

Setul 1

Problema 1 Pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$ și diviziunea $\Delta : x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 1$, determinați spline-ul natural de interpolare. (5p)

Soluție. (3p) Pe porțiuni:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(-1) + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3 \\ p_2(x) &= f(0) + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3 \end{aligned}$$

Condiții : Condiții de netezime

$$\begin{aligned} p_1(0) &= p_2(0) \\ p_1'(0) &= p_2'(0) \\ p_1''(0) &= p_2''(0) \end{aligned}$$

Condiții de spline natural

$$\begin{aligned} p_1''(-1) &= 0 \\ p_2''(1) &= 0 \end{aligned}$$

Interpolare în 1: $p_2(1) = f(1) = 0$. (1p) Se obține sistemul

$$\begin{aligned} b_1 + c_1 + d_1 &= 1 \\ b_1 + 2c_1 + 3d_1 &= b_2 \\ 2c_1 + 6d_1 &= 2c_2 \\ 2c_1 &= 0 \\ 6d_2 + 2c_2 &= 0 \\ 1 + b_2 + c_2 + d_2 &= 0 \end{aligned}$$

(1p) Soluțiile: $[b_1 = \frac{3}{2}, b_2 = 0, c_1 = 0, c_2 = -\frac{3}{2}, d_1 = -\frac{1}{2}, d_2 = \frac{1}{2}]$. Expresia spline-ului:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1+t) - \frac{1}{2}(t+1)^3, & t \in [-1, 0] \\ 1 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3, & t \in (0, 1]. \end{cases}$$

■

Soluție 2. (1p) Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $s(x) = p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3$. Ca la curs notăm $s'(x_i)$ cu m_i . Avem $\Delta x_1 = 1$, $\Delta x_2 = 1$; $f[x_1, x_2] = 1$, $f[x_2, x_3] = -1$. (2p) Se obține sistemul

$$\begin{aligned} 2m_1 + m_2 &= 3 \\ m_1 + 4m_2 + m_3 &= 0 \\ m_2 + 2m_3 &= -3 \end{aligned}$$

(1p) Soluțiile: $[m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = 0, m_3 = -\frac{3}{2}]$. (1p) Aplicând formulele pentru coeficienți obținem

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= 0, & c_{2,0} &= 1 \\ c_{1,1} &= \frac{3}{2}, & c_{2,1} &= 0 \\ c_{1,2} &= 0, & c_{2,2} &= -\frac{3}{2} \\ c_{1,3} &= -\frac{1}{2}, & c_{2,3} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

Problema 2 Fie $a > 0$. Pornind de la o ecuație convenabilă și folosind metoda lui Newton, deduceți o metodă pentru aproximarea lui $\frac{1}{\sqrt{a}}$ fără împărțiri. Cum se alege valoarea de pornire? Care este criteriul de oprire? Deduceți de aici o metodă pentru calculul lui \sqrt{a} fără împărțiri. (4p)

Soluție. (1p) Pornim de la ecuația $f(x) = \frac{1}{x^2} - a = 0$. (1p) Se obține iterația

$$\varphi(x) = x - \frac{\frac{1}{x^2} - a}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} - a\right)} = x - \frac{1}{2}x^3 \left(a - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}x(3 - ax^2)$$

sau

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n(3 - ax_n^2).$$

(0.5p) Criteriul de oprire: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. (1p) Alegerea valorii de pornire: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} - a\right) = -\frac{2}{x^3} < 0$, pentru $x > 0$; $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x^2} - a\right) = \frac{6}{x^4} > 0$, pentru $x > 0$. Deci orice valoare $x_0 > 0$ se poate lua ca valoare de pornire. (0.5) Pentru calculul lui \sqrt{a} fără împărțiri: $\sqrt{a} = a\frac{1}{\sqrt{a}}$. ■

Setul 2

Problema 3 Pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$ și diviziunea $\Delta : x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 1$, determinați spline-ul complet de interpolare. (5p)

