Análisis Combinatorio

M. Julia Bolívar

Factorial

Factorial de un número

Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ definimos $n!$ (diremos n factorial) recursivamente, del siguiente modo:

0! =1, 1!=1 y $(n+1)! = (n+1)n!$

Por ejemplo:

4! = 4 . 3! = 4 . 3 . 2! = 4.3.2.1! = 4.3.2.1

En definitiva:

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots..1$$

Observación:

El factorial coincide con la cantidad de permutaciones de n elementos. Una permutación es la variación del orden de los elementos de un cierto conjunto.

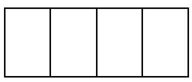
Por ejemplo si tenemos el conjunto $A = \{1,2\}$, hay sólo 2 posibles ordenamientos para los elementos podríamos poner: 1 2, 2 1.

Si el conjunto es $B = \{1,2,3\}$, tenemos 6 posibles ordenamientos: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Ejemplo

¿Cuántos números de 4 dígitos pueden formarse con los números 1,2,3,4? ¿Cuántos serían si pedimos que los 4 dígitos sean distintos?

En el primer caso si pensamos que en cada cuadradito podemos colocar 4 valores posibles



Entonces nos quedarían 4.4.4.4 posibilidades, o sea $4^4 = 256$ .En cuanto a la segunda pregunta, para el primer cuadradito tendríamos 4 posibilidades, pero una vez que complete el primero para el segundo quedarían 3 posibilidades (ya que no se puede repetir), para el tercero 2 posibilidades y para el último sólo 1. Así que en ese caso sería 4.3.2.1, o sea 4!.

Número Combinatorio

Número combinatorio o coeficiente binomial

Sean $n, m \in \mathbb{N}_0;\ n \leq m$:

Definimos $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$

Lo llamamos el coeficiente binomial ó número combinatorio asociado al par n, m

Ejemplo:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5.4.3!}{2!\,3!} = \frac{20}{2} = 10$$

Observaciones:

1) $\binom{m}{0} = 1$

2) $\binom{m}{m} = 1$

3) El combinatorio $\binom{m}{n}$ cuenta la cantidad de subconjuntos de n elementos que se pueden tomar de un conjunto de m elementos.

Ejemplos:

a) Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, que tiene 4 elementos, ¿cuántos subconjuntos con 3 elementos podemos formar con los elementos de A?

Según la observación podemos calcularlo con el número combinatorio $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$

Así que habrá 4 conjuntos, efectivamente estos serían: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$

b) Se desea elegir 5 miembros de un grupo de 12 personas para trabajar como equipo en un proyecto especial. ¿Cuántos equipos de 5 personas distintas podrían formarse?

El número de equipos distintos estará dado por el $\binom{12}{5}$, ya que es la cantidad de subconjuntos de 5 personas que podemos formar con las 12 disponibles. Haciendo la cuenta se llega a que hay 792 equipos distintos.

Fórmula de Pascal

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \qquad k, n \in \mathbb{N},\ k \leq n$$

Vamos a demostrar esa igualdad, trabajando con los combinatorios:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)(n-k)!} + \frac{n!}{k(k-1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!\,k + n!\,(n-k+1)}{(k-1)!\,(n-k+1)(n-k)!\,k} = \frac{n!\,(k+n-k+1)}{(k-1)!\,(n-k+1)(n-k)!\,k} =$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{(k-1)!\,(n-k+1)(n-k)!\,k} = \frac{(n+1)!}{(k-1)!\,(n-k+1)(n-k)!\,k} = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!\,k!} = \binom{n+1}{k}$$

Fórmula del Binomio

Dados a, b números reales no nulos, $n \in \mathbb{N}$:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Lo demostraremos por inducción:

PB) Veamos que vale para $n = 1$

$(a+b)^1 = (a+b)$

Por otro lado: $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b$

Ambas expresiones son iguales así que el paso básico es verdadero.

PI) $\forall m \geq 1$: $\left((a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \rightarrow (a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k} b^k\right)$

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m (a+b) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \,(a+b) =$$

HI

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1} \quad = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} a^{m+1-k} b^k =$$

Aplico distributiva y propiedad de la potencia

Explicado abajo (*)

$$= \binom{m}{0} a^{m+1}\, b^0 + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right] a^{m-k+1} b^k + \binom{m}{m} a^0 b^{m+1} =$$

En el primer sumando separo el primer término (k=0), en el segundo sumando separo último término (k=m+1)

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m+1}{k}\right] a^{m-k+1} b^k + b^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \left[\binom{m+1}{k}\right] a^{m-k+1} b^k$$

Fórmula de Pascal

Hemos llegado a lo que queríamos probar.

(*) $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1} = \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} a^{m-j+1} b^j$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$j = k + 1$$