină până la o constantă multiplicativă:

$$p_i(t) = \frac{A_i}{w(t)} U_i^{(i)}(t)$$

Constanta A_i se poate determina impunând condiții suplimentare, de exemplu ortonormalitate

$$\int_a^b w(t) p_i^2(t) dt = 1$$

$$p_n(x) = (x - 2n)p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x)$$

$$\mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|^2}{\|p_{n-2}\|^2}, \quad \lambda_n = \frac{\langle x p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}{\|p_{n-1}\|^2}$$

Problema 2.4.2 *Polinoamele Cebîșev de speța I*

$$T_n(x) = \cos n \arccos x$$

Stabiliți proprietățile următoare:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad (2.19)$$

$$T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x) = T_m(T_n(x)) \quad (2.20)$$

$$T_n(2x^2 - 1) = 2T_n(x)^2 - 1 \quad (2.21)$$

$$T_n(x)T_m(x) = \frac{1}{2}(T_{n+m}(x) + T_{m-n}(x)), \quad \text{dacă } m \geq n \quad (2.22)$$

$$\int T_n(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right), \quad \text{dacă } n > 1 \quad (2.23)$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(Q_n(x) - Q_{n-2}(x)) \quad \text{dacă } Q_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}; \quad (2.24)$$

cu $x = \cos \theta$ (polinom Cebîșev de speța a II-a)

$$2^{n-1}x^n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{k} T_{n-2k}(x), \quad n \geq 1 \quad (2.25)$$

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = nU_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (2.26)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m T_m(x) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}, \quad \text{pentru } |t| < 1 \quad (\text{funcția generatoare}) \quad (2.27)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n U_n(x) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2}, \quad \text{pentru } |t| < 1, \quad |x| < 1 \quad (2.28)$$

Soluție. (2.19)-(2.24) și (2.26) cu ajutorul formulelor trigonometrice uzuale. (2.25) se obține dezvoltând $x^n = (\cos \theta)^n = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ și făcând să apară $T_{n-2k}(x)$. Funcțiile generatoare se obțin ca pentru polinoamele Legendre (vezi problema 2.4.7). ■

Problema 2.4.3

1. . Zerourile polinoamelor Cebîșev de speța I sunt

$$\xi_j := \xi_j^{(n)} = \cos \left(\frac{2j-1}{2n} \pi \right), \quad j = \overline{1, n}.$$

În $[-1, 1]$ există $n+1$ extreme

$$\eta_k := \eta_k^{(n)} := \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n}$$

unde T_n are un minim sau un maxim local. În aceste puncte

$$T_n(\eta_k) = (-1)^k, \quad k = 1, n$$

și $\|T_n\|_\infty = 1$ pe $[-1, 1]$. Zerourile și extremele polinoamelor Cebîșev sunt foarte importante ca noduri de interpolare. În raport cu produsul scalar

$$(f, g)_T := \sum_{k=1}^{n+1} f(\xi_k)g(\xi_k)$$

unde $\{\xi_1, \dots, \xi_{n+1}\}$ este mulțimea zerourilor lui T_{n+1} are loc următoarea proprietate

$$(T_i, T_j)_T = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{n+1}{2}, & i = j \neq 0 \\ n+1, & i = j = 0 \end{cases}.$$

2. În raport cu produsul scalar

$$\begin{aligned} (f, g)_U &:= \frac{1}{2}f(\eta_0)g(\eta_0) + f(\eta_1)g(\eta_1) + \dots + f(\eta_{n-1})g(\eta_{n-1}) + \frac{1}{2}f(\eta_n)g(\eta_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n''} f(\eta_k)g(\eta_k), \end{aligned}$$

unde $\{\eta_0, \dots, \eta_n\}$ este mulțimea extremelor lui T_n , are loc o proprietate similară

$$(T_i, T_j)_U = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{n}{2}, & i = j \neq 0 \\ n, & i = j = 0 \end{cases}.$$

Soluție. Avem $\arccos \xi_k = \frac{2k-1}{2n+2}\pi$, $k = \overline{1, n+1}$. Să calculăm acum produsul scalar:

$$\begin{aligned}
 (T_i, T_j)_T &= (\cos i \arccos t, \cos j \arccos t)_T = \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \cos(i \arccos \xi_k) \cos(j \arccos \xi_k) = \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \cos\left(i \frac{2k-1}{2(n+1)}\pi\right) \cos\left(j \frac{2k-1}{2(n+1)}\pi\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \left[\cos(i+j) \frac{2k-1}{2(n+1)}\pi + \cos(i-j) \frac{2k-1}{2(n+1)}\pi \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \cos(2k-1) \frac{i+j}{2(n+1)}\pi + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \cos(2k-1) \frac{i-j}{2(n+1)}\pi.
 \end{aligned}$$

Notăm $\alpha = \frac{i+j}{2(n+1)}\pi$, $\beta = \frac{i-j}{2(n+1)}\pi$ și

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \cos(2k-1)\alpha, \\
 S_2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \cos(2k-1)\beta.
 \end{aligned}$$

Deoarece

$$\begin{aligned}
 2 \sin \alpha S_1 &= \sin 2(n+1)\alpha, \\
 2 \sin \beta S_2 &= \sin 2(n+1)\beta,
 \end{aligned}$$

se obține $S_1 = 0$ și $S_2 = 0$. Cealaltă proprietate se demonstrează analog. ■

Problema 2.4.4 *Polinoame Cebîșev de speța a II-a.*

Definiția 2.4.5 $Q_n \in \mathbb{P}_n$ dat de

$$Q_n(t) = \frac{\sin[(n+1) \arccos t]}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in [-1, 1]$$

se numește polinomul lui Cebîșev de speța a II-a.

$$Q_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(t), \quad t \in [-1, 1]$$

$$\tilde{Q}_n = \frac{1}{2^n} Q_n, \quad \tilde{Q}_n \in \tilde{\mathbb{P}}_n$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} Q_m(t) Q_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{pentru } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{pentru } m = n \end{cases}$$

Polinoamele Q_m , $m = 0, 1, 2, \dots$ sunt ortogonale pe $[-1, 1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \sqrt{1-t^2}$.

Are loc relația de recurență

$$Q_{n+1}(t) = 2tQ_n(t) - Q_{n-1}(t)$$

Ea rezultă imediat din relația $\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2\cos\theta \sin(n+1)\theta$. Dăm primele 4 polinoame ortogonale:

$$Q_0(t) = 1$$

$$Q_1(t) = 2t$$

$$Q_2(t) = 4t^2 - 1$$

$$Q_3(t) = 8t^3 - 4t$$

$$Q_4(t) = 16t^4 - 12t^2 + 1$$

Pentru alte intervale se face schimbarea de variabilă $\tilde{x} = \frac{1}{2}[(b-a)x + a + b]$.

Polinoame Cebîșev și economizarea seriilor de puteri

Polinoamele Cebîșev de speța I pot fi utilizate pentru a reduce gradul unui polinom de aproximare cu o pierdere minimă de precizie. Această tehnică este utilă când se utilizează pentru aproximare polinomul Taylor. Deși polinoamele Taylor sunt foarte precise în vecinătatea punctului în care se face dezvoltarea, dacă ne îndepărtăm de acel punct precizia se deteriorează rapid. Din acest motiv, pentru a atinge precizia dorită este nevoie de polinoame Taylor de grad mai mare. Deoarece polinoamele Cebîșev de speța I au cea mai mică normă Cebîșev pe un interval, ele pot fi utilizate pentru a reduce gradul polinomului Taylor fără a depăși gradul de toleranță admis.

Exemplul 2.4.6 $f(x) = e^x$ poate fi aproximată pe $[-1, 1]$ prin polinomul Taylor de grad 4 în jurul lui 0.

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$R_4(x) = \frac{|f^{(5)}(\xi(x))||x^5|}{5!} \leq \frac{e}{120} \approx 0.023, \quad x \in [-1, 1]$$

Să presupunem că eroarea este $\varepsilon = 0.05$ și că dorim să înlocuim termenul din polinomul Taylor care îl conține pe x^4 cu un polinom Cebîșev de grad ≤ 4 .

Să deducem reprezentarea lui x^k cu ajutorul polinoamelor Cebîșev.

$$T_{n+1} = 2tT_n - T_{n-1}$$

$$T_0(t) = 1$$

$$T_1(t) = t$$

$$T_2(t) = 2t^2 - 1$$

$$T_3(t) = 4t^3 - 3t^2$$

$$T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$$

k	T_k	x^k
0	1	T_0
1	x	T_1
2	$2x^2 - 1$	$\frac{1}{2}T_0 + \frac{1}{2}T_2$
3	$4x^3 - 3x$	$\frac{3}{4}T_1 + \frac{1}{4}T_3$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$	$\frac{3}{8}T_0 + \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{8}T_4$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$	$\frac{5}{8}T_1 + \frac{5}{16}T_3 + \frac{1}{16}T_5$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$\frac{5}{16}T_0 + \frac{15}{32}T_2 + \frac{3}{16}T_4 + \frac{1}{32}T_6$

Deci

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24} \left[\frac{3}{8}T_0(x) + \frac{1}{2}T_2(x) + \frac{1}{8}T_4(x) \right] \\
 &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{64}T_0(x) + \frac{1}{48}T_2(x) + \frac{1}{192}T_4(x) \\
 &= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{192}T_4(x)
 \end{aligned}$$

$$\max_{x \in [-1,1]} |T_4(x)| = 1$$

$$\left| \frac{1}{192}T_4(x) \right| \leq \frac{1}{192} = 0.0053$$

și

$$|R_4(x)| + \left| \frac{1}{192}T_4(x) \right| \leq 0.023 + 0.0053 = 0.0283 < 0.05$$

Deci termenul de grad 4, $\frac{1}{192}T_4(x)$, poate fi omis fără a afecta precizia dorită. Polinomul de grad 3

$$P_3(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

ne dă precizia dorită pe $[-1, 1]$.

Încercăm să eliminăm termenul de grad 3 înlocuind x^3 cu $\frac{3}{4}T_1(x) + \frac{1}{4}T_3(x)$.

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6} \left[\frac{3}{4}T_1(x) + \frac{1}{4}T_3(x) \right] \\ &= \frac{191}{192} + \frac{9}{8}x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{24}T_3(x) \end{aligned}$$

$$\max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{1}{24}T_3(x) \right| = 0.0417$$

$$0.0417 + 0.0283 \approx 0.07 > 0.5$$

Deci P_3 de mai sus ne dă polinomul de grad cel mai mic pentru această aproximare.

Problema 2.4.7 *Polinoamele lui Legendre*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (\text{formula lui Rodrigues})$$

Arătați că

$$L_n \in \mathbb{P}_n \quad \text{și} \quad \langle L_n, L_m \rangle_{L^2[-1, 1]} = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (2.29)$$

$$nL_n(x) = (2n-1)xL_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x) \quad (2.30)$$

$$L_n(x) = \frac{1(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n + \dots \quad (2.31)$$

$$L_n(1) = 1, \quad L_n(-1) = (-1)^n, \quad (2.32)$$

L_n este par pentru n impar și impar pentru n par

$$L'_n(x) = xL'_{n-1}(x) + nL_{n-1}(x) \quad (2.33)$$

$$L'_n(x) - L'_{n-2}(x) = (2n-1)L_{n-1}(x)$$

$$(x^2 - 1)L'_n(x) = n(xL_n(x) - L_{n-1}(x))$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \quad \text{pentru} \quad |t| < 1 \quad (2.34)$$

Soluție. (2.29) Presupunem că $n \geq m$,

$$\langle L_n, L_m \rangle_{L^2} = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 L_m(x) \frac{d}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] dx$$

Integrând succesiv prin părți de obține

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (L_m(x)) (x^2 - 1)^n dx$$

care este nulă pentru $n > m$, iar pentru $n = m$

$$\|L_n\|_{L^2} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{2}{2n+1}$$

(2.30), (2.31), (2.32) se verifică simplu. (2.33) se obține direct din

$$\begin{aligned} L'_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [(x^2 - 1)^n] = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (n \cdot 2x(x^2 - 1)^{n-1}) \\ &= xL'_{n-1}(x) + nL_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Din formula de recurență se obține

$$nL'_n(x) = (2n-1)L_{n-1}(x) + (2n-1)xL'_{n-1}(x) - (n-1)L'_{n-2}(x),$$

de unde eliminând L'_n :

$$xL'_{n-1}(x) - L'_{n-2}(x) = (n-1)L_{n-1}(x)$$

și prin urmare

$$L'_n(x) - L'_{n-2}(x) = (2n-1)L_{n-1}(x)$$

Eliminând L'_{n-2} se obține

$$(x^2 - 1)L'_{n-1}(x) = (n-1)[xL_{n-1}(x) - L_{n-2}(x)]$$

(6) Fie \mathcal{C} un contur închis în \mathbb{C} ce nu conține în interiorul său ± 1 , dar conține pe z ; după formulele lui Cauchy și Rodrigues

$$L_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n (t - z)^{n+1}} dt$$

punând $\frac{1}{Z} = \frac{t^2 - 1}{2(t - z)}$ adică $t = \frac{1}{Z} \left(1 - \sqrt{1 - 2zZ + Z^2} \right)$ avem

$$L_n(z) = \int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2zZ + Z^2}} dZ$$

unde \mathcal{C}_1 este imaginea lui \mathcal{C} prin schimbarea $t \rightarrow Z$ de unde

$$L_n(z) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dZ^n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-2zZ+Z^2}} \right) \Big|_{z=0}$$

și pentru $|t| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(z) = \frac{1}{\sqrt{1-zt+t^2}}$$

■

Problema 2.4.8 Să se arate că polinoamele ortogonale în raport cu $w(x) = \sqrt{x}$ (respectiv $1/\sqrt{x}$) pe $(0, 1)$ sunt

$$q_n(x) = L_{2n+1}(\sqrt{x}) / \sqrt{x}$$

respectiv

$$q_n(x) = L_{2n}(\sqrt{x})$$

Soluție. Rezultatul se obține prin schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (respectiv $t = \sqrt{x}$) utilizând proprietățile (1) și (4) din exercițiul precedent. ■

Problema 2.4.9 Polinoamele lui Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

(1) Arătați că

$$H_n \in \mathbb{P}_n \quad \text{și} \quad \langle H_n, H_m \rangle_{L^2_{\mathbb{R}}} = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$$

cu $w(x) = e^{-x^2}$.

(2)

$$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + (2n-2)H_{n-2}(x) = 0$$

(3)

$$H_0 = 1, \quad H_1(x) = 2x$$

$$H_n(x) = 2^n x^n + \dots$$

H_n este o funcție pară sau impară după cum n este par sau impar.

$$H_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!}$$

(4)

$$H'_{n-1}(x) = 2xH_{n-1}(x) - H_n(x), \quad H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

(5)

$$H_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \frac{n!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

(6)

$$2^n x^n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{n!}{k! (n-2k)!} H_{n-2k}(x)$$

(7)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{2tx-t^2} \quad |t| < 1 \quad (\text{funcție generatoare})$$

(8)

$$2^{n/2} H_n \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_k(x) H_{n-k}(y)$$

Soluție. Proprietățile (1), (2), (3), (4), (5), (7) rezultă din definiția lui H_n procedând ca la problema 2.4.2. Proprietatea (6) se obține dezvoltând $(2x)^n$ în serie Fourier.

$$(2x)^n = \sum_{k=0}^n ((2x)^n, \tilde{H}_k) \tilde{H}_k(x)$$

unde \tilde{H}_k sunt polinoamele ortonormale Hermite, evaluând produsul scalar (x^n, \tilde{H}_k) . Proprietatea (8) se obține cu ajutorul funcției generatoare

$$e^{2tx-t^2} e^{2ty-t^2} = e^{2\left(t\sqrt{2}\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) - (t\sqrt{2})^2}$$

adică pentru $|t| < 1$

$$\left(\sum H_n(x) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} H_n(y) \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) (t\sqrt{2})^n \frac{1}{n!}$$

și identificând coeficienții lui t^n din cei doi membri. ■

Problema 2.4.10 Polinoamele asociate ale lui Laguerre

$$l_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}) \quad \text{pentru } \alpha > -1.$$

(1) Arătați că

$$l_n^\alpha \in \mathbb{P}_n \quad \text{și} \quad \langle l_n^\alpha, l_m^\alpha \rangle = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}$$

(în $L_w^2(0, \infty)$ cu $w(x) = x^\alpha e^{-x}$) unde $\Gamma(s)$ este funcția Γ a lui Euler definită prin

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \quad (s > 0)$$

(2)

$$n l_n^\alpha(x) - (2n - 1 + \alpha - x) l_{n-1}^\alpha(x) + (n - 1 - \alpha) l_{n-2}^\alpha(x) = 0$$

(3)

$$l_n^{\alpha+1}(x) - l_{n-1}^{\alpha+1}(x) = l_n^\alpha(x)$$

(4)

$$\frac{d}{dx} l_n^\alpha(x) = -l_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad x \frac{d}{dx} l_n^\alpha(x) = n l_n^\alpha(x) - (n + \alpha) l_{n-1}^\alpha(x)$$

(5)

$$l_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n + \alpha}{n - k} x^k / k!$$

(6)

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n + \alpha}{n - k} l_k^\alpha$$

(7)

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n l_n^\alpha(x) = \frac{1}{(1 - t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} \quad |t| < 1 \quad (f.gen.)$$

(8)

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! l_n^{-1/1}(x^2) \\ H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x l_n^{1/2}(x^2)$$

Soluție. (1)-(7) se deduc utilizând tehnici analoge celor din exercițiile precedente. (8) se obține dezvoltând în serie $H_n(x)$ și $l_n^\alpha(x)$. ■

Problema 2.4.11 (Ecuația diferențială verificată de polinoamele ortogonale) Fie w o funcție pozitivă pe $[a, b]$ astfel încât

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{A_0 + A_1 x}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2} \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow a_+} w(x)(B_0 + B_1 x + B_2 x^2) = 0 \\ \text{(sau } x \rightarrow b_- \text{)} \quad (2.35)$$

$$(B_0 + B_1 x + B_2 x^2) p_n'' + (A_0 + A_1 x + B_1 + B_2 x) p_n' - (A_1 n + B_2 n(n+1)) p_n = 0 \quad (2.36)$$

Aplicație. Stabiliți ecuațiile diferențiale corespunzătoare ponderii

$w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $[a, b] = [-1, 1]$ (polinoamele Jacobi $p_n(\alpha, \beta)$)

$$(1-x^2)p_n'' - ((\alpha-\beta) + (\alpha+\beta+2)x)p_n' - n(\alpha+\beta+1+n)p_n = 0$$

în particular pentru polinoamele Cebîșev de speța I

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

și pentru polinoamele lui Legendre L_n

$$(1-x^2)L_n''(x) - 2xL_n'(x) + L_n(x) = 0$$

$w(x) = e^{-x^2}$ pe \mathbb{R} , polinoamele lui Hermite H_n

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

$w(x) = x^\alpha e^{-x}$ pe $(0, \infty)$, $\alpha > 1$, polinoamele lui Laguerre l_n^α

$$xp_n''(x) + (\alpha-1-x)p_n'(x) + np_n(x) = 0$$

unde $p_n(x) = l_n^\alpha(x)$.

Soluție. Dacă $v(x) = w(x)(B_0 + B_1x + B_2x^2)$ ecuația diferențială (2.36) înmulțită cu $w(x)$, ținând cont de (2.35) se scrie sub forma Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left(v(x) \frac{dp_n(x)}{dx} \right) = (A_{1n} + B_2n(n+1))p_n(x)w(x)$$

de unde

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [r(x)(p_n'(x)p_m(x) - p_m'(x)p_n(x))] = \\ & = \{A_1(n-m) + B_2[n(n+1) - m(m+1)]\}p_n(x)p_m(x)w(x) \end{aligned}$$

Integrând pe $[a, b]$ se obține

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x)dx = 0 \quad \text{pentru } n \neq m$$

și se verifică existența unei soluții polinomiale a lui (2) de grad n ; prin urmare $(p_n)_{n \geq 0}$ constituie sistemul de polinoame ortogonale pe $[a, b]$ relativ la ponderea w . 2. Verificare prin calcul. ■

Problema 2.4.12 Fie w o funcție pondere pozitivă pe $[a, b]$, $E = L_w^2[a, b]$ și (\tilde{p}_n) polinoamele ortonormale asociate.

(1) Arătați că $\forall f \in E$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f, \tilde{p}_n)^2 \leq \|f\|_E^2 \quad (2.37)$$

(inegalitatea lui Bessel) cu egalitate (a lui Parseval) dacă spațiul vectorial \mathbb{P} al polinoamelor este dens în E în care caz

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \tilde{p}_n \rangle \tilde{p}_n,$$

este serie convergentă în E .

(2) \mathbb{P} este dens în E dacă $[a, b]$ este mărginit.

(3) Polinomul de cea mai bună aproximare de grad n a lui f în E este

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n (f, \tilde{p}_k) \tilde{p}_k(x) \quad \text{și} \quad q_n(x) = f(x)$$

în cel puțin $n + 1$ puncte din $[a, b]$.

Soluție.

(1) Rezultă imediat de la curs.

(2) \mathbb{P} este dens în $C^0[a, b]$ pentru $[a, b]$ mărginit și

$$\|f\|_E = \|f\|_{\infty} \left(\int_a^b w(x) dx \right)^{1/2}$$

(3) q_n este caracterizat prin $(f - q_n, \tilde{p}_k) = 0$ pentru $k = \overline{0, n}$ în particular pentru $k = 0$

$$\int_a^b (f(x) - q_n(x)) \tilde{p}_0(x) w(x) dx = 0$$

deci $f - q_n$ se anulează în cel puțin într-un punct din $[a, b]$. Dacă $f - q_n$ se anulează în mai puțin de $n + 1$ puncte x_1, \dots, x_l din $[a, b]$ cu $l \leq n$ atunci dacă

$$s(x) = \prod_{i=1}^l (x - x_i),$$

$s(x)(f(x) - q_n(x))$ păstrează semn constant și deci $\langle f - q_n, s \rangle \neq 0$ ceea ce contrazice faptul că $f - q_n \perp \mathbb{P}_n$ în $L_w^2[a, b]$

■

Teorema 2.4.13 (Cebîșev) Pentru orice $f \in C[a, b]$ există P^*d și există $d + 2$ puncte

$$a \leq x_0 < \cdots < x_d + 1 \leq b$$

pentru care

$$(-1)^i [P^*d(x_i) - f(x_i)] = \sigma \|P^*d - f\|_\infty, \quad i = 0, 1, \dots, d + 1$$

unde $\sigma = \text{sign}(P^*d(x_0) - f(x_0))$.

Problema 2.4.14 Să se determine p.c.b.a. unif. din \mathbb{P}_1 pentru $f(x) = \sqrt{x}$ pe $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$.

Soluție.

$$P_1^* = c_0 + c_1x$$

Eroarea de aproximare este

$$e_1(x) = c_0 + c_1x - \sqrt{x}$$

$$e'_1(x) = c_1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x_n = \frac{1}{4c_1^2}$$

Conform teoremei lui Cebîșev abaterea maximă se realizează în 3 puncte din $[a, b]$ și obținem sistemul neliniar

$$\begin{cases} c_0 + c_1a - \sqrt{a} = E_1 \\ c_0 + \frac{1}{4c_1} - \frac{2}{c_1} = -E_1 \\ c_0 + c_1b - \sqrt{b} = E_1 \end{cases},$$

cu soluțiile

$$c_0 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{4} \right]$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$E_1 = c_0 + c_1a - \sqrt{a}$$

■

Capitolul 3

Teoria erorilor

Definiția 3.0.1 Aplicația $A : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ se numește procedeu de aproximare, iar $a \in A(\alpha)$ aproximantă pentru α .

$F = \{mb^n \mid m, n \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, b > 1\}$ numere practice (fracții b -adice limitate)
 F densă.

Regula de rotunjire - rotunjire la cifră pară

Surse de erori

1) Erori ale problemei - erori de formulare; apar datorită simplificării și idealizării problemei. Erori ale metodei - apar datorită faptului că se lucrează cu aproximări.

2) Erori reziduale - expresiile unor valori din analiza matematică rezultă din procese infinite, iar noi lucrăm cu un număr finit de pași.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

3) Erori inițiale - datorate parametrilor de intrare - erori fizice și de măsurare

4) Erori de rotunjire - datorate sistemelor de numerație și lucrului cu un număr finit de zecimale

$$\frac{1}{3} = 0.333 \quad \Delta \approx 3 \cdot 10^{-4}$$

5) Erori ale operațiilor - lucrând cu numere aproximative erorile se propagă - erori inerente.

3.1 Erori absolute și relative. Cifre semnificative corecte

Exemplul 3.1.1 Să se determine o limită a erorii absolute dacă se lucrează cu 3.14 în loc de π .

$$3.14 < \pi < 3.15 \quad |a - \pi| < 0.01 \quad \Delta_a = 0.01$$

Exemplul 3.1.2 Greutatea unui dm^3 de apă la 0°C este $G = 999.847\text{gf} \pm 0.001\text{gf}$. Să se determine o limită a erorii relative.

$$\Delta a = 0.001 \quad G \geq 999.846$$

$$\delta_a = \frac{0.001}{999.847} \approx 10^{-4}\%$$

Cifre semnificative

$\neq 0$

0 între cifre semnificative sau marcator de poziție

0 nesemnificativ - când fixează poziția mărcii zecimale

0 007010 2003 000 000

$$\alpha = \alpha_0 b^k + \alpha_1 b^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} b^{k-n+1} + \alpha_n b^{k-n}$$

Definiția 3.1.3 Spunem că $a \approx \alpha$ cu n cifre semnificative corecte dacă

$$|\Delta a| \leq \frac{1}{2} b^{k-n+1}$$

Dacă $b = 10$ și $|\Delta a| \leq \frac{1}{2} 10^{-m}$ spunem că $a \approx \alpha$ cu m zecimale corecte.

Teorema 3.1.4 Dacă a este obținut din α prin rotunjire la n cifre atunci a aproximează pe α cu n cifre semnificative corecte.

Exemplul 3.1.5 Rotunjind

$$\pi = 3.1415926535\dots$$

la 5, 4, 3 cifre semnificative corecte obținem aproximațiile

$$3.1416, \quad 3.142, \quad 3.14$$

$$\frac{1}{2} 10^{-4}, \quad \frac{1}{2} 10^{-3}, \quad \frac{1}{2} 10^{-2}$$

Teorema 3.1.6 Fie $a, \alpha \in \mathbb{R}_+$. Dacă a aproximează pe α cu n cifre semnificative corecte, unde a_0 este cifra cea mai semnificativă a lui a în baza b , atunci

$$\delta_a \leq \frac{1}{a_0 b^{n-1}}$$

Exemplul 3.1.7 Care este o limită a erorii relative dacă lucrăm cu 3.14 în loc de π ?

$$a_0 = 3, \quad n = 3$$

$$\delta_a = \frac{1}{3 \cdot 10^{3-1}} = \frac{1}{300} = \frac{1}{3}\%$$

Exemplul 3.1.8 Câte cifre trebuie considerate la calculul lui $\sqrt{20}$ astfel încât eroarea să nu depășească 0.1%?

$$a_0 = 4, \quad \delta = 0.001$$

$$\frac{1}{4 \cdot 10^{n-1}} \leq 0.001, \quad 10^{n-1} \geq 250 \Rightarrow n = 4$$

Invers, numărul de cifre corecte

Teorema 3.1.9 $\alpha \in \mathbb{R}_+$, a aproximează pe α și

$$\delta_a \leq \frac{1}{2(\alpha_0 + 1)b^{n-1}},$$

unde α_0 este cifra cea mai semnificativă a lui α atunci a aproximează pe α cu n cifre semnificative corecte.

Exemplul 3.1.10 $a \approx \alpha$, $a = 24253$, eroarea relativă 1%. Câte cifre semnificative corecte are $\Delta = 24253 : 0.0 \approx 243 = 2.43 \cdot 10^2 \Rightarrow 2$ cifre

3.2 Propagarea erorilor

$$u = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\Delta u \approx \sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

$$|\Delta u| \approx \sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

$$\delta_n \approx \sum \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f \right| \Delta x_i \approx \sum \left| x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f \right| \delta x_i$$

Exemplul 3.2.1 Găsiți o limită a erorii absolute și relative pentru volumul sferei $V = \frac{\pi d^3}{6}$ cu diametrul egal cu $3.7\text{cm} \pm 0.04\text{cm}$ și $\pi \approx 3.14$.

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6}d^3 = 8.44$$

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi d^2 = 21.5$$

$$\Delta V = \left| \frac{\partial V}{\partial \pi} \right| |\Delta \pi| + \left| \frac{\partial V}{\partial d} \right| |\Delta d| = 8.44 + 21.5 \cdot 0.05 \approx 1.088 \approx 1.1$$

$$\Delta_V = \frac{1.0888}{274} \approx 4\%$$

Exemplul 3.2.2 (Se aplică principiul efectelor egale) Un cilindru are raza $R \approx 2\text{m}$, înălțimea $H \approx 3\text{m}$. Cu ce erori absolute trebuie determinate R și H astfel încât V să poată fi calculat cu o eroare $< 0.1\text{m}^3$.

$$V = \pi R^2 H, \quad \Delta V = 0.1\text{m}^3$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 H = 12, \quad \frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R H = 37.7$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2 = 12.6, \quad n = 3$$

$$\Delta \pi \approx \frac{\Delta V}{3 \frac{\partial V}{\partial \pi}} = \frac{0.1}{3.12} < 0.003$$

$$\Delta R \approx \frac{0.1}{3 \cdot 37.7} < 0.001$$

$$\Delta H \approx \frac{0.1}{3 \cdot 12.6} < 0.003$$

3.3 Erorile pentru vectori și operatori

Problema 3.3.1 Care este eroarea pentru $\int_c^d f(u)du$ când funcția f este aproximată prin \hat{f} .

$$Tf = \int_c^d f(u)du, \quad T : L^2[c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|T\| = \max_{\|\varepsilon(x)\|_\infty=1} \left| \int_c^d \varepsilon(x)dx \right| = \max_{\{\varepsilon(x) \mid \max_{[c,d]} |\varepsilon(x)|=1\}} \left| \int_c^d \varepsilon(x)dx \right| = d - c$$

$$\|\widehat{f}(x) - f(x)\|_\infty := \|\varepsilon(x)\| = \max_{x \in [c, d]} |\varepsilon(x)| \leq b_f$$

$$\Delta_T \leq (d - c)b_f$$

$$S_x(T) = \frac{\|T\| \|x\|}{\|Tx\|} = \max_{\varepsilon \neq 0} \rho_{x, \varepsilon}$$

Problema 3.3.2 Să se studieze senzitivitatea operatorului aditiv

$$U(u, v) = u + v, \quad T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$$

Soluție. Fie

$$(u, v) = (2, 3)$$

$$S_{2,3}(T) = \frac{|2| + |3|}{|2 + 3|} = 1$$

În general

$$S_x(T) = \frac{|u| + |v|}{|u + v|}$$

Dacă u și v au același semn

$$S_x(T) = 1$$

Dacă u și v au semne opuse $|u + v| < |u| + |v|$ și $S_x(T) > 1$.