Soluție. (3p) Pe porțiuni:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(-1) + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3 \\ p_2(x) &= f(0) + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3 \end{aligned}$$

Condiții : Condiții de netezime

$$\begin{aligned} p_1(0) &= p_2(0) \\ p_1'(0) &= p_2'(0) \\ p_1''(0) &= p_2''(0) \end{aligned}$$

Condiții de spline complet

$$\begin{aligned} p_1'(-1) &= f'(-1) \\ p_2'(1) &= f'(1) \end{aligned}$$

Interpolare în 1: $p_2(1) = f(1) = 1$. (1p) Se obține sistemul

$$\begin{aligned} -1 + b_1 + c_1 + d_1 &= 0 \\ b_1 + 2c_1 + 3d_1 &= b_2 \\ 2c_1 + 6d_1 &= 2c_2 \\ b_1 &= 0 \\ 3d_2 + 2c_2 + b_2 &= 0 \\ b_2 + c_2 + d_2 &= 1 \end{aligned}$$

(1p) Soluțiile: $[b_1 = 0, b_2 = \frac{3}{2}, c_1 = \frac{3}{2}, c_2 = 0, d_1 = -\frac{1}{2}, d_2 = -\frac{1}{2}]$. Expresia spline-ului:

$$s(x) = \begin{cases} -1 + \frac{3}{2}(t+1)^2 - \frac{1}{2}(t+1)^3, & t \in [-1, 0] \\ \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^3, & t \in (0, 1]. \end{cases}$$

■

Soluție 2. (1p) Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $s(x) = p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3$. Ca la curs notăm $s'(x_i)$ cu m_i . Avem $\Delta x_1 = 1$, $\Delta x_2 = 1$; $f[x_1, x_2] = 1$, $f[x_2, x_3] = 1$. (2p) Se obține sistemul

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_1 + 4m_2 + m_3 &= 6 \\ m_3 &= 0 \end{aligned}$$

(1p) Soluțiile: $[m_1 = 0, m_2 = \frac{3}{2}, m_3 = 0]$. (1p) Aplicând formulele pentru coeficienți obținem

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= -1, & c_{2,0} &= 0 \\ c_{1,1} &= 0, & c_{2,1} &= \frac{3}{2} \\ c_{1,2} &= \frac{3}{2}, & c_{2,2} &= 0 \\ c_{1,3} &= -\frac{1}{2}, & c_{2,3} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

Problema 4 Fie $a > 0$. Pornind de la o ecuație convenabilă și folosind metoda lui Newton, deduceți o metodă pentru aproximarea lui $\frac{1}{a}$ fără împărțiri. Cum se alege valoarea de pornire? Care este criteriul de oprire? Cum veți proceda pentru o implementare eficientă în virgulă flotantă? (4p)

Soluție. (1p) Pornim de la ecuația $f(x) = \frac{1}{x} - a = 0$. (1p) Iterația

$$\varphi(x) := x - \frac{\frac{1}{x} - a}{\frac{d}{dx}(\frac{1}{x} - a)} = x - x^2 \left(a - \frac{1}{x} \right) = x(2 - ax)$$

sau $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$.

(0.5p) Criteriul de oprire: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. (1p) Alegerea valorii de pornire:

$$|x_n - 1/a| < a \left(\frac{1}{a} - x_{n-1} \right)^2 < \dots < \frac{1}{a^{2^n-1}} \left(\frac{1}{a} - x_0 \right)^{2^n}$$

(x_n) convergent $\iff 0 < ax_0 < 2$. (0.5) $x_0 = \frac{3}{2}$, maxim 5 iterații, $(2^e f)^{-1} = 2^{-e}(1/f)$ ■

Setul 3

Problema 5 Se consideră ecuația $f(x) = xe^x - 1 = 0$. Dorim să o rezolvăm aplicând metoda aproximațiilor succesive, rezolvând problema de punct fix $x = F(x)$ în două moduri

(a) $F(x) = e^{-x}$

(b) $F(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

Arătați că în ambele cazuri iterațiile $x_k = F(x_k)$ sunt convergente, determinați ordinul de convergență și numărul de iterații necesare pentru a obține precizia $\varepsilon = 10^{-10}$. (6p)

Soluție.

