Problema 1 *Constanta α_0, definită ca soluția unică în intervalul $0 < \alpha < 1$ a ecuației*

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 0$$

prezintă interes în teoria seriilor trigonometrice. Utilizați metoda secantei în combinație cu o cuadratură Gauss-Jacobi pentru a calcula α_0.

Soluţie.

```
n=15; er=0.5e-14;
fa(0.25,er)
```

```
ans =
  -0.202066744048102
```

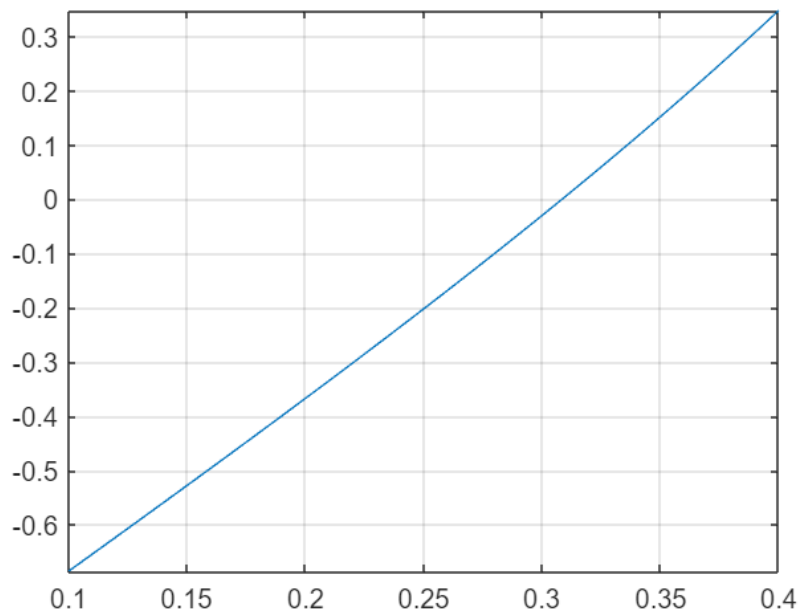
```
fa(0.35,er)
```

```
ans =
   0.152138320038524
```

```
[alpha,ni]=secant(@fa,0.25,0.35,er,0,100,er);
fprintf('alpha=%17.15f, numar iteratii=%d\n',alpha,ni);
```

```
alpha=0.308443779561986, numar iteratii=6
```

```
ff=@(x) fa(x,er);
fplot(ff,[0.1,0.4])
grid on
```



Funcția definită prin integrală

```
function y=fa(a,eps0)
f=@(t) cos(t);
n=10; valfv=0;
nmax=50; n=5;
[g_nodes,g_coeffs]=Gauss_Jacobi_ab(n, 0, -a, 0, 3*pi/2);
valf=vquad(g_nodes,g_coeffs,f);
for k=1:nmax
    valfv=valf; n=n+1;
    [g_nodes,g_coeffs]=Gauss_Jacobi_ab(n, 0, -a, 0, 3*pi/2);
    valf=vquad(g_nodes,g_coeffs,f);
    if abs(valf-valfv)<=eps0
        y=valf;
        nef=n;
        return
    end %if
end
nef=nmax;
end
```

■

Problema 2 *Considerăm problema determinării unui polinom $p \in \mathbb{P}_n$ astfel încât*

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p'(x_i) = f_i', \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

unde x_i, $i = 1, 2, \dots, n$ sunt noduri distincte. Această interpolare nu este nici Lagrange nici Hermite.

(a) *Arătaţi că problema are soluţie unică şi explicaţi cum se poate obţine. (2p)*

(b) *Găsiţi polinomul de interpolare şi restul în cazul $n = 2$ şi $x_k = k$, $k = 0, 1, 2$. (3p)*

Soluție.

(a) Problema este o problemă de interpolare Birkhoff. Fie $P = L_{n-1}f'$ polinomul de interpolare Lagrange al lui f' cu nodurile x_i, $i = 1, \dots, n$.

Considerăm polinomul

$$Q(x) := \int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}\,t + f(x_0).$$

Q astfel determinat verifică cerinţele problemei.

