Seminarul 2

1. Un cub de sticlă este vopsit pe fiecare faţă, apoi este împărţit în 1000 de cubuleţe de aceleaşi dimensiuni. Un cubuleţ este ales aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) A: "cubuleţul are exact 3 feţe vopsite". R: $\frac{8}{1000}$.

b) B: "cubuleţul are exact 2 feţe vopsite". R: $\frac{12\cdot 8}{1000}$.

c) C: "cubuleţul are exact o faţă vopsită". R: $\frac{6\cdot 8^2}{1000}$.

d) D: "cubuleţul nu are nicio faţă vopsită". R: $\frac{8^3}{1000}$.

2. Un alfabet are 21 consoane şi 5 vocale (se vor considera doar majusculele). În câte moduri se pot alege 6 litere astfel încât să fie alese 4 consoane distincte şi 2 vocale distincte, dacă: a) nu se ia în considerare ordinea lor; b) se ia în considerare ordinea lor?

[de ex. în alfabetul englez: a) {i,o,t,g,m,h}, {a,e,t,b,l} etc.; b) (i,o,t,g,m,h), (h,g,i,m,o,t), (t,a,b,l,e) etc.]
R: a) $C_{21}^4 \cdot C_5^2$ b) $A_{21}^4 \cdot A_5^2 \cdot C_6^4$.

3. Un agent de vânzări trimite 10 emailuri distincte cu reclame alegând aleator pentru fiecare email un destinatar dintr-o listă de 20 de persoane (o persoană poate primi mai multe emailuri sau niciuna). Care este probabilitatea ca prima persoană din listă să primească 5 emailuri?
R: $\frac{C_{10}^5\cdot 19^5}{20^{10}}$.

4. Presupunem în continuare că data naşterii unei persoane alese aleator este în oricare dintre lunile anului cu aceleaşi şanse (i.e. probabilitatea ca o persoană aleasă aleator să aibă data naşterii într-o anumită lună este $\frac{1}{12}$). Care este probabilitatea ca
a) într-un grup de 5 persoane să fie cel puţin 2 persoane care îşi serbează zilele de naştere în aceeaşi lună?
R: $1 - \frac{A_{12}^5}{12^5} = 1 - \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{12^5} \approx 62\%$.
b) într-un grup de 5 persoane zilele de naştere sunt serbate toate în cel mult două luni?
R: $\frac{C_{12}^1 + C_{12}^2(2^5-2)}{12^5}$, unde $C_{12}^1 = 12$ e numarul de cazuri când toate persoanele sunt născute în aceeaşi lună, C_{12}^2 este numărul de alegeri ale lunilor pentru situaţia când toate persoanele sunt născute în exact 2 luni, iar $2^5 - 2$ este numărul de funcţii surjective de la 5 persoane la cele 2 luni.

5. La o petrecere sunt 8 femei şi 8 bărbaţi. Ana şi Vlad sunt şi ei în acest grup de prieteni. Cele 16 persoane se aşează aleator pe 16 fotolii într-un rând.
a) Care este probabilitatea ca doi bărbaţi şi două femei să nu stea alături?
b) Care este probabilitatea ca doi bărbaţi şi două femei să nu stea alături şi Ana şi Vlad să stea unul lângă altul?
R: a) $\frac{2\cdot 8!8!}{16!}$; b) $\frac{2\cdot 15\cdot 7!7!}{16!}$

6. 5 bile numerotate consecutiv de la 1 la 5 sunt aşezate orizontal în mod aleator. Determinaţi:
a) probabilitatea ca prima şi ultima bilă să aibă numere pare;
b) probabilitatea ca primele două bile să aibă numere impare;
c) probabilitatea ca bilele cu numere pare să fie alăturate;
d) probabilitatea ca cel puţin două bile alăturate să aibă aceeaşi paritate.
R: a) $\frac{2!\cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$. b) $\frac{A_3^2\cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}$. c) $\frac{4\cdot 2\cdot 3!}{5!} = \frac{2}{5}$. d) $1 - \frac{2!\cdot 3!}{5!} = \frac{9}{10}$.

7. 9 persoane se îmbarcă aleatoriu într-un tren cu 3 vagoane. Calculaţi probabilitatea ca:
a) în primul vagon să fie exact 3 persoane?
b) în fiecare vagon să fie 3 persoane?
c) într-un vagon să fie 1 persoană, iar în celelalte două vagoane să fie câte 4 persoane?
R: a) $\frac{C_9^3\cdot 2^6}{3^9}$; b) $\frac{C_9^3\cdot C_6^3\cdot C_3^3}{3^9}$; c) $\frac{3\cdot C_9^1\cdot C_8^4}{3^9}$;