Senzitivitatea poate fi făcută oricât de mare pentru u și v de semne contrare și apropiate în modul

$$u = 0.5, \quad v = -0.499999$$

$$\Delta_u, \Delta_v < 10^{-6}$$

$$S_x(T) \approx \frac{0.000002}{0.999999} \approx 2 \cdot 10^{-6}$$

Concluzie. ε rel. ieșire $> 10^6 \cdot$ eroarea rel. de intrare ■

Morala: evitarea scăderii cantităților apropiate

Problema 3.3.3 Indicați o modalitate de a evita anularea pentru

$$1) e^x - 1 \quad |x| \ll 1$$

$$2) \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad x \gg 0$$

Problema 3.3.4 Să se determine numărul de condiționare pentru operatorul $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \rightarrow \begin{bmatrix} x + y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

Soluție.

$$T_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 3 \quad \|A^{-1}\|_\infty = 3$$

$$\text{cond}_\infty(T) = 9$$

■

3.4 Aritmetică în virgulă flotantă

Problema 3.4.1 Să se compare următoarele două metode pentru calculul lui $x^2 - y^2$:

$$\begin{aligned} & x \otimes x \ominus y \otimes y, \\ & (x \oplus y) \otimes (x \ominus y). \end{aligned}$$

Soluție. Eroarea relativă pentru $x \ominus y$ este

$$\delta_{x \ominus y} = \delta_1 = [(x \ominus y) - (x - y)] / (x - y)$$

$$|\delta_1| \leq 2\varepsilon$$

Altfel scris

$$x \ominus y = (x - y)(1 + \delta_1) \quad |\delta_1| \leq 2\varepsilon$$

La fel

$$x \oplus y = (x + y)(1 + \delta_2) \quad |\delta_2| \leq 2\varepsilon$$

Presupunând că înmulțirea se realizează calculând produsul exact și apoi efectuând rotunjirea, eroarea relativă este cel mult $1/2$ ulp, deci

$$u \otimes v = uv(1 + \delta_3) \quad |\delta_3| \leq \varepsilon \quad \forall u, v \in NVF$$

Se ia $u = x \ominus y$, $v = x \oplus y$

$$(x \ominus y) \otimes (x \oplus y) = (x - y)(1 + \delta_1)(x + y)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3)$$

Eroarea relativă este

$$\frac{(x \ominus y) \otimes (x \oplus y) - (x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)} = (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) - 1 =$$

$$= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_2\delta_3 < 5\varepsilon + 8\varepsilon^2 \approx 5\varepsilon$$

Pentru cealaltă variantă

$$\begin{aligned}(x \otimes x) \ominus (y \otimes y) &= [x^2(1 + \delta_1) - y^2(1 + \delta_2)](1 + \delta_3) = \\ &= [(x^2 - y^2)(1 + \delta_1) + (\delta_1 - \delta_2)y^2](1 + \delta_3)\end{aligned}$$

Dacă $x \approx y \Rightarrow (\delta_1 - \delta_2)y^2 \approx x^2 - y^2$, atunci $(x - y)(x + y)$ este mai precis decât $x^2 - y^2$

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{(x \otimes x) \ominus (y \otimes y) - (x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} \\ &= (1 + \delta_1)(1 + \delta_3) + \frac{(\delta_1 - \delta_2)(1 + \delta_3)y^2}{x^2 - y^2} - 1 \\ &= \delta_1 + \delta_3 + \delta_1\delta_3 + \frac{y^2}{x^2 - y^2}(\delta_1 - \delta_2 + \delta_1\delta_3 - \delta_2\delta_3).\end{aligned}$$

■

Problema 3.4.2 (Conversia binar zecimal (scriere și apoi citire)) Pentru precizie simplă avem $p = 24$ și $2^{24} < 10^8$ deci 8 cifre par suficiente pentru a recupera numărul original (totuși nu este așa!). Când un număr binar IEEE simplă precizie este convertit la cel mai apropiat număr zecimal de 8 cifre, nu este întotdeauna posibil să recuperăm unic numărul binar din cel zecimal. Dacă se utilizează nouă cifre, totuși, conversia numărul zecimal în binar va recupera numărul flotant original.

Demonstrație. Numerele binare în simplă precizie din intervalul $[10^3, 2^{10}) = [1000, 1024)$ au zece biți în stânga mării zecimale și 14 la dreapta. Există deci $(2^{10} - 10^3) = 393216$ numere binare diferite în acest interval. Dacă numerele zecimale sunt reprezentate cu 8 cifre avem $(2^{10} - 10^3)10^4 = 240000$ numere zecimale în acest interval. Deci nu există nici o modalitate de a reprezenta prin 240000 de numere zecimale 393216 numere binare diferite. 8 cifre sunt insuficiente!

Pentru a arăta că nouă cifre sunt suficiente trebuie să arătăm că spațiul dintre numerele binare este întotdeauna mai mare decât cel dintre numerele zecimale. Aceasta ne asigură că, pentru fiecare număr zecimal posibil, intervalul de forma $\left[N - \frac{1}{2}ulp, N + \frac{1}{2}ulp\right]$ conține cel puțin un număr binar. Astfel, fiecare număr binar se rotunjește la un număr zecimal unic, care ne conduce la un număr binar unic.

Pentru a arăta că spațiul dintre numerele zecimale este întotdeauna mai mic decât spațiul dintre numerele binare să considerăm intervalul $[10^n, 10^{n+1}]$. Pe acest interval, spațiul dintre două numere zecimale consecutive este $10^{(n+1)-9}$.

În intervalul $[10^n, 2^m]$ unde m este cel mai mic întreg astfel ca $10^n < 2^m$, spațiul dintre numerele binare este 2^{m-24} .

Inegalitatea

$$10^{(n+1)-9} < 2^{m-24}$$

rezultă astfel:

$$10^n < 2^m$$

$$10^{(n+1)-9} = 10^n 10^{-8} < 2^m 10^{-8} < 2^m 2^{-24}$$

■

Observația 3.4.3 *Spațiul dintre 2 numere zecimale este mai mic decât 10^{-9} . $10^{n+1} = 10^{n+1-9} = 10^{n-8}$, iar spațiul dintre 2 numere binare este mai mare decât $2^m \cdot 2^{-24} = 2^{m-24}$.*

Observația 3.4.4 *Același raționament se aplică pentru a arăta că 17 cifre sunt suficiente pentru a recupera unic un număr în dublă precizie.*

Problema 3.4.5 *În multe probleme, cum ar fi integrarea numerică și rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale, este nevoie să se însumeze mai mulți termeni. Deoarece fiecare adunare poate introduce o eroare $\approx 1/2 \text{ulp}$, o sumă cu mii de termeni poate introduce o eroare de rotunjire foarte mare. Să se arate că un mod simplu de a micșora eroarea este de a efectua sumarea în dublă precizie și celelalte calcule în simplă precizie.*

Soluție. Pentru a da o estimare grosieră a modului în care reprezentarea în dublă precizie îmbunătățește acuratețea fie $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 \oplus x_2, \dots, s_i = s_{i-1} \oplus x_i$. Atunci

$$s_i = (1 + \delta_i)(s_{i-1} + x_i),$$

unde $|\delta_i| \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned} s_n &= (1 + \delta_n)(s_{n-1} + x_n) = (1 + \delta_n)s_{n-1} + (1 + \delta_n)x_n \\ &= (1 + \delta_n)(1 + \delta_{n-1})(s_{n-2} + x_{n-1}) + (1 + \delta_n)x_n \\ &= (1 + \delta_n)(1 + \delta_{n-1})s_{n-2} + (1 + \delta_n)(1 + \delta_{n-1}x_{n-1} + (1 + \delta_n)x_n) = \dots \\ &= (1 + \delta_n)x_n + (1 + \delta_n)(1 + \delta_{n-1})x_{n-1} + \dots + (1 + \delta_n) \dots (1 + \delta_1)x_1 \\ &\approx \sum_{j=1}^n x_j \left(1 + \sum_{k=j}^n \delta_k \right) = \sum_{j=1}^n x_j + \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{k=j}^n \delta_k \right) \end{aligned}$$

$$\Delta x_1 \approx n\varepsilon, \quad \Delta x_2 \approx (n-1)\varepsilon, \dots, \Delta x_n \approx \varepsilon$$

$$\Delta s_n \leq n\varepsilon \sum |x_j|$$

Dublarea precizie are ca efect ridicarea la pătrat a lui ε . Pentru dublă precizie $1/\varepsilon \approx 10^{16}$ deci $n\varepsilon \ll 1$ pentru orice valoare rezonabilă a lui n . ■

Concluzie. Dublarea preciziei schimbă perturbația din $n\varepsilon$ în $n\varepsilon^2 \ll \varepsilon$.

Există o metodă de însumare în simplă precizie a unui număr mare de numere, introdusă de Kahan.

Ea utilizează aceeași strategie ca însumarea directă, dar la fiecare operație de adunare eroarea de rotunjire este estimată și compensată cu un termen de corecție. Principiul de estimare este explicat în figura 3.1, unde semnificații termenilor a și b sunt reprezentați prin dreptunghiuri. El poate fi reprezentat prin formula

$$\hat{e} = ((a \oplus b) \ominus a) \ominus b = (\hat{s} \ominus a) \ominus b. \quad (3.1)$$

Astfel, într-o aritmetică binară cu rotunjire, pentru $a \geq b$ are loc

$$\hat{e} = \hat{s} - (a + b);$$

deci, eroarea de rotunjire este dată exact de (3.1).

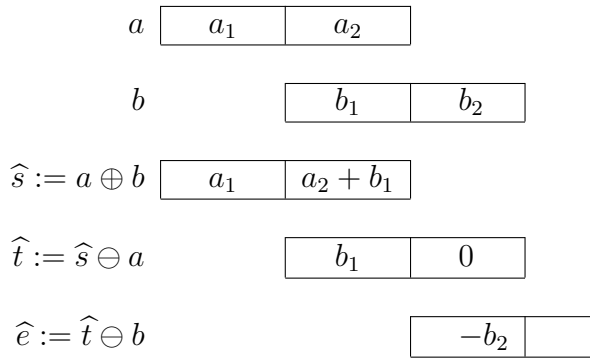


Figura 3.1: Estimarea erorii de rotunjire $\hat{s} - s = -b_2$

Pentru însumare compensată la fiecare pas eroarea de însumare este estimată în conformitate cu principiul lui Kahan și utilizată pentru ajustare (algoritmul 1).

Problema 3.4.6 (Însumare Kahan) Eroarea de rotunjire pentru algoritmul 1 poate fi estimată prin

$$|\hat{s}_n - s_n| \leq (2 \text{ eps} + O(n \text{ eps}^2)) \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (3.2)$$

Soluție. Să vedem întâi cum s-a obținut estimăția pentru formula $\sum x_i$. Introduceni $s_1 = x_1$, $s_i = (1 + \delta_i)(s_{i-1} + x_i)$. Atunci suma calculată este s_n , care este o sumă de termeni de forma x_i înmulțit cu o expresie în δ_j -uri. Coeficientul exact al lui x_1

Algoritmul 1 Însumare Kahan

```

 $s := x_1;$ 
 $e := 0;$ 
for  $i = 2$  to  $n$  do
   $y := x_i - e;$ 
   $t := s + y;$ 
   $e := (t - s) - y;$ 
   $s := t$ 
end for

```

este $(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) \dots (1 + \delta_n)$. Deci prin renumerotare, coeficientul lui x_2 este $(1 + \delta_3)(1 + \delta_4) \dots (1 + \delta_n)$ ș.a.m.d. Se procedează la fel ca la problema 3.4.5, doar coeficientul lui x_1 este mai complicat. Avem $s_0 = e_0 = 0$ și

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k \ominus c_{k-1} = (x_k - c_{k-1})(1 + \eta_k) \\
 s_k &= s_{k-1} \oplus y_k = (s_{k-1} + y_k)(1 + \sigma_k) \\
 e_k &= (s_k \ominus s_{k-1}) \ominus y_k = [(s_k - s_{k-1})(1 + \gamma_k) - y_k](1 + \delta_k)
 \end{aligned}$$

unde toate literele grecești sunt mărginite de eps. Este mai ușor să calculăm coeficientul lui x_1 în $s_k - e_k$ și e_k decât în s_k . Când $k = 1$,

$$\begin{aligned}
 e_1 &= (s_1(1 + \gamma_1) - \gamma_1)(1 + \delta_1) = y_1((1 + \sigma_1)(1 + \gamma_1) - 1)(1 + \delta_1) \\
 &= x_1(\sigma_1 + \gamma_1 + \sigma_1\gamma - 1)(1 + \delta_1)(1 + \eta_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_1 - c_1 &= x_1[(1 + \sigma_1) - (\sigma_1 + \gamma_1 + \sigma_1\gamma_1)(1 + \delta_1)](1 + \eta_1) \\
 &= x_1[1 - \gamma_1 - \sigma_1\delta_1 - \sigma_1\gamma_1 - \delta_1\gamma_1 - \sigma_1\gamma_1\delta_1](1 + \eta_1).
 \end{aligned}$$

Notând coeficienții lui x_1 în aceste expresii cu E_k și respectiv S_k , atunci

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 2 \text{ eps} + O(\text{eps}^2) \\
 S_1 &= 1 + \eta_1 - \gamma_1 + 4 \text{ eps}^2 + O(\text{eps}^3).
 \end{aligned}$$

Pentru a obține formula generală pentru S_k și E_k , dezvoltăm definițiile lui s_k și e_k , ignorând toți termenii în x_i cu $i > 1$. Aceasta ne dă

$$\begin{aligned}
 s_k &= (s_{k-1} + y_k)(1 + \sigma_k) = [s_{k-1} + (x_k - e_{k-1})(1 + \eta_k)](1 + \sigma_k) \\
 &= [(s_{k-1} - e_{k-1}) - \eta_k e_{k-1}](1 + \sigma_k)
 \end{aligned}$$

$$e_k = [(s_k - s_{k-1})(1 + \gamma_k) - y_k](1 + \delta_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \{[(s_{k-1} - e_{k-1}) - \eta_k e_{k-1}] (1 + \sigma_k) - s_{k-1}\} (1 + \gamma_k) + e_{k-1} (1 + \eta_k) \} \\
&\quad (1 + \delta_k) \\
&= \{[(s_{k-1} - e_{k-1}) \sigma_k - \eta_k e_{k-1} (1 + \sigma_k) - e_{k-1}] (1 + \gamma_k) + e_{k-1} (1 + \eta_k) \} \\
&\quad (1 + \delta_k) \\
&= [(s_{k-1} - e_{k-1}) \sigma_k (1 + \gamma_k) - e_{k-1} (\gamma_k + \eta_k (\sigma_k + \gamma_k + \sigma_k \gamma_k))] (1 + \delta_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_k - e_k &= ((s_{k-1} - e_{k-1}) - \eta_k e_{k-1}) (1 + \sigma_k) - \\
&\quad [(s_{k-1} - e_{k-1}) \sigma_k (1 + \gamma_k) - e_{k-1} (\gamma_k + \eta_k (\sigma_k + \gamma_k + \sigma_k \gamma_k))] (1 + \delta_k) \\
&= (s_{k-1} - e_{k-1}) ((1 + \sigma_k) - \sigma_k (1 + \gamma_k) (1 + \delta_k)) + \\
&\quad c_{k-1} (-\eta_k (1 + \sigma_k) + (\gamma_k + \eta_k (\sigma_k + \gamma_k + \sigma_k \gamma_k)) (1 + \delta_k)) \\
&= (s_{k-1} - e_{k-1}) (1 - \sigma_k (\sigma_k + \gamma_k + \sigma_k \gamma_k)) + \\
&\quad e_{k-1} [-\eta_k + \gamma_k + \eta_k (\gamma_k + \sigma_k \gamma_k) + (\gamma_k + \eta_k (\sigma_k + \gamma_k + \sigma_k \gamma_k)) \delta_k]
\end{aligned}$$

Deoarece S_k și E_k trebuie calculate cu precizia eps^2 , ignorând termenii de grad mai mare avem

$$\begin{aligned}
E_k &= (\sigma_k + O(\text{eps}^2)) S_{k-1} + (-\gamma_k + O(\text{eps}^2)) E_{k-1}, \\
S_k &= (1 + 2 \text{eps}^2 + O(\text{eps}^2)) S_{k-1} + (2 \text{eps} + O(\text{eps}^2)) E_{k-1}.
\end{aligned}$$

Utilizând aceste formule se obține

$$\begin{aligned}
C_2 &= \sigma_2 + O(\text{eps}^2) \\
S_2 &= 1 + \eta_1 - \gamma_1 + 10 \text{eps}^2 + O(\text{eps}^3)
\end{aligned}$$

și, în general, se verifică ușor prin inducție că

$$\begin{aligned}
C_k &= \sigma_k + O(\text{eps}^2) \\
S_k &= 1 + \eta_1 - \gamma_1 + (4k + 2) \text{eps}^2 + O(\text{eps}^3).
\end{aligned}$$

În final vom calcula coeficientul lui x_1 din s_k . Pentru a obține această valoare, fie $x_{n+1} = 0$ și toate literele grecești cu indicii $n + 1$ egale cu zero și calculăm s_{n+1} . Atunci $s_{n+1} = s_n - c_n$ și coeficientul lui x_1 în s_n este mai mic decât coeficientul lui s_{n+1} , care este

$$S_n = 1 + \eta_1 - \gamma_1 + (4n + 2) \text{eps}^2 + O(n \text{eps}^2).$$

■

Marginea (3.2) este o îmbunătățire semnificativă față de însumarea obișnuită, cu condiția ca n să nu fie suficient de mare, dar nu este la fel de bună ca însumarea în dublă precizie.

Un exemplu de expresie care poate fi rescrisă utilizând anularea benignă este $(1 + x)^n$, unde $x \ll 1$.

Problema 3.4.7 Depunând 100\$ pe zi într-un cont cu o rată a dobânzii de 6% calculată zilnic la sfârșitul anului avem $100[(1 + i/n) - 1]/(i/n)$ \$.

Dacă $p = 2$ și $p = 24$ (ca în IEEE) obținem 37615.45\$ care comparat cu răspunsul exact, 37614.05\$ dă o discrepanță de 1.40\$. Explicați fenomenul.

Soluție. Expresia $1 + i/n$ implică adăugarea unui 1 la 0.0001643836, deci biții de ordin mic ai lui i/n se pierd. Această eroare de rotunjire este amplificată când $(1 + i/n)$ este ridicat la puterea n . Expresia $(1 + i/n)^n$ se rescrie sub forma $\exp[n \ln(1 + i/n)]$. Problema este acum calculul lui $\ln(1 + x)$ pentru x mic. O posibilitate ar fi să utilizăm aproximarea $\ln(1 + x) \simeq x$ și se obține 37617.26\$ cu o eroare de 3.21\$ deci mai mare decât în situația anterioară. Rezultatul de mai jos ne permite să calculăm precis $\ln(1 + x)$ (37614.67\$, eroarea 2c). Se presupune că $LN(x)$ aproximează $\ln x$ cu o precizie $\leq 1/2ulp$. Problema care o rezolvă este aceea că atunci când x este mic $LN(1 \oplus x)$ nu este apropiat de $\ln(1 + x)$ deoarece $1 \oplus x$ nu este precis. Adică valoarea calculată pentru $\ln(1 + x)$ nu este apropiată de valoarea actuală când $x \leq 1$.

I. Dacă $\ln(1 + x)$ se calculează utilizând formula

$$\ln(1 + x) = \begin{cases} x & \text{dacă } 1 \oplus x = 1 \\ \frac{x \ln(1 + x)}{(1 + x) - 1} & \text{dacă } 1 \oplus x \neq 1 \end{cases}$$

eroarea relativă este cel mult 5ε când $0 \leq x < 3/4$ cu condiția ca scăderea să se realizeze cu o cifră de gardă, $\varepsilon < 0.1$ și \ln este calculat cu o precizie de $1/2ulp$.

Această formulă este operațională pentru orice valoare a lui x , dar este interesantă dacă $x \ll 1$, când apare anulare catastrofală în formula naivă pentru calculul lui $\ln(1 + x)$. Deși formula pare misterioasă ea are o explicație simplă.

$$\ln(1 + x) = \frac{x \ln(1 + x)}{x} = x\mu(x)$$

$$\mu(x) = \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

va suferi o eroare mare când se adaugă 1 la x . Totuși μ este aproape constantă deoarece $\ln(1 + x) \simeq x$. Deci dacă x se schimbă puțin eroarea va fi mică. Cu alte cuvinte, dacă $\tilde{x} \simeq x$, $x\mu(\tilde{x})$ va fi o aproximare bună pentru $x\mu(x) = \ln(1 + x)$. Există o valoare pentru \tilde{x} astfel încât $\tilde{x} + 1$ să poată fi calculat precis? Deci $\tilde{x} = (1 \oplus x) \ominus 1$, deoarece în acest caz $1 + \tilde{x} = 1 \oplus x$. ■

Lema 3.4.8 Dacă $\mu(x) = \frac{\ln(1 + x)}{x}$, atunci pentru $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$

$$1/2 \leq \mu(x) \leq 1 \quad \text{și} \quad |\mu'(x)| \leq 1/2.$$

Demonstrație. $\mu(x) = 1 - x/2 + x^2/3 - \dots$ este o serie alternată cu termeni descrescători, deci pentru $x \leq 1$,

$$\mu(x) \geq 1 - \frac{x}{2} \geq 1/2 \quad \text{și} \quad \mu(x) \leq 1.$$

Seria Taylor a lui $\mu'(x)$ este de asemenea alternată și dacă $x \leq \frac{3}{4}$, termenii sunt descrescători deci

$$-1/2 \leq \mu'(x) \leq -\frac{1}{2} + \frac{2x}{3} \quad \text{sau} \quad -\frac{1}{2} \leq \mu'(x) \leq 0.$$

■

Demonstrația teoremei.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (\text{Taylor})$$

alternată și $0 < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$, δ pentru $\ln(1+x) \approx x < \frac{x}{2}$. Dacă $1 \oplus x = 1$, atunci $|x| < \varepsilon$, deci $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dacă $1 \oplus x \neq 1$, fie \hat{x} definit prin $1 \oplus x = 1 + \hat{x}$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow (1 \oplus x) \ominus 1 = \hat{x}$. Dacă împărțirea și logaritmul se calculează cu o precizie de $1/2ulp$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1 \oplus x)}{(1 \oplus x) \ominus 1} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) &= \frac{\ln(1 + \hat{x})}{\hat{x}} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) = \\ &= \mu(\hat{x})(1 + \delta_1)(1 + \delta_2); \quad |\delta_1| \leq \varepsilon, \quad |\delta_2| \leq \varepsilon \\ \mu(\hat{x}) - \mu(x) &= (\hat{x} - x)\mu(\xi) \quad \xi \in (x, \hat{x}) \end{aligned}$$

Din definiția lui \hat{x} , $|\hat{x} - x| \leq \varepsilon$. Aplicăm

$$|\mu(\hat{x}) - \mu(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sau} \quad \left| \frac{\mu(\hat{x})}{\mu(x)} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2|\mu(x)|} \leq \varepsilon$$

adică

$$\begin{aligned} \mu(\hat{x}) &= \mu(x)(1 + \delta_3), \quad |\delta_3| \leq \varepsilon \\ \frac{x \ln(1+x)}{(1+x) - 1} &(1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3)(1 + \delta_4), \quad |\delta_i| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Dacă $\varepsilon > 0.1$ atunci

$$(1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3)(1 + \delta_4) = 1 + \delta$$

cu $|\delta| < 5\varepsilon$.

Problema 3.4.9 Dacă $b^2 \approx 4ac$, eroarea de rotunjire poate contamina jumătate din cifrele rădăcinii calculate cu formula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($\beta = 2$).

Soluție. Dacă eroarea relativă este $n\varepsilon$ atunci numărul de cifre contaminat este $\log_\beta n$. Fie $\Delta = b^2 - 4ac$. Eroarea la calculul discriminantului va fi

$$\begin{aligned} ((b \otimes b) \ominus (4a \otimes c)) &= (b^2(1 + \delta_1) - 4ac(1 + \delta_2))(1 + \delta_3) = \\ &= [\Delta(1 + \delta_1) - 4ac(\delta_1 - \delta_2)](1 + \delta_3). \end{aligned}$$

Pentru a estima eroarea vom ignora termenii de ordinul doi în δ_i , eroarea fiind

$$\Delta(\delta_1 + \delta_3) - 4ac\delta_4, \quad |\delta_4| = |\delta_1 - \delta_2| \leq 2\varepsilon$$

Deoarece $\delta \ll 4ac$, primul termen $\Delta(\delta_1 + \delta_3)$ poate fi ignorat. Pentru a estima al doilea termen scriem

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

deci $ax_1x_2 = c$

$$b^2 \approx 4ac \Rightarrow x_1 \approx x_2 \Rightarrow 4ac\delta_4 \approx 4a^2x_1^2\delta_4$$

Valoarea calculată pentru $\sqrt{\Delta}$ este $\sqrt{\Delta + 4a^2x_1^2\delta_4}$.

Aplicăm inegalitatea

$$p - q \leq \sqrt{p^2 - q^2} \leq \sqrt{p^2 + q^2} \leq p + q, \quad p \geq q.$$

Obținem

$$\sqrt{\Delta + 4a^2x_1^2\delta_4} = \sqrt{\Delta} + E$$

unde

$$|E| \leq \sqrt{4a^2x_1^2|\delta_n|}$$

deci eroarea absolută pentru $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ este aproximativ $x_1\sqrt{\delta_n}$.

Deoarece $\delta_4 \approx \beta^{-p}$, $\sqrt{\delta_4} \approx \beta^{-p/2}$ și deci această eroare absolută contaminează jumătate din biții rădăcinii $x_1 = x_2$. ■

3.5 Condiționarea unei probleme

Exemplul 3.5.1 (Recurențe) Calculăm

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5} dt \text{ pentru } n \in \mathbb{N}$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \ln(t+5) \Big|_0^1 = \ln \frac{6}{5} \quad (3.3)$$

$$\frac{t}{t+5} = 1 - \frac{5}{t+5}$$

$$I_k = -5I_{k-1} + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

$$y_0 = I_0, \quad y_n = I_n$$

$$y_n = f_n(I_0)$$

$$y_0 \rightarrow \boxed{f_n} \rightarrow y_n$$

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Ne interesează condiționarea lui f_n în $y_0 = I_0$. Rezultatul final va fi o aproximație $I_n^* = f_n(I_0^*)$ și vom avea

$$\left| \frac{I_n^* - I_n}{I_n} \right| = (\text{cond } f_n)(I_0) \left| \frac{I_0^* - I_0}{I_0} \right|$$

Aplicând (3.4) obținem

$$y_n = f_n(y_0) = (-5)^n y_0 + p_n,$$

cu p_n independent de y_0 .

$$(\text{cond } f_n)(y_0) = \left| \frac{y_0 f'(y_0)}{y_n} \right| = \left| \frac{y_0 (-5)^n}{y_n} \right|.$$

Deoarece I_n este descrescător

$$(\text{cond } f_n)(I_0) = \frac{I_0 5^n}{I_n} > \frac{I_0 \cdot 5^n}{I_0} = 5^n$$

Spunem că avem de-a face cu o problemă prost condiționată. Cum putem evita fenomenul?

În loc să înmulțim cu un număr mare, mai bine împărțim cu un număr mare. Scriem (3.4) astfel

$$y_{k-1} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{k} - y_k \right), \quad k = \nu, \nu - 1, \dots, n + 1$$

Problema este, desigur, cum să calculăm valoarea de pornire y_ν .

Înainte de a începe cu aceasta să observăm că avem o nouă cutie neagră

$$y_\nu \rightarrow \boxed{g_n} \rightarrow y_n$$

$$(cond\ g_n)(y_\nu) = \left| \frac{y_\nu \left(-\frac{1}{5}\right)^{-\nu-n}}{y_n} \right|, \quad \nu > n.$$

Pentru $y_\nu = I_\nu$, avem folosind monotonia

$$(cond\ g_n)(I_\nu) < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n}, \quad \nu > n$$

$$\left| \frac{I_n^* - I_n}{I_n} \right| = (cond\ g_n)(I_\nu) \left| \frac{I_\nu^* - I_\nu}{I_\nu} \right| < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n} \left| \frac{I_\nu^* - I_\nu}{I_\nu} \right|$$

Dacă luăm $I_\nu^* = 0$, comițând o eroare de 100% în valoarea de pornire obținem eroarea relativă

$$\left| \frac{I_n^* - I_n}{I_n} \right| < \left(\frac{1}{5}\right)^{\nu-n}, \quad \nu > n$$

Dacă alegem ν suficient de mare, de exemplu

$$\nu > n + \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 5} \quad (3.5)$$

eroarea relativă este $< \varepsilon$. Avem deci următorul algoritm pentru calculul lui I_n : se dă precizia ε , se alege n , cel mai mic întreg care satisface (3.5) și se calculează

$$\begin{cases} I_n \nu^* = 0 \\ I_{k-1}^* = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{k} - I_k^* \right), \quad k = \nu, \nu - 1, \dots, n + 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Aceasta va produce o aproximație suficient de precisă $I_n^* \approx I_n$ chiar în prezența erorilor de rotunjire din (3.6).

Idei similare se pot aplica și la problema mai importantă a calculării soluțiilor unor recurențe liniare de ordinul II, cum ar fi cele satisfăcute de funcțiile Bessel și de multe alte funcții ale fizicii matematice. Procedura recurențelor regressive (retrograde) este strâns legată de teoria fracțiilor continue.

Problema 3.5.2 (Condiționarea ecuațiilor algebrice) *Fie ecuația:*

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad (3.7)$$

și ξ o rădăcină simplă a ei:

$$p(\xi) = 0, \quad p'(\xi) \neq 0.$$

Problema este de a se determina ξ , dându-se p . Vectorul de date

$$a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]^T \in \mathbb{R}^n$$

constă din coeficienții polinomului p , iar rezultatul este ξ , un număr real sau complex. Astfel avem:

$$\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad \xi = \xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

Care este condiționarea lui ξ ?

Soluție. Definim

$$\gamma_\nu = (\text{cond}_\nu \xi)(a) = \left| \frac{a_\nu \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu}}{\xi} \right|, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.8)$$

Vom alege o normă convenabilă, de exemplu norma

$$\|\gamma\|_1 := \sum_{\nu=0}^{n-1} |\gamma_\nu|$$

a vectorului $\gamma = [\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}]^T$, pentru a defini

$$(\text{cond} \xi)(a) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (\text{cond}_\nu \xi)(a) \quad (3.9)$$

Pentru a determina derivatele parțiale ale lui ξ în raport cu a_ν , observăm că avem identitatea:

$$\begin{aligned} & [\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^n + a_{n-1}[\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^{n-1} + \dots + \\ & + a_\nu [\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^\nu + \dots + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Derivând în raport cu a_ν obținem

$$\begin{aligned} & n[\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^{n-1} \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} + a_{n-1}(n-1)[\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^{n-2} \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} + \dots + \\ & + a_\nu \nu [\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^{\nu-1} \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} + \dots + a_1 \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} + [\xi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^\nu \equiv 0 \end{aligned}$$

unde ultimul termen provine din derivarea produsului $a_\nu \xi^\nu$.

Ultima identitate se poate scrie

$$p'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} + \xi^\nu = 0$$

Deoarece $p'(\xi) \neq 0$, putem obține $\frac{\partial \xi}{\partial a_\nu}$ și să înlocuim în (3.8) și (3.9) pentru a obține

$$(cond\xi)(a) = \frac{1}{|\xi p'(\xi)|} \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| |\xi|^\nu \quad (3.10)$$

Vom ilustra (3.10) considerând un polinom p de grad n cu rădăcinile $1, 2, \dots, n$

$$p(x) = \prod_{\nu=1}^n (x - \nu) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (3.11)$$

Acesta este un exemplu faimos, datorat lui Wilkinson, care a descoperit proasta condiționare a anumitor zerouri aproape printr-un accident. Dacă luăm $\xi_\mu = \mu$, $\mu = 1, 2, \dots, n$ se poate arăta că

$$\begin{aligned} \min_{\mu} cond\xi_{\mu} &= cond\xi_1 \sim n^2 \text{ când } n \rightarrow \infty \\ \max_{\mu} cond\xi_{\mu} &\sim \frac{1}{(2-\sqrt{2})\pi n} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right)^n \text{ când } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Cea mai prost condiționată rădăcină este ξ_{μ_0} cu μ_0 întregul cel mai apropiat de $n/\sqrt{2}$ când n este mare. Numărul său de condiționare crește ca $(5.828\dots)^n$, deci exponențial. De exemplu pentru $n = 20$ $cond\xi_{\mu_0} = 0,540 \times 10^{14}$.

Exemplul ne învață că rădăcinile unei ecuații algebrice scrise în forma (3.7) pot fi extrem de sensibile la schimbări mici ale coeficienților. De aceea este contraindicat să se exprime orice polinom cu ajutorul puterilor ca în (3.7) și (3.11). Aceasta este în particular adevărat pentru polinoamele caracteristice ale matricelor. Este mult mai bine să lucrăm cu matricele însele și să le reducem (prin transformări de similaritate) la o formă care să permită obținerea rapidă a valorilor proprii - rădăcini ale ecuației caracteristice. ■

Problema 3.5.3 *Presupunem că o rutină de bibliotecă pentru funcția logaritmică ne furnizează $y = \ln x$ pentru orice număr în virgulă flotantă, x , producând un y_A ce satisface $y_A = (1 + \varepsilon) \ln x$, $|\varepsilon| \leq 5\text{eps}$. Ce putem spune despre condiționarea algoritmului A ?*

Soluție. Avem evident

$$y_A = \ln x_A \text{ unde } x_A = x^{1+\varepsilon} \quad (\text{unic})$$

În consecință

$$\left| \frac{x_A - x}{x} \right| = \left| \frac{x^{1+\varepsilon} - x}{x} \right| = |x^\varepsilon - 1| \approx |\varepsilon \ln x| \leq 5|\ln x|\text{eps}$$

și deci $(cond A)(x) \leq 5|\ln x|$. Algoritmul A este bine condiționat exceptând vecinătatea dreaptă a lui $x = 0$ și pentru x foarte mare. În ultimul caz, totuși, este posibil ca x să dea depășire înainte ca A să devină prost condiționat. ■

Problema 3.5.4 *Considerăm problema*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad y = x_1 x_2 \dots x_n$$

Rezolvăm problema prin algoritmul evident

$$p_1 = x_1$$

$$p_k = fl(x_k p_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

$$y_A = p_n$$

Care este condiționarea algoritmului?