- (a) (2p) $x = e^{-x}$, Soluția: $\{\alpha = 0.56714\}$. $F'(x) = |\exp(-x)| < 1$, pentru $x > 0$. Deoarece $F'(\alpha) \neq 0$, $ordF = 1$. (0.5 p) Numărul de iterații: din teorema de punct fix a lui Banach

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{c^n}{1-c} |x_1 - x_0| < \varepsilon$$

unde $c = \max\{|F'(x)|, x \in I_\varepsilon\}$. Se obține

$$n = \left\lceil \frac{\ln(\varepsilon) + \ln(1-c) - \ln|x_1 - x_0|}{\ln c} \right\rceil + 1.$$

De exemplu, pentru $x_0 = 0.2$ și $\varepsilon = 10^{-10}$ sunt necesare 122 de iterații.

- (b) (3p) $F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1+x}{1+e^x} \right) = -\frac{xe^x-1}{(e^x+1)^2}$; $F'(\alpha) = 0$ căci $f(\alpha) = 0$. $F''(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1+x}{1+e^x} \right) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^3} (x + e^x - xe^x + 3) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^3} (x + e^x - xe^x + 3)$. Dar, $F''(\alpha) = -\frac{e^\alpha}{(e^\alpha+1)^3} (\alpha + e^\alpha + 2) \neq 0$, deoarece $\alpha \exp(\alpha) = 1$. $ordF = 2$. **Altfel:** Newton aplicată ecuației $f(x) = x - e^{-x} = 0$. (0.5) Numărul de iterații: Deoarece ordinul de convergență este 2 pornim de la relația de recurență

$$e_{n+1} \approx ce_n^2.$$

Se obține

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\approx ce_n^2 = c^{1+2} e_{n-1}^{2^2} = c^{1+2+\dots+2^{n-1}} e_0^{2^n} = c^{2^n-1} e_0^{2^n} \\ &= \frac{1}{c} (ce_0)^{2^n} < \varepsilon \implies (ce_0)^{2^n} < c\varepsilon \end{aligned}$$

n se obține prin logaritmare

$$n = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\ln c + \ln \varepsilon}{\ln c + \ln |e_0|}.$$

De exemplu, pentru $x_0 = 0.4$, avem $e_0 \approx 0.18$ și avem nevoie cam de 3 iterații.

■

Problema 6 Fie $f \in C^4[-1, 1]$. Determinați un polinom de interpolare P de grad minim care verifică condițiile

$$P(-1) = f(-1), \quad P'(-1) = f'(-1), \quad P(0) = f(0), \quad P(1) = f(1)$$

și determinați expresia restului. (3p)

Soluție. (1.5p) Folosim metoda diferențelor divizate: $x_0 := -1, r_0 = 1, x_1 = 0, r_0 = 0, x_2 = 1, r_2 = 0$. Gradul polinomului este $n = \sum(r_i + 1) - 1 = 3$. Tabela diferențelor divizate

	D^0	D^1	D^2	D^3
-1	$f(-1)$	$f'(-1)$	$f(0) - f(-1) - f'(-1)$	$\frac{f(1) - 4f(0) + 3f(-1) + 2f'(-1)}{4}$
-1	$f(-1)$	$f(0) - f(-1)$	$\frac{f(1) - 2f(0) + f(-1)}{2}$	
0	$f(0)$	$f(1) - f(0)$		
1	$f(1)$			

(0.5) Polinomul de interpolare

$$(H_3 f)(x) = f(-1) + (t+1)f'(-1) + (t+1)^2 [f(0) - f(-1) - f'(-1)] + (t+1)^2 t \left[\frac{f(1) - 4f(0) + 3f(-1) + 2f'(-1)}{4} \right]$$

(1p) Restul

$$(R_3 f)(x) = \frac{(t+1)^2 t(t-1)}{4!} f^{(4)}(\xi).$$

■

Setul 4

Problema 7 (6p) Pentru a rezolva ecuația $f(x) = 0$ se aplică metoda lui Newton funcției $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$.

