Seminarul 1 - Soluţii

1. În câte moduri se pot aşeza pe un raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică şi 4 romane, ştiind că fiecare carte are un autor diferit, astfel încât:

a) cărţile de acelaşi tip să fie alăturate?

b) doar romanele să fie neapărat alăturate?

c) doar culegerile de matematică, respectiv de informatică, să fie neapărat alăturate?

R: a) $5!3!4!3!$; b) $4!(5+3+1)!$; c) $5!3!(1+1+4)!$.

2. Câte coduri binare sunt formate din 4 biţi egali cu 1 şi 6 biţi egali cu 0 şi nu au doi biţi alăturaţi egali cu 1?

R: punem în linie 0-urile cu spaţii între ele: _0_0_0_0_0_0_, apoi alegem 4 spaţii pe care să punem 1-urile $\Longrightarrow$ există C_7^4 astfel de coduri.

3. Se aruncă două zaruri. Determinaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) A: "se obţine o dublă".

b) B: "suma numerelor este un număr par."

c) C: "suma numerelor este cel mult egală cu 10."

R: a) $P(A) = \frac{1}{6}$; b) $P(B) = \frac{3^2+3^2}{36}$; c) $P(C) = 1 - \frac{3}{36}$.

4. 7 căluşari: $c_1, c_2, \ldots, c_7$ se aşează în cerc, într-o ordine aleatoare. Care este probabilitatea ca c_1 şi c_7 să fie vecini?

R: $\frac{2!5!}{\frac{7!}{7}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

5. În câte moduri se pot aşeza în cerc caracterele următoare: A, A, A, B, B, 0, 0, 0, 1?

R: $\frac{1}{9} \cdot \frac{9!}{3!2!3!1!}$.

6. În câte moduri se pot distribui m bile identice în n cutii distincte ($m, n \in \mathbb{N}^*$)?

R: $C_{m+n-1}^{m} = C_{m+n-1}^{n-1}$ combinări cu repetiţie.

7. Câte coduri binare sunt formate din 10 cifre şi nu au două cifre alăturate egale cu 1?

R: $1 + C_{10}^1 + C_9^2 + \ldots + C_6^5$.

Dacă în codul binar sunt k biţi egali cu 1, atunci codul are $10-k$ biţi egali cu 0. Punem în linie 0-urile şi spaţiile pe care putem să punem 1-urile, la fel ca în **Pb. 2**: _0_0_..._0_. Deci avem $11-k$ spaţii libere pe care vrem să punem k biţi egali cu 1, rezultă C_{11-k}^k alegeri posibile. k poate să ia valorile $0, 1, \ldots,$ până la maxim 5, deoarece pentru $k > 5$ numărul de spaţii libere este mai mic decât numărul de biţi egali cu 1.

8. a) Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$)?

R: C_{n-1}^{k-1}.

M1: Considerăm un şir cu n valori egale cu 1 şi $n-1$ spaţii între ele 1_1_1_..._1. Dacă pe spaţii se pun $k-1$ simboluri + şi se şterg spaţiile libere, atunci şirul de 1-uri va fi împărţit în k grupe de aceste simboluri. Fie x_i=suma de 1-uri din al i-lea grup, $i = \overline{1,k}$. Cum nu există două simboluri + consecutive, avem $x_i \in \mathbb{N}^*$, $i = \overline{1,k}$. Din modul de construcţie obţinem $x_1 + \ldots + x_k = n$. Există C_{n-1}^{k-1} moduri în care se pot pune $k-1$ simboluri + pe $n-1$ spaţii.

Exemplu: $n = 6, k = 3$, 1_1_1_1_1_1; $k-1 = 2$; $11 + 111 + 1$ (3 grupe de 1, separate prin 2 simboluri +) $\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$, iar $x_1 + x_2 + x_3 = 6$; în acest caz, există C_5^2 soluţii $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

b) Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$)?

R: C_{n+k-1}^{k-1}.

Fiecare soluţie $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ a ecuaţiei $x_1 + \ldots + x_k = n$ corespunde în mod unic unei soluţii $(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ a ecuaţiei $y_1 + \ldots + y_k = n + k$ şi vice versa, alegând $y_i = x_i + 1$, pentru $i \in \{1, \ldots, k\}$. Cf. a), există C_{n+k-1}^{k-1} soluţii.

9*. Fie A şi B două mulţimi finite.

a) Dacă A are $k \in \mathbb{N}^*$ ($k \geq 3$) elemente şi B are 3 elemente, câte funcţii surjective se pot defini de la A la B?

R: a) Fie $A=\{a_1,a_2,...,a_k\},\ B=\{b_1,b_2,b_3\}$. Definim

$$F_i=\{f:\{a_1,a_2,...,a_k\}\to\{b_1,b_2,b_3\}|\forall a\in A\ f(a)\neq b_i\}, i\in\{1,2,3\}\,.$$

Notăm cu $\#(M)$ numărul de elemente ale unei mulţimi M. Numărul funcţiilor care nu sunt surjective este

$$\begin{aligned}\#(F_1\cup F_2\cup F_3) &= \#(F_1)+\#(F_2)+\#(F_3)\\ &-\#(F_1\cap F_2)-\#(F_2\cap F_3)-\#(F_1\cap F_3)+\#(F_1\cap F_2\cap F_3)\\ &= C_3^1(3-1)^k-C_3^2(3-2)^k+C_3^3(3-3)^k=3\cdot 2^k-3.\end{aligned}$$

Numărul funcţiilor care sunt surjective este $3^k-3\cdot 2^k+3$.

b) Dacă A are $k\in\mathbb{N}^*$ elemente şi B are $n\in\mathbb{N}^*$ $(k\geq n)$ elemente, câte funcţii surjective se pot defini de la A la B? [*Indiciu:* Se aplică principiul includerii şi excluderii!]

R: b) $n^k-C_n^1(n-1)^k+C_k^2(n-2)^k-\ldots+(-1)^{k-2}C_k^{n-2}2^k+(-1)^{k-1}C_k^{n-1}$.

10*. Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$, $m\geq n$. În câte moduri se pot îmbarca m persoane într-un tren cu n vagoane astfel încât niciun vagon să nu fie gol?

R: $n^m-C_n^1(n-1)^m+C_m^2(n-2)^m-\ldots+(-1)^{m-2}C_m^{n-2}2^m+(-1)^{m-1}C_m^{n-1}$.