Soluție. Am presupus că $x \in \mathbb{R}^n(t, s)$. Utilizând legile de bază ale aritmeticii mașinii obținem

$$p_1 = x_1$$

$$p_k = x_k p_{k-1} (1 + \varepsilon_k), \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad |\varepsilon_k| \leq eps$$

de unde

$$p_n = x_1 \dots x_n (1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \dots (1 + \varepsilon_n)$$

Aici, putem lua de exemplu (nu se asigură unicitatea)

$$x_A = [x_1, x_2(1 + \varepsilon_2), \dots, x_n(1 + \varepsilon_n)]^T.$$

Aceasta ne dă, utilizând norma $\|\cdot\|_\infty$

$$\frac{\|x_A - x\|_\infty}{\|x\|_\infty eps} = \frac{\|[0, x_2 \varepsilon_2, \dots, x_n \varepsilon_n]^T\|_\infty}{\|x\|_\infty eps} \leq \frac{\|x\|_\infty eps}{\|x\|_\infty eps} = 1$$

deci $(cond A)(x) \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n(t, s)$ și algoritmul este bine condiționat.

■

Capitolul 4

Rezolvarea numerică a sistemelor algebrice liniare

4.1 Descompunere LU

$$A = LU$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & w^T \\ v & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^T \\ 0 & A' - vw^T/a_{11} \end{pmatrix}$$

Matricea $A' - vw^T/a_{11}$ se numește complement Schur al lui a_{11} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^T \\ 0 & a' - vw^T/a_{11} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^T \\ 0 & L'U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^T \\ 0 & U' \end{pmatrix}$$

Problema 4.1.1 *Calculați descompunerea LU a matricei*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix}$$

Soluție.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & 1 & 5 & \\ \hline 3 & 4 & 2 & 4 & \\ 1 & 16 & 9 & 18 & \\ 2 & 4 & 9 & 21 & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 13 & 5 & 15 \\ 15 & 10 & 23 \\ 10 & 11 & 31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 15 \\ 15 & 20 & 23 \\ 10 & 11 & 31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 16 & 9 & 18 \\ 4 & 9 & 21 \end{pmatrix} \\
& \begin{array}{c|ccc} 2 & 3 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 17 \end{array} \\
& A' - vw^T/a_{11} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} (2, 4) = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 17 \end{pmatrix} \\
& \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \end{array} \\
& A' - vw^T/a_{11} = 17 - 7 \cdot 2 = 3 \\
& \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

Problema 4.1.2 (Sisteme tridiagonale) Dați algoritmul de descompunere LU pentru o matrice tridiagonală.

Timp liniar

El. Gaussiană

Factorizare Crout $v_{ii} = 1$

Factorizare Doolittle $l_{ii} = 1$

Exemplu. Crout

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = l_{11} \tag{4.1}$$

$$a_{i,i-1} = l_{i,i-1}, \quad i = 2, n \quad (4.2)$$

$$a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}, \quad i = 2, n \quad (4.3)$$

$$a_{i,i+1} = l_{ii}u_{i,i+1} \quad (4.4)$$

Ordinea de obținere este (4.2), (4.4), (4.3) alternativ

Algoritmul:

$$P1 \quad l_{11} := a_{11}$$

$$u_{12} := a_{12}/l_{11}$$

$$P2 \quad \text{for } i = 2 \text{ to } n - 1$$

$$l_{i,i-1} := a_{i,i-1}$$

$$l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}u_{i-1,i}$$

$$u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{ii}$$

$$P3 \quad l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$$

$$l_{n,n} = a_{nn} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}$$

4.2 Descompunere LUP

Aici rolul lui a_{11} va fi jucat de a_{k1} .

Efectul QA , Q matrice de permutare

$$QA = \begin{pmatrix} a_{k1} & w^T \\ v & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^T \\ 0 & A' - vw^T/a_{k1} \end{pmatrix}$$

Matricea $A' - vw^T/a_{k1}$ se numește complementul Schur al lui a_{k1} și este nesară.

Determinăm mai departe descompunerea LUP a complementului Schur

$$P'(A' - vw^T/a_{k1}) = L'U'.$$

Definim

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} Q$$

care este tot o matrice de permutare.

Avem acum

$$\begin{aligned} PA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^T \\ 0 & A' - vw^T/a_{k1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v/a_{k1} & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1}w^T & \\ 0 & A' - vw^T/a_{k1} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^T \\ 0 & P'(A' - vw^T/a_{k1}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^T \\ 0 & L'U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'v/a_{k1} & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^T \\ 0 & U' \end{pmatrix} = LU
\end{aligned}$$

De notat că în acest raționament atât vectorul coloană cât și complementul Schur se înmulțesc cu matricea de permutare P' .

Problema 4.2.1 Să se calculeze descompunerea LUP a matricei

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0.6 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3.4 & -1 \end{bmatrix}$$

Soluție.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0.6 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 3.4 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0.6 \\ 4 & -1 & -2 & 3.4 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 0.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 4 & -0.2 & -1 & 4.2 & -0.6 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 0.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 4 & -0.2 & -1 & 4.2 & -0.6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 2 & 0.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \\ 4 & -0.2 & -1 & 4.2 & -6 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 2 & 0.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \\ 4 & -0.2 & -0.5 & 4 & -0.5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 2 & 0.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \\ 4 & -0.2 & 0.5 & 4 & -0.5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 4 & -0.2 & 0.5 & 4 & -0.5 \\ 2 & 0.6 & 0 & 1.6 & -3.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
3 & 5 & 5 & 4 & 2 \\
1 & 0.4 & -2 & 0.4 & -0.2 \\
4 & -0.2 & 0.5 & 4 & -0.5 \\
2 & 0.6 & 0 & 0.4 & -3
\end{array}$$

Verificare.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0.6 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 0.2 & 3.4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0.4 & 1 & 0 & \\ -0.2 & 0.5 & 1 & \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 2 \\ & -2 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & & 4 & -0.5 \\ & & & -3 \end{pmatrix}$$

■

Definiția 4.2.2 Spunem că matricea A $n \times n$ este diagonal dominantă pe linii dacă

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}$$

Problema 4.2.3 Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\
2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 10 \\
x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 7
\end{aligned}$$

folosind descompunerea Cholesky.

Soluție. Calculând radicalii pivoților și complementele Schur se obține:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistemele echivalente sunt

$$\begin{cases} y_1 &= 4 \\ 2y_1 + y_2 &= 10 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 7 \end{cases}$$

cu soluția $y = [4, 2, 1]^T$ și respectiv

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

cu soluția $x = [1, 1, 1]^T$. ■

Problema 4.2.4 Calculați descompunerea QR a matricei

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluție. Reflexia pentru prima coloană este $P = I - 2uu^T$. Vectorul u se determină astfel:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \begin{bmatrix} x_1 + \text{sign}(x_1) \|x\|_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}; \\ \|\tilde{u}\|_2 &= \sqrt{8^2 + 4^2} \\ u &= \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_2} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} / 4\sqrt{5} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matricea de reflexie este

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = Q^T, \end{aligned}$$

Se obține

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \\ R &= P \cdot A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{7}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Problema 4.2.5 Rezolvați sistemul

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

prin descompunere LUP.

Soluție. Avem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Deci

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistemele triunghiulare corespunzătoare sunt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} y = Pb = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

cu soluția $y = [8, 0, -1]^T$ și

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

cu soluția $x = [1, 1, 1]^T$. ■

Problema 4.2.6 Arătați că orice matrice diagonal dominantă este nesingulară.

Soluție. Fie sistemul $Ax = 0$. Presupunem că are soluție nebanală. Există k astfel încât $0 < |x_k| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = \|x\|_1$

Deoarece

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, \quad \text{pentru } i = k$$

obținem

$$a_{kk}x_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_j \Rightarrow |a_{kk}||x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}||x_j|$$

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|$$

■

Observația 4.2.7 În acest caz EG se face păcă permutări.

Dacă $l_{ii} = 1$ avem factorizare Doolittle, iar dacă $v_{ii} = 1$ avem factorizare Crout.

4.3 Sisteme de ecuații

Problema 4.3.1 Arătați că m -norma

$$\|A\|_m = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

este naturală.

Soluție. Vom arăta că

$$\|A\|_m = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$$

Fie $x \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1$$

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |(Ax)_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x\|_\infty = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \end{aligned}$$

$$\|Ax\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty$$

$$\|A\|_m = \max_{\|x\|_\infty=1} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (4.5)$$

Fie $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq n$ astfel încât

$$\sum_{j=1}^n |a_{pj}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Alegem x astfel încât

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a_{pj} \geq 0 \\ -1 & \text{dacă } a_{pj} < 0 \end{cases}$$

$$\|x\|_\infty = 1, \quad a_{pj}x_j = |a_{pj}|, \quad \forall j = \overline{1, n}$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{pj}x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{pj}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

adică

$$\|A\|_m = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \geq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (4.6)$$

(4.5), (4.6) \Rightarrow " = ". ■

Problema 4.3.2 Să se arate că l -norma

$$\|A\|_l = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

este naturală.

Soluție.

$$\|A\|_l := \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \stackrel{?}{=} \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Fie $x \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $\|x\|_1 = 1$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| |x_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \|x\|_1 \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

adică

$$\|A\|_l \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Fie $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq n$ astfel încât

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{ip}|$$

și $x \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $x_i = \delta_{ip}$. Avem $\|x\|_1 = 1$.

$$\|A\|_l \geq \|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| = \sum_{i=1}^n |a_{ip} x_p| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

■

Problema 4.3.3 Arătați că norma euclidiană, l -norma și m -norma sunt norme matriciale.

Problema 4.3.4 Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

utilizând metoda lui Jacobi și metoda Gauss-Seidel.

De câte iterații este nevoie pentru a se putea atinge o precizie dorită ε ?

Soluție.

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \quad (4.7)$$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \quad (4.8)$$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$$

$$x^{(1)} = \left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}, \frac{7}{5} \right)$$

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{5}(7 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)})$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{5}(7 - x_1^{(k-1)} - x_3^{(k-1)})$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{5}(7 - x_1^{(k-1)} - x_2^{(k-1)})$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{5} \left(7 - \frac{7}{5} - \frac{7}{5} \right) = \frac{21}{25}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5} \left(7 - \frac{7}{5} - \frac{7}{5} \right) = \frac{21}{25}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{21}{25}$$

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{5}(7 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)})$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{5}(7 - x_1^{(k)} - x_3^{(k-1)})$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{5}(7 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)})$$

$$x_1^{(1)} = \frac{7}{5}, \quad x_2^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{7}{5} = 0$$

$$x_3^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{7}{25} = \frac{21}{25}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{21}{125} = \frac{175 - 21}{125} = \frac{154}{125}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{154}{625} - \frac{21}{125}, \quad x_3^{(3)} = \frac{7}{5} - \frac{154}{125} - x_2^{(2)}$$

Pentru a rezolva a doua parte a problemei vom scrie sistemul sub forma

$$x = Tx + c \Rightarrow \|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Pentru Jacobi

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(7 - x_2 - x_3) \\ x_2 = \frac{1}{5}(7 - x_1 - x_3) \\ x_3 = \frac{1}{5}(7 - x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

$$\|T_J\|_m = \frac{2}{5} = \|T_J\|_l$$

$$\frac{\|T_J\|^k}{1 - \|T_J\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| < \varepsilon$$

$$x^{(0)} = 0, \quad x^{(1)} = \left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right)^T, \quad \|x_1\| = \frac{7}{5}$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k}{\frac{3}{5}} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2^k}{5^{k-1}} \cdot 3 \cdot \frac{7}{5} < \varepsilon$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^k \cdot 21 < \varepsilon, \quad k(\ln 2 - \ln 5) + \ln 21 > \ln \varepsilon$$

Pentru Gauss-Seidel $x^{(0)} = 0$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{5}(7) = \frac{7}{5}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(7 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_2^{(0)}) = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{5} = 7 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25}\right) = \frac{28}{25}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(7 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}) = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{5} - \frac{28}{25} = \frac{35 - 7 - 28}{25} = 0$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \left\| \frac{7}{5}, \frac{28}{25}, 0 \right\| = \frac{7}{5}$$

$$x^{(k)} = (D - L)^{-1} U x^{(k-1)} + (D - L)^{-1} b$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k)} = -a_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\ a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} = -a_{23}x_3^{(k)} - \dots + b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \dots + a_{nn}x_n^{(k)} = b_n \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = D - L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det E = 125, \quad E^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

■

$$\Gamma_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25, \quad \Gamma_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Gamma_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Gamma_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Gamma_{22} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25, \quad \Gamma_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Gamma_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Gamma_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Gamma_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{25} & -\frac{1}{25} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$T_{GS} = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{25} & -\frac{1}{25} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{25} & -\frac{2}{25} \\ 0 & \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \end{pmatrix}$$

$$\|T_{GS}\|_n = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k}{\frac{3}{5}} \cdot \frac{7}{5} < \varepsilon$$

Problema 4.3.5 Arătați că pentru $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$

$$\|A\|_2 = [\rho(A^t A)]^{1/2}$$

Capitolul 5

Calculul cu diferențe

Să considerăm mulțimea

$$M = \{a_k \mid a_k = a + kh, \ k = \overline{0, m}, \ a, h \in \mathbb{R}\}$$

Definiția 5.0.1 Pentru $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, cantitatea

$$\Delta_h f(a_i) = f(a_i + h) - f(a_i), \quad i < m$$

se numește diferența finită de ordinul 1 cu pasul h a funcției f în punctul a_i .

Diferența finită de ordinul k se definește recursiv prin

$$\Delta_h^k f(a_i) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(a_i))$$

Au loc relațiile

$$\Delta_h^m f(a) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} f[a + (m-i)h]$$

$$\Delta_h^m f(a) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(a + ih)$$

$$f(a_k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta_h^i f(a)$$

$$\Delta_h^m (fg)a = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \Delta_h^i f(a) \Delta_h^{m-i} g(a + ih)$$

Valorile $[\Delta_1^m x^r]_{x=0} = \Delta^m 0^r$ se numesc diferențele lui 0.

$$\Delta^m 0^r = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^r$$

Problema 5.0.2 Aplicație. Vom stabili o formulă explicită pentru calculul sumei

$$S_{m,r} = 1^r + 2^r + 3^r + \dots + m^r$$

cu ajutorul diferențelor lui 0.

$$S_{m,r} = \sum_{i=1}^r \binom{m+1}{i+1} \Delta^i 0^r$$

$$f(a_p) = \sum_{j=0}^p \binom{p}{k} \Delta_h^k f(a)$$

$$\Delta_h^m f(a) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(a + ih)$$

$$f(x) = x^r$$

$$p^r = f(p) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \Delta^k 0^r, \quad p = 1, 2, \dots, m$$

$$1^r = \binom{1}{0} \Delta^0 0^r + \binom{1}{1} \Delta^1 0^r$$

$$2^r = \binom{2}{0} \Delta^0 0^r + \binom{2}{1} \Delta^1 0^r + \binom{2}{2} \Delta^2 0^r$$

...

$$m^r = \binom{m}{0} \Delta^0 0^r + \binom{m}{1} \Delta^1 0^r + \dots + \binom{m}{m} \Delta^m 0^r$$

$$S_{m,r} = \sum_{j=1}^m \left[\binom{j}{j} + \binom{j+1}{j} + \dots + \binom{m}{j} \right] \Delta^j 0^r = \sum_{j=1}^r \binom{m+1}{j+1} \Delta^j 0^r$$

Deoarece dacă $m > r$, $\Delta^j 0^r = 0$ pentru $j = \overline{r+1, m}$ iar pentru $m < r$, $\binom{m+1}{j+1} = 0$, pentru $j = m+1, m+2, \dots, r$.

Cazuri particulare

$$S_{m,1} = \binom{m+1}{2} \Delta 0 = \binom{m+1}{2} = \frac{m(m+1)}{2}, \quad \Delta 0 = 1$$

$$S_{m,2} = \binom{m+1}{2} \frac{\Delta^2 0^2}{1} + \binom{m+1}{3} \frac{\Delta^2 0^2}{2} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$S_{m,3} = \binom{m+1}{2} \frac{\Delta^3 0^3}{1} + \binom{m+1}{3} \frac{\Delta^3 0^3}{6} + \binom{m+1}{4} \frac{\Delta^3 0^3}{6} = \left[\frac{m(m+1)}{2} \right]^2$$

Problema 5.0.3 Să se demonstreze formula

$$\Delta_h^m \frac{1}{x} = \frac{(-1)^m m! h^m}{x(x+h) \dots (x+mh)}$$

(prin inducție).

Definiția 5.0.4 Prederivata de ordinul m cu pasul h a funcției f în a este

$$D_h^m f(a) = \frac{\Delta_h^m f(a)}{h^m}$$

$$D_h^0 f(a) = f(a)$$

Problema 5.0.5 Dacă f are derivată de ordinul m continuă pe $(a, a + mh)$ are loc

$$D_h^m f(a) = f^{(m)}(a + \theta_m h), \quad \theta \in (0, 1)$$

Demonstrație. Prin inducție.

$$D_h f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\xi_1), \quad \xi_1 \in (a, a+h)$$

$$D_h^{m-1} f(a) = f^{(m-1)}(\xi_{m-1})|D_h, \quad \xi_{m-1} \in (a, a - (m-1)h)$$

$$D_h^m f(a) = \frac{1}{h} [f^{(m-1)}(\xi_{m-1} + h) - f^{(m-1)}(\xi_{m-1})] = f^{(m)}(\xi_m)$$

$$\xi_m \in (a, a + mh) \Rightarrow \xi_m = a + \theta_m h, \quad \theta \in (0, 1)$$

■

Corolar 5.0.6 $f^{(m)}$ continuă în $a \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} D_h^m(a) = f^{(m)}(a)$.

Problema 5.0.7 Să se demonstreze formulele

$$\Delta_h^m \cos(ax + b) = \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^m \cos\left(ax + b + m \frac{ah + \pi}{2}\right)$$

$$\Delta_h^m \sin(ax + b) = \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^m \sin\left(ax + b + m \frac{ah + \pi}{2}\right)$$

Să se deducă de aici expresiile prederivatelor de ordinul m ale funcțiilor $\cos x$, $\sin x$ și să se calculeze limitele lor când $h \rightarrow 0$.

Soluție.

$$\begin{aligned} \Delta_h \cos(ax + b) &= \cos[a(x+h) + b] - \cos(ax + b) = \\ &= 2 \sin \frac{ah}{2} \sin\left(ax + b + \frac{ah}{2}\right) = \\ &= 2 \sin \frac{ah}{2} \cos\left(ax + b + \frac{\pi + ah}{2}\right) \Big| \Delta_h \text{ de } n-1 \text{ ori} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_h^m \sin(ax + b) &= \Delta_h^m \cos\left(ax + b - \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^m \cos\left(ax + b + m \frac{ah + \pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^m \sin\left(ax + b + m \frac{ah + \pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Făcând $a = 1$, $b = 0$ și împărțind cu h^m se obține

$$\begin{aligned}
D_h^m \cos x &= \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^m \cos\left(x + m \frac{h + \pi}{2}\right) \\
D_h^m \sin x &= \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^m \sin\left(x + m \frac{h + \pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

■

Problema 5.0.8 Să se calculeze $\Delta_h^m \frac{1}{x^2}$.

Soluție.

$$\begin{aligned}
\Delta_h^m \frac{1}{x^2} &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+h} + \cdots + \frac{1}{x+mh}\right) \Delta_h^2 \frac{1}{x} = \\
&= (-1)^m m! \frac{U'_m(x)}{U_m^2(x)} h^m \\
u_m(x) &= \prod_{k=0}^m (x + kh) \\
\Delta_h^m (fg)(a) &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \Delta_h^i f(a) \Delta_h^{m-i} g(a + ih)
\end{aligned}$$

■

Problema 5.0.9 Să se demonstreze formula

$$\delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f\left[x + \left(\frac{m}{2} - k\right)h\right]$$

Soluție.

$$\delta^m = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} E^{\frac{n}{2} - k}$$

■

Problema 5.0.10 Să se stabilească generalizarea formulei lui Leibniz prin calcul simbolic.

Soluție. \overline{E}_h operator de translație ce are efect numai asupra lui u
 $\overline{\overline{E}}_h$ operator de translație ce are efect numai asupra lui v

$$\begin{aligned}\Delta_h u(x)v(x) &= u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = \\ &= (\overline{E}_h \overline{\overline{E}}_h - I)u(x)v(x) \\ \Delta_h &= \overline{E} \overline{\overline{E}} - I\end{aligned}$$

$\overline{\Delta}_h$ operator de diferență ce are efect asupra lui u

$\overline{\overline{\Delta}}_h$ operator de diferență ce are efect asupra lui v

$$\begin{aligned}E_n &= I + \overline{\Delta}_h \quad \overline{\overline{\Delta}}_h = \overline{\overline{E}}_h - I \\ \Delta_h &= \overline{\Delta}_h \overline{\overline{E}}_h + \overline{\overline{\Delta}}_h \\ \Delta_h^m &= (\overline{\Delta}_h \overline{\overline{E}}_h + \overline{\overline{\Delta}}_h)^m = \sum_{j=0}^m \overline{\Delta}_h^j \overline{\overline{\Delta}}_h^{m-j} \overline{\overline{E}}_h^j \\ \Delta_h^m u(x)v(x) &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \Delta_h^j u(x) \Delta_h^{m-j} v(x+jh) \\ (a+b)^{[m,j]} &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a^{[m-j,h]} b^{[j,h]} \\ [a, a+h, \dots, a+nh; f] &= \frac{1}{n!h^n} \Delta_h^m f(a) \\ \Delta_h^m (fg)(a) &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \Delta_h^i f(a) \Delta_h^{m-i} g(a+ih)\end{aligned}$$

■

Problema 5.0.11 Să se demonstreze formula de sumare prin părți.

$$\sum_{x=a(h)}^{a+mh} u(x) \Delta_h v(x) = u(x)v(x) \Big|_a^{a+(m+1)h} - \sum_{x=a}^{a+mh} v(x+h) \Delta_h u(x)$$

Să se calculeze

$$\sum_{x=0}^m x b^x \quad (b > 0, b \neq 1), \quad \sum_{x=0}^m v(x+h) \Delta_h h(x)$$

Soluție. Dacă F este o soluție a ecuației cu diferențe

$$\Delta_h F(x) = f(x)$$

are loc formula de sumare

$$\sum_{j=0}^m f(a + jh) = F[a + (m + 1)h] - F(a)$$

$$\Delta_h F(x) = F(x + h) - F(x) = x, \quad x = a, a + h, \dots, a + mh$$

$$\Delta_h F(x) = f(x), \quad F(x) = u(x)v(x)$$

$$\Delta_h u(x)v(x) = u(x)\Delta_h v(x) + \Delta_h u(x)v(x + h)$$

$$\sum_{x=a(h)}^{a+mh} u(x)\Delta_h v(x) + \sum_{x=a(h)}^{a+mh} v(x + h)\Delta_h u(x) = u(x)v(x) \Big|_a^{a+(m+1)h}$$

$$u(x) = x, \quad \Delta v(x) = b^x \Rightarrow v(x) = \frac{b^x}{b - 1}$$

$$\sum_{x=0}^m x b^x = x \frac{b^x}{b - 1} \Big|_0^{m+1} - \sum_{x=0}^m \frac{b^x}{b - 1} =$$

$$= (m + 1) \frac{b^{m+1}}{b - 1} - \frac{1}{b - 1} (b + b^2 + \dots + b^{m+1}) = (m + 1) \frac{b^{m+1}}{b - 1} - \frac{b^{m+2} - b}{(b - 1)^2}$$

$$u(x) = x, \quad \Delta v(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = \frac{-\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}}$$

$$\sum_{x=a}^{a+mh} x \sin x = -x \frac{\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} \Big|_a^{a+(m+1)h} + \sum_{x=a}^{a+mh} \frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}}$$

$$\text{Deoarece } \Delta_h F(x) = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \text{ este satisfăcută pentru } F(x) = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{h}{2}}$$

rezultă că avem

$$\sum_{x=a}^{a+mh} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{h}{2}} \Big|_a^{a+(m+1)h}$$

■

Problema 5.0.12 Să se calculeze $\Delta_h^m \frac{1}{x^2}$.

Soluție.

$$\begin{aligned}\Delta_h^m \frac{1}{x^2} &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+h} + \cdots + \frac{1}{x+mh} \right) \Delta_h^m \frac{1}{x} = \\ &= (-1)^m m! \frac{u'_m(x)}{u_m^2(x)} h^m\end{aligned}$$

unde

$$u_m(x) = \prod_{k=0}^m (x + kh).$$

■

Problema 5.0.13 Să se demonstreze

$$\left[a_0, a_1, \dots, a_m; \frac{1}{t} \right] = \frac{(-1)^m}{a_0 a_1 \dots a_m}$$

Soluție. (prin inducție sau ca și cât de doi determinanți). ■

Problema 5.0.14 Se consideră $p + 1$ puncte distincte a_0, a_1, \dots, a_p . Să se demonstreze formula

$$[a_0, a_1, \dots, a_p; t^p] = \sum_{r_0+r_1+\dots+r_p=n-p} a_0^{r_0} a_1^{r_1} \dots a_p^{r_p}.$$

Problema 5.0.15 Să se demonstreze formula

$$[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_m; f] = \frac{a_k - a_0}{a_m - a_0} [a_0, a_1, \dots, a_{m-1}; f] + \frac{a_m - a_n}{a_m - a_0} [a_1, a_2, \dots, a_m; f]$$

Soluție.

$$a_k, a_0, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_{m-1}, a_m$$

$$[a_0, a_1, \dots, a_m; f] = \frac{[a_0, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_m; f] - [a_0, \dots, a_{m-1}; f]}{a_m - a_k}, \quad (5.1)$$

$$[a_0, a_1, \dots, a_m; f] = \frac{[a_0, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_m; f] - [a_1, \dots, a_m; f]}{a_0 - a_k} \quad (5.2)$$

Egalând cele două relații rezultă relația dorită. ■

Problema 5.0.16 Dacă $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, atunci

$$[x_0, \dots, x_m; fg] = \sum_{k=0}^m [x_0, \dots, x_k] [x_k, \dots, x_m; g]$$

Demonstrație. Prin inducție după m

$m = 1$

$$\begin{aligned} [x_0, x_1; fg] &= f(x_0)[x_0, x_1; g] + [x_0, x_1; f]g(x_1) = \\ &= f(x_0) \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} g(x_1) = \\ &= \frac{f(x_1)g(x_1) - f(x_0)g(x_0)}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

Presupunem relația adevărată pentru $m - 1$, adică

$$\begin{aligned} [x_0, \dots, x_{m-1}; fg] &= \sum_{k=0}^{m-1} [x_0, \dots, x_k; f] [x_k, \dots, x_{m-1}; g] \\ [x_0, \dots, x_n; fg] &\stackrel{def}{=} \frac{1}{x_m - x_0} ([x_1, \dots, x_m; fg] - [x_0, \dots, x_{m-1}; fg]) = \\ &= \frac{1}{x_m - x_0} \sum_{k=0}^{m-1} ([x_1, \dots, x_{k+1}; f] [x_{k+1}, \dots, x_n; g] - [x_0, \dots, x_k; f] [x_k, \dots, x_{n-1}; g]) \end{aligned}$$

Adunând și scăzând sub simbolul de însumare $[x_0, \dots, x_k; f] [x_{k+1}, \dots, x_m; g]$ și grupând convenabil se obține

$$\begin{aligned} [x_0, \dots, x_m; fg] &= \frac{1}{x_m - x_0} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} [x_0, \dots, x_k; f] ([x_{k+1}, \dots, x_m; g] - [x_k, \dots, x_{m-1}; g]) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{m-1} [x_{k+1}, \dots, x_n; g] ([x_1, \dots, x_{k+1}; f] - [x_0, \dots, x_k; f]) \right\} = \\ &= \frac{1}{x_n - x_0} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} (x_m - x_k) [x_0, \dots, x_k; f] [x_k, \dots, x_m; g] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^m (x_k - x_0) [x_0, \dots, x_n; f] [x_k, \dots, x_n; g] \right\} = \\ &= \frac{1}{x_n - x_0} \left\{ (x_m - x_0) [x_0; f] [x_0, \dots, x_n; g] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{m-1} (x_m - x_0)[x_0, \dots, x_k; f][x_k, \dots, x_m; g] + \\
& + (x_m - x_0)[x_0, \dots, x_m; f][x_m; g] \Big\} = \\
& = \sum_{k=0}^m [x_0, \dots, x_k; f][x_k, \dots, x_m; g]
\end{aligned}$$

■

Observația 5.0.17 Diferența divizată se poate introduce ca și coeficient dominant în PIL.

Problema 5.0.18 (Aplicație) O modalitate rapidă de a calcula valorile unui polinom de grad 3 în puncte echidistante folosind diferențe divizate.

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\Delta P(x) = P(x+h) - P(x) \Rightarrow P(x+h) = P(x) + \Delta P(x)$$

$$\Delta^2 P(x) = \Delta P(x+h) - \Delta P(x)$$

$$\Delta P(x+h) = \Delta P(x) + \Delta^2 P(x)$$

$$\Delta^3 P(x) = \Delta^2 P(x+h) - \Delta^2 P(x)$$

$$\Delta^2 P(x+h) = \Delta^2 P(x) + \Delta^3 P(x)$$

$$\Delta^3 P(x) = 6ah^3$$

$$\Delta P(0) = ah^3 + bh^2 + ch = h(h(ah + b) + c)$$

$$\Delta^2 P(0) = P(2h) - 2P(h) + P(0) =$$

$$= 8ah^3 + 4bh^2 + 2ch + d - 2ah^3 - 2bh^2 - 2ch - 2d + d =$$

$$= 6ah^3 + 2bh^2 = 2h^2(3ah + b)$$

$$\Delta^3 P(0)$$

$$\Delta_{k,i+1} = \Delta_{k-1,i} + \Delta_{k-1,i+1}$$

Problema 5.0.19 Dacă $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ are loc

$$(\Delta_h^m fg)(a) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (\Delta_h^i f)(a) (\Delta_h^{m-i} g)(a + ih)$$

Demonstrație. Inducție după m

$$m = 1$$

$$(\Delta_h f g)(a) = f(a)(\Delta_h g)(a) + g(a+h)(\Delta_h f)a \quad (5.3)$$

căci

$$(\Delta_h f g)(a) = f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) \pm f(a)g(c+h)$$

$$(\Delta_h f g)(a) = f(a)[g(a+h) - g(a)] + g(a+h)[f(a+h) - f(a)]$$

Presupunem relația adevărată pentru $m-1$

$$(\Delta_h^{m-1} f g)(a) = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (\Delta_h^i f)(a) (\Delta_h^{m-i-1} g)(a+ih)$$

$$(5.3) \Rightarrow (\Delta_h^m f g)(a) = \sum_{i=0}^m \binom{m-1}{i} [(\Delta_h^i f)(a) (\Delta_h^{m-i} g)(a+ih) +$$

$$+ (\Delta_h^{i+1} f)(a) (\Delta_h^{m-i-1} g)(a+(i+1)h)]$$

$$(\Delta_h^m f g)(a) = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (\Delta_h^i f)(a) (\Delta_h^{m-i} g)(a+ih) +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} (\Delta_h^k f)(a) (\Delta_h^{m-k} g)(a+kh) =$$

$$= f(a)(\Delta_h^m g)(a) + \sum \left[\binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{i-1} \right] (\Delta_h^{m-i} g)(a+ih) +$$

$$+ (\Delta_h^m f)(a) g(a+mh).$$

■

Problema 5.0.20 (Formula lui Vandermonde)

$$(a+b)^{[m,h]} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a^{[m-j,h]} b^{[j,h]}.$$

Demonstrație. Inducție după m

$$m = 1$$

$$(a+b)^{[1,h]} = a+b$$

$$\binom{1}{0} a^{[1,h]} b^{[0,h]} + \binom{1}{1} a^{[0,h]} b^{[1,h]} = a+b$$

Presupunem că

$$(a+b)^{[m-1,h]} = \sum \binom{m-1}{j} a^{[m-1-j,h]} b^{[j,h]} / (a+b-(m-1)h)$$

$$\begin{aligned} a^{[m-1-j,h]} b^{[j,h]} [a+b-(m-1)h] &= a^{[m-1-j,h]} [a-(m-1-h)b] b^{[j,h]} + a^{[m-1-j,h]} b^{[j,h]} (b-jh) \\ &= a^{[m-j,h]} b^{[j,h]} + a^{[m-1-j,h]} b^{[j+1,h]}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^{[mh]} &= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} a^{[m-j,h]} b^{[j,h]} + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} a^{[m-1-j,h]} b^{[j+1,h]} \\ &= \binom{m-1}{0} a^{[m,h]} b^{[0,h]} + \sum_{j=1}^n \left[\binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1} \right] a^{[m-j,h]} b^{[j,h]} \\ &\quad + \binom{m-1}{m-1} a^{[0,h]} b^{[m,h]} \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a^{[m-j,h]} b^{[j,h]}. \end{aligned}$$

■

Capitolul 6

Interpolare

6.1 Interpolare polinomială

Fie nodurile $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, m}$, $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.

Are loc formula de interpolare Lagrange

$$f = L_m f + R_m f$$

unde

$$(L_m f)(x) = \sum_{k=0}^m l_k(x) f(x_k)$$

și

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_m)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_m)} = \\ &= \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^m (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^m (x_k - x_j)} = \frac{u(x)}{(x - x_k)u'(x_k)} \end{aligned}$$

unde $u(x) = (x - x_0) \dots (x - x_m)$.

