Seminarul 3

1) O persoană are în buzunar 2 zaruri roşii şi 3 zaruri albastre, dintre care alege aleator unul. Dacă a ales un zar roşu, atunci aruncă zarul ales de 3 ori, iar dacă a ales un zar albastru, atunci aruncă zarul ales de 2 ori. Calculaţi probabilitatea ca suma punctelor obţinute în urma aruncărilor să fie 10.

R: Fie
A:"zarul ales este albastru",
R:"zarul ales este roşu"
S:"suma punctelor obţinute în urma aruncărilor este 10".
Formula probabilităţii totale implică $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|R)P(R) = \frac{3}{6^2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{27}{6^3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

2) Un patron deţine 3 magazine, m_1, m_2, m_3, care au 50, 75, respectiv 100, de angajaţi, din care 50%, 60%, respectiv 70%, sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pentru un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul norocos să lucreze la magazinul m_3, ştiind că acesta este bărbat?
R: $P($"angajatul ales lucrează la m_3"$|$"angajatul ales este bărbat"$) = \frac{\frac{30}{225}}{\frac{25+30+30}{225}} = \frac{30}{85} = \frac{6}{17}$.

3) Se aruncă un zar. Fie N numărul care a apărut. Apoi, zarul este aruncat de N ori. Care este probabilitatea ca N=3, ştiind că:
a) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite?
b) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale?
Fie D: "numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite" şi E: "numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale"; considerăm $P(D|N = 1) = 0$; $P(E|N = 1) = 1$.
R: Formula lui Bayes implică: a) $P(N = 3|D) = \frac{P(D|N=3)P(N=3)}{\sum_{i=1}^{6} P(D|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{A_6^3}{6^4}}{\sum_{i=2}^{6} \frac{A_6^i}{6^{i+1}}}$;
b) $P(N = 3|E) = \frac{P(E|N=3)P(N=3)}{\sum_{i=1}^{6} P(E|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{1}{6^3}}{\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6^i}}$.

• **Modelul binomial:** în cadrul unui experiment poate să apară evenimentul A (*succes*) sau $\bar{A}$ (*insucces*), $A =$ succes cu $P(A) = p$, $\bar{A} =$ insucces $P(\bar{A}) = 1 - p$. Probabilitatea de a obţine k succese în n repetări independente ale experimentului este

$$b(k; n) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

▷ acest model corespunde distribuţiei binomiale.

4) Probabilitatea ca un anumit tip de cip să fie defect este 0.06. O componentă pentru calculator are instalate 12 astfel de cipuri. Componenta este funcţională dacă 11 sau mai multe dintre cipuri sunt operaţionale.

(1) Calculaţi probabilitatea ca
   (1a) 12 astfel de cipuri să fie funcţionale;
   (1b) componenta să fie funcţională.

(2) Dacă un calculator are instalate 4 astfel de componente, care este probabilitatea ca cel puţin 3 dintre ele să fie funcţionale?

(3) Dacă 3 astfel de componente sunt instalate pe un calculator, care este probabilitatea ca cel puţin 30 de chipuri să fie funcţionale?

R: (1): (1a) $(0.94)^{12}$; (1b) $p = C_{12}^{11}(0.94)^{11}0.06 + (0.94)^{12}$; (2) $C_4^3 p^3(1-p) + p^4$;
(3) $\sum_{i=30}^{36} C_{36}^i (0.94)^i (0.06)^{36-i}$.

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă returnată:** fie p_i =probabilitatea de a extrage o bilă cu culoarea i, $i = \overline{1,r}$

$$\begin{aligned} b(k_1,\dots,k_r;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i=\overline{1,r}, \\ &\quad\ \text{din } n = k_1+\ldots+k_r \text{ extrageri } \textit{cu returnarea} \text{ bilei extrase} \\ &= \frac{n!}{k_1!\ldots k_r!}\cdot p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{k_r}, \end{aligned}$$

$\triangleright$ cazul $r = 2$ corespunde distribuţiei binomiale.

5) O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură engleză. Care este probabilitatea ca literele tastate să poată fi permutate astfel încât să se obţină cuvântul *abracadabra*?
R: $\frac{11!}{5!2!1!1!2!}\frac{1}{26^{11}}$.

6) O persoană întârzie la serviciu într-o zi ploioasă cu probabilitatea 0,2, iar într-o zi senină cu probabilitatea 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitate 0,8. Care este probabilitatea ca:
a) persoana să ajungă ziua următoare la timp la serviciu?
b) ziua următoare să fie ploioasă, ştiind că persoana ajunge la timp la serviciu?
R: Fie I: "persoana întârzie la serviciu într-o zi" şi S:"ziua e senină". a) Formula probabilităţii totale implică $P(\bar{I}) = P(\bar{I}|S)P(S) + P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S}) = 0,9\cdot 0,2 + 0,8\cdot 0,8 = 0,82$; b) Formula lui Bayes implică $P(\bar{S}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S})}{P(\bar{I})} = \frac{0,8\cdot 0,8}{0,82} = \frac{32}{41}$.

7) Un zar este aruncat de cinci ori. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A:"exact două numere sunt pare."
b) B:"1 apare de două ori, 3 apare o dată şi 6 apare de două ori."
c) C: "exact două numere sunt prime, un număr este egal cu 1, iar celelalte două sunt egale cu 4".
R: a) $C_5^2\frac{1}{2^5}$; b) $\frac{5!}{2!1!2!}\frac{1}{6^5}$; c) $\frac{5!}{2!1!2!}\frac{1}{2^2}\frac{1}{6}\frac{1}{6^2}$.

8) O pereche de zaruri - unul alb şi unul roşu - se aruncă o dată şi apoi încă o dată. Calculaţi probabilitea ca numerele apărute la cea de-a doua aruncare să fie aceleaşi ca la prima aruncare. [Exemplu de caz favorabil: la prima aruncare - zarul alb indică 2 şi zarul roşu indică 4; la a doua aruncare - zarul alb indică 2 şi zarul roşu indică 4.]
R: considerăm variabilele aleatoare
A_1 indică numarul apărut la prima aruncare la zarul alb
A_2 indică numarul apărut la prima aruncare la zarul alb
R_1 indică numarul apărut la prima aruncare la zarul roşu
R_2 indică numarul apărut la prima aruncare la zarul roşu.
Probabilitatea cerută este

$$p = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} P\left(\{A_1 = i\}\cap\{R_1 = j\}\cap\{A_2 = i\}\cap\{R_2 = j\}\right) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\frac{1}{6^4} = \frac{6^2}{6^4} = \frac{1}{36},$$

unde s-a folosit faptul că evenimentele $\{A_1 = i\}, \{R_1 = j\}, \{A_2 = i\}, \{R_2 = j\}$ sunt independente $\forall\, i, j \in \{1,\ldots,6\}$.

Soluţie alternativă, folosind formula probabilităţii totale:

$$p = \sum_{i,j=1}^{6} P\left(\{A_2 = i\} \cap \{R_2 = j\} \middle| \{A_1 = i\} \cap \{R_1 = j\}\right) P\left(\{A_1 = i\} \cap \{R_1 = j\}\right) = \sum_{i,j=1}^{6} \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}.$$