(a) Scrieți formula iterativă care se obține și determinați ordinul de convergență.

(b) Aplicați metoda de la punctul (a) pentru a aproxima \sqrt{a} , $a > 0$.

Soluție.

(a) (2p)

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}}{\left(\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}} \right)'}, \\ &= x - \frac{f(x)}{f'(x) - \frac{1}{2} \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)}} = x - \frac{f(x)}{f'(x) \left[1 - \frac{f(x)f''(x)}{2f'^2(x)} \right]}. \end{aligned}$$

adică,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{1}{2} \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)}} \quad (1)$$

(2p) Ordinul de convergență: Fie α rădăcina lui $f(x) = 0$. Se observă că $\varphi(\alpha) = \alpha$ și că

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) &= -\frac{f^2(\alpha) \left[2f'''(\alpha)f'(\alpha) - 3(f''(\alpha))^2 \right]}{\left[2f'(\alpha)^2 - f(\alpha)f''(\alpha) \right]^2} = 0 \\ \varphi''(\alpha) &= -2 \frac{f(\alpha)G(x)}{\left[2(f'(\alpha))^2 - f(\alpha)f''(\alpha) \right]^3} = 0 \\ \varphi'''(\alpha) &= \frac{-2f'''(\alpha)f'(\alpha) + 3(f''(\alpha))^2}{3f'^2(\alpha)} \neq 0, \end{aligned}$$

deci dacă rădăcina este simplă ordinul de convergență este $p = 3$, dar putem avea $p > 3$ dacă

$$\frac{-2f'''(\alpha)f'(\alpha) + 3(f''(\alpha))^2}{3f'^2(\alpha)} = 0$$

(b) (2p) Alegând $f(x) = x^2 - a$, din (1) se obține

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}.$$

■

Problema 8 Fie $f \in C^4[-1, 1]$. Determinați un polinom de interpolare P de grad minim care verifică condițiile

$$P(-1) = f(-1), \quad P(0) = f(0), \quad P(1) = f(1), \quad P'(1) = f'(1).$$

și determinați expresia restului. (3p)

Soluție. (1.5p) Folosim metoda diferențelor divizate: $x_0 := -1, r_0 = 0, x_1 = 0, r_0 = 0, x_2 = 1, r_2 = 1$. Gradul polinomului este $n = \sum(r_i + 1) - 1 = 3$. Tabela diferențelor divizate

	D^0	D^1	D^2	D^3
-1	$f(-1)$	$f(0) - f(-1)$	$\frac{f(1) - 2f(0) + f(-1)}{2}$	$\frac{2f'(1) - 3f(1) + 4f(0) - f(-1)}{4}$
0	$f(0)$	$f(1) - f(0)$	$f'(1) - f(1) + f(0)$	
1	$f(1)$	$f'(1)$		
1	$f(1)$			

(0.5) Polinomul de interpolare

$$\begin{aligned}(H_3f)(x) = & f(-1) + (t+1)[f(0) - f(-1)] + (t+1)t \left[\frac{f(1) - 2f(0) + f(-1)}{2} \right] \\ & + (t+1)t(t-1) \left[\frac{2f'(1) - 3f(1) + 4f(0) - f(-1)}{4} \right].\end{aligned}$$

Restul

$$(R_3f)(x) = \frac{(t+1)t(t-1)^2}{4!} f^{(4)}(\xi).$$

■