Dacă $\alpha = \min\{x, x_0, \dots, x_m\}$, $\beta = \max\{x, x_0, \dots, x_m\}$, $f \in C^m[\alpha, \beta]$, $f^{(m)}$ derivabilă pe $(\alpha, \beta) \ni \xi \in (\alpha, \beta)$ astfel încât

$$(R_m f)(x) = \frac{u(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)$$

Dacă $f \in C^{m+1}[a, b]$ atunci

$$(R_m f)(x) = \int_a^b \varphi_m(x, s) f^{(m+1)}(s) ds$$

cu

$$\varphi_m(x; s) = \frac{1}{m!} \left[(x-s)_+^m - \sum_{k=0}^m l_k(x) (x_k - s)_+^m \right]$$

Dacă $l_m(x, \cdot)$ păstrează semn constant pe $[a, b]$ atunci

$$(R_m f)(x) = \frac{1}{(m+1)!} \left[x^{m+1} - \sum_{k=0}^m l_k(x) x_k^{m+1} \right] f^{(m+1)}(\xi)$$

$$\xi \in [a, b]$$

$$(N_m f)(x) = f(x_0) + \sum_{i=0}^m (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) [x_0, \dots, x_i; f]$$

$$f = N_m f + R_m f \quad \text{formula de int. Newton}$$

$$(R_m f)(x) = u(x)[x, x_0, \dots, x_m; f] \quad x \in [a, b]$$

Pentru noduri echidistante

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0, m}$$

$$(L_m f)(x_0 + th) = \frac{t^{[m+1]}}{m!} \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \frac{1}{t-i} f(x_i)$$

$$(R_m f)(x_0 + th) = \frac{h^{m+1} t^{[m+1]}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)$$

$$(N_m f)(x_0 + th) = (N_m f)(t) = \sum_{k=0}^m \binom{t}{k} \Delta_h^k f(x_0)$$

(Formula Gregory-Newton, formula lui Newton cu diferențe progresive)

$$\begin{aligned} (N_m f)(x) &= (N_m f)(x_0 + th) = f(x_n) + \sum_{k=1}^m \binom{t+k-1}{k} \nabla_h^k f(x_m) = \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{-t}{k} \nabla_h^k f(x_m) \end{aligned}$$

(Formula lui Newton cu diferențe regresive)

$$\begin{aligned}
 S_{2n+1}(x_0 + th) &= f(x_0) + \sum_{k=1}^n \binom{t+k-1}{2k-1} \frac{\Delta^{2k-1} f_{1-k} + \Delta^{2k-1} f_{-k}}{2} + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{t}{2k} \binom{t+k-1}{2k-1} \Delta^{2k} f_{-k} \\
 S_{2n+2}(x_0 + th) &= S_{2n+1}(x_0 + th) + \binom{t+n}{2n+1} \frac{\Delta^{2n+1} f_{-n} + \Delta^{2n+1}}{2}
 \end{aligned}$$

(Formula lui Stirling)

$$\begin{aligned}
 x_k &\in [a, b], \quad k = \overline{0, m}, \quad x_i \neq x_j \quad (i \neq j) \\
 f &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \exists f^{(j)}(x_k), \quad k = \overline{0, m}, \quad j = \overline{0, r_k} \\
 n+1 &= m + r_0 + \dots + r_m = (r_0 + 1) + \dots + (r_m + 1) \\
 (H_n f)(x) &= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{r_k} h_{kj} f^{(j)}(x_k) \\
 h_{kj}(x) &= \frac{(x - x_k)^j}{j!} u_k(x) \sum_{\nu=0}^{r_k-j} \frac{(x - x_k)^\nu}{\nu!} \left[\frac{1}{n_k(x)} \right]_{x=x_k}^{(\nu)} \\
 f &= H_n f + R_n f \quad (\text{formula de interpolare a lui Hermite})
 \end{aligned}$$

$$u(x) = \prod_{k=0}^m (x - x_k)^{r_k+1}$$

$$u_k(x) = \frac{u(x)}{(x - x_k)^{r_k+1}}$$

Dacă $f \in C^n[\alpha, \beta] \ni f^{(n+1)}$ pe $[\alpha, \beta]$ atunci

$$(R_n f)(x) = \frac{u(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \xi \in [a, b]$$

Dacă $f \in C^{n+1}[\alpha, \beta]$ atunci

$$(R_m f)(x) = \int_a^b \varphi_n(x; s) f^{(n+1)}(s) ds$$

unde

$$\varphi_n(x; s) = \frac{1}{n!} \left\{ (x - s)_+^n - \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{r_k} h_{kj}(x) [(x_k - s)_+^n]^{(j)} \right\}$$

Cazuri particulare

- 1) $r_k = 0$, $k = \overline{0, n}$ Lagrange
- 2) $n = 0$, $r_0 = n$ Taylor
- 3) $r_0 = \dots = r_n = 1$ formula lui Hermite cu noduri duble

$$f = H_{2m+1}f + R_{2m+1}f$$

$$(H_{2m+1}f)(x) = \sum_{k=0}^m h_{k_0}(x)f(x_k) + \sum_{k=0}^m h_{k_1}(x)f'(x_k)$$

$$h_{x_0}(x) = \frac{u_k(x)}{u_k(x_k)} \left[1 - (x - x_k) \frac{u'_k(x_k)}{u_k(x_k)} \right]$$

$$h_{k_1}(x) = (x - x_k) \frac{u_k(x)}{u_k(x_k)}$$

- 4) Dacă $m = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$

$$r_0 = m, \quad r_1 = n$$

$$\begin{aligned} (H_{m+n+1}f)(x) &= \left(\frac{x-b}{a-b} \right)^{n+1} \sum_{i=0}^m \frac{(x-a)^i}{i!} \left[\sum_{\nu=0}^{m-i} \binom{n+\nu}{\nu} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^\nu \right] f^{(i)}(a) + \\ &+ \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{m+1} \sum_{j=0}^n \frac{(x-b)^j}{j!} \left[\sum_{\mu=0}^{n-j} \binom{m+\mu}{\mu} \left(\frac{x-b}{a-b} \right)^\mu \right] f^{(j)}(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_k &\in [a, b], \quad k = \overline{0, m}, \quad x_i \neq x_k \quad (i \neq j) \\ r_k &\in \mathbb{N}, \quad I_k \subseteq \{0, 1, \dots, r_k\}, \quad k = \overline{0, m} \\ f &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \exists f^{(j)}(x_k) \quad k = \overline{0, m}, \quad j \in I_n \\ n &= |I_0| + \dots + |I_m| - 1 \end{aligned}$$

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{j \in I_k} b_{kj}(x) f^{(j)}(x_k)$$

$$f = B_n f + R_n f \quad (\text{formula de interpolare a lui Birkhoff})$$

Dacă $f \in C^{n+1}[a, b]$ atunci

$$(R_n f) = \int_a^b \varphi_n(x, s) f^{(n+1)}(s) ds$$

unde

$$\varphi_n(x; s) = \frac{1}{n!} \left\{ (x-s)_+^n - \sum_{k=0}^m \sum_{j \in I_k} b_{kj}(x) [(x_k - s)_+^n]^{(j)} \right\}$$

Dacă $f \in C^{n+1}[a, b]$ și φ_n are semn constant pe $[a, b]$

$$(R_n f)(x) = E(x) f^{(n+1)}(\xi) \quad \xi \in [a, b]$$

$$E(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^m \sum_{j \in I_k} \frac{1}{(n-j+1)!} x_k^{n-j+1} b_{kj}(x)$$

6.2 Interpolare Lagrange

Problema 6.2.1 Să se scrie formula de interpolare a lui Lagrange în cazurile speciale $m = 1$ și $m = 2$. Interpretare geometrică.

Soluție. Polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0 și x_1 este

$$(L_1 f)(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

adică dreapta care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$ și $(x_1, f(x_1))$. Analog, polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0, x_1 și x_2 este

$$(L_2 f)(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2),$$

adică parabola care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$. Interpretarea lor geometrică apare în figura 6.1.

■

Problema 6.2.2 Construiți polinomul de interpolare Lagrange pentru funcția $y = \sin \pi x$ alegând $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Soluție.

$$(L_2 y)(x) = \frac{7}{2}x - 3x^2,$$

$$(R_2 y)(x) = \frac{x(x - \frac{1}{6})(x - \frac{1}{2})}{3!} \pi \cos \pi \xi, \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

■

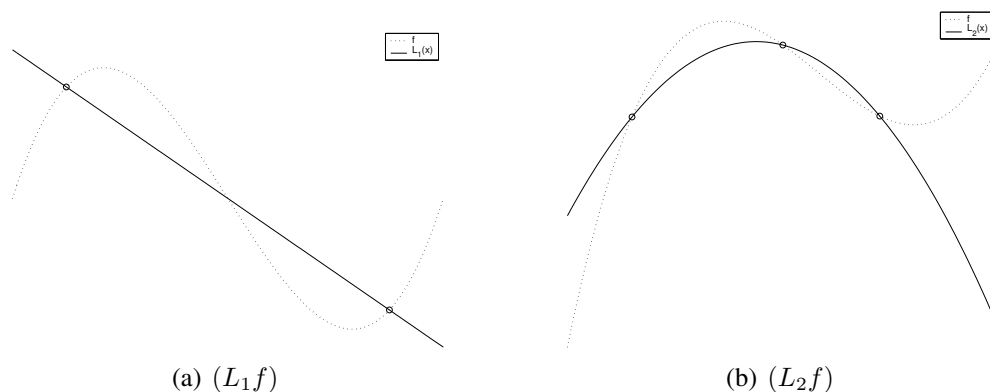


Figura 6.1: Interpretarea geometrică a lui L_1f (stânga) și L_2f

Problema 6.2.3 Cu ce eroare se poate calcula $\sqrt{115}$ cu ajutorul formulei de interpolare a lui Lagrange, considerând funcția $f(x) = \sqrt{x}$ și nodurile $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$?

$$\begin{aligned} (R_2f)(x) &= \frac{(x-100)(x-121)(x-144)}{6} f'''(\xi) \\ f'''(x) &= \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} \\ |(R_1f)(115)| &\leq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{100^5}} \cdot \frac{1}{6} |(115-100)(115-121)(115-144)| = \\ &= \frac{1}{16} \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot 6 \cdot 29 \approx 1 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Problema 6.2.4 În tabelele cu 5 zecimale corecte se dau logaritmi zecimali ai numerelor de la $x = 1000$ la $x = 10000$ cu eroarea absolută maximă egală cu $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$. Este posibil ca interpolarea liniară să conducă la o aceeași precizie?

Soluție.

$$f(x) = \lg x \quad f'(x) = \frac{M}{x} \quad f''(x) = -\frac{M}{x^2}$$

$$M = \lg e \approx 0.4343$$

$$|(R_1f)(x)| \leq \frac{(x-a)(x-b)}{2} M_2f$$

$$M_2(f) = \max |f''(x)| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$$

$$a < x < a + 1$$

$$b = a + 1$$

$$x - a = q$$

$$|(R_1 f)(x)| < \frac{1}{2} \underbrace{|q(q-1)|}_{\leq \frac{1}{4}} M_2(f)$$

$$|R_1 f| \leq \frac{1}{16} \cdot 10^{-6} < 10^{-7}$$

deci precizia nu este alterată. ■

Problema 6.2.5 *Relativ la funcția sin se alcătuieste următoarea tabelă cu diferențe*

x	$\Delta^0 = y$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
39°	0.6293204	267386	-7992	-318	13
41°	0.6560590	259354	-8310	-305	10
43°	0.6819984	251084	-8615	-295	10
45°	0.7071068	242469	-8910	-285	
47°	0.7313597	233559	-9195		
49°	0.7547096	224364			
51°	0.7771460				

Să se aproximeze $\sin 40^\circ$, $\sin 50^\circ$, $\sin 44^\circ$ cu formula Gregory-Newton pentru $m = 4$.

$$(N_m f)(t) = \sum_{i=0}^m \binom{t}{i} \Delta_i^k f(x_0)$$

$$(R_m f)(x_0 + th) = \frac{h^{m+1} t^{[m+1]}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)$$

$$f(x) \approx f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \Delta^3 f_0 + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{24} \Delta^4 f_0 + R_4$$

$$\sin 40^\circ \approx 0.6293204 + \frac{1}{2} \cdot 0.0267386 - \frac{1}{8}(-0.0007992) +$$

$$+ \frac{1}{16}(-0.0000318) - \frac{5}{64} \cdot 0.0000013 = 0.6427876$$

$$|(R_4 f)(t)| \leq h^5 t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) f^{(5)}(\xi) < 0.0000000028$$

$\sin 50^\circ$ se poate aproxima cu formula lui Newton cu diferențe regresive.

$\sin 44^\circ$ se poate aproxima cu formula lui Stirling.

Problema 6.2.6 Să se determine un polinom de interpolare de grad 3 pe intervalul $[-1, 1]$ astfel încât restul să fie minim.

Soluție. Restul este minim dacă nodurile de interpolare sunt rădăcinile polinomului Cebâșev de speța I.

$$T_m(t) = \cos(\arccos t)$$

$$\|R_m f\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!2^{2m+1}} \|f^{(m+1)}\|_\infty$$

$$T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$$

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$$

$$T_0 = 1, \quad T_1 = t$$

$$t_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \quad k = \overline{1, n}$$

■

6.3 Interpolare Hermite

Problema 6.3.1 Să se determine polinomul de interpolare Hermite cu nodurile $x_0 = -1$ multiplu de ordinul 3, $x_1 = 0$ simplu și $x_2 = 1$ multiplu de ordinul 3.

Soluție.

$$m = 2, \quad r = 0 = 2, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 2$$

$$H_n f)(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{r_k} h_{kj}(x) f^{(j)}(x_k)$$

$$u_k(x) = \frac{u(x)}{(x - x_k)^{r_k+1}}$$

$$h_{kj}(x) = \frac{(x - x_k)^j}{j!} u_k(x) \sum_{\nu=0}^{r_k-j} \frac{(x - x_k)^\nu}{\nu!} \left[\frac{1}{u_k(x)} \right]_{x=x_k}^{(\nu)}$$

$$n + 1 = 3 + 1 + 3 = 7 \Rightarrow n = 6$$

$$h_{00}(x) = x(x-1)^3 \left[\frac{1}{8} + \frac{5(x+1)}{16} + \frac{(x+1)^2}{2} \right]$$

$$h_{01}(x) = x(x-1)^3(x+1) \left[\frac{1}{8} + \frac{5(x+1)}{16} \right]$$

$$\begin{aligned}
h_{02}(x) &= \frac{x(x-1)^3(x+1)^2}{16} \\
h_{10}(x) &= (1-x^2)^3 \\
h_{20}(x) &= x(x+1)^3 \left[\frac{1}{8} - \frac{5(x-1)}{16} + \frac{(x+1)^2}{2} \right] \\
h_{21}(x) &= x(x+1)^3(x-1) \left[\frac{1}{8} - \frac{3(x-1)}{16} \right] \\
h_{22}(x) &= \frac{x(x+1)^3(x-1)^2}{16}
\end{aligned}$$

■

Problema 6.3.2 *Aceeași problemă, pentru aceleași noduri ca mai sus, dar duble.*

Soluție.

$$r_0 = r_1 = r_2 = 1, \quad m = 2, \quad n = 5, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

$$(H_{2m+1}f)(x) = \sum_{k=0}^m h_{k0}(x)f(x_k) + \sum_{k=0}^m h_{k1}(x)f'(x_k)$$

$$h_{k0}(x) = \frac{u_k(x)}{u_k(x_k)} \left[1 - (x - x_k) \frac{u'_k(x_k)}{u_k(x_k)} \right]$$

$$h_{n1}(x) = (x - x_n) \frac{u_k(x)}{u_k(x_k)} \quad u_0(x) = x^2(x-1)^2$$

$$u_0(-1) = 4 \quad u'_0(x) = 2x(x-1)(x-1+x) = 2x(x-1)(2x-1)$$

$$h_{00}(x) = \frac{x^2(x-1)^2}{4} \left[1 - \frac{12}{4}(x+1) \right] = \frac{x^2(x-1)^2}{4}(-3x-2)$$

$$h_{01}(x) = \frac{(x+1)x^2(x-1)^2}{4}$$

$$u_1(x) = (x+1)^2(x-1)^2$$

$$\begin{aligned}
u'_1(x) &= 2(x+1)(x-1)^2 + 2(x+1)^2(x-1) = \\
&= 2(x+1)(x-1)(x-1+x+1) = 4x(x-1)(x+1)
\end{aligned}$$

$$h_{10}(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)^2}{1} [1 - x \cdot 0] = (x+1)^2(x-1)^2$$

$$h_{11}(x) = (x+1)^2(x-1)^2x$$

$$u_2(x) = (x+1)^2x^2 \quad u_2(1) = 4$$

$$u_2'(x) = 2(x+1)x^2 + 2(x+1)^2x = 2(x+1)x(2x+1)$$

$$u_2'(1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 12$$

$$h_{20}(x) = \frac{(x+1)^2x^2}{4} \left[1 - (x-1)\frac{12}{4} \right] = \frac{(x+1)^2x^2}{4} [-3x+4]$$

$$h_{21}(x) = \frac{(x-1)(x+1)^2x^2}{4}$$

■

Problema 6.3.3 Să se arate că pentru PIH cu noduri duble avem

$$h_{k0}(x) = [1 - 2(x - x_k)l_k'(x_k)] l_k^2(x)$$

$$h_{k1}(x) = (x - x_k)l_k^2(x)$$

unde l_k sunt polinoamele fundamentale Lagrange.

Problema 6.3.4 Să se determine PIH pentru $x_0 = a$, $x_1 = b$, $m = 1$, $r_0 = r_1 = 1$.

Soluție. Se poate aplica formula cu noduri duble sau generalizarea formulei lui Taylor.

$$u_0 = (x - b)^2 \quad u_1 = (x - a)^2$$

$$\begin{aligned} h_{00}(x) &= \frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} \left[1 - (x-a)\frac{2(a-b)}{(a-b)^2} \right] \\ &= \frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} \left[\frac{a-b-2x+2a}{a-b} \right] = \frac{(x-b)^2}{(a-b)^3} [3a-b-2x] \end{aligned}$$

$$h_{01}(x) = (x-a)\frac{(x-b)^2}{(a-b)^2}$$

$$h_{10}(x) = \frac{(x-a)^2}{(b-a)^3} [3b-a-2x]$$

$$h_{11}(x) = (x-b) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2$$

$$(H_3f)(x) = h_{00}(x)f(a) + h_{01}(x)f'(a) + h_{10}(x)f(b) + h_{11}(x)f'(b)$$

■

Problema 6.3.5 Se consideră $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Se notează cu $F_{2n+1}f$ polinomul Hermite cu noduri duble determinat de condițiile

$$\begin{aligned}(F_{2m+1}f)(x_k) &= f(x_k), \quad k = \overline{0, m} \\ (F_{2m+1}f)'(x_k) &= 0.\end{aligned}$$

Să se arate că dacă x_0, x_1, \dots, x_m sunt rădăcinile polinomului lui Cebășev de speța I avem:

$$(F_{2m+1}f)(x) = \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{k=0}^m (1 - x_k x) \left(\frac{T_{m+1}(x)}{x - x_k} \right)^2 f(x_k).$$

Soluție.

$$h_{k_0}(x) = \frac{u_k(x)}{u_k(x_k)} \left[1 - (x - x_k) \frac{u'(x_k)}{u_k(x_k)} \right]$$

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_m)$$

$$u_k(x) = \frac{w^2(x)}{(x - x_k)^2} = \left(\frac{1}{2^m} \frac{T_{m+1}(x)}{x - x_k} \right)^2$$

$$1 - (x - x_k) \frac{u'_k(x_k)}{u_k(x_k)} = (x - x_k) \left[\frac{1}{x - x_k} + \frac{1}{x_0 - x_k} + \dots + \frac{1}{x_n - x_k} \right]$$

$$u_k(x_k) = w'^2(x_k)$$

$$u'_k(x_k) = w'(x_k)w''(x_k)$$

$$w'(x_k) = \frac{m+1}{2^m} \frac{(-1)^k}{\sqrt{1 - x_k^2}}$$

$$w''(x) = \frac{m+1}{2^m} \left(x \sin[(m+1) \arccos x] - \right.$$

$$\left. (m+1) \sqrt{1 - x^2} \cos[(m+1) \arccos x] \right) / \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^3$$

$$w''(x_k) = \frac{m+1}{2^m} \frac{(-1)^k x_k}{\left(\sqrt{1 - x_k^2} \right)^3}$$

$$h_{k_0}(x) = \left(\frac{1}{2^m} \frac{T_{m+1}(x)}{x - x_k} \right)^2 \frac{1}{w'^2(x_k)}$$

$$\left[1 - (x - x_k) \frac{w'(x_k)w''(x_k)}{w'^2(x_k)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{T_{m+1}(x)}{x - x_k} \right)^2 \cdot \frac{1}{2^m} \frac{2^{2m}(1 - x_k)^2}{(m+1)^2} \left(\frac{1 - (x - x_k) \frac{x_k(m+1)^2}{2^{2m}(1 - x_k)^2}}{\frac{(m+1)^2}{2^{2m}} - \frac{1}{x - x_k}} \right) = \\
&= \frac{1}{(m+1)^2} \left(\frac{T_{m+1}(x)}{x - x_k} \right)^2 (1 - x_k x)
\end{aligned}$$

■

Problema 6.3.6 (Relația lui Cauchy) Arătați că $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^n l_i(x)(x_i - x)^j = \begin{cases} 1 & \text{dacă } j = 0 \\ 0 & \text{dacă } j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Soluție. Pentru $t \in \mathbb{R}$ și $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ fixat, funcția $x \rightarrow (x - t)^j \in \mathbb{P}_n$ și coincide cu polinomul său de interpolare în x_0, \dots, x_n ; formula cerută nu este altceva decât polinomul de interpolare Lagrange pentru $t = x$. ■

Problema 6.3.7 (Nucleul lui Peano pentru operatorul de interpolare Lagrange)

a) Arătați că pentru $f \in C_b^{n+1}[a, b]$ avem $\forall x \in [a, b]$

$$(R_n f)(x) = f(x) - p_n(x) = \int_a^b K_n(x, t) f^{(n+1)}(t) dt$$

cu

$$K_n(x, t) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n [(x - t)_+^n - (x_i - t)_+^n] l_i(x)$$

Deduceți că

$$(R_n f)(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n!} \left[\int_{x_i}^x (x_i - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \right] l_i(x)$$

b) Ce devine $K_1(x, t)$ dacă $x \in (x_0, x_1)$? Deduceți existența unui $\xi_x \in (x_0, x_1)$ astfel încât

$$E_1(x) = f''(\xi_x)(x - x_0)(x - x_1)/2.$$

c) Arătați că soluția unică a problemei la limită: "fiind dat $g \in C[x_0, x_1]$ găsiți $u \in C^2[x_0, x_1]$ astfel încât $u''(x) = g(x)$ pentru $x \in]x_0, x_1[$, $u(x_0) = u(x_1) = 0$ " este dată de

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} K_1(x, t) g(t) dt.$$

Soluție. a)

$$E_n = (R - nf)(x) = \int_a^b K_n(x, t) f^{(n+1)}(t) dt$$

unde

$$K_n(x, t) = \frac{1}{n!} \left[(x - t)_+^n - \sum_{i=0}^n l_i(x) (x_i - t)_+^n \right] = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n [(x - t)_+^n - (x_i - t)_+^n] l_i(x)$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} & \int_a^b [(x - t)_+^n - (x_i - t)_+^n] f^{(n+1)}(t) dt = \\ &= \int_c^x [(x - t)^n - (x_i - t)^n] f^{(n+1)}(t) dt + \int_{x_i}^x (x_i - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

dar

$$\sum_{i=0}^n [(x - t)^n - (x_i - t)^n] l_i(x) = 0$$

conform relației lui Cauchy.

b)

$$K_1(x, t) = 0 \quad \text{dacă} \quad t \notin (x_0, x_1)$$

căci

$$K_1(t) = (x - t)_+ - (x_0 - t)_+ l_0(x) + (x_1 - t)_+ l_1(x)$$

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$K_1(x, t) = \begin{cases} \frac{(x - x_1)(t - x_0)}{x_1 - x_0} & t \in [x_0, x] \\ \frac{(t - x_1)(x - x_0)}{x_1 - x_0} & t \in [x, x_1] \end{cases}$$

$$K_1(x, t) \leq 0 \stackrel{t. medie}{\Rightarrow} E_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(x)$$

c) Scriind că $p_1 = 0$ este polinomul de interpolare al lui u cu nodurile x_0 și x_1 obținem

$$u(x) - p_1(x) = \int_{x_0}^{x_1} k_1(x, t) u''(t) dt = \int_{x_0}^{x_1} k_1(x, t) g(t) dt$$

$$p_1(x_0) = u(x_0) = 0 = p_1(x_1) = u(x_1)$$

Se verifică ușor că problema la limită admite efectiv o soluție. K_1 se numește funcția lui Green a problemei la limită. ■

6.4 Interpolare Birkhoff

Problema 6.4.1 Dându-se $f \in C^2[0, h]$, $h > 0$ să se determine un polinom de grad minim B astfel încât

$$\begin{cases} B(0) = f(0) \\ B'(h) = f'(h). \end{cases} \quad (6.1)$$

Să se dea expresia restului.

Soluție. $m = 1$, $r_0 = 0$, $r_1 = 1$, $I_0 = \{0\}$, $I_1 = \{1\}$, $n = 1$
Soluția există și este unică.

$$(6.1) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$(B_1 f)(x) = b_{00}(x)f(0) + b_{11}(x)f'(h)$$

$$(B_1 f)(x) = f(0) + xf'(h)$$

$$\begin{aligned} b_{00}(x) &= Ax + b & b_{11}(x) &= Cx + D \\ b_{00}(x) &= 1 & b_{11}(x) &= x \end{aligned}$$

Pentru rest se aplică teorema lui Peano.

$$(R_1 f)(x) = \int_0^h \varphi_1(x; s) f''(s) ds$$

$$\varphi_1(x; s) = (x - s)_+ - x = \begin{cases} -x & x \leq s \\ -s & x > s \end{cases}$$

$$\varphi_1(x; s) \leq 0, \quad \forall x, s \in [0, h]$$

$$(R_1 f)(x) = E(x) f''(\xi), \quad \xi \in [0, h]$$

$$E(x) = \frac{x^2}{2} - hx \quad \|R_1 f\|_\infty \leq \frac{h}{2} \|f''\|_\infty$$

■

Problema 6.4.2 Pentru $f \in C^3[0, h]$, $h \in \mathbb{R}_+$, $m = 2$, $r_0 = 1$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $I_0 = I = \{1\}$, $I_1 = \{0\}$ să se construiască formula de interpolare Birkhoff corespunzătoare.

Soluție.

$$P(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$$

$$\begin{cases} P'(0) = & a_1 = f'(0) \\ P\left(\frac{h}{2}\right) = & \frac{h^2}{4}a_0 + \frac{h}{2}a_1 + a_2 = f\left(\frac{h}{2}\right) \\ P'(h) = & 2ha_0 + a_1 = f'(h) \end{cases}$$

Rezolvând sistemul se obține

$$(B_2f)(x) = \frac{(2x-h)(3h-2x)}{8h}f'(0) + f\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{4x^2-h^2}{8h}f'(h)$$

$$(B_2f)(x) = b_{01}(x)f'(0) + b_{10}(x)f\left(\frac{h}{2}\right) + b_{21}(x)f'(h)$$

$$b_{01}(x) = \frac{(2x-h)(3h-2x)}{8h^2}, \quad b_{10}(x) = 1, \quad b_{21}(x) = \frac{4x^2-h^2}{8h}$$

$$(R_2f)(x) = \int_0^h \varphi_2(x; s)f'''(s)ds$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x; s) &= \frac{1}{2} \left\{ (x-s)^2 - b_{01}(x)[(0-s)_+^2] + b_{10}(x) \left(\frac{h}{2} - s \right)_+^2 - S_{21}[(h-s)_+^2] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[(x-s)_+^2 - \left(\frac{h}{2} - s \right)_+^2 - \frac{4x^2-h^2}{4h}(h-s) \right]. \end{aligned}$$

$$\varphi_2(x; s) \geq 0 \quad \text{dacă} \quad x \in \left[0, \frac{h}{2}\right], \quad s \in [0, h]$$

$$\varphi_2(x; s) \leq 0 \quad \text{pentru} \quad x \in \left[\frac{h}{2}, h\right], \quad s \in [0, h]$$

Pentru $x \in [0, h]$, $\varphi_2(x, \cdot)$ are semn constant pe $[0, h]$

$$(R_2f)(x) = f'''(\xi) \int_a^b (x; s)ds = \frac{(2x-h)(2x^2-2hx-h^2)}{24}f'''(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq h$$

■

Problema 6.4.3 Să se determine un polinom de grad minim care verifică

$$P(0) = f(0), \quad P'(h) = f'(h), \quad P''(2h) = f''(2h),$$

unde $f \in C^3[0, 2h]$ (Problema Abel-Gončarov cu două noduri). Dați expresia restului.

Soluție. Din condițiile de interpolare se obține

$$P(x) = \frac{f''(2h)}{2}x^2 + [f'(h) - hf''(2h)]x + f(0)$$

Tratând problema ca pe o PIB cu $m = 2$, $I_0 = \{0\}$, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2\}$ obținem

$$b_{00}(x) = 1 \quad b_{11}(x) = x \quad b_{22}(x) = \frac{x^2}{2} - hx$$

$$(R_3f)(x) = \int_0^{2h} \varphi_2(x; s) f'''(s) ds$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x; s) &= \frac{1}{2!} \{ (x-s)^2 - b_{00}(x)(0-s)_+^2 - b_{11}(x)[(h-s)_+^2]' - b_{22}(x)[(2h-s)_+^2]'' \} \\ &= \frac{1}{2} [(x-s)_+^2 - 2x(h-s)_+ - (x^2 - 2hx)(2h-s)_+^0] \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} s^2 & x \geq s \quad s < h \\ s^2 + 2x(h-x) & x \geq s \quad s > h \\ x(2s-x) & x < s \quad s < h \\ -x(x-2h) & x < s \quad s > h \end{cases} \end{aligned}$$

$$\varphi_2(x; s) \geq 0$$

Putem aplica corolarul la teorema lui Peano

$$\exists \xi \in [0, 2h] \text{ a.î. } (R_3f)(x) = E(x)f'''(\xi),$$

unde

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}h^2b_{11}(x) - 24b_{22}(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{h^2x}{2} - 2h\left(\frac{x^2}{2} - hx\right) \\ &= \frac{x^3}{6} - \frac{h^2x}{2} - hx^2 + 2h^2x = \frac{x^3}{6} - hx^2 + \frac{3h^2}{2}x \end{aligned}$$

■

6.5 Interpolare rațională

Problema 6.5.1 Să se determine o aproximare Padé de grad 5 cu $n = 2$, $n = 3$ pentru $f(x) = e^x$.

Soluție.

$$r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}, \quad p \in \mathbb{P}_n, \quad q \in \mathbb{P}_m$$

$$f^{(k)}(0) - r^{(k)}(0) = 0, \quad k = \overline{0, N}, \quad N = n + m = 5$$

$$\begin{aligned} f(x) - r(x) &= f(x) - \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)q(x) - p(x)}{q(x)} = \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{i=0}^m q_i x^i - \sum_{i=0}^n p_i x^i}{q(x)} \end{aligned}$$

$f - r$ are o rădăcină multiplă de ordin N . Pentru coeficientul lui x^k de la numărător avem

$$\sum_{i=0}^k a_i q_{k-i} - p_k = 0, \quad k = \overline{0, N}$$

Luăm $q_0 = 1$ și $p_{n+1} = p_{n+2} = \dots = p_N = 0$ și $q_{m+1} = q_{m+2} = \dots = q_N = 0$

$$x^5 : \frac{1}{2}q_3 + \frac{1}{6}q_2 + \frac{1}{24}q_1 = -\frac{1}{120}$$

$$x^4 : q_3 + \frac{1}{2}q_2 + \frac{1}{6}q_1 + \frac{1}{24} = 0$$

$$x^3 : q_3 + q_2 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{6} = 0$$

$$x^2 : q_2 + q_1 - p_2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^1 : q_1 - p_1 + 1 = 0$$

$$x^0 : p + 0 = 1$$

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \frac{3}{5}, \quad p_2 = \frac{2}{20}, \quad q_1 = -\frac{2}{5}q_2 = \frac{3}{20}, \quad q_3 = -\frac{1}{60}$$

$$r(x) = \frac{1 + \frac{3}{5}x + \frac{1}{20}x^2}{1 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}$$

■

Problema 6.5.2 Determinați aproximarea Padé de grad 6 pentru $f(x) = \sin x$ și $n = m = 3$.