Polinomul poate fi scris şi sub forma

$$Q(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} \ell_k(t)\,\mathrm{d}t f'(x_k).$$

Restul se determina cu teorema lui Peano.

$$(Rf)(x) = f(x) - Q(x) = \int_{x_0}^{x} K(t) f'''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nucleul lui Peano are expresia

$$K(t) = R\left[\frac{(x-t)_+^2}{2!}\right] = \frac{(x-t)_+^2}{2} - \frac{(x_0-t)_+^2}{2} - \sum_{k=1}^{n}(x_k-t)_+ \int_{x_0}^{x} \ell_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dacă nucleul păstrează semn constant se obține pentru rest

$$\begin{aligned}(Rf)(x) &= \frac{f'''(\xi)}{3!}(Re_3)\\ &= \frac{f'''(\xi)}{3!}\left(x^3 - x_0^3 - 3\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \int_{x_0}^{x} \ell_k(t)\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

(b) Pentru $x_k = k$, $k = 0, 1, 2$ se obtine

$$Q(u) = -\frac{u\,(u-4)\,f'(1)}{2} + \frac{u\,(u-2)\,f'\,(2)}{2} + f\,(0)\,.$$

Restul

$$(Rf)(u) = f(u) - Q(u) = f(u) + \frac{u\,(u-4)}{2} f'(1) - \frac{u\,(u-2)}{2} f'\,(2) - f\,(0)$$

Aplicăm th. Peano. Gradul se exactitate este $d = 2$

$$(Rf)(u) = \int_0^2 K(t) f'''(t)\,\mathrm{d}t;$$

unde

$$K(t) = R\left[\frac{(x-t)_+^2}{2!}\right]$$

este nucleul lui Peano.

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{(x-t)_+^2}{2} + \frac{u\,(u-4)}{4} \cdot 2(1-t)_+ - \frac{u\,(u-2)}{4} \cdot 2(2-t)_+ - \frac{(0-t)_+^2}{2} \\ &= \frac{(x-t)_+^2}{2} + \frac{u(u-4)(1-t)_+}{2} - \frac{u(u-2)(2-t)}{2} \end{aligned}$$

Simplificând vom obține

$$K(t) = \begin{cases} t^2, & \text{dacă } t \leq u \wedge t \in [0,1) \\ (t-1)u^2 + (-4t+4)u + t^2, & \text{dacă } t \leq u \wedge t \in [1,2] \\ u(2t-u), & \text{dacă } t > u \wedge t \in [0,1) \\ u(u-2)(t-2), & \text{dacă } t > u \wedge t \in [1,2] \end{cases}$$

Nucleul păstreaza semn constant (vezi figura 1). Aplicăm corolarul la teorema lui Peano:

$$(Rf)(u) = \frac{f'''(\xi)}{3!} R(e_3)(u) = \frac{u\left(2u^2 - 9u + 12\right)}{12} f'''(\xi),$$

dearece

$$(Re_3)(u) = u^3 + \frac{3u(u-4)}{2} - 6u(u-2).$$

■

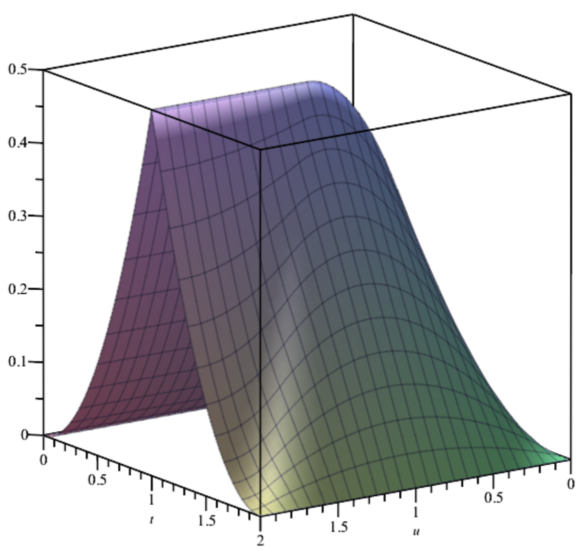


Figure 1: Nucleul lui Peano