Problema 1 *Fie $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ polinoamele ortogonale Legendre monice.*

(a) Arătaţi că polinoamele

$$\pi_k^+(t^2) = \pi_{2k}(t),$$

sau echivalent

$$\pi_k^+(u) = \pi_{2k}(t)|_{t^2=u}$$

sunt ortogonale monice pe $[0,1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. (1p)

(b) Stabiliţi formula de cuadratură

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{k=1}^{n} A_k f\left(t_k^2\right) + R_n(f),$$

unde A_k şi t_k, $k = 1,\ldots 2n$ sunt coeficienţii şi respectiv nodurile formulei de cuadratură Gauss-Legendre cu $2n$ noduri. (2p)

(c) Implementaţi o formulă de cuadratură de tip Gauss pentru integrala $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,\mathrm{d}x$ folosind ideea de la punctul (b). (2p)

(d) Folosind formula de la punctul (c) calculaţi $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ cu 8 zecimale exacte. (1p)

Soluţie. Vom face schimbarea de variabilă $u = t^2$.

(a) Deoarece

$$0 = \int_{-1}^1 \pi_{2k}(t)\pi_{2j}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \pi_k^+(t^2)\pi_j^+(t^2)\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_0^1 \frac{\pi_k^+(u)\pi_j^+(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u,$$

rezultă ortogonalitatea dorită.

(b) Schimbarea de variabilă $t = u^2$, $dt = 2udu$,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1}{u} f(u^2)u\,\mathrm{d}u = \int_{-1}^1 f(u^2)\,\mathrm{d}u.$$

Folosind acum formula Gauss-Legendre cu $2n$ noduri, se obţine

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 f(u^2)\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{2n} A_k f(t_k^2) + R_{2n}(f).$$

Ţinând cont de simetria formulei Gauss-Hermite, avem $t_k = -t_{n-k}$ şi $A_k = A_{n-k}$, $k = 1,\ldots,2n$ rezultă $t_k^2 = t_{n-k}^2$ şi

$$\sum_{k=1}^{2n} A_k f(t_k^2) = 2\sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k^2).$$

Pentru rest, dacă $f \in C^{4n}[-1,1]$, există $\xi \in (-1,1)$ astfel încât

$$R_n(f) = \frac{f^{(4n)}(\xi)}{(4n)!} \int_{-1}^{1} \left[\pi_{2n}(t)\right]^2 \, \mathrm{d}t.$$

(c) Folosim Gauss-Legendre; noile noduri vor fi t_k^2, iar noi coeficienţi $2A_k$, $k = 1, \dots, n$. Vezi sursa de mai jos.

```
function [gn,gc] = Gauss_rsqrt(n)
%GAUSS_RSQRT Gauss formula for w(t)=t^(-1/2)
%   uses Legendre polynomials
[nds,coeffs]=Gauss_Legendre(2*n);
gn=nds(1:n).^2;
gc=2*coeffs(1:n);
end
```

(d) Vezi sursa.

```
%Calculeza \int_0^1 1/sqrt(x)f(x)dx
%cu ajutorul polinoamelor Legendre
f=@(x) sin(x);
[gn,gc]=Gauss_rsqrt(20);
vi=vquad(gn,gc,f)
[gn2,gc2]=Gauss_Jacobi_ab(20,0,-1/2,0,1);
vi2=vquad(gn2,gc2,f)
```

Rezultate pentru 20 de noduri

```
>> testexamen_rsqrt
vi =
         0.620536603446762
vi2 =
         0.620536603446762
```

■

Problema 2 *Dorim să calculăm $\frac{1}{\sqrt{a}}$, pentru $a > 0$.*

(a) Pornind de la o ecuaţie convenabilă şi folosind metoda lui Newton, deduceţi o metodă pentru calculul lui $\frac{1}{\sqrt{a}}$. (1p)

(b) Pentru ce valori ale lui x_0 metoda converge? (1p)

(c) Folosiţi iteraţia de la (a) pentru a da o metodă de calcul al radicalului fără împarţiri. (1p).

Soluţie.

(a) Relaţia de recurenţă: $f(x) = \frac{1}{x^2} - a$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2} x_n \left(3 - a x_n^2\right).$$

(b) Scriem iteraţia sub forma $x_{n+1} = F(x_n)$ cu $F(x) = \frac{1}{2} x \left(3 - a x^2\right)$ şi ţinând cont că $x > 0$ şi $|F'(x)| < 1$ se obţine $x_0 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{a}}, \frac{\sqrt{15}}{3\sqrt{a}}\right)$. Acestea sunt condiţii suficiente. Se poate obţine o delimitare mai largă se obţine impunând condiţia $F(x) > 0$. Dacă $0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{a}}$, convergenţa este monotonă (şirul ieraţiilor este crescător şi mărginit superior de soluţie). Totuşi pentru x_0 apropiat de 0 se poate obţine soluţia falsă 0. Dacă $x_0 > \frac{1}{\sqrt{a}}$, trebuie ca $F(x_0) > 0$. Se obţine $x_0 < \sqrt{\frac{3}{a}}$.

(c) Odată aproximat $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a} = a \frac{1}{\sqrt{a}} \approx a x_n$.

■