Soluție.

$$\sum_{i=0}^k a_k q_{k-i} - p_k = 0, \quad k = \overline{0, 6}$$

$$p_4 = p_5 = p_6 = 0 \quad q_0 = 1$$

$$q_n = q_5 = q_6 = 0 \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$a_3 = -\frac{1}{6} \quad a_4 = 0 \quad a_5 = \frac{1}{120} \quad a_6 = 0$$

Se obțin următorii coeficienți:

$$x^7 : a_0 q_6 + a_1 q_5 + a_2 q_4 + a_3 q_3 + a_4 a_2 + a_5 q_1 + a_6 q_0 - p_6 = 0$$

$$x^6 : q_5 - \frac{1}{6} q_3 + \frac{1}{120} q_1 = 0$$

$$x^5 : a_1 q_4 + a_3 q_2 + a_5 q_0 - p_5 = q_4 - \frac{1}{6} q_2 + \frac{1}{120} = 0$$

$$x^4 : a_1 q_3 + a_3 q_1 - p_4 = q_3 - \frac{1}{6} q_1 = 0$$

$$x^3 : a_1 q_2 + a_3 q_0 - p_3 = q_2 - \frac{1}{6} - p_3 = 0$$

$$x^2 : a_1 q_1 - p_2 = q_1 - p_2 = 0$$

$$x^1 : a_0 q_1 + a_1 q_0 - p_1 = 1 - p_1 = 0$$

$$x^0 : a_0 q_0 - p_0 = 0$$

$$p_0 = 0 \quad p_1 = 1 \quad q_1 = p_2 = 0$$

$$q_3 = 0 \quad q_2 = \frac{1}{20} \quad p_3 = q_2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{20} - \frac{1}{6} = -\frac{7}{60}$$

$$r(x) = \frac{x - \frac{7}{60}x^3}{1 + \frac{1}{20}x^2}$$

■

Problema 6.5.3 Dându-se $f(0) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, determinați o funcție F de interpolare rațională pentru f .

Soluție.

$$F = \frac{P_r}{P_s} \quad m = r + s$$

$$f(x_i) = f(x_i) \quad i = \overline{0, m}$$

$$f_m(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{v_1(x_1) + \frac{x - x_1}{v_2(x_2) + \frac{x - x_2}{v_3(x_3) + \dots + \frac{x - x_{m-1}}{v_m(x_m)}}}}$$

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$G_{k+1}(x) = r_k(x_k)G_k(x) + (x - x_{k-1})G_{k-1}(x)$$

$$v_{i0} = f(x_i) \quad v_{ik} = \frac{x_i - x_{k-1}}{v_{i,k-1} - v_{k-1,k-1}} \quad k = \overline{1, i} \quad i = \overline{1, m}$$
$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & -1 \end{array}$$

$$v_{1,1} = \frac{x_1 - x_0}{v_{1,0} - v_{0,0}} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{2}{3} - 1} = -\frac{3}{2}$$

$$v_{2,1} = \frac{x_2 - x_1}{v_{2,1} - v_{1,1}} = -2, \quad v_{2,2} = \frac{x_2 - x_1}{v_{2,1} - v_{1,1}} = -1$$

$$F_2(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{v_{11} + \frac{x - x_1}{v_{22}}} = 1 + \frac{x}{-\frac{3}{2} + \frac{x - \frac{1}{2}}{-1}} = \frac{1}{x + 1}$$

Restul are expresia

$$(R_m f)(x) = \frac{(-1)^m u(x)}{H_{m+1}(x)[v_{m+1}(x)H_{m+1}(x) + (x - x_m)H_m(x)]}.$$

10

6.6 Interpolare spline

Problema 6.6.1 Arătați că orice funcție $f \in C^m[a, b]$ poate fi aproximată uniform, împreună cu derivatele ei până la ordinul m printr-o funcție spline de gradul m , derivatele ei respectiv prin derivatele funcției spline până la ordinul m .

Demonstrație. $f \in C^m[a, b] \Rightarrow f^{(m)} \in [a, b] \Rightarrow f^{(m)}$ poate fi aproximată uniform pe $[a, b]$ printr-o funcție în scară, continuă la dreapta și discontinuă în $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$, notată cu h_m .

Fie problema diferențială

$$s^{(m)}(x) = h_m(x), \quad x \in [a, b]$$

$$s^{(r)}(a) = f^{(r)}(a), \quad r = \overline{0, m-1}$$

Soluția acestei probleme pe $[a, b]$ este

$$s(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} h_m(t) dt \quad (6.2)$$

s este o funcție spline de grad m căci

$$s|_{(x_i, x_{i+1})} \in P_{m-1}, \quad s \in C^{m-1}[a, b]$$

$$f \in C^m[a, b] \Rightarrow$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(t) dt \quad (6.3)$$

$$(6.2), (6.3) \Rightarrow f^{(r)}(x) - s^{(r)}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{m-r-1}}{(m-r-1)!} [f^{(m)}(t) - h_m(t)] dt, \quad r = \overline{0, m-1}$$

$$\|f^{(r)} - s^{(r)}\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{m-r}}{(m-r)!} \underbrace{\|f^{(m)} - h_m\|_\infty}_{< \varepsilon}, \quad r = \overline{0, m-1}$$

■

Problema 6.6.2 Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$, $b > 1$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ știind că $f \in C^1[a, b]$ și cunoscând $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ să se scrie expresia funcției spline cubice de interpolare cu nodurile $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$ și a restului.

Soluție.

$$s(x) = s_1(x)f(x_1) + s_2(x)f(x_2) + s_3(x)f(x_3)$$

unde

$$s_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, 3}$$

$$s_i(x) = a_0 + a_1x + b_1x^3 + b_2\left(x - \frac{1}{2}\right)_+^3 + b_3(x-1)_+^3$$

$$\sum_{i=1}^3 b_i x_i^r = 0, \quad r = \overline{0, m-1}, \quad m = 2$$

$$s_i''(x) = 6b_1x_+ + 6b_2\left(x - \frac{1}{2}\right)_+ + 6b_3(x-1)_+$$

$$s_i''(0) = s_i''(1) = 0$$

$$s_i'''(x) = 6(b_1 + b_2 + b_3) = 0 \Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 = 0 \quad (x \geq 1)$$

$$s_i''(0) = 0$$

$$s_i''(1) = 6b_1 + 3b_2 = 0$$

$$b_2 = -2b_1$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0 \Rightarrow b_3 = b_1$$

$$s_i(x) = a_0 + a_1x + b \left[x_+^3 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)_+^3 + (x-1)_+^3 \right]$$

$$s_1(0) = a_0 = 1$$

$$s_1\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{a_1}{2} + b \cdot \frac{1}{8} = 0$$

$$s_1(1) = 1 + a_1 + b \left[1 - \frac{1}{4} \right] = 0$$

$$s_1(x) = 1 - \frac{5}{2}x + 2 \left[x_+^3 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)_+^3 + (x-1)_+^3 \right]$$

$$s_2(0) = a_0 = 0$$

$$s_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a_1}{2} + \frac{b}{8} = 1$$

$$s_2(1) = a_1 + b \left[1 - \frac{1}{4} \right] = 0$$

$$s_2(x) = 3x - 4 \left[x_+^3 - 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)_+^3 + (x-1)_+^3 \right]$$

$$s_3(0) = a_0 = 0$$

$$s_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a_1}{2} + \frac{b}{8} = 0$$

$$s_3(1) = a_1 + \frac{3b}{4} = 1$$

$$s_3(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \left[x_+^3 - 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)_+^3 + (x-1)_+^3 \right]$$

Pentru rest folosim teorema lui Peano

$$(Rf)(x) = \int_a^b \varphi(x; t) f^{(m)}(t) dt$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \frac{1}{(m-1)!} \left\{ (x-t)_+^{m-1} - \sum_{i=1}^3 s_i(x)(x_i-t)_+ \right\} = \\ &= (x-t)_+ - \sum_{i=1}^3 s_i(x)(x_i-t)_+ = \\ &= (x-t)_+ - s_1(x)(-t)_+ - s_2(x) \left(\frac{1}{2} - t \right)_+ - s_3(1-t)_+ \end{aligned}$$

■

Problema 6.6.3 Fie funcția $f(x) = \sin \pi x$ și nodurile $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$.

Să se determine o funcție spline naturală și o funcție spline limitată (racordată) care aproximează pe f .

Soluție. Vom rezolva un sistem liniar de forma $Ax = b$.

Pentru funcția spline naturală avem:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-1} + h_{n+1}) & h_{n-1} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_n - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pentru funcția spline limitată:

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}, \quad n = 3$$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0$$

$$h_0 = \frac{1}{6}, \quad h_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \quad h_2 = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\frac{1}{3}}(-1) - \frac{3}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{9}{2} \\ -\frac{15}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \pi \cos \pi x \quad f'(0) = \pi \quad f'(1) = -\pi$$

$$b = \begin{bmatrix} 3(3 - 3\pi) \\ -\frac{9}{2} \\ 3(2 - \pi) \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{40}(a_1 - a_0) - 3f'(0) = \frac{3}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{2} - 3\pi = 3(3 - 3\pi)$$

$$-3\pi - \frac{3}{\frac{1}{2}}(-1) = 6 - 3\pi = 3(2 - \pi)$$

■

Problema 6.6.4 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1[a, b]$, $a < 0$, $b > 1$. Să se scrie o funcție spline naturală de interpolare care verifică $s(0) = f(0)$, $s'(0) = f'(0)$, $s(1) = f(1)$, $s'(1) = f'(1)$.

Soluție. Funcția căutată este de forma

$$s(x) = p_{m-1}(x) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_i} c_{ij}(x - x_i)_+^{2m-1-j}$$

$$s(x) = a_0 + a_1x + c_{10}x^3 + c_{11}x^2 + c_{20}(x - 1)_+^3 + c_{21}(x - 1)_+^2$$

Avem 6 necunoscute și 4 condiții

$$s'(x) = a_1 + 3c_{10}x^2 + 2c_{11}x + 3c_{20}(x - 1)_+^2 + 2c_{21}(x - 1)_+$$

$$s(0) = a_0 = f(0)$$

$$s'(0) = a_1 = f'(0)$$

$$s(1) = f(0) + f'(0) + c_{10} + c_{11} = f(1)$$

$$s'(1) = f'(0) + 3c_{10} + 2c_{11} = f'(1)$$

$$s''(1) = 0$$

$$s''(x) = 6c_{10}x + 2c_{11}x^0 + 6c_{20}(x - 1)_+ + 2c_{21}(x - 1)_+^0$$

$$3c_{10} + c_{11} + c_{21} = 0$$

$$s'''(x) = 6c_{10}x^0 + 6c_{20}(x - 1)_+^0$$

$$\begin{aligned}
s'''(1) &= c_{10} + c_{20} = 0 \quad c_{20} = -c_{10} \\
\begin{cases} c_{10} + c_{11} = f(1) - f(0) - f'(0) \\ 3c_{10} + 2c_{11} = f'(1) - f'(0) \end{cases} \\
c_{10} &= 2f(0) + f'(0) - 2f(1) + f'(1) \\
c_{11} &= f(1) - f(0) - f'(0) - 2f(0) - 2f'(0) + 2f(1) - f'(1) = \\
&= 3f(1) - 3f(0) - 3f'(0) - f'(1) \\
c_{21} &= -3c_{10} - c_{11} = -6f(0) - 3f'(0) + 6f(1) - 3f'(1) - 3f(1) + 3f(0) + 3f'(0) + f'(1) = \\
&= -3f(0) + 3f(1) - 2f'(1)
\end{aligned}$$

Altfel. Pe $[0, 1]$, $s(x)$ coincide cu polinomul de interpolare Hermite cu nodurile duble 0 și 1, H_3f , iar pe $[a, 0) \cup (1, b]$ este un polinom de grad 1 tangent la H_3f

$$s(x) = \begin{cases} f'(0)x + f(0) & x \in [a, 0) \\ (H_3f)(x) & x \in [0, 1] \\ f'(1)x + f(1) - f'(1) & x \in (1, b] \end{cases}$$

■

Capitolul 7

Aproximări în medie pătratică

Se pune problema să se aproximeze o mulțime de date (x_i, y_i) , $i = \overline{1, m}$, $y_i = f(x_i)$ printr-o funcție F care se exprimă ca o combinație liniară a unor funcții g_1, \dots, g_n liniar independente astfel încât

$$\left(\int_a^b w(x) [f(x) - F(x)]^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow \min,$$

în cazul continuu sau

$$\left(\sum_{i=1}^m w(x_i) [f(x_i) - F(x_i)]^2 \right)^{1/2} \rightarrow \min$$

în cazul discret (principiul celor mai mici pătrate).

Dacă $f(x_i) - F(x_i) = 0$, $i = \overline{1, m}$ ajungem la interpolarea clasică.

P.c.m.m.p. constă în determinarea unui e.c.m.b.a în $L^2 w[a, b]$ adică $g^* \in A \subset L^2 w[a, b]$ astfel încât

$$\|f - g^*\| = \min_{g \in A} \|f - g\|$$

Dacă A este spațiu liniar

$$\langle f - g^*, g \rangle = 0, \quad \forall g \in A. \quad (7.1)$$

$$\text{Punând } g = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i, \quad g^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i^* g_i$$

$$(7.1) \Leftrightarrow \langle f - g^*, g_k \rangle = 0, \quad k = \overline{1, n} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle g_i, g_k \rangle = \langle f, g_k \rangle, \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.2)$$

Ecuatiile lui (7.2) se numesc ecuații normale. Determinantul lui (7.2) este determinantul Gram al vectorilor g_1, \dots, g_n , $G(g_1, \dots, g_n) \neq 0$, căci g_1, \dots, g_n sunt liniar independente.

Deci g^* există și este unic.

În cazul discret putem lucra analog cu

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^m w(x_i) f(x_i) g(x_i).$$

Problema poate fi tratată și astfel:

Fie

$$G(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^m w(x_i) \left[f(x_i) - \sum_{k=1}^n a_k g_k(x) \right]^2$$

Pentru a determina minimul lui G vom rezolva sistemul

$$\frac{\partial G}{\partial a_j}(a_1, \dots, a_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Observația 7.0.1 Dacă funcțiile g_k , $k = \overline{1, n}$ formează un sistem ortogonal coeficienții λ_k^* sau a_k^* se pot obține astfel

$$a_k^* = \frac{\langle f, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle}.$$

Problema 7.0.2 Dându-se punctele

$$(0, -4), (1, 0), (2, 4), (3, -2),$$

determinați polinomul de gradul I corespunzător acestor date prin metoda celor mai mici pătrate.

$$\begin{aligned} g_j(x_i) &= g_j^i \\ G(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{i=0}^m \left[y_i - \sum_{j=1}^n a_j g_j(x_i) \right]^2 \\ \frac{\partial G}{\partial a_k} &= 2 \sum_{i=0}^m \left[y_i - \sum_{j=1}^n a_j g_j(x_i) \right] g_k(x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n a_j g_j(x_i) g_k(x_i) &= \sum_{i=0}^m y_i g_k(x_i), \quad k = \overline{1, n} \end{aligned}$$

matricial

$$\begin{aligned} G\hat{a} &= d \\ G_{jk} &= \sum_{i=0}^m g_j(x_i)g_k(x_i) \\ d_k &= \sum_{i=0}^m y_i g_k(x_i) \end{aligned}$$

$$n = 1, \quad g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = x, \quad m = 3$$

$$G_{11} = \sum_{i=0}^3 g_1(x_i)g_1(x_i) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$$

$$G_{12} = \sum_{i=0}^3 g_1(x_i)g_2(x_i) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 6$$

$$G_{22} = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$d_1 = -4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = -2$$

$$d_2 = -4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = -2, \quad a_2 = 1$$

$$F(x) = x - 2$$

Problema 7.0.3 Să se găsească aproximarea continuă de gradul 2 prin metoda celor mai mici pătrate pentru $f(x) = \sin \pi x$ pe intervalul $[0, 1]$.

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$G(a_0, a_1, a_2) = \int_a^b [f(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2]^2 dx$$

$$G(a_0, \dots, a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial a_j} &= \frac{\partial}{\partial a_j} \left[\int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^k f(x) dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx \right] = \\ &= -2 \int_a^b x^j f(x) dx + 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx, \quad j = \overline{0, n}$$

$$a_0 \int_0^1 dx + a_1 \int_0^1 x dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx + a_2 \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 x \sin \pi x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x^2 dx + a_1 \int_0^1 x^3 dx + a_2 \int_0^1 x^4 dx = \int_0^1 x^2 \sin \pi x dx$$

Calculând integralele se obține

$$\begin{cases} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \quad a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3}$$

Problema 7.0.4 Să se calculeze aproximarea Fourier discretă pentru $m = 2^p = 2$ direct și aplicând algoritmul FFT.

$$\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}, \quad m = 2^p = 2, \quad x_j = -\pi + \frac{j\pi}{m} = \pi \left(\frac{j}{m} - 1 \right)$$

$$x_0 = -\pi, \quad x_1 = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = -\pi + \pi = 0 \quad x_3 = -\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + 0 + y_1 + y_2 + y_3 \\ y_0 + iy_1 - y_2 - iy_3 \\ y_0 - y_1 + y_2 - y_3 \\ y_0 - iy_1 - y_2 + iy_3 \end{bmatrix} \\
F(x) &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} c_k e^{ikx} = \frac{1}{m} \sum c_k (\cos kx + i \sin kx) = \\
&= \frac{1}{2} [c_0 + c_1(\cos x + i \sin x) + c_2(\cos 2x + i \sin 2x) + c_3(\cos 3x + i \sin 3x)] \\
&\quad \frac{1}{m} c_k e^{-\pi i k} = a_k + i b_k
\end{aligned}$$

Algoritmul FFT simplificat

Intrare: $a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}^T, n = 2^k, k \text{ dat}]$

Ieșire: $F(a) = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]^T$

$$b_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{ij}, \quad i = \overline{0, n-1}$$

Metoda

P1. Pentru $i = 0, \dots, 2^k - 1$ execută $R[i] := a_i$

P2. Pentru $l = 0, \dots, k - 1$ execută P3-P4

P3. Pentru $i = 0, \dots, 2^{k-1}$ execută $S[i] := R[i]$

Fie $[d_0 d_1 \dots d_{k-1}]$ reprezentarea binară a lui i

$$\begin{aligned}
R[[d_0, \dots, d_{k-1}]] &\leftarrow S[[d_0 \dots d_{l-1} 0 d_{l+1} \dots d_{n-1}]] + \\
&\quad + \omega^{[d_l d_{l+1} \dots d_0 0 \dots 0]} S[[d_0 \dots d_{l-1} 1 d_{l+1} \dots d_{k-1}]]
\end{aligned}$$

P5. Pentru $i = 0, \dots, 2^k - 1$ execută

$$b[[d_0, \dots, d_{k-1}]] \leftarrow R[[d_{k-1}, \dots, d_0]]$$

Avem $n = 4, k = 2, a_i = y_i$

Et.1. $R[d_0, d_1] = S[0, d_1] + \omega^{[d_0 0]} S[1, d_1]$

Et.2. $R[d_0, d_1] = S[d_0, 0] + \omega^{[d_0 d_1]} S[d_0, 1]$

1. $R = [y_0, y_1, y_2, y_3]$

2. $l = 0$

3. $S = [y_0, y_1, y_2, y_3]$

$$R[d_0, d_1] = S[0, d_1] + \omega^{[d_0, 0]} S[1, d_1]$$

$i = 0$

$$i = [d_0 d_1] = [0, 0]$$

$$R[0, 0] = S[0, d_1] + \omega^{[d_0, 0]} S[1, d_1] = S[0, 0] + \omega^{[0, 0]} S[1, 0] = y_0 + y_2$$

$$i = 1$$

$$i = [d_0, d_1] = [0, 1]$$

$$R[0, 1] = S[0, 1] + \omega^{[0, 0]} S[1, 1] = y_1 + y_3$$

$$i = 2$$

$$i = [d_0, d_1] = [1, 0]$$

$$R[1, 0] = S[0, 0] + \omega^{[1, 0]} S[1, 0] = S[0, 0] + \omega^2 S[1, 0] = y_0 + \omega^2 y_2 = y_0 - y_2$$

$$i = 3$$

$$i = [d_0, d_1] = [1, 1]$$

$$R[1, 1] = S[0, 1] + \omega^{[1, 0]} S[1, 1] = S[0, 1] + \omega^2 S[1, 1] = y_1 + \omega^2 y_3 = y_1 - y_3$$

$$l = 1$$

$$S = [y_0 + y_2, y_1 + y_3, y_0 + \omega^2 y_2, y_1 + \omega^2 y_3]$$

$$R[d_0 d_1] = S[d_0, 0] + \omega^{[d_0 d_1]} S[d_0, 1]$$

$$i = 0$$

$$i = [d_0, d_1] = [0, 0]$$

$$R[0, 0] = S[0, 0] + \omega^{[0, 0]} S[0, 1] = S[0, 0] + S[0, 1] = y_0 + y_1 + y_2 + y_3$$

$$i = 1 = [d_0, d_1] = [0, 1]$$

$$r[0, 1] = S[0, 0] + \omega^{[0, 1]} S[0, 1] = S[0, 0] + \omega S[0, 1] = y_0 + y_2 + i(y_1 + y_3)$$

$$i = 2$$

$$[d_0 d_1] = [1, 0]$$

$$R[1, 0] = S[1, 0] + \omega^2 S[1, 1] = y_0 + \omega^2 y_2 + \omega^2(y_1 + \omega^2 y_3)$$

$$i = 3$$

$$[d_0 d_1] = [1, 1]$$

$$R[1, 1] = S[1, 0] + \omega^{[1, 1]} S[1, 1] = y_0 + \omega^2 y_2 + \omega^3(y_1 + \omega^2 y_3)$$

5.

$$c[0, 0] = R[0, 0] = y_0 + y_1 + y_2 + y_3$$

$$c[0, 1] = R[1, 0] = y_0 - y_2 + i(y_1 - y_3)$$

$$c[1, 0] = R[0, 1] = y_0 + y_2 - \omega^2(y_1 + \omega^2 y_3) = y_0 + y_2 - y_1 - y_3$$

$$c[1, 1] = R[1, 1] = y_0 - y_2 - i(y_1 - y_3)$$

$$a_0 = \frac{c_0}{m} = \frac{y_0 + y_1 + y_2 + y_3}{2}$$

$$a_m = a_2 = \operatorname{Re}(e^{2-\pi i} c_2/2) = \frac{y_0 - y_2 + y_1 - y_3}{2}$$

$$a_1 = \operatorname{Re}(e^{-\pi i} c_1/m) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{(-1)(y_0 - y_i + i(y_1 - y_2))\} = y_2 - y_0$$

$$b_1 = \operatorname{Im}(e^{-\pi i} c_1/m) = \frac{y_3 - y_1}{2}$$

Capitolul 8

Operatori liniari și pozitivi

8.1 Operatorul lui Bernstein

Problema 8.1.1 Să se afle expresia polinomului Bernstein $(B_m f)(x; a, b)$ corespunzător unui interval compact $[a, b]$ și unei funcții f definite pe acest interval.

Soluție. Se face schimbarea de variabilă

$$x = \frac{y - a}{b - a}$$

$$(B_m f)(y; a, b) = \frac{1}{(b - a)^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (y - a)^k (b - y)^{m-k} f \left[a + (b - a) \frac{k}{m} \right]$$

■

Problema 8.1.2 Determinați $(B_m f)(x; a, b)$ în cazul când $f(x) = e^{Ax}$.

Soluție.

$$\begin{aligned} (B_m f)(x; a, b) &= \frac{1}{(b - a)^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (x - a)^k (b - x)^{m-k} \\ e^{A[a + (b-a)\frac{k}{m}]} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\frac{x - a}{b - a} \right)^k \left(\frac{b - x}{b - a} \right)^{m-k} e^{Ab\frac{k}{m}} e^{\frac{Aa(m-k)}{m}} = \\ &= \left(\frac{b - x}{b - a} e^{\frac{Aa}{m}} + \frac{x - a}{b - a} e^{\frac{Ab}{m}} \right)^m \end{aligned}$$

■

Problema 8.1.3 Să se arate că pentru $f(t) = \cos t$ avem

$$(B_m f)\left(x, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2m} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2m} \right)^m + \\ + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2m} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2m} \right)^m$$

Soluție. Se folosește identitatea

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

■

Problema 8.1.4 Să se arate că dacă f este convexă pe $[0, 1]$ atunci are loc inegalitatea

$$f(x) \leq (B_m f)(x) \quad \text{pe } [0, 1]$$

Soluție.

$$f \text{ convexă} \xrightarrow{\text{Jensen}} f\left(\sum_{k=0}^m \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=0}^m \alpha_k f(x_k)$$

$$\alpha_k \in [0, 1], \quad \sum_{k=0}^m \alpha_k = 1$$

$$f\left(\underbrace{\sum_{k=0}^m p_{mk}(x) \frac{k}{m}}_x\right) \leq \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) f\left(\frac{k}{m}\right)$$

■

Problema 8.1.5 Dacă $f \in C^r[0, 1]$ atunci

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (B_m f)^{(r)} = f^{(r)} \quad \text{uniform pe } [0, 1]$$

Soluție. Se arată întâi că

$$(B_m f)^{(r)}(x) = m^{[r]} \sum_{n=0}^{m-r} p_{m-r,k}(x) \Delta_{\frac{1}{m}}^r f\left(\frac{k}{m}\right), \quad (8.1)$$

de exemplu prin inducție.

$$(B_m f)^{(r)}(x) = \frac{m^{[r]}}{m^r} \sum_{n=0}^{m-r} p_{m-r,k}(x) f^{(r)}(x_k)$$

$$x_k = \frac{k + \theta_k r}{m} \quad 0 < \theta_k < 1$$

$$x_k \in \left(\frac{k}{m}, \frac{k+r}{m} \right)$$

(am aplicat formula de medie)

Notăm

$$C(m, r) = \frac{m^{[r]}}{m^r} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{m}\right)$$

$$\begin{aligned} f^{(r)}(x) - (B_m f)^{(r)}(x) &= \sum_{k=0}^{m-r} p_{m-r,k}(x) (f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x_k)) + \\ &+ [1 - c(m, r)] \sum_{k=0}^{m-r} p_{m-r,k}(x) f^{(r)}(x_k) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{m-r} p_{m-r,k}(x) |f^{(r)}(x_k)| \leq M_r(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f^{(r)}(x)|$$

$$(1 - a_1) \dots (1 - a_{r-1}) \geq 1 - (a_1 + \dots + a_{r-1})$$

dacă $a_1, \dots, a_{r-1} \leq 1$ de același semn

$$C(m, r) \geq 1 - \frac{1 + 2 + \dots + (r-1)}{m} = 1 - \frac{r(r-1)}{m}$$

Putem scrie

$$|f^{(r)}(x) - (B_m f)^{(r)}(x)| \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{m-r} p_{m-r,k}(x) |f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x_k)|}_S + \frac{r(r-1)}{2m} M_r(f)$$

Fie

$$F_m = \{k \mid |x - x_k| \leq \delta\}$$

$$J_m = \{k \mid |x - x_k| > \delta\}$$

$$\begin{aligned}
S &\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in I_m} p_{m-r,k}(x)}_{\leq 1} + \underbrace{2M_r(f) \sum_{n \in J_m} p_{m-r,k}(x)}_{S_2} \leq \\
&\leq \frac{1}{\delta^n} \sum_{n=0}^{m-r} (x - x_k)^2 p_{m-r,k}(x) \\
|x - x_k| &< \left| x - \frac{k}{m-r} \right| + \frac{r}{m} \\
S_2 &\leq \left(1 + \frac{2r}{m} \right) \frac{1}{4(m-r)} + \frac{r^2}{m^2} \\
|f^{(r)}(x) - (B_m f)^{(r)}(x)| &< \frac{\varepsilon}{2} + \left(1 + \frac{2r}{m} \right) \frac{M_r(f)}{2(m-r)\delta^2} + \\
&\quad + \frac{2r^2 M_r(f)}{m^2 \delta^2} + \frac{r(r-1)}{2m} M_r(f)
\end{aligned}$$

r fix, $m \rightarrow \infty$

$$|f^{(r)}(x) - (B_m f)^{(r)}(x)| < \varepsilon$$

$m > N_\varepsilon, \forall x \in [0, 1]$

Să demonstrăm acum (8.1)

$$\begin{aligned}
p'_{m,k}(x) &= k \binom{m}{k} x^{k-1} (1-x)^{m-k} - (m-k) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k-1} = \\
&= m \binom{m-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{m-k} - m \binom{m-1}{k} x^k (1-x)^{m-k-1} = \\
&= m[p_{m-1,k-1}(x) - p_{m-1,k}(x)]
\end{aligned}$$

Presupunem relația adevărată pentru r .

Pentru $r+1$ avem

$$\begin{aligned}
(B_m f)^{(r+1)} &= m^{[r]} \sum_{k=0}^{m-r} p'_{m-k,k}(x) \Delta_{\frac{1}{m}}^r f\left(\frac{k}{m}\right) \\
&= m^{[r]} (m-r) \left(\sum_{k=0}^{m-r} p_{m-r-1,k}(x) \left[\Delta_{\frac{1}{m}}^r f\left(\frac{k+1}{m}\right) - \Delta_{\frac{1}{m}}^r f\left(\frac{k}{m}\right) \right] \right) \\
&= m^{[r+1]} \sum_{k=0}^{m-r} p_{m-r-1,k}(x) \Delta_{\frac{1}{m}}^r f\left(\frac{k}{m}\right).
\end{aligned}$$

■

8.2 B-spline

$\Delta : t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq a \leq \dots \leq b \leq t_n \leq \dots \leq t_{n+k}$

multiplicitatea $r_i + 1 \leq k + 1$

Foarte frecvent avem

$$t_0 = t_1 = \dots = t_k = a < t_{k+1} \leq \dots \leq t_{n-1} < b = t_n = \dots = t_{n+k}$$

$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & \text{în caz contrar} \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\omega_{i,k}(x) = \begin{cases} \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} & \text{dacă } t_i < t_{i+k} \\ 0 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(x) = \omega_{i,k}(x)B_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x))B_{i+1,k-1}(x) \quad (8.3)$$

$$B_{i,k}(x) = (t_{i+k+1} - t_i)[t_i, \dots, t_{i+k+1}, (\cdot - x)_+^k]$$

Problema 8.2.1 Să se scrie expresia funcțiilor B-spline de grad 3 cu nodurile $\{t_i = i | i \in \mathbb{Z}\}$

Soluție. Avem

$$B_{i,k}(x) = B_{j+l,k}(x + l),$$

și deci este suficient să determinăm un singur spline.

$$\begin{aligned} B_{j,k}(x) &= \omega_{i,k}(x)B_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x))B_{i+1,k-1}(x) = \\ &= \frac{x - i}{i + k - i}B_{i,k-1}(x) + \left(1 - \frac{x - i - 1}{i + 1 + k - i - 1}\right)B_{i+1,k-1}(x) = \\ &= \frac{x - i}{k}B_{i,k-1}(x) + \frac{k + i + 1 - x}{k}B_{i+1,k-1}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{j+l,k}(x + l) &= \frac{x + l - j - l}{i + l + k - i - l}B_{i+l,k-1}(x + l) + \left(1 - \frac{x + l - i - l - 1}{i + l + 1 + k - i - l - 1}\right)B_{i+l+1,k-1}(x + l) = \\ &= \frac{x - i}{k}B_{i+l,k-1}(x + l) - \frac{k - i - 1 - x}{k}B_{i+l+1,k-1}(x + l) \end{aligned}$$

$$B_{0,3}(x) = \omega_{0,3}(x)B_{0,2}(x) + (1 - \omega_{1,3}(x))B_{1,2}(x) = \frac{1}{3}[xB_{0,2}(x) + (4 - x)B_{1,2}(x)]$$

$$B_{0,2}(x) = \omega_{0,2}(x)B_{0,1}(x) + (1 - \omega_{1,2}(x))B_{1,1}(x) = \frac{1}{2}[xB_{0,1}(x) + (3 - x)B_{1,1}(x)]$$

$$B_{1,2}(x) = \omega_{1,2}(x)B_{1,1}(x) + (1 - \omega_{2,2}(x))B_{2,1}(x) = \frac{1}{2}[(x-1)B_{1,1}(x) + (4-x)B_{2,1}(x)]$$

$$\begin{aligned} B_{0,1}(x) &= xB_{0,0}(x) + (2-x)B_{0,1}(x) \\ B_{1,1}(x) &= (x-1)B_{1,0}(x) + (3-x)B_{2,0}(x) \\ B_{2,1}(x) &= (x-2)B_{2,0}(x) + (4-x)B_{3,0}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{i,0}(x) &= \begin{cases} 1 & x \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \\ B_{0,0}(x) &= \begin{cases} 1 & x \in [t_0, t_1) = [0, 1) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \\ B_{0,1}(x) &= \begin{cases} 1 & x \in [1, 2] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \\ B_{3,3}(x) &= B_{0,3}(x-3) \end{aligned}$$

$$B_{0,3}(x) = \begin{cases} \frac{t^3}{6} & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{6}(-3t^3 + 12t^2 - 12t + 4) & x \in [1, 2) \\ \frac{1}{6}(3t^3 - 24t^2 + 60t - 44) & 2 \leq t < 3 \\ \frac{1}{6}(4-t)^3 & 3 \leq t < 4 \end{cases}.$$

■

Problema 8.2.2 Fie acum nodurile

Să se determine B-splinele $B_{i,k}$ pentru $k = 2$ și $S_\Delta f$ și pentru $f \in C^2[0, 3]$, $R_\Delta f$.

Soluție. $n + k = 7, \quad n = 5$

$$(S_\Delta f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,k}(x)f(\xi_i)$$

$$\xi_i = \frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k}}{k}$$

$$B_{i,2} \quad i = \overline{0, n-1} \quad i = 0, 4$$

$$\omega_{i,k}(x) = \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} & \text{dacă } t_i < t_{i+k} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
B_{i,k}(x) &= \omega_{i,k}(x)B_{i,k-1}(x) + [1 - \omega_{i+1,k}(x)]B_{i+1,k-1}(x) \\
\omega_{0,2}(x) &= \frac{x - t_0}{t_2 - t_0} = 0, \quad \omega_{0,1}(x) = 0, \quad \omega_{1,2}(x) = x, \quad \omega_{1,1}(x) = 0 \\
\omega_{2,2}(x) &= \frac{x}{2}, \quad \omega_{2,1}(x) = x, \quad \omega_{3,2}(x) = \frac{x-1}{2}, \quad \omega_{3,1}(x) = x-1 \\
\omega_{4,2}(x) &= x-2, \quad \omega_{4,1}(x) = x-2, \quad \omega_{5,2}(x) = 0, \quad \omega_{5,1}(x) = 0, \quad \omega_{6,1}(x) = 0 \\
B_{0,2}(x) &= (1-x)B_{1,1}, \quad B_{1,1}(x) = (1-x)B_{2,0} \\
B_{0,2}(x) &= (1-x)^2 B_{2,0}(x) = \begin{cases} (1-x)^2 & x \in [0, 1) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{1,2}(x) &= \omega_{1,2}B_{1,1} + (1 - \omega_{2,2})B_{2,1} = xB_{1,1} + \frac{2-x}{2}B_{2,1} \\
B_{2,1}(x) &= \omega_{2,1}B_{0,2} + (1 - \omega_{3,1})B_{0,3} = xB_{2,0} + (2-x)B_{3,0} \\
B_{1,2}(x) &= x(1-x)B_{2,0} + \frac{2-x}{2}xB_{2,0} + \frac{(2-x)^2}{2}B_{3,0} \\
&= \begin{cases} x(2 - \frac{3}{2}x) & x \in [0, 1) \\ \frac{(x-2)^2}{2} & x \in [1, 2) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{2,2}(x) &= \omega_{2,2}B_{2,1} + (1 - \omega_{3,2})B_{3,1} = \frac{x}{2}B_{2,1} + \frac{3-x}{2}B_{3,1} \\
B_{3,1}(x) &= \omega_{3,1}B_{3,0} + (1 - \omega_{4,1})B_{4,0} = (x-1)B_{3,0} + (3-x)B_{4,0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{2,2} &= \frac{x}{2}xB_{2,0} + \frac{x(2-x)}{2}B_{3,0} + \frac{3-x}{2}(x-1)B_{3,0} + \frac{(3-x)^2}{2}B_{4,0} = \\
&= \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x \in [0, 1) \\ \frac{x(2-x)}{2} + \frac{(3-x)(x-1)}{2} & x \in [1, 2) \\ \frac{(3-x)^2}{2} & x \in [2, 3) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{3,2}(x) &= \omega_{3,2}B_{3,1} + (1 - \omega_{4,2})B_{4,1} = \frac{x-1}{2}B_{3,1} + (3-x)B_{4,1} \\
B_{4,1}(x) &= \omega_{4,1}B_{4,0} + (1 - \omega_{5,1})B_{5,0} = (x-2)B_{4,0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{3,2}(x) &= \frac{x-1}{2}(x-1)B_{3,0} + \frac{x-1}{2}(3-x)B_{4,0} + (3-x)(x-2)B_{4,0} = \\
&= \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{2} & x \in [1, 2) \\ (3-x)\left(\frac{x-1+2x-4}{2}\right) & x \in [2, 3) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Problema 8.2.3 Pentru orice $k \geq 0$ și orice $x \in \mathbb{R}$, $B_{i,k}$ este derivabilă la dreapta și avem

$$B'_{i,k}(x) = k \left[\frac{B_{i,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \right]$$

cu convenția că o expresie cu numitorul nul se înlocuiește cu 0.

Demonstrație. Prin recurență după k , cazul $k = 0$

$$B_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x)$$

în care derivând și aplicând ipoteza inducției

$$\begin{aligned} B'_{i,k} &= \frac{B_{i,k-1}}{t_{i+k} - t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} + (k-1) \left\{ \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} \left[\frac{B_{i,k-2}}{t_{i+k-1} - t_i} - \frac{B_{i+1,k-2}}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \left[\frac{B_{i+1,k-2}}{t_{i+k} - t_{i+1}} - \frac{B_{i+2,k-2}}{t_{i+k+1} - t_{i+2}} \right] \right\} = \\ &= \frac{B_{i,k-1}}{t_{i+k} - t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} + \frac{k-1}{t_{i+k} - t_i} \left[\frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-2} + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-2} \right] - \\ &\quad - \frac{k-1}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \left[\frac{x - t_{i+1}}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-2} + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+2}} B_{i+2,k-2} \right] \end{aligned}$$

din care aplicând definiția lui $B_{i,k-1}$ și $B_{i+1,k-1}$ se obține rezultatul dorit. ■

Problema 8.2.4

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{i,k}(x) dx = \frac{1}{k+1} (t_{i+k+1} - t_i)$$

Demonstrație. Presupunem că $\text{supp } B_{i,k} \in [a, b]$

$B_{i,k} > 0$ pentru $x \in [t_i, t_{i+k+1})$

Fie diviziunea Δ' obținută din diviziunea inițială adăugând nodurile $t_{-1} = t_0$

și $t_{n+k+1} = t_{n+k}$

Considerăm primitiva lui $B_{i,k}$

$$B(x) = \int_{-\infty}^x B_{i,k}(t) dt$$

Pe porțiuni este polinomială, deci ea va fi combinație liniară de B-spline.

$$\int_{-\infty}^x B_{i,k}(t) dt = \sum_{j=-1}^{n-1} c_j B_{j,k+1}(x)$$

pentru $x \in [a, b]$. Derivăm

$$B_{i,k}(x) = \sum_{j=-1}^{n-1} c_j k \left[\frac{B_{j,k}(x)}{t_{j+k+1} - t_j} - \frac{B_{j+1,k}(x)}{t_{j+k+1} - t_{j+1}} \right]$$

Deoarece $B_{i,k}$ formează o bază avem sistemul

$$\begin{cases} (k+1)(c_2 - c_1) = 0 \\ (k+1)(c_3 - c_2) = 0 \\ \dots \\ k(c_i - c_{i-1}) = 0 \\ \dots \\ k(c_{i+1} - c_i) \frac{1}{t_{i+k+1} - t_i} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = \dots = c_{i-1} = 0 \\ c_i = \dots = c_{n-1} = \frac{t_{i+k+1} - t_i}{k+1} \end{cases}$$

Deci

$$\int_{-\infty}^x B_{i,k}(x) dx = \frac{t_{i+k+1} - t_i}{k+1} \left(\sum_{j \geq i} B_{j,k+1}(x) \right)$$

pentru $x \in [a, b]$ și deci pentru $t_{i+k+1} \leq x \leq b$

$$\int_{-\infty}^x B_{i,k}(x) dx = \frac{t_{i+k+1} - t_i}{k+1}.$$

■

Problema 8.2.5 *Op spline cu variație diminuată????*

Soluție.

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{1}{2} \\ \xi_3 &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\ \xi_4 &= \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \\ \xi_5 &= \frac{x_3 + x_4}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S_{\Delta}f)(x) &= B_{1,3}(x)f(0) + B_{2,3}(x)f\left(\frac{1}{2}\right) + B_{3,3}(x)f\left(\frac{3}{2}\right) + B_{4,3}(x)f\left(\frac{5}{2}\right) + B_{5,3}(x)f(3) = \\ &= \begin{cases} B_{1,3}(x)f(0) + B_{2,3}(x)f\left(\frac{1}{2}\right) + B_{3,3}(x)f\left(\frac{3}{2}\right) & x \in [0, 1) \\ B_{2,3}(x)f\left(\frac{1}{2}\right) + B_{3,3}(x)f\left(\frac{3}{2}\right) + B_{4,3}(x)f\left(\frac{5}{2}\right) & x \in [1, 2) \\ B_{3,3}(x)f\left(\frac{3}{2}\right) + B_{4,3}(x)f\left(\frac{5}{2}\right) + B_{5,3}(x)f(3) & x \in [2, 3] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{(1-x)^2}{2}f(0) + \frac{1+2x-x^2}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) & x \in [0, 1) \\ \frac{1+2x-x^2}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{(x-1)^2}{2}f\left(\frac{5}{2}\right) & x \in [1, 2) \\ \frac{(3-x)^2}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{10x-2x^2-11}{2}f\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{(x-2)^2}{2}f(3) & x \in [2, 3] \end{cases} \end{aligned}$$

■

8.3 Alți operatori liniari și pozitivi

Problema 8.3.1 (operatorul lui Fejer) *Se obține din polinomul de interpolare Hermite cu noduri duble rădăcini ale polinomului Cebâșev de speța I, T_{m+1} .*

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2(m+1)}\pi \quad k = \overline{0, m}$$

$$(H_{2m+1})(x) = \sum_{k=0}^m h_{k0}(x)f(x) + \sum_{k=0}^m h_{k1}(x)f'(x)$$

omițând a doua sumă sau considerând echivalent $f'(x_k) = 0, k = \overline{0, n}$

$$(F_{2m+1})(x) = \sum_{k=0}^m h_k(x)f(x_k)$$

$$h_k(x) = h_{k0}(x) = (1 - x_k x) \left[\frac{T_{m+1}(x)}{(m+1)(x - x_k)} \right]^2$$

$$F_{2m+1}f \Rightarrow f \quad pe \quad [-1, 1]$$

$$F_{2m+1}(1; x) = 1 \quad x \in [-1, 1]$$

Soluție.

$$\begin{aligned} F_{2m+1}((t-x)^2; x) &= \sum_{n=0}^m (1 - x_k x) \left[\frac{T_{m+1}(x)}{(m+1)(x - x_k)} \right]^2 (x_k - x)^2 = \\ &= \frac{1}{(m+1)^2} T_{m+1}^2(x) \sum_{k=0}^m (1 - x_k x) = \frac{1}{m+1} T_{m+1}^2(x) \leq \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

căci $\sum_{k=0}^m x_k = 0$.

Deci,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_{2m+1}((t-x)^2; x) = 0 \quad \text{uniform pe } [-1, 1]$$

■

Problema 8.3.2 (Operatorul lui Meyer-König și Zeller) *Fie $B[0, 1]$ spațiul liniar al funcțiilor reale definite și mărginite pe $[0, 1]$.*

Se definește operatorul lui Meyer-König și Zeller $M_m : B[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ pentru orice $x \in [0, 1]$ prin egalitatea

$$(M_m f)(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m+k}{k} x^k (1-x)^{m+1} f\left(\frac{k}{m+k}\right)$$

cu $(M_m f)(1) = f(1)$.

Să se arate că pentru orice $f \in [0, 1]$ avem

$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m f = f$ uniform pe orice interval de forma $[0, a)$, $0 < a < 1$.

Soluție. M_m liniar și pozitiv

$$(1 - v)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha + k - 1}{k} v^k \quad (|v| < 1)$$

Punând $\alpha = m + 1$ și $v = x$ găsim

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} x^k (1-x)^{m+1} = M_m(1; x) = 1$$

Apoi

$$\begin{aligned} M_m(t; x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m+k}{k} \frac{k}{m+k} x^k (1-x)^{m+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} x^k (1-x)^{m+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+j}{j} x^j (1-x)^{m+1} = x \\ x^2 &\leq M_m(t^2; x) \leq x^2 + \frac{x(1-x)}{m+1} \end{aligned}$$

T.B.P.K. \Rightarrow conv. uniformă ■

Problema 8.3.3 (Operatorul lui Baskakov) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mărginită și operatorul

$$(L_m f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{m+k}} f\left(\frac{k}{m}\right)$$

Să se arate că dacă $f \in C[0, 1]$ avem $\lim_{m \rightarrow \infty} L_m f = f$ uniform pe $[0, a]$, $0 < a < \infty$.

Soluție. Lucrând cu seria binomială în care se ia $\alpha = n$, $v = \frac{x}{1+x}$ se obține

$$L_m(1; x) = 1 \quad L_m(t; x) = x$$

$$L_m(t^2; x) = x^2 + \frac{x(x+1)}{m}$$

T.B.P.K. \Rightarrow conv. uniformă. ■

Problema 8.3.4 (Operatorul Favard-Szasz) Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ și $a > 0$ fixat. Să se arate că dacă $f \in C[0, a]$ operatorii Favard-Szasz definiți prin

$$(L_m f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{k!} e^{-mx} f\left(\frac{k}{m}\right)$$

are proprietatea

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L_m f = f$$

uniform pe $[0, a]$.

Soluție. Pentru funcțiile de probă $1, t, t^2$ avem

$$L_m(1; x) = 1$$

$$L_m(t; x) = x$$

$$L_m(t^2; x) = x^2 + \frac{x(x+1)}{m}$$

T.B.P.K. \Rightarrow concluzia. ■

Capitolul 9

Aproximarea funcționalelor liniare

X spațiu liniar, $F_1, \dots, F_m \in X^\#, F \in X^\#$

F, F_1, \dots, F_m liniar independenți

Formula

$$F(f) = \sum_{i=1}^m A_i F_i(f) + R(f) \quad f \in X \quad (9.1)$$

se numește formulă de aproximare a funcționalei F în raport cu funcționalele F_1, \dots, F_m .

$R(f)$ - termen rest

Dacă $\mathbb{P}_r \subset X$, $\max\{r | \text{Ker } R = \mathbb{P}_r\}$ se numește grad de exactitate al formulei (9.1).

9.1 Derivare numerică

Formula de forma

$$f^{(k)}(\alpha) = \sum_{j=0}^m A_j F_j(f) + R(f)$$

se numește formulă de derivare numerică.

Problema 9.1.1 Stabiliți formule de derivare numerică de tip interpolator cu 3,4 și 5 puncte în cazul nodurilor echidistante.

Soluție.

$$\frac{x - x_0}{h} = q$$
$$(L_m f)(x) = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i}}{i!(m-i)!} \frac{q^{[m+1]}}{q-i} f(x_i)$$

$$(R_m f)(x) = \frac{h^{m+1} q^{[m+1]}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi) \quad \xi \in (a, b)$$

$$f'(x) \approx (L_m f)'(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i}}{i!(m-i)!} f(x_i) \frac{d}{dq} \left[\frac{q^{[m+1]}}{q-i} \right]$$

$$(R_m f)'(x) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi) \frac{d}{dq} q^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} q^{[m+1]} \frac{d}{dq} f^{(m+1)}(\xi)$$

$$(R_m f)'(x_i) = (-1)^{m-i} h^m \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi_i)$$

$m = 2$ (3 puncte)

$$(L_2 f)(x) = \frac{1}{2} f(x_0)(q-1)(q-2) - f(x_1)q(q-2) + \frac{1}{2} f(x_2)q(q-1)$$

$$(L_2 f)'(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} f(x_0)(2q-3) - (2q-1)f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2)(2q-1) \right]$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{1}{3} h^2 f'''(\xi_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h} [-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h} [f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{1}{3} h^2 f'''(\xi_2)$$

$m = 3$ 4 puncte

$$(L_3 f)'(x) = \frac{1}{h} \left\{ -\frac{1}{6} f(x_0)[(q-1)(q-2)(q-3)]' + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} f(x_1)[q(q-2)(q-3)]' - \frac{1}{2} f(x_2)[q(q-1)(q-3)]' + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} f(x_3)[q(q-1)(q-2)]' \right\}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{64} [-11f(x_0) + 18f(x_1) - 9f(x_2) + 2f(x_3)] - \frac{h^3}{4} f^{(4)}(\xi_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h} [-2f(x_0) - 3f(x_1) + 6f(x_2) - f(x_3)] + \frac{h^3}{12} f^{(4)}(\xi_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{6h} [f(x_0) - 6f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3)] - \frac{h^3}{12} f^{(4)}(\xi_2)$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{6h} [-2f(x_0) + 9f(x_1) - 18f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{h^3}{4} f^{(4)}(\xi_3)$$

$m = 4$ (5 puncte)

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [-25f(x_0) + 48f(x_1) - 36f(x_2) + 16f(x_3) - 3f(x_4)] + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{12h} [-3f(x_0) - 10f(x_1) + 18f(x_2) - 6f(x_3) + f(x_4)] - \frac{h^4}{20} f^{(5)}(\xi_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h} [f(x_0) - 8f(x_1) + 8f(x_3) - f(x_4)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi_2)$$

$$f(x_3) = \frac{1}{12h}[-f(x_0) + 6f(x_1) - 18f(x_2) + 10f(x_3) + 3f(x_4)] - \frac{h^4}{20}f^{(5)}(\xi_3)$$

$$f(x_4) = \frac{1}{124}[3f(x_0) - 16f(x_1) + 36f(x_2) - 48f(x_3) + 25f(x_4)] + \frac{h^4}{4}f^{(5)}(\xi_4)$$

■

Problema 9.1.2 Să se construiască o formulă de forma

$$f'(\alpha) = A_0f(x_0) + A_1f(x_1) + (Rf)(\alpha)$$

cu gradul de exactitate $r = 2$.

Soluție.

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 0 \\ A_0x_0 + A_1x_1 = 1 \\ A_0x_0^2 + A_1x_1^2 = 2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_1 = -A_0 = \frac{1}{2(\alpha - x_0)}$$

$$x_1 = 2\alpha - x_0$$

Restul cu Peano $x_0 < x_1$

$$(Rf)(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} K_2(s)f'''(s)ds$$

$$K_1(s) = (\alpha - s)_+ - \frac{(x_1 - s)^2}{4(\alpha - x_0)} =$$

$$= -\frac{1}{4(\alpha - x_0)} \begin{cases} (s - x_0)^2 & s \leq \alpha \\ (x_1 - s)^2 & s > \alpha \end{cases} \leq 0$$

$$K_2(s) \leq 0, \quad s \in [x_0, x_1], \quad \alpha > x_0, \quad f \in C^3(x_0, x_1)$$

$$(Rf)(\alpha) = f'''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} K_2(s)ds = -\frac{(\alpha - x_0)^2}{6}f'''(\xi')$$

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{2(\alpha - 2)}[2f(2\alpha - 2) - f(2)] - \frac{(\alpha - 2)^2}{6}f'''(\xi)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq \alpha, \quad \alpha = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

S-a obținut o familie de formule de derivare numerică. ■

Problema 9.1.3 Arătați că

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

unde $f \in C^4[x_0 - h, x_0 + h]$, $\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$

Soluție. Se aplică formula lui Taylor

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2f''(x_0) + \frac{1}{6}h^3f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4f^{(4)}(\xi_1)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2f''(x_0) - \frac{1}{6}h^3f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4f^{(4)}(\xi_2)$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{1}{3}h^3f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4[f^{(4)}(\xi_1) - f^{(4)}(\xi_2)]$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{12}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}[f^{(4)}(\xi_1) - f^{(4)}(\xi_2)]$$

■

Problema 9.1.4 Stabiliți formula

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi), \quad \xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$$

Soluție. Cu Taylor ■

Problema 9.1.5 (Aplicarea extrapolării Richardson) Pornind de la formula

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(\xi)$$

obțineți o formulă $O(h^4)$ folosind extrapolarea Richardson.

Soluție. Să stabilim întâi formula de pornire

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\ &+ \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi)(x - x_0)^5 \end{aligned}$$

Scăzând dezvoltările lui $f(x_0 + h)$ și $f(x_0 - h)$ obținem

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(\tilde{\xi}), \quad (9.2)$$

$$\tilde{\xi} \in (x_0 - h, x_0 + h)$$

Făcând în (9.2) $h = 2h$ avem

$$f'(x_0) = \frac{1}{4h}[f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h)] - \frac{4h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{16h^4}{120}f^{(5)}(\hat{\xi}) \quad (9.3)$$

$$\widehat{\xi} \in (x_0 - 2h, x_0 + 2h)$$

$$4 \cdot (9.2) - (9.3) \Rightarrow$$

$$3f'(x_0) = \frac{2}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] -$$

$$-\frac{1}{4h}[f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h)] - \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\widetilde{\xi}) + \frac{2h^4}{15}f^{(5)}(\widehat{\xi})$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$$

(am obținut o formulă cu 5 puncte). ■

Problema 9.1.6 Pornind de la formula

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(x_0) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) + O(h^3)$$

deduceți o formulă $O(h^3)$ folosind extrapolarea.

Soluție.

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0 + 4h) - 18f(x_0 + 2h) + 32f(x_0 + h) - 21f(x_0)] + O(h^3)$$

■

Problema 9.1.7 Să presupunem că avem tabela de extrapolare

$$\begin{array}{ccc} N_1(h) & & \\ N_1\left(\frac{h}{2}\right) & N_2(h) & \\ N_1\left(\frac{h}{4}\right) & N_2\left(\frac{h}{2}\right) & N_3(h) \end{array}$$

construită pentru a aproxima M cu formula

$$M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6$$

a) Arătați că polinomul liniar de interpolare $P_{0,1}(h)$ ce trece prin punctele $(h^2, N_1(h))$ și $(h^2/4, N_1(h/2))$ satisface $P_{0,1}(0) = N_2(h)$.

La fel $P_{1,2}(0) = N_2\left(\frac{h}{2}\right)$,

b) Arătați că polinomul $P_{0,2}(h)$ ce trece prin $(h^4, N_2(h))$ și $\left(\frac{h^4}{16}, N_2\left(\frac{h}{2}\right)\right)$ satisface $P_{0,2}(0) = N_3(h)$.

Generalizare.

9.2 Formule de integrare numerică de tip Newton-Cotes

9.2.1 Formule Newton-Cotes închise

Sunt formule care se obțin integrând termen cu termen formula de interpolare a lui Lagrange. Nodurile au forma

$$x_k = a + kh, \quad k = \overline{0, m}, \quad h = \frac{b-a}{m}.$$

Coefficienții au expresia

$$A_k = (-1)^{m-k} \frac{h}{k!(m-k)!} \int_0^m \frac{t^{[m+1]}}{t-k} dt$$

Problema 9.2.1 Arătați că o formulă de cuadratură cu $m+1$ noduri este de tip interpolator dacă și numai dacă are gradul de exactitate cel puțin m .

Demonstrație. (\Rightarrow) imediată din expresia restului

(\Leftarrow) $x_j, j = \overline{0, m}, r \geq m$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^m A_j = b-a \\ \sum_{j=0}^m A_j x_j = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ \dots \\ \sum_{j=0}^m A_j x_j^m = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1}) \end{array} \right. \quad (9.4)$$

$\Delta \neq 0$ (Vandermonde) dacă $x_i \neq x_j$ deci (9.4) are soluție unică.

Dar (9.4) este satisfăcută pentru $A_j = \int_a^b l_j(x) dx$ și exactă pentru $1, x, \dots, x^m$.

Unicitatea $\Rightarrow A_j = \int_a^b l_j(x) dx$. ■

Problema 9.2.2 Să se aproximeze volumul butoiului cu diametrele D și d și înălțimea h .

Soluție. Vom aproxima conturul butoiului prin arce de parabolă.

$$y(x) = -2 \frac{D-d}{h^2} \left(x - \frac{h}{2} \right) \left(x + \frac{h}{2} \right) + \frac{d}{2}, \quad x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right].$$

Volumul obținut prin rotația arcului y în jurul axei Ox este

$$V = \pi \int_{-h/2}^{h/2} y^2(x) dx.$$

Valoarea exactă a integralei de mai sus este

$$V = \frac{\pi h}{60} (8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

În practică V se aproximează cu formula lui Simpson și se obține:

$$V \approx \frac{\pi h}{12} (d^2 + 2D^2).$$

■

Problema 9.2.3 Deduceți restul formulei lui Simpson

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\xi)$$

Soluție. Gradul de exactitate fiind $r = 3$ avem

$$R_2(f) = \int_a^b K_2(t) f^{IV}(t) dt$$

unde

$$K_2(t) = \frac{1}{3!} \left\{ \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{6} \left[(a-t)_+^3 + 4 \left(\frac{a+b}{2} - t \right)_+^3 + (b-t)_+^3 \right] \right\}$$

$$K_2(t) = \frac{1}{6} \begin{cases} \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{6} \left[4 \left(\frac{a+b}{2} - t \right)^3 + (b-t)^3 \right] & t \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \\ \frac{9b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{6} (b-t)^3 & t \in \left(\frac{a+b}{2}, b \right] \end{cases}$$

Se verifică că pentru $t \in [a, b]$, $K_2(t) \leq 0$

$$\begin{aligned} R_2(f) &= \frac{1}{4!} f^{IV}(\xi) R(e_4) = \frac{1}{24} f^{IV}(\xi) \left\{ \frac{b^5 - a^5}{5} - \frac{b-a}{6} \left[a^4 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^4 + b^4 \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{24} f^{IV}(\xi) (b-a) \left[\frac{b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + b^4}{5} - \right. \\ &= \left. - \frac{4a^4 + a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4b^4}{24} \right] = \\ &= \frac{f^{IV}(\xi)}{24} (b-a) \frac{-a^4 + 4a^3b - 6a^2b^2 + 4ab^3 - b^4}{120} = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\xi) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Problema 9.2.4 Deduceți formula lui Newton și restul ei

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8} \left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right] + R_3(f)$$

$$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{648} f^{(4)}(\xi)$$

Soluție. Este o formulă Newton-Cotes închisă pentru $m = 3$.

$$A_k = (-1)^{m-k} \frac{h}{k!(m-k)!} \int_0^m \frac{t^{[m+1]}}{t-k} dt$$

$$A_0 = A_3 = (-1)^3 \frac{b-a}{3} \frac{1!}{0!3!} \int_0^3 (t-1)(t-2)(t-3)dt = \frac{b-a}{8}$$

$$A_1 = A_2 = (-1)^2 \frac{b-a}{3} \frac{1!}{1!2!} \int_0^3 t(t-2)(t-3)dt = \frac{3(b-a)}{8}$$

$$R_3(f) = \int_a^b K_3(t) f^{(4)}(t) dt$$

$$K_3(t) = \frac{1}{3!} \left\{ \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{8} \left[\frac{(a-t)_+^3}{0} + 3 \left(\frac{2a+b}{3} - t \right)_+^3 + 3 \left(\frac{a+2b}{3} - t \right)_+^3 + (b-t)_+^3 \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{3!} \begin{cases} \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{8} (b-t)^3 & t \in [a, \frac{2a+b}{3}) \\ \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{8} \left[(b-t)^3 + 3 \left(\frac{2a+b}{3} - t \right)^3 \right] & t \in (\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}] \\ \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{8} \left[(b-t)^3 + 3 \left(\frac{2a+b}{3} - t \right)^3 + 3 \left(\frac{a+2b}{3} - t \right)^3 \right] & t \in (\frac{a+2b}{3}, b] \end{cases}$$

$$K_3(t) \leq 0$$

$$R_3(f) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) R(e_4) = \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi) R(e_4)$$

$$R(e_4) = \int_a^b x^4 dx - \frac{b-a}{8} \left[a^4 + 3 \left(\frac{2a+b}{3} \right)^4 + 3 \left(\frac{a+2b}{3} \right)^4 + b^4 \right] =$$

$$= \frac{b^5 - a^5}{5} - \frac{b-a}{8} \left[a^4 + \frac{(2a+b)^4}{27} + \frac{(a+2b)^4}{27} + b^4 \right] =$$

$$= (b-a) \left[\frac{b^4 + ab^3 + a^2b^2 + ab^3 + a^4}{5} - \frac{1}{8}a^4 - \frac{1}{8}b^4 - \frac{(2a+b)^4}{8 \cdot 27} - \frac{(a+2b)^4}{8 \cdot 27} \right] = \frac{b-a}{8 \cdot 27 \cdot 5} \cdot 40(b-a)^4 \blacksquare$$

9.2.2 Formule Newton-Cotes deschise

La aceste formule nodurile sunt echidistante

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0, m}, \quad h = \frac{b-a}{m+2}$$

$$x_0 = a, \quad x_m = b$$

$$x_{-1} = a, \quad x_{m+1} = b$$

Coeficienții au expresia

$$A_i = \int_a^b l_i(x) dx = (-1)^{m-i} \frac{h}{i!(m-i)!} \int_{-1}^{m+1} \frac{t^{[m+1]}}{t-i} dt$$

Problema 9.2.5 Deduceți formula Newton-Cotes deschisă pentru $m = 1$.

Soluție.

$$\int_a^b f(x) dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + R_1(f)$$

$$A_0 = A_1 = -h \int_{-1}^2 \frac{t(t-1)}{t} dt = \frac{3h}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$R_1(f) = \int_a^b K_1(t) f''(t) dt$$

$$K_1(t) = \begin{cases} \frac{(a-t)^2}{2} \\ \frac{(a-t)^2}{2} + \frac{b-a}{2} \left(\frac{2a+b}{3} - t \right) \\ \frac{(b-t)^2}{2} \end{cases}$$

căci

$$\frac{b-a}{2} \left[\left(\frac{2a+b}{3} - t \right) + \left(\frac{a+2b}{3} - t \right) \right] = \int_a^b (x-t) dx$$

Se verifică că pentru orice $t \in [a, b]$, $K_1(t) \geq 0$.

Aplicând corolarul la teorema lui Peano obținem

$$\begin{aligned} R_1(f) &= \frac{1}{2!} f''(\xi) R(e_2) = \\ &= \frac{1}{2} f''(\xi) \left\{ \int_a^b x^3 dx - \frac{b-a}{2} \left[\left(\frac{2a+b}{3} \right)^2 + \left(\frac{a+2b}{3} \right)^2 \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} f''(\xi) \frac{b-a}{3} \left[b^2 + ab + a^2 - \frac{5a^2 + 8ab + 5b^2}{6} \right] = \\ &= \frac{(b-a)^3}{36} f''(\xi) = \frac{3h^3}{4} f''(\xi). \end{aligned}$$

■

Problema 9.2.6 *Aceeași problemă pentru $m = 2$.*

Soluție. $\int_a^b f(x)dx = A_0f(x_0) + A_1f(x_1) + A_2f(x_2) + R_2(f)$

$$A_0 = A_2 = \frac{h}{2} \int_{-1}^3 \frac{t(t-1)(t-2)}{t} dt = \frac{8h}{3} = \frac{8}{3} \cdot \frac{b-a}{4} = \frac{2(b-a)}{3}$$

$$A_1 = -h \int_{-1}^3 \frac{t(t-1)(t-2)}{t-1} dt = -\frac{4h}{3} = -\frac{b-a}{3}$$

$$R_2(f) = \int_a^b K_2(t)f^{(4)}(t)dt$$

$$K_2(t) = \frac{1}{3!} \left\{ \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{3} \left[2 \left(\frac{3a+b}{4} - t \right)_+^3 - \left(\frac{2a+2b}{4} - t \right)_+^3 + 2 \left(\frac{a+3b}{4} - t \right)_+^3 \right] \right\}$$

$$K_2(t) = \frac{1}{6} \begin{cases} \frac{(a-t)^4}{4} & t \in [a, \frac{3a+b}{4}] \\ \frac{(a-t)^4}{4} - \frac{2(b-a)}{3} \left(\frac{3a+b}{4} - t \right)^3 & t \in (\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}] \\ \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{2(b-a)}{3} \left(\frac{a+3b}{4} - t \right)^3 & t \in (\frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4}] \\ \frac{(b-t)^4}{4} & t \in (\frac{a+3b}{4}, b] \end{cases}$$

Se verifică că $K_2(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$ și aplicând corolarul la teorema lui Peano se obține

$$R_2(f) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) R(e_4)$$

$$\begin{aligned} R(e_4) &= \int_a^b x^4 dx - \frac{b-a}{3} \left[2 \left(\frac{3a+b}{4} \right)^4 - \left(\frac{2a+2b}{4} \right)^4 + 2 \left(\frac{a+3b}{4} \right)^4 \right] = \\ &= (b-a) \left[\frac{b^4 + ab^3 + a^2b^2 + a^3b + a^4}{5} - \frac{148a^4 + 176a^3b + 120a^2b^2 + 176ab^3 + 148b^4}{768} \right] = \\ &= \frac{b-a}{5 \cdot 768} \cdot 28(b-a)^4 = \frac{7 \cdot 4}{15 \cdot 4 \cdot 64} (b-a)^5 \\ R_2(f) &= \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi) = \frac{14}{45} \left(\frac{b-a}{4} \right)^5 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

■

9.3 Alte formule de tip interpolator

Problema 9.3.1 Obțineți o formulă de cuadratură de forma

$$\int_a^b f(x)dx = A_{00}f(a) + A_{10}f(b) + A_{01}f'(a) + A_{11}f'(b) + R(f)$$

Soluție. $A_{00} = \int_a^b h_{00}(x)dx = \int_a^b \frac{(x-b)^2}{(a-b)^3} [3a-b-2x]dx$

$$A_{10} = \int_a^b h_{10}(x)dx = \int_a^b \frac{(x-a)^2}{(b-a)^3} [3b-a-2x]dx$$

$$A_{00} = A_{10} = \frac{b-a}{2}$$

$$A_{01} = -A_{10} = \int_a^b (x-a) \frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$R(f) = \int_a^b K_3(t) f^{(4)}(t) dt$$

$$K_3(t) = \frac{1}{3!} \left\{ \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{2} (a-t)_+^3 - \frac{b-a}{2} (b-t)_+^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{(b-a)^2}{12} \cdot \frac{3(a-t)_+^2}{0} + \frac{(b-a)^2}{122} 3(b-t)_+^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{3!} \left[\frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{2} (b-t)^3 + \frac{(b-a)^2}{4} (b-t)^2 \right] =$$

$$= \frac{(b-t)^2}{4!} [b^2 - 2bt + t^2 - 2(b-a)(b-t) + (b-a)^2] =$$

$$= \frac{(b-t)^2}{4!} [b^2 - 2bt + t^2 - 2b^2 + 2bt + 2ab - 2at + b^2 - 2ab + a^2] =$$

$$\frac{(b-t)^2(a-t)^2}{4!}$$

$$R_3(f) = \left(\frac{2!}{4!} \right) \frac{(b-a)^5}{5} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad \blacksquare$$

Problema 9.3.2 Generalizare pentru $m = 1$ și $r_0 = r_1 = s - 1$.

Soluție.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{s-1} [A_{0j}f^{(j)}(a) + A_{1j}f^{(j)}(b)] + R_{2s-1}(f)$$

$$A_{0j} = \int_a^b h_{0j}(x)dx = \int_a^b \left(\frac{x-b}{a-b} \right)^s \frac{(x-a)^j}{j!} \sum_{\nu=0}^{n-j} \binom{n+\nu}{\nu} \left(\frac{x-a}{b-a} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{s(s-1)\dots(s-j)}{2s(2s-1)\dots(2s-j)} \cdot \frac{(b-a)^{j+1}}{(j+1)!} \\
A_{1j} &= \int_a^b h_{1j}(x)dx = \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s \frac{(x-b)^j}{j!} \sum_{\nu=0}^{n-j} \binom{n+\nu}{\nu} \left(\frac{x-b}{a-b}\right) dx = (-1)^j A_{0j} \\
f \in C^{2s}[a, b] &\Rightarrow R_{2s-1}(f) = \left(\frac{s!}{(2s)!}\right)^2 \frac{(b-a)^{2s+1}}{2s+1} f^{(2s)}(\xi) \\
K_{2s-1} &= \frac{(b-t)^{2s}}{(2s)!} - \sum_{j=0}^{s-1} A_{1j} \frac{(b-t)^{2s-j-1}}{(2s-j-1)!} = \\
&= \frac{1}{(2s)!} (b-t)^s (s-t)^s
\end{aligned}$$

$K_{2s-1}(t)$ are semn constant pe $[a, b]$, iar $f^{(2s)}$ este continuă și se poate aplica formula de medie sau corolarul la teorema lui Peano. ■

Problema 9.3.3 Stabiliți o formulă de cuadratură de forma

$$\int_a^b f(x)dx = Af'(a) + Bf(b) + R_1(f)$$

Soluție. Pornim de la formula de interpolare de tip Birkhoff

$$f(x) = (x-b)f'(a) + f(b) + (R_1f)(x)$$

Integrând se obține

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \left[\frac{a-b}{2} f'(a) + f(b) \right] + R_1(f)$$

Pentru rest se aplică teorema lui Peano și se ajunge în final la

$$R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{3} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

■

Problema 9.3.4 Deduceți o formulă de cuadratură integrând formula de aproximare a lui Bernstein.

Soluție.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=0}^m p_{m,k}(x) f\left(\frac{k}{m}\right) + R_n(f) \\
 \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{k=0}^m \int_0^1 p_{m,k}(x) dx f\left(\frac{k}{m}\right) - \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2m} f''(\xi) dx \\
 \int_0^1 p_{m,k}(x) dx &= \binom{m}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{m-k} dx = \\
 &= \binom{m}{k} B(k+1, m-k+1) = \frac{k!(m-k)!}{(m+1)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{1}{m+1} \\
 R(f) &= -\frac{f''(\xi)}{2m} \int_0^1 x(1-x) dx = -\frac{f''(\xi)}{2m} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{12m} f''(\xi) \\
 \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k}{m}\right) - \frac{1}{12m} f''(\xi)
 \end{aligned}$$

■

Observația 9.3.5 Se pot folosi funcțiile lui Euler B și Γ :

$$B_{\rho,\nu} = \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\nu-1} dx$$

$$B(\rho, \nu) = \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho+\nu)}$$

Observația 9.3.6 Formule repetate

Problema 9.3.7 Calculați $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ cu precizia $\varepsilon = 10^{-3}$.

Soluție. Folosim formula Simpson repetată

$$\max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| = 24$$

$$|R_n(f)| \leq \frac{24}{2880n^4} = \frac{1}{120n^4} \leq 10^{-3}$$

$$n = \left\lceil \sqrt[3]{\frac{10^3}{120}} \right\rceil + 1 = 2$$

$$I \approx \ln 2 = \frac{1}{12} \left\{ f(0) + f(1) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4 \left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{12} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 4 \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7} \right) \right].$$

■

Problema 9.3.8 Deduceți formula repetată a lui Newton.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{8n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \right. \\ &\left. + 3 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{2x_i + x_{i+1}}{3}\right) + 3 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + 2x_{i+1}}{3}\right) \right] - \frac{(b-a)^5}{648n^4} f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

Problema 9.3.9 (Semnul nucleului lui Peano în FNC închise)

Fie $f \in C^{n+2}[-1, 1]$ și $\tau_j = -1 + \frac{2j}{n}$, $j = \overline{0, n}$ $n+1$ puncte echidistante pe $[-1, 1]$ cu pasul $h = \frac{2}{n}$.

1° Arătați că

a) pentru $j = \overline{0, n}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow \tau_j \\ x \neq \tau_j}} [\tau_0, \dots, \tau_n, x; f]$ există

b) pentru orice $x \in [-1, 1]$, $\frac{d}{dx}[\tau_0, \dots, \tau_n, x; f]$ are sens și că există $\xi_x \in [-1, 1]$ astfel încât

$$\frac{d}{dx}[\tau_0, \dots, \tau_n, x; f] = \frac{f^{(n+2)}(\xi_x)}{(n+2)!}$$

2° Arătați că eroarea de integrare numerică a funcției f prin FNC în punctele $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ este dată de

$$R_n(f) = \int_{-1}^1 \prod_{j=0}^n (x - \tau_j) [\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, x; f] dx$$

3° Punem $w(x) = \int_{-1}^x \prod_{j=0}^n (t - \tau_j) dt$ și $I_k = w(\tau_{k+1}) - w(\tau_k)$ pentru $k = \overline{0, n-1}$

a) Presupunem n par ($n = 2m$); arătați că I_k este un șir alternant, descrescător în valoare absolută; deduceți că $w(x)$ păstrează un semn constant pe $[-1, 1]$ cu $w(1) = w(-1) = 0$. Arătați că există $\eta \in [-1, 1]$ astfel încât

$$R_n(f) = \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta) \int_{-m}^m s^2 (s^2 - 1) \dots (s^2 - m^2) ds$$

b) Presupunem n impar ($n = 2m + 1$). Reluând demonstrația precedentă și descompunând $[-1, 1]$ în două subintervale $[-1, \tau_{n-1}]$ și $[\tau_{n-1}, \tau_n]$ deduceți că

$$R_n(f) = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \int_{-m}^{m+1} s(s^2-1^2)(s^2-2^2) \dots (s^2-m^2)(s-m-1) ds$$

cu $\eta \in [-1, 1]$.

Soluție. 1° este imediată din definiția diferenței divizate cu noduri multiple și formula de medie pentru diferențe divizate.

2°

$$R_n(f) = \int_{-1}^1 [f(x) - L_n(x)] dx = \int_{-1}^1 \prod_{i=0}^n (x - \tau_i) [\tau_0, \dots, \tau_n, x; f] dx$$

3° a) $n = 2m$. Prin simetrie $w(-1) = w(1)$. Avem

$$I_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u_n(t) dt$$

și deci $(-1)^k I_k > 0$.

Cum $|u_n(t+h)| = |u_n(t)| \left| \frac{t+1+h}{t-1} \right| < u_n(t)$ dacă $t \in [\tau_0, \tau_0 - 1)$ avem $|I_k| > |I_{k+1}|$ pentru $k \leq m-1$ deci $w(\tau_k) = I_0 + I_1 + \dots + I_{k-1}$ are semnul lui I_0 pentru $k = 0, \dots, m$ și prin simetrie și pentru alte valori $k \leq 2m$; dacă $x \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$

$$w(\tau_k) < w(x) < w(\tau_{k+1})$$

căci $w'(x) = u_n(x)$ păstrează semn constant, deci pentru orice $x \in [-1, 1]$, $w(x) \geq 0$ (semnul lui I_0).

Integrând prin părți

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_{-1}^1 u_n[\tau_0, \dots, \tau_n, x; f] dx = \\ &= - \int_{-1}^1 w(x) [\tau_0, \dots, \tau_n, x; f] dx \end{aligned}$$

după formula de medie

$$R_n(f) = -[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \eta, \eta] \int_{-1}^1 w(x) dx$$

cum

$$\int_{-1}^1 w(x) dx = \int_{-1}^1 (1-t) u_n(t) dt = - \int_{-1}^1 t u_n(t) dt =$$

$$= -h^{n+3} \int_{-m}^m t^2(t^2 - 1) \dots (t^2 - m^2),$$

deci nucleul are semn constant.

b) $n = 2m + 1$

$$w(x) = \int_{-1}^x u_{2m}(t) dt$$

analog ca la a).

$$w(-1) = w(\tau_{2m}) = 0 \text{ și } w(x) \geq 0 \text{ pe } [-1, \tau_{2m}]$$

Avem

$$\begin{aligned} [\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, x; f] &= [\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, x; f](x-1)u_{2m}(x) = \\ &= ([\tau_0, \dots, \tau_{n-1}, x] - [\tau_0, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n; f])u_{2m}(x) \end{aligned}$$

se deduce

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\tau_{2m}} (f(x) - p_n(x)) dx &= \int_{-1}^{\tau_{2m}} [\tau_0, \dots, \tau_{n-1}, x; f] dx = \\ &= -f[\tau_0, \dots, \tau_{n-1}, \eta, \eta] \int_{-1}^{\tau_{2m}} w(x) dx \end{aligned}$$

La fel u_n fiind negativ pe $[\tau_{2m}, 1]$,

$$\int_{\tau_{2m}}^1 (f(x) - o_n(x)) = -[\tau_0, \dots, \tau_n, \eta'; f] \left| \int_{\tau_{2m}}^1 w(x) dx \right|$$

Utilizând teorema de medie pentru integrale și formula de medie pentru diferențe divizate se obține că

$$R_n(f) = c_n f^{(n+1)}(\xi)$$

Luând $f = u_n$ se obține

$$\int_{-1}^1 u_n(x) dx = R_n(u_n) = c_n(n+1)!$$

■

Problema 9.3.10 Arătați că pentru $f \in C^{m+2}[a, b]$ restul în formula de cuadratură Newton-Cotes închisă este dat de

$$R_m(f) = \frac{h^{m+3} f^{(m+2)}(\xi)}{(m+2)!} \int_0^m t t^{[m+1]} dt, \quad \xi \in (a, b)$$

pentru m par și

$$R_m(f) = \frac{h^{m+2} f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \int_0^m t^{[m+1]} dt, \quad \xi \in (a, b)$$

pentru m impar.

Soluție. $a = x_0$, $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, m}$, $x_m = b$

$$\varphi_{m+1}(x) = \prod_{i=0}^m (x - x_i)$$

$$x = x_0 + th$$

$$\varphi_{m+1}(x) = h^{m+1} \prod_{i=0}^m (t - i) = h^{m+1} \psi_{m+1}(t) = h^{m+1} t^{[m+1]}$$

Lema 9.3.11 a) $\varphi_{m+1}(x_{m/2} + \sigma) = (-1)^{m+1} \varphi_{m+1}(x_{m/2} - \sigma)$ unde $x_{\frac{m}{2}} = x_0 + \frac{m}{2}h$.

b) De asemenea pentru $a < \sigma + h < x_{\frac{m}{2}}$ și $\sigma \neq x_i$

$$|\varphi_{m+1}(\sigma + h)| < |\varphi_{m+1}(\sigma)|$$

și pentru $x_{\frac{m}{2}} < \sigma < b$, $\sigma \neq x_i$,

$$|\varphi_{m+1}(\sigma)| < |\varphi_{m+1}(\sigma + h)|$$

Demonstrație.

$$\psi_{m+1}(t) = t^{[m+1]}$$

$$\psi_{m+1}\left(\frac{m}{2} - s\right) = \psi_{m+1}\left(\frac{m}{2} + s\right) \text{ pentru } m \text{ impar}$$

$$\psi_{m+1}\left(\frac{m}{2} - s\right) = -\psi_{m+1}\left(\frac{m}{2} + s\right) \text{ pentru } m \text{ par}$$

$$\psi_{m+1}\left(\frac{m}{2} - s\right) = \left(\frac{m}{2} - s\right) \left(\frac{m}{2} - s - 1\right) \dots \left(\frac{m}{2} - s - m\right) \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} \psi_{m+1}\left(\frac{m}{2} + s\right) &= \left(\frac{m}{2} + s\right) \left(\frac{m}{2} + s - 1\right) \dots \left(\frac{m}{2} + s - m\right) = \\ &= \frac{(2s + m)(2s + m - 2) \dots (2s - m)}{2^m} \end{aligned}$$

$$(9.5) \Rightarrow \frac{(2s - m)(2s - m + 2) \dots (2s + m)}{2^m} (-1)^{m+1}$$

$$\varphi_{m+1}(x_{\frac{m}{2}} + \sigma) = h^{m+1} \psi\left(\frac{m}{2} + \sigma\right) = (-1)^{m+1} h^{m+1} \psi\left(\frac{m}{2} - \sigma\right)$$

b) $0 < t + 1 < \frac{m}{2}$, $t + 1 \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\psi_{m+1}(t+1)}{\psi(t)} = \left| \frac{(t+1)t(t-1) \dots (t-m+1)}{t(t-1) \dots (t-m+1)(t-m)} \right| =$$

$$= \frac{|t+1|}{|t-m|} = \frac{t+1}{(m+1)-(t+1)} \leq \frac{\frac{m}{2}}{(m+1)-\frac{m}{2}} < 1$$

$$\frac{m}{2} < t+1 < m \quad \frac{\psi_{m+1}(t)}{\psi(t)} > 1$$

■

Definim

$$\phi_{m+1}(x) = \int_a^x \varphi_{m+1}(\sigma) d\sigma = \int_a^x h^{m+1} \sigma^{[m+1]} d\sigma$$

Lema 9.3.12 Dacă m este par $\phi_{m+1}(a) = \phi_{m+1}(b) = 0$ și $\phi_{m+1}(x) > 0$ pentru $a < x < b$.

Demonstrație. Pentru m par ϕ_{m+1} este o funcție impară în raport cu $x_{\frac{m}{2}}$ conform părții L1 $\Rightarrow \phi_{m+1}(b) = 0$

$\varphi_{m+1}(x) < 0$ pentru $x < a$ căci $m+1$ este par,

$\varphi_{m+1}(x) > 0$ pentru $a < x < x_1 \Rightarrow \phi_{m+1}(x) > 0$ pentru $a < x \leq x_1$.

În $[x_1, x_2]$, $|\varphi_{m+1}(x)| < |\varphi_{m+1}(x-h)|$ în $[x_0, x_1]$. Schimbând variabila de integrare se observă că

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \varphi_{m+1}(x) dx \right| < \left| \int_{x_0}^{x_1} \varphi_{m+1}(x) dx \right|$$

Astfel $\phi_{m+1}(x) > 0$ pentru $a < x < x_2$ și prin același raționament $\phi_{m+1}(x) > 0$ pentru $a < x < x_{\frac{m}{2}}$. Se utilizează apoi antisimetria lui φ_{n+1} în raport cu $x_{\frac{m}{2}}$. ■

$$R_m(f) = \int_a^b [f(x) - (L_m f)(x)] = \int_a^b \varphi_{m+1}(x) [x_0, \dots, x_m, x; f] dx$$

Integrăm prin părți

$$\begin{aligned} R_m(f) &= \int_a^b \frac{d}{dx} \phi_{m+1}(x) [x_0, \dots, x_m, x; f] dx = \\ &= \phi_{m+1}(x) [x_0, \dots, x_m, x; f] \Big|_a^b \\ &\quad - \int_a^b \phi_{m+1}(x) \frac{d}{dx} [x_0, \dots, x_m, x; f] dx = \\ &= - \int_a^b \phi_{m+1}(x) \frac{d}{dx} [x_0, \dots, x_m, x; f] dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_a^b \phi_{m+1}(x) \frac{f^{(m+2)}(\xi_x)}{(m+2)!} dx = \\
&= \frac{-f^{(m+2)}(\alpha)}{(m+2)!} \int_a^b \phi_{m+1}(x) dx \quad a < \alpha < b
\end{aligned}$$

Integrând din nou prin părți se obține

$$\int_a^b \phi_{m+1}(x) dx = - \int_a^b x \varphi_{n+1}(x) dx > 0$$

Luând $x = x_0 + sh$ și utilizând lema 2

$$R_m(f) = \frac{f^{(m+2)}(\xi)}{(m+2)!} h^{m+3} \int_0^m s \psi_{m+1}(s) ds < 0$$

Deoarece $f^{(m+2)}(\xi) = 0$ când $f \in P_{m+1} \Rightarrow r = m+1$ pentru m par.

Cazul m impar

$$\begin{aligned}
R_m(f) &= \int_a^{b-h} \varphi_{m+1}(x) [x_0, \dots, x_m, x; f] dx + \\
&+ \int_{b-h}^b \varphi_{m+1}(x) [x_0, \dots, x_m, x; f] dx \\
\varphi_{m+1}(x) &= \varphi_m(x)(x - x_m)
\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}
&\int_a^{b-h} \varphi_{m+1}(x) [x_0, \dots, x_m, x; f] dx = \\
&= \int_a^{b-h} \frac{d\phi_m}{dx} ([x_0, \dots, x_{m-1}, x; f] - [x_0, \dots, x_m; f]) dx
\end{aligned}$$

m impar $\Rightarrow \phi_m(b-h) = 0$. Integrând prin părți se obține

$$\begin{aligned}
&\int_a^{b-h} \phi_{m+1}(x) [x_0, \dots, x_m, x; f] dx = \\
&= - \frac{f^{(m+1)}(\xi')}{(m+1)!} \int_a^{b-h} \phi_m(x) dx = K f^{(m+1)}(\xi') \\
&\quad a < \xi' < b-h
\end{aligned}$$

Aplicăm Teorema 1 de medie

$$- \frac{f^{(m+1)}(\xi'')}{(m+1)!} \int_{b-h}^b \varphi_{m+1}(x) dx = L f^{(m+1)}(\xi'')$$

Astfel

$$Rf = Kf^{(m+1)}(\xi') + Lf^{(m+1)}(\xi'')$$

Deoarece $K < 0$ și $L < 0$, $Rf = (K + L)f^{(n+1)}(\xi)$ pentru $\xi \in (\xi', \xi'')$.
Deoarece

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}\phi_n(x)(x - b)$$

integrarea prin părți ne dă

$$K + L = I_n.$$

■

9.4 Cuadraturi repetate. Metoda lui Romberg

Se vor utiliza formulele

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} \left[R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f \left(a + \left(i - \frac{1}{2} \right) h_{k-1} \right) \right], \quad k = \overline{2, n}$$

$$R_{k,j} = \frac{4^{j-1} R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \quad k = \overline{2, n}$$

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$h_k = \frac{h_{k-1}}{2} = \frac{b-a}{2^{k-1}}$$

Problema 9.4.1 Aproximați $\int_0^\pi \sin x dx$ prin metoda lui Romberg, $\varepsilon = 10^{-2}$.

Soluție.

$$I = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}(0 + 0) = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2} \left(R_{1,1} + \pi \sin \frac{\pi}{2} \right) = 1.571$$

$$R_{2,2} = 1.571 + (1,571 - 0)/3 = 2.094$$

$$(R_{2,2} - R_{1,1}) > 0.01$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2} \left[R_{2,1} + \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right] = 1.895$$

$$R_{3,2} = 1,895 + \frac{1.895 - 1.571}{3} = 2.004$$

$$R_{3,3} = 2.004 + (2.004 - 2.094)/15 = 1.999$$

$$|R_{3,3} - R_{2,2}| < 0.1$$

Pentru trapez cu același număr de argumente $I \approx 1,895$

Pentru Simpson cu 4 noduri $I \approx 2.005$ ■

9.5 Formule de cuadratură de tip Gauss

Vom considera formule de cuadratură de forma

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^m A_k f(x_k) + R_m(f)$$

Coeficienții A_k și nodurile x_k se determină din sistemul neliniar

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \dots + A_m & = \mu_0 \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_m x_m & = \mu_1 \\ \dots & \\ A_1 x_1^{m-1} + A_2 x_2^{m-1} + \dots + A_m x_m^{m-1} & = \mu_{m-1} \\ \dots & \\ A_1 x_1^{2m-1} + A_2 x_2^{2m-1} + \dots + A_m x_m^{2m-1} & = \mu_{2m-1} \end{cases}$$

unde $\mu_k = \int_a^b w(x)x^k dx$ sunt momentele funcției pondere w .

Nodurile x_k , $k = \overline{1, m}$ vor fi rădăcinile polinomului u de grad m , ortogonal pe \mathbb{P}_{m-1} relativ la ponderea w și intervalul $[a, b]$.

Pentru coeficienți avem expresia

$$A_k = \frac{1}{[v'_k(x_k)]^2} \int_a^b w(x)v_k^2(x)dx, \quad k = \overline{1, m}$$

unde $v_k(x) = \frac{u(x)}{x - x_k}$, iar pentru rest

$$R_m(f) = \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \int_a^b w(x)u^2(x)dx, \quad \xi \in [a, b]$$

Dacă $w(x) \equiv 1$, atunci u este polinomul Legendre de grad m

$$u(x) = \frac{m!}{(2m)!} \frac{d^m}{dx^m} [(x-a)^m (x-b)^m]$$

iar coeficienții și restul au expresiile

$$A_k = \frac{(m!)^4 (b-a)^{2m+1}}{[(2m)!]^2 (x_k - a)(b - x_k)[v'_k(x_k)]^2}, \quad k = \overline{1, m}$$

și respectiv

$$R_m(f) = \frac{(m!)^4}{[(2m)!]^3} \frac{(b-a)^{2m+1}}{2m+1} f^{(2m)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

Problema 9.5.1 Stabiliți o formulă de cuadratură de tip Gauss în cazul $w(x) \equiv 1$ și $m = 3$.

Soluție. Polinomul Legendre de grad 3 corespunzând intervalului $[-1, 1]$ este

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

cu rădăcinile

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Coeficienții sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}A_3 = 0 \\ \frac{3}{5}A_1 + \frac{3}{5}A_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$A_1 = A_3 = \frac{5}{9} \quad A_2 = \frac{8}{9}$$

Pentru rest se obține

$$R_3(f) = \frac{(3!)^4}{(6!)^3} \frac{(b-a)^7}{7} f^{(6)}(\xi)$$

Trecerea de la $[-1, 1]$ la $[a, b]$ se poate face prin schimbarea de variabilă

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^m A_i f(x_i)$$

unde $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, t_i fiind rădăcinile polinomului Legendre corespunzător intervalului $[-1, 1]$. ■

Problema 9.5.2 Aproximați $\ln 2$ cu două zecimale exacte folosind o formulă gaussiană repetată.

Soluție.

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Vom folosi formula repetată a dreptunghiului

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) + \frac{(b-a)^3}{3} f''(\xi)$$

$$M_2 f = 2 \quad \xi \in (a, b)$$

$$|R_n(f)| \leq \frac{1}{24n^2} M_2 f = \frac{1}{12n^2} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \Rightarrow 6n^2 \geq 100$$

$$n = 5$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x} &\approx \frac{1}{5} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{10}} + \frac{1}{1 + \frac{3}{10}} + \frac{1}{1 + \frac{5}{10}} + \frac{1}{1 + \frac{7}{10}} + \frac{1}{1 + \frac{9}{10}} \right] = \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{10}{11} + \frac{10}{13} + \frac{10}{15} + \frac{10}{17} + \frac{10}{19} \right] = \\ &= 2 \left[\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} \right] \end{aligned}$$

■

Problema 9.5.3 Determinați o formulă cu grad de exactitate cel puțin doi pentru a aproxima

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx$$

în ipoteza că integrala improprie există.

Soluție. Polinoamele ortogonale pe $[0, \infty)$ relativ la ponderea $w(t) = e^{-t}$ sunt polinoamele lui Laguerre

$$g_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$$

$$g_2(t) = t^2 - 4t + 2$$

cu rădăcinile $t_1 = 2 - \sqrt{2}$, $t_2 = 2 + \sqrt{2}$.

Momentele funcției pondere sunt

$$\mu_0 = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \quad \mu_1 = 1 \quad \mu_2 = 2$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, \quad A_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$R_2(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b w(x) u^2(x) dx$$

$$\int_a^b w(x) u^2(x) = \int_0^\infty (x^2 - 4x + 2)^2 e^{-x} dx =$$

$$= \int_0^\infty (x^4 + 16x^2 + 4 - 8x^3 + 4x^2 - 16x) e^{-x} dx = 4 + 32 + 4 - 24 + 8 - 16 = 8$$

■

Problema 9.5.4 Aceeași problemă pentru gradul de exactitate $r = 3$ și

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x) dx$$

Soluție. Nodurile formulei gaussiene căutate vor fi rădăcinile polinoamelor Hermite ortogonale pe $(-\infty, \infty)$ relativ la ponderea $w(t) = e^{-t^2}$.

$$h_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$h_0(t) = 1, \quad h_1(t) = 2t$$

$$h_{n+1}(t) = 2th_n(t) - 2nh_{n-1}(t)$$

$$h_2(t) = 2(2t^2 - 1) = 2th_1(t) - 2 = 4t^2 - 2$$

$$h_3(t) = 2th_2(t) - 2h_1(t) = 2t(4t^2 - 2) - 8t = 4t(2t^2 - 3)$$

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^\infty te^{-t^2} dt = 0$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty (2t)(2t) e^{-t^2} dt = \frac{1}{4} 2^2 \cdot 2! \sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = \sqrt{\pi} \\ -A_1 + A_3 = 0 \\ A_1 + A_3 = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{\pi} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_3 = \frac{2}{3}\sqrt{\pi} \\
A_2 &= \frac{1}{3}\sqrt{\pi} \\
R_3(f) &= \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{h_3^2(t)}{8^2} dt = \\
&= 8 \cdot 3! \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{8^2} \cdot \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} = \frac{\sqrt{\pi}}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8} f^{(6)}(\xi)
\end{aligned}$$

■

Problema 9.5.5 Fie formula de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R_n(f), \quad f \in C^{2n}[-1, 1].$$

1° Arătați că coeficienții A_i și nodurile x_i sunt date de

$$\begin{aligned}
A_i &= \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}(x-x_i)T'_n(x_i)} dx, \\
x_i &= \cos \theta_i, \quad \theta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i = \overline{1, n},
\end{aligned}$$

unde T_n este polinomul Cebîșev de speța I de grad n .

2° Punând pentru $1 \leq i \leq n$,

$$\delta_j = \int_0^\pi \frac{\cos j\theta - \cos j\theta_i}{\cos \theta - \cos \theta_i} d\theta, \quad j = 1, 2, \dots$$

arătați că $\delta_{j+1} - 2 \cos \theta_i \delta_j + \delta_{j-1} = 0$, pentru $j = 2, 3, \dots$ și calculați δ_{k+1} .
Deduceți că $A_i = \frac{\pi}{n}$, $i = \overline{1, n}$.

3° Arătați că

$$R_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, \quad \xi \in (-1, 1).$$

Soluție.

1° Ținând cont că nodurile formulei vor fi rădăcinile polinomului lui Cebâșev de speța I, iar coeficienții se obțin integrând polinoamele fundamentale, formulele de la punctul 1° sunt imediate.

2° Punând $x = \cos \theta$ avem

$$A_i = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_i} \frac{1}{T'_n(x_i)} = \frac{\delta_n}{T'_n(x_i)},$$

căci $\cos n\theta_i = 0$, $i = \overline{1, n}$. Din relația

$$\cos(j+1)\theta + \cos(j-1)\theta = 2\cos \theta \cos j\theta$$

rezultă pentru $j \geq 2$ că

$$\begin{aligned} \delta_{j+1} + \delta_{j-1} &= 2 \int_0^\pi \frac{\cos \theta \cos j\theta - \cos \theta_i \cos j\theta_i}{\cos \theta - \cos \theta_i} d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \cos j\theta d\theta + 2 \cos \theta_i \delta_j \end{aligned}$$

și $\delta_0 = 0$ și $\delta_1 = \pi$. Relația de recurență $\delta_{j+1} - 2\cos \theta_i \delta_j + \delta_{j-1} = 0$ are soluția generală $\delta_j = A \cos j\theta_i + B \sin j\theta_i$; se obține

$$\delta_n = \frac{\pi \sin n\theta_i}{\sin \theta_i}$$

și cum

$$T'_n(x_i) = \frac{n \sin n\theta_i}{\sin \theta_i}$$

se deduce că $A_i = \frac{\pi}{n}$, $i = \overline{1, n}$.

3° Din expresia restului se obține

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{2^{2n-2}\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

■

Problema 9.5.6 Deduceți o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R_3(f)$$

Soluție. Formula va fi de tip Gauss; polinoamele ortogonale care dau nodurile vor fi polinoamele Cebășev de speța a II-a.

$$Q_n(t) = \frac{\sin[(n+1) \arccos t]}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in [-1, 1]$$

Ele au rădăcinile $t_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $k = \overline{1, n}$

În cazul nostru avem

$$Q_3(t) = 8t^3 - 4t \quad \tilde{Q}_3(t) = \frac{1}{8}(8t^3 - 4t)$$

Rădăcinile vor fi

$$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t_0 = 0, \quad t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pentru coeficienți, ținând cont că formula are gradul de exactitate $2m - 1 = 5$ obținem sistemul

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = \mu_0 \\ A_1 t_1 + A_2 t_2 + A_3 t_3 = \mu_1 \\ A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 + A_3 t_3^2 = \mu_2 \end{cases}$$

unde

$$\mu_k = \int_{-1}^1 t^k \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\mu_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \mu_1 = \int_{-1}^1 t \sqrt{1-t^2} dt = 0$$

$$\mu_2 = \int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (2t)(2t) \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{8}$$

Se observă că $\mu_{2k+1} = \int_{-1}^1 t^{2k+1} \sqrt{1-t^2} dt = 0$, deoarece funcția de integrat este impară.

Sistemul are soluțiile

$$A_1 = A_3 = \frac{\pi}{8}, \quad A_2 = \frac{\pi}{4}$$

Restul va fi

$$\begin{aligned} R_m(f) &= \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \int_{-1}^1 w(x) u^2(x) dx = \\ &= \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^{m+1}(2m)!} f^{(2m)}(\xi) \end{aligned}$$

Am obținut formula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{\pi}{8} \left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] + \frac{\pi}{2^4 6!} f^{(6)}(\xi)$$

■

Problema 9.5.7 Deduceți o formulă de tip Cebâșev pe $[-1, 1]$ cu $w(x) = 1$ și cu 3 noduri.

Soluție.

$$A = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 0 \\ t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1 \\ t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 = 0 \end{cases}$$

$$C_1 = t_1 + t_2 + t_3$$

$$C_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3$$

$$C_3 = t_1 t_2 t_3$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2}[(t_1 + t_2 + t_3)^2 - (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)] = -\frac{1}{2}$$

$$C_3 = \frac{1}{6}[(t_1 + t_2 + t_3)^3 - 3(t_1 + t_2 + t_3)(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) + 2(t_1^3 + t_2^3 + t_3^3)] = \frac{1}{6}(0 - 0 + 0) = 0$$

$$t^3 - C_1 t^2 + C_2 t - C_3 = 0$$

$$t^3 - \frac{1}{2}t = 0, \quad t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{2}{3} \left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] + R_3(f)$$

$$R_3(f) = \int_{-1}^1 K_3(f) f^{(4)}(t) dt$$

$$K_3(t) = \frac{1}{6} \left[\frac{(1-t)^4}{4} - \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 (t_i - t)_+^3 \right]$$

$$K_3(t) = \frac{1}{6}$$

Deoarece

$$\frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 (t_i - t)^3 = \int_{-1}^1 (x - t)^3 dx = \frac{(1-t)^4}{4} - \frac{(1+t)^4}{4}$$

obținem

$$K_3(t) = \frac{1}{6} \begin{cases} \frac{(1+t)^4}{4} & t \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \frac{(1+t)^4}{4} - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t\right)^3 & t \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right] \\ \frac{(1-t)^4}{4} - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t\right)^3 & t \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \frac{(1-t)^4}{4} & t \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \end{cases}$$

K_3 pară, $K_3 \geq 0$. Pentru rest avem

$$R_3(f) = f^{(4)}(\xi) \int_{-1}^1 K_3(t) dt = \frac{1}{360} f^{(4)}(\xi),$$

sau cu corolarul teoremei lui Peano

$$\begin{aligned} R_3(f) &= \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) R(e_4) = \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi) \left\{ \int_{-1}^1 x^4 dx - \frac{2}{3} \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{24} \left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{360} f^{(4)}(\xi). \end{aligned}$$

■

Capitolul 10

Ecuatii neliniare

10.1 Ecuatii în \mathbb{R}

Metoda coardei (a falsei poziții sau a părților proporționale)

Fie ecuația $f(x) = 0$ și intervalul $[a, b]$ astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Presupunem că $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$.

În loc să înjumătățim intervalul ca la metoda intervalului îl împărțim în raportul $-\frac{f(a)}{f(b)}$. Se obține pentru rădăcină aproximantă

$$x_1 = a + h_1 \quad (10.1)$$

unde

$$h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a) + f(b)}(b - a) = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \quad (10.2)$$

Procedând analog pentru intervalul $[a, x_1]$ sau $[x_1, b]$, la capătul căruia funcția f are semne opuse, obținem o a doua aproximare x_2 , ș.a.m.d.

Interpretare geometrică. Metoda părților proporționale este echivalentă cu înlocuirea lui $y = f(x)$ cu coarda ce trece prin punctele $A[a, f(a)]$ și $B[b, f(b)]$ (vezi figura 10.1).

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Făcând $y = 0$ se obține

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \quad (10.3)$$

$$(10.3) \Leftrightarrow (10.1) \wedge (10.2)$$

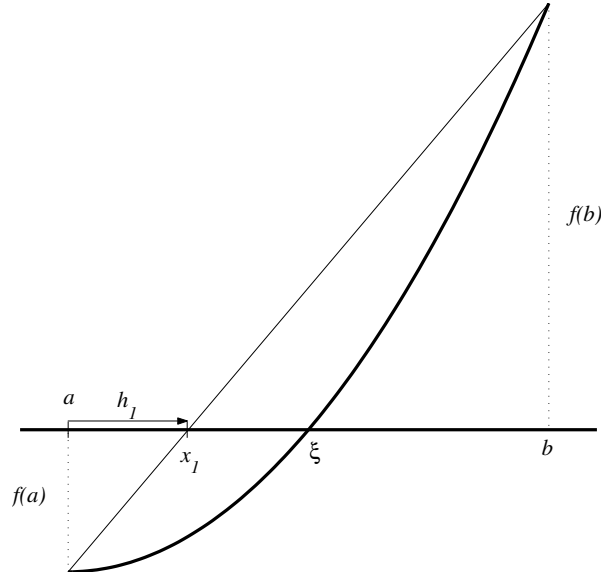


Figura 10.1: Metoda falsei poziții

Convergența metodei. Presupunem că rădăcina este izolată și că f'' are semn constant pe $[a, b]$.

Presupunem că $f''(x) > 0$ pe $[a, b]$ (cazul $f''(x) < 0$ se reduce la precedentul scriind $-f(x) = 0$). Curba $y = f(x)$ este convexă și putem avea două situații: $f(a) > 0$ și $f(b) > 0$ (figura 10.2).

În primul caz capătul este fix iar aproximațiile succesive se obțin astfel

$$x_0 = b$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.4)$$

șirul obținut fiind monoton descrescător și mărginit.

$$a < \xi < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0$$

Pentru celălalt caz b este fix și $x_0 = a$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_n)$$

Șirul obținut este crescător și mărginit

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \xi < b$$

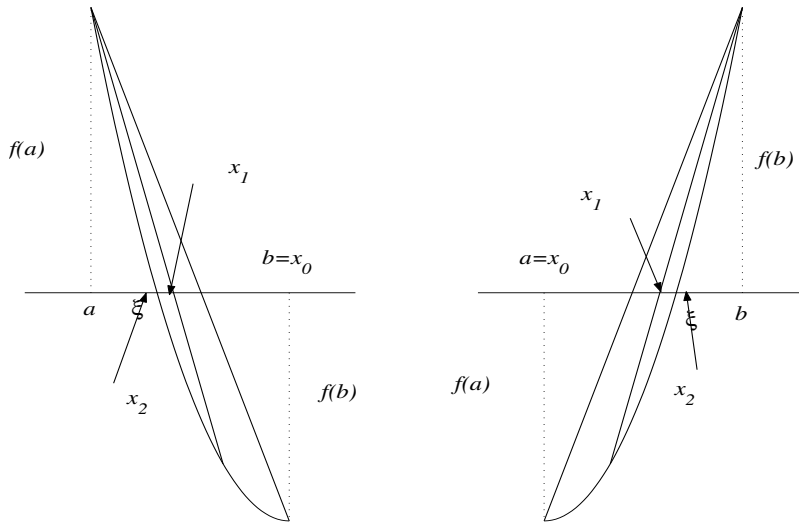


Figura 10.2: Convergența metodei falsei poziții

Pentru a arăta că limita este rădăcină a ecuației inițiale se trece la limită în relația de recurență. Pentru delimitarea erorii folosim formula

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$

unde $|f'(x)| \leq m_1$ pentru $x \in [a, b]$

$$f(x_n) - f(\xi) = (x_n - \xi)f'(c), \quad c \in (x_n, \xi)$$

$$|f(x_n) - f(\xi)| = |f(x_n)| \geq m_1|x_n - \xi|$$

Vom da o delimitare mai bună dacă f este continuă pe $[a, b]$, $[a, b]$ conține toate aproximantele și f' își păstrează semnul.

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1 < \infty$$

Pentru primul caz avem

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)}(x_{n-1} - a)$$

$$f(\xi) - f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(a)}{x_{n-1} - a}(x_n - x_{n-1})$$

Utilizând teorema lui Lagrange avem

$$(\xi - x_{n-1})f'(\xi_{n-1}) = (x_n - x_{n-1})f'(\bar{x}_{n-1})$$

$x_{n-1} \in (x_{n-1}, \xi), \bar{x}_{n-1} \in (a, x_{n-1})$. Deci

$$|\xi - x_n| = \frac{|f'(x_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})|}{|f'(\xi_{n-1})|} |x_n - x_{n-1}|$$

Deoarece f' are semn constant pe $[a, b]$ și $\bar{x}_{n-1}, \xi_{n-1} \in [a, b]$ obținem

$$|f'(\bar{x}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})| \leq M_1 - m_1$$

Deci

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|$$

Dacă $M_1 \leq 2m_1$ (lucru care se poate întâmpla dacă $[a, b]$ este mic)

$$|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|$$

Deci dacă programăm această metodă, putem folosi drept criteriu de oprire

$$\frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

sau

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

Problema 10.1.1 *Determinați o rădăcină pozitivă a ecuației*

$$f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2$$

cu precizia 0.002.

Soluție.

$$f(1) = -0.6 < 0, \quad f(2) = 5.6 > 0$$

$$\xi \in (1, 2), \quad f(1.5) = 1.425, \quad \xi \in (1, 1.5)$$

$$x_1 = 1 + \frac{0.6}{1.425 + 0.6} (1.5 - 1) = 1 + 0.15 = 1.15$$

$$f(x_1) = -0.173$$

$$x_2 = 1.15 + \frac{0.173}{1.425 + 0.173} (1.5 - 1.15) = 1.15 + 0.040 = 1.150$$

$$f(x_2) = -0.036$$

$$x_3 = 1.150 + \frac{0.036}{1.425 + 0.036} (1.5 - 1.15) = 1.190$$

$$f(x_3) = -0.0072$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2x^2 - 0.4x - 0.2, \quad x_3 < x < 1.5 \\
 f'(x) &\geq 3.1198^2 - 0.4 \cdot 1.5 - 0.2 = 3 \cdot 1.43 - 0.8 = 3.49 \\
 0 &< \xi - x_3 < \frac{0.0072}{3.49} \approx 0.002 \\
 \xi &= 1.198 + 0.002\theta, \quad \theta \in (0, 1]
 \end{aligned}$$

■

Problema 10.1.2 Utilizând metoda lui Newton, calculați o rădăcină negativă a ecuației

$$f(x) \equiv x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$$

cu 5 zecimale exacte.

Soluție.

$$\begin{aligned}
 f(0) &= -10000, \quad f(-10) = -1050 \\
 f(-100) &= 1 - 8 \\
 f(-11) &= 3453, \quad f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0 \\
 f(-11) &> 0, \quad f''(-11) > 0
 \end{aligned}$$

Luăm $x_0 = -11$

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
 x_1 &= -11 - \frac{3453}{-5183} = -10.3 \\
 x_2 &= -10.3 - \frac{134.3}{-4234} = -10.3 + 0.03 = -10.27 \\
 x_3 &= -10.27 - \frac{37.8}{-4196} = -10.27 + 0.009 = -10.261 \\
 |x_2 - x_3| &= |0.09|, \quad \text{ș.a.m.d.}
 \end{aligned}$$

■

Problema 10.1.3 Fie ecuația

$$f(x) = 0 \tag{10.5}$$

și f'' este continuă și își păstrează semnul pe $(-\infty, \infty)$.

Arătați că:

- Ecuația are cel mult două rădăcini.
- Să presupunem că

$$f(x_0)f'(x_0) < 0, \quad f(x_0)f''(x) < 0$$

atunci (1) are o rădăcină unică în (x_0, x_1) . Cum poate fi calculată cu Newton pornind cu x_0 .

c) Dacă $f'(x_0) = 0$, $f(x_0)f''(x) < 0$, ecuația are două rădăcini care pot fi calculate cu Newton și cu aproximantele inițiale

$$x_1 = x_0 - \sqrt{-\frac{2f(x_0)}{f''(x_0)}}$$

$$x'_1 = x_0 + \sqrt{-\frac{2f(x_0)}{f''(x_0)}}$$

a) Rezultă din teorema lui Rolle.

b) ξ are o soluție unică în (x_0, x_1) (vezi figura 10.3)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

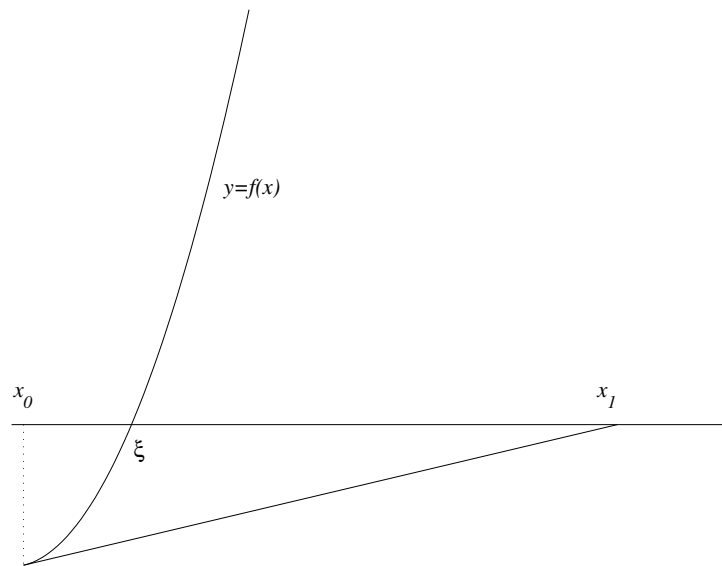


Figura 10.3: Cazul b) al problemei 10.1.3

c) $f'(x_0) = 0$, $f(x_0)f''(x) < 0$

Ecuația (10.5) are două rădăcini ξ și ξ' în $(-\infty, \infty)$ (figura 10.4, stânga).

Aproximăm f cu Taylor

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 = 0.$$

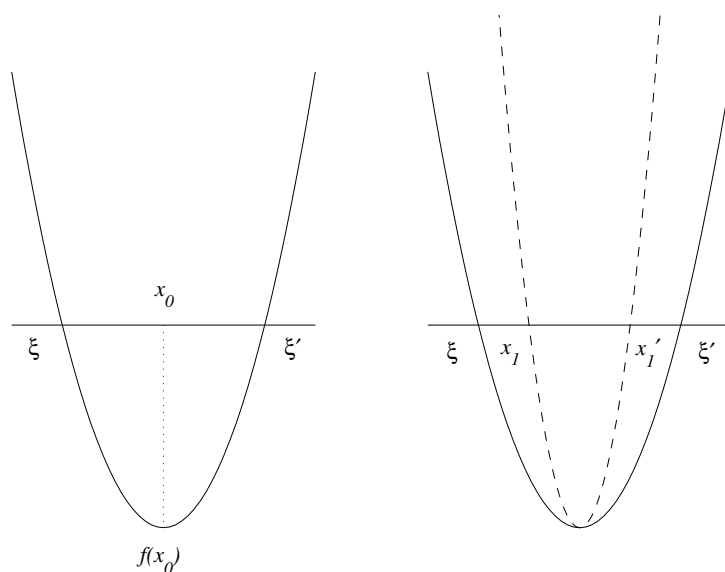


Figura 10.4: Cazul c) al problemei 10.1.3

Ecuația

$$f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

are două rădăcini

$$x_1 = x_0 - \sqrt{-\frac{2f(x_0)}{f''(x_0)}}$$

$$x'_1 = x_0 + \sqrt{-\frac{2f(x_0)}{f''(x_0)}}$$

care sunt abscisele punctelor de intersecție cu axa Ox ale parabolei (figura 10.4, dreapta)

$$Y = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Observația 10.1.4 *Avem de fapt două cazuri de interes date de I și II.*

Problema 10.1.5 *Determinați o rădăcină a ecuației*

$$x^3 - x - 1 = 0$$

folosind metoda aproximațiilor succesive.

Soluție.

$$f(1) = -1 < 0, \quad f(2) = 5 > 0$$

$$x - x^3 - 1$$

$$f(x) = x^3 - 1, \quad \varphi'(x) = 3x^2$$

$$\varphi''(x) \geq 3 \text{ pentru } x \in [1, 2]$$

dar nu se poate aplica m.a.s.

$$x = \sqrt[3]{x+1}$$

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$0 < \varphi'(x) < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < \frac{1}{4} = 2 \text{ pentru } a \leq x \leq 2$$

metoda aproximațiilor succesive are o convergență rapidă

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \sqrt[3]{2}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{2}}, \quad x_3 = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{2}}}$$

■

Problema 10.1.6 *Concepeți o metodă cu un pas și una cu doi pași pentru a aproxima \sqrt{a} , $a > 0$.*

Soluție. Folosim metoda lui Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

(Metoda lui Heron)

$$f(x) = x^2 - a$$

$$f'(x) = 2x > 0 \text{ pentru } x > 0$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

$$f'(x) \neq 0 \text{ pe } [a, b] \subset (0, \infty)$$

$$f''(x) > 0 \text{ pe } [a, b]$$

Orice valoare pozitivă poate fi utilizată ca valoare de pornire. ■

Observația 10.1.7 Numărul de zecimale corecte se dublează la fiecare pas, comparativ cu numărul original de zecimale corecte.

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{a}(1 + \delta) \\ x_1 &= \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) = \frac{1}{2} [\sqrt{a}(1 + \delta) + \sqrt{a}(1 + \delta)^{-1}] = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a}(1 + \delta + 1 - \delta + \delta^2) = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\delta^2}{2} \right) \end{aligned}$$

b) Folosim metoda secantei

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \\ &= x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})(x_n^2 - a)}{x_n^2 - x_{n-1}^2} = \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{x_n + x_{n-1}} = \frac{x_n^2 + x_n x_{n-1} - x_n^2 + a}{x_n + x_{n-1}} \\ &x_0 > 0 \end{aligned}$$

Problema 10.1.8 La fel pentru rădăcina cubică $\sqrt[3]{x}$.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{3} \left(2y_n + \frac{x}{y_n^2} \right) \\ y_0 &> 0 \end{aligned}$$

Problema 10.1.9 Strict aplicabilitatea metodei lui Newton pentru rădăcini multiple.

Soluție. Fie x^* o rădăcină multiplă de ordinul m .
Dorim convergență de ordinul 2.

$$g(x) = x - m(f'(x))^{-1}f(x)$$

$$g(x^*) = x^*$$

Presupunem că $f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$

$$f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

$$\begin{aligned}
f(x^* + h) &= \frac{f^{(n)}(x^*)h^m}{m!}(1 + O(h)) \\
f'(x^* + h) &= \frac{f^{(m)}(x^*)h^{m-1}}{(m-1)!}(1 + O(h)) \\
\frac{f(x^* + h)}{f'(x^* + h)} &= \frac{h}{m}(1 + O(h)) = \frac{h}{m} + O(h^2)
\end{aligned}$$

și pentru $f'(x^* + h) \neq 0$,

$$\begin{aligned}
g(x^* + h) &= x^* + h - m \left(\frac{h}{m} + O(h^2) \right) \\
g'(x^*) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x^* + h) - g(x^*)}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - h + mO(h^2)}{h} < 1 \text{ convergentă}
\end{aligned}$$

■

Problema 10.1.10 Deduceți formula

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{1}{2} \left[\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right]^2 \frac{f''(x_i)}{f(x_i)}$$

Soluție. Folosim interpolarea Taylor inversă:

$$F_m^T(x_i) = x_i + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k!} [f(x_i)]^k g^{(k)}(f(x_i))$$

■

Problema 10.1.11 Stabiliți următoarea metodă de aproximare a unei rădăcini reale a ecuației $f(x) = 0$

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{[x_{k-1}, x_k; f]} - \frac{[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k; f]f(x_{k-1})f(x_k)}{[x_{k-2}, x_{k-1}; f][x_{k-2}, x_k; f][x_{k-1}, x_k; f]} \\
&k = 3, 4, \dots
\end{aligned}$$

Soluție. Folosim polinomul de interpolare inversă a lui Newton.

$$\begin{aligned}
g(y) &\approx g(y_0) + (y - y_0)[y_0, y_1; g] + (y - y_0)(y - y_1)[y_0, y_1, y_2; g] \\
g(0) &\approx g(y_0) - y_0[y_0, y_1; g] + y_0 y_1[y_0, y_1, y_2; g] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_0 - f(x_0) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} + f(x_0)f(x_1) \frac{[y_1, y_2; g] - [y_0, y_1; g]}{y_2 - y_0} = \\
&= x_0 - \frac{f(x_0)}{[x_0, x_1; f]} + f(x_0)f(x_1) \frac{\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}}{f(x_2) - f(x_0)} = \\
&= x_0 - \frac{f(x_0)}{[x_0, x_1; f]} - f(x_0)f(x_1) \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{x_2 - x_0}{f(x_2) - f(x_0)} \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = \\
&= x_0 - \frac{f(x_0)}{[x_0, x_1; f]} - \frac{[x_0, x_1, x_2; f]f(x_1)f(x_2)}{[x_1, x_2; f][x_0, x_2; f][x_0, x_1; f]}
\end{aligned}$$

■

10.2 Sisteme neliniare

Problema 10.2.1 *Utilizați metoda aproximațiilor succesive pentru a aproxima soluția sistemului*

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^3 - x_2 = 0 \end{cases} \quad (10.6)$$

Soluție. Interpretarea geometrică apare în figura 10.5.

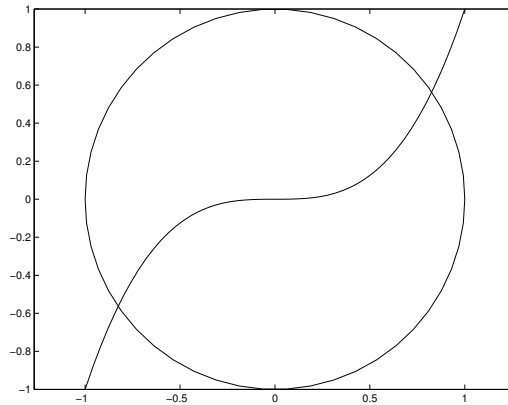


Figura 10.5: Interpretarea geometrică a sistemului (10.6)

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} \quad f'(x^0) = \begin{bmatrix} 1.8 & 1 \\ 2.43 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det f'(x^0) \neq 0 = -4.23$$

$$[f'(x^0)]^{-1} = -\frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2.43 & 1.8 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = -[f'(x^0)]^{-1} = \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2.43 & 1.8 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(x) = x + \Lambda f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9^2 + 0.5^2 - 1 \\ 0.9^3 - 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8317 \\ 0.5630 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8317 \\ 0.5630 \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8317^2 + 0.5630^2 - 1 \\ 0.8317^3 - 0.5630 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8265 \\ 0.5633 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.8261 \\ 0.5361 \end{bmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.8261 \\ 0.5636 \end{bmatrix}$$

$$\|x^{(4)} - x^{(3)}\| < 10^{-4}.$$

■

Observația 10.2.2 În locul procesului Picard-Banach pentru sisteme neliniare este uneori convenabil să se utilizeze un proces Seidel.

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n) \\ x_{n+2} = \varphi_2(x_{n+1}, y_n) \end{cases}.$$

Problema 10.2.3 Aproximați soluția sistemului

$$\begin{cases} F(x, y) = 2x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ G(x, y) = xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases}$$

folosind metoda lui Newton.

Soluție.

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases} \quad F, g \in C^1$$

$$x = x_n + h_n$$

$$y = y_n + k_n$$

$$\begin{cases} F(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \\ G(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \end{cases}$$

Utilizând formula lui Taylor se obține

$$\begin{cases} F(x_n, y_n) + h_n F'_x(x_n, y_n) + k_n F'_y(x_n, y_n) = 0 \\ G(x_n, y_n) + h_n G'_x(x_n, y_n) + k_n G'_y(x_n, y_n) = 0 \end{cases}$$

Dacă jacobianul

$$J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

obținem

$$h_n = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$k_n = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$x_0 = 1.2, \quad y_0 = 1.7$$

$$F(x_0, y_0) = -0.434$$

$$G(x_0, y_0) = 0.1956$$

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8.64 & -3.40 \\ 4.91 & 5.40 \end{vmatrix} = 57.91$$

$$h_0 = 0.6349$$

$$k_0 = -0.0390$$

■

Capitolul 11

Rezolvarea numerică ecuațiilor diferențiale

Problema 11.0.1 Aproximați soluția problemei Cauchy

$$y' = -y + x - 1, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1$$

pentru $N = 10$, $h = 0.1$, $x_i = 0.1i$ folosind metoda lui Euler.

Soluție.

$$y' = -y + x + 1, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1$$

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$\tau = \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

Soluția exactă este

$$y(x) = x + e^{-x}$$

$$y_0 = 1$$

$$y_i = y_{i-1} + h(-y_{i-1} + x_{i-1} + 1) =$$

$$= y_{i-1} + 0 \cdot 1(-y_{i-1} + 0.1(i-1) + 1) =$$

$$= 0.9y_{i-1} + 0.01(i-1) + 0.1 = 0.9y_{i-1} + 0.01i + 0.09$$

Calcululele sunt date în următorul tabel

x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y_i - y(x_i) $
0.0	1.000000	1.000000	0
0.1	1.000000	1.004837	0.004837
0.2	1.01	1.018731	0.008731
0.3	1.029	1.040818	0.011818
0.4	1.0561	1.070320	0.014220

Să aplicăm acum pentru aceeași problemă metoda Runge-Kutta de ordinul IV.

$$y_0 = \alpha = y(a)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3), \quad \tau \in O(h^4)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

x_i	val.exactă	y_i	eu
0	1.0	1.0	0
0.1	1.0048374180	1.0048375000	$8.1 \cdot 10^{-8}$
0.2	1.0187307531	1.0187309014	$1.483 \cdot 10^{-7}$
0.3	1.0408		

Problema 11.0.2 Aproximați soluția ecuației

$$y' = -y + 1$$

$$y(0) = 0$$

folosind:

a) metoda Euler cu $h = 0.025$;

b) metoda Euler modificată cu $h = 0.05$;

c) metoda Runge-Kutta cu $h = 0.1$.

Comparați rezultatele celor 3 metode în punctele 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 între ele și cu valoarea exactă.

Soluție. $y_0 = \alpha$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))]$$

x	Euler	Euler mod.	RK4	val.exactă
0.1	0.096312	0.095123	0.0951620	0.095162582
0.2	0.183348	0.181198	0.18126910	0.181269247
0.3	0.262001	0.259085	0.25918158	0.259181779
0.4	0.333079	0.329563	0.32967971	0.329679954
0.5	0.397312	0.393337	0.39346906	0.393469340

Problema 11.0.3 Deduceți metode predictor corector de tip Adams de ordinul 2,3,4.

Soluție. Predictorul cu m pași se generează astfel:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx &= \sum_{k=0}^{m-1} \nabla^k f(x_i, y(x_i)) h (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds + \\ &+ \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \dots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i)) ds \end{aligned}$$

k	0	1	2	3	4	5
$(-1)^k \int_0^1 \binom{s}{k} ds$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + h \left[f(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2} \nabla f(x_i, y(x_i)) + \right. \\ &+ \frac{5}{12} \nabla^2 f(x_i, y(x_i)) + \frac{3}{8} \nabla^3 f(x_i, y(x_i)) + \dots \left. \right] + \\ &+ h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i)) (-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds \end{aligned}$$

Pentru $m = 2$ obținem

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &\approx y(x_i) + h \left[f(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2} \nabla f(x_i, y(x_i)) \right] = \\ &= y(x_i) + h \left[f(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2} (f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))) \right] = \\ &= y(x_i) + \frac{h}{2} [3f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))] \\ &\quad y_0 = \alpha, \quad y_1 = \alpha_1 \\ &\quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] \\ &\quad h^3 f''(\mu_i, y(\mu_i)) (-1)^2 \int_0^1 \binom{-s}{2} ds = \frac{5}{12} h^3 f''(\mu_i, y(\mu_i)) \\ &\quad f''(\mu_i, y(\mu_i)) = y^{(3)}(\mu_i) \\ &\quad \tau_{i+1} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \frac{1}{2} [3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h} \left[\frac{5}{12} h^3 f''(\mu_i, y(\mu_i)) \right] = \frac{5}{12} h^2 y'''(\mu_i, y(\mu_i))$$

Pentru $m = 3$ avem

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &\approx y(x_i) + h \left[f(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2} \nabla f(x_i, y(x_i)) + \frac{5}{12} \nabla^2 f(x_i, y(x_i)) \right] = \\ &= y(x_i) + h \left\{ f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} [f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{12} [f(x_i, y(x_i)) - 2f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + f(x_{i-2}, y(x_{i-2}))] \right\} = \\ &= y(x_i) + \frac{4}{12} [23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})] \\ y_0 &= \alpha, \quad y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2 \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{12} [23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})] \\ h^4 f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) (-1)^3 \int_0^1 \binom{-s}{3} ds &= \frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) \\ f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) &= y^{(4)}(\mu_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{i+1} &= \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{4} - \frac{1}{12} [23f(x_i, y(x_i)) - hf(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + \\ &\quad + 5f(x_{i-2}, y(x_{i-2}))] = \frac{1}{4} \left[\frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) \right] = \frac{3h^3}{8} y^{(4)}(\mu_i) \end{aligned}$$

Pentru $m = 4$ obținem

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + h \left[f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} \nabla f(x_i, y(x_i)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{12} \nabla^2 f(x_i, y(x_i)) + \frac{3}{8} \nabla^3 f(x_i, y(x_i)) \right] + \\ &\quad + h^5 f^{(4)}(\mu_i, y(\mu_i)) (-1)^4 \int_0^1 \binom{-s}{4} ds \\ y_{i+1} &= y_i + h \left\{ f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} [f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] + \right. \\ &\quad + \frac{5}{12} [f(x_i, y_i) - 2f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})] + \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} [f(x_i, y_i) - 3f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 3f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-3}, y_{i-3})] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y_i + \frac{h}{24} [55f(x_i, y_i) - 55f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})] \\
&\quad h^5 f^{(4)}(\mu_i, y(\mu_i)) (-1)^4 \int_0^1 \binom{-s}{4} ds = \frac{251}{720} f^{(4)}(\mu_i, y(\mu_i)) \\
&\quad \tau_{i+1} = \frac{251}{720} f^{(4)} y^{(5)}(\mu_i)
\end{aligned}$$

■

Observația 11.0.4 *Am integrat polinomul lui Newton cu diferențe regresive cu nodurile*

$$(x_i, y(x_i)), (x_{i-1}, y(x_{i-1})), \dots, (x_{i+1-m}, y(x_{i+1-m}))$$

pentru m pași.

Pentru corectorul cu m pași vom folosi formula lui Newton cu diferențe regresive

$$(x_{i+1}, f(x_{i+1})), (x_i, f(x_i)), \dots, (x_{i-m+1}, f(x_{i-m+1}))$$

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{s+k-2}{k} \nabla^k f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{k=0}^m d_k \nabla^k f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$d_k = \int_0^1 \binom{s+k-2}{k} ds = (-1)^k \int_0^1 \binom{-s+1}{k} ds$$

$$d_0 = 1, \quad d_1 = -\frac{1}{2}, \quad d_2 = -\frac{1}{12}$$

$$d_3 = -\frac{1}{24}, \quad d_4 = -\frac{19}{720}$$

$$s = \frac{x - x_i}{h}$$

$$x = x_i + sh - m \leq s \leq 0$$

$$x_{i+1} = x_i + h - m + 1 \leq s \leq 1$$

$$m = 2$$

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + h \left[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{2} \nabla f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{12} \nabla^2 f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right] = \\
&= y_i + 4 \left\{ f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{2} [f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12}[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - 2f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})] \Big\} = \\
& = y_i + \frac{4}{12}[5f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] \\
\tau_{i+1} &= \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \frac{1}{12}[5f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] = \\
&= \frac{h^4}{3!} \frac{f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))}{3!} (-1)^3 \int_0^1 (-s+1)(-s)(-s-1)ds = -\frac{1}{24}h^4 y^{(IV)}(\mu_i) \\
& \quad m = 4 \\
y_{i+1} &= y_i + h \left[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{2}\nabla f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \right. \\
& \quad \left. -\frac{1}{12}\nabla^2 f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{24}\nabla^3 f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right] = \\
&= y_i + h \left\{ f(x_{i+1}, y_{i+1}) - \frac{1}{2}[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)] - \right. \\
& \quad \left. -\frac{1}{12}[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - 2f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})] - \right. \\
& \quad \left. -\frac{1}{24}[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - 3f(x_i, y_i) + 3f(x_{i-1}, y_{i-1}) - f(x_{i-2}, y_{i-2})] \right\} = \\
&= y_i + \frac{h}{24}[9f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})] \\
\tau_{i+1} &= -\frac{19}{720}y^{(5)}(\mu_i)h^4
\end{aligned}$$

Problema 11.0.5 Deduceți următoarea formulă predictor-corector

$$\begin{aligned}
y_{i+1}^{(0)} &= y_{i-3} + \frac{4h}{3}[2f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(x_{i-2}, y_{i-2})] \\
\tau_{i+1} &= \frac{14}{45}h^4 y^{(5)}(\xi_i), \quad \xi_i \in (t_{i-1}, t_{i+1}) \quad (\text{Milne}) \\
y_{i+1}^{(c)} &= y_{i-1} + \frac{h}{3}[f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(p)}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})] \\
\tau_{i+1} &= -\frac{h^4}{90}y^{(5)}(\xi_i), \quad \xi_i \in (t_{i-1}, t_{i+1}) \quad (\text{Simpson})
\end{aligned}$$

Soluție. Corectorul

$$\begin{aligned}
 y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt \simeq \\
 &\simeq \frac{h}{3} [f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})] \\
 \tau_{i+1} &= -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(IV)}(\xi_i, y(\xi_i)) = -\frac{32h^5}{2880} y^{(5)}(\xi_i) = -\frac{h^5}{90} y^{(5)}(\xi_i)
 \end{aligned}$$

Predictorul

$$\begin{aligned}
 y(x_{i+1}) - y(x_{i-3}) &= \int_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt = \\
 &= \frac{h}{3} \frac{x_{i+1} - x_{i-3}}{4} [2f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(x_{i-2}, y_{i-2})] = \\
 &= \frac{4h}{3} [2f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 4f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(x_{i-2}, y_{i-2})] \\
 \tau_{i+1} &= \frac{14h^5}{45} y^{(5)}(\xi_i)
 \end{aligned}$$

■

Observația 11.0.6 Pentru predictor s-a folosit formula Newton-Cotes deschisă de ordinul II, iar pentru corector formula Newton-Cotes închisă de ordinul II (Simpson).