

# Álgebra de Boole

---

Matemática Discreta – UCA  
M. Julia Bolívar



# Álgebra de Boole

Sea  $B \neq \emptyset$ , un conjunto que contiene 2 elementos especiales 0 y 1, sobre el cual se definen 2 operaciones binarias cerradas, la suma y el producto  $(+, \cdot)$ , y una operación unaria el complemento  $(-)$

$(B, +, \cdot, -, 0, 1)$  es un álgebra de Boole si  $\forall x, y, z \in B$  se cumple :

Axiomas

- $x + y = y + x$                        $xy = yx$                       *Conmutativa*
- $x(y + z) = xy + xz$                        $x + yz = (x + y)(x + z)$                       *Distributiva*
- $x + 0 = x$                        $x1 = x$                       *Neutros*
- $\forall x \in B, \exists \bar{x} \in B : \quad x + \bar{x} = 1, \quad x\bar{x} = 0$                       *Complemento*



# Ejemplo 1

---

$B = \{0,1\}$ , definimos la suma, el producto y el complemento en las siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$x$	$\bar{x}$
0	1
1	0

$(B, +, \cdot, -, 0, 1)$  es un álgebra de Boole



## Ejemplo 2

$(D_6, +, \cdot, -, 1, 6)$

$D_6$  son los divisores positivos del 6

Donde:  $x + y = \text{mcm}(x, y)$ ,  $xy = \text{mcd}(x, y)$ ,  $\bar{x} = \frac{6}{x}$

+	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

·	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

$x$	$\bar{x}$
1	6
2	3
3	2
6	1



## Ejemplo 3

---

$(P(U), \cup, \cap, \emptyset, U)$  es un álgebra de Boole

Si por ejemplo  $U = \{1,2\}$   $P(U) = \{\emptyset, U, \{1\}, \{2\}\}$  (es el conjunto de partes de un conjunto, el cual esta formado por todos los subconjuntos del conjunto)



## Observación: El complemento es único

---

Demostración/

Sabemos que:  $x + \bar{x} = 1$      $y$      $x\bar{x} = 0$

Sea  $y$  tal que  $x + y = 1$      $xy = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} y & = & y1 & = & y(x + \bar{x}) & = & yx + y\bar{x} = 0 + y\bar{x} = \\ (1) & & (2) & & (3) & & (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} = & x\bar{x} & + & y\bar{x} & = & (x + y)\bar{x} & = 1\bar{x} = \bar{x} \\ (4) & & & (3) & & (4) & (1) \end{array}$$

$$\longrightarrow y = \bar{x}$$

(1) Neutro

(2) Complemento

(3) Distributiva

(4) Hipótesis





# Leyes del Álgebra de Boole

---

1)  $x + x = x$

$xx = x$

*Idempotencia*

2)  $x + 1 = 1$

$x0 = 0$

*Acotación*

3)  $x + xy = x$

$x(x + y) = x$

*Absorción*

4)  $\bar{\bar{x}} = x$

*Involución*

5)  $\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}$

$\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$

*Morgan*

6)  $x + (y + z) = (x + y) + z$

$x(yz) = (xy)z$

*Asociativa*



# Leyes del Álgebra de Boole

---

$$7) x + y = x + z \quad \wedge \quad \bar{x} + y = \bar{x} + z \quad \rightarrow \quad y = z$$

*Cancelación*

$$xy = xz \quad \wedge \quad \bar{x}y = \bar{x}z \quad \rightarrow \quad y = z$$



# Principio de la Dualidad

---

El dual de una afirmación relacionada con expresiones de un álgebra de Boole se obtiene reemplazando el 0 por el 1, el 1 por el 0,  $+$  por  $\cdot$  y  $\cdot$  por  $+$

*Principio de la Dualidad:*

*El dual de un teorema de un Álgebra de Boole también es un teorema*



Ejercicio: Utilizando los axiomas demostrar las leyes de Idempotencia, Acotación, Absorción y Morgan

1)  $x + x = x$

$xx = x$

*Idempotencia*

Complemento

$$x = x + 0 = x + x\bar{x} = (x + x)(x + \bar{x}) = (x + x)1 = x + x$$

Neutro

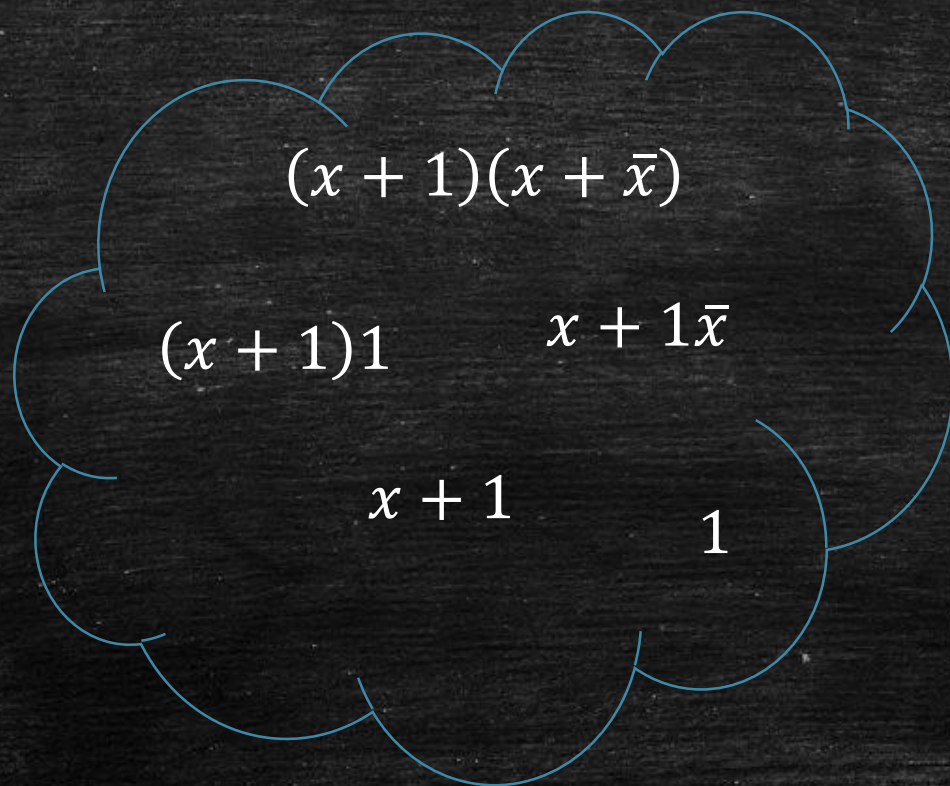
Distributiva

Complemento

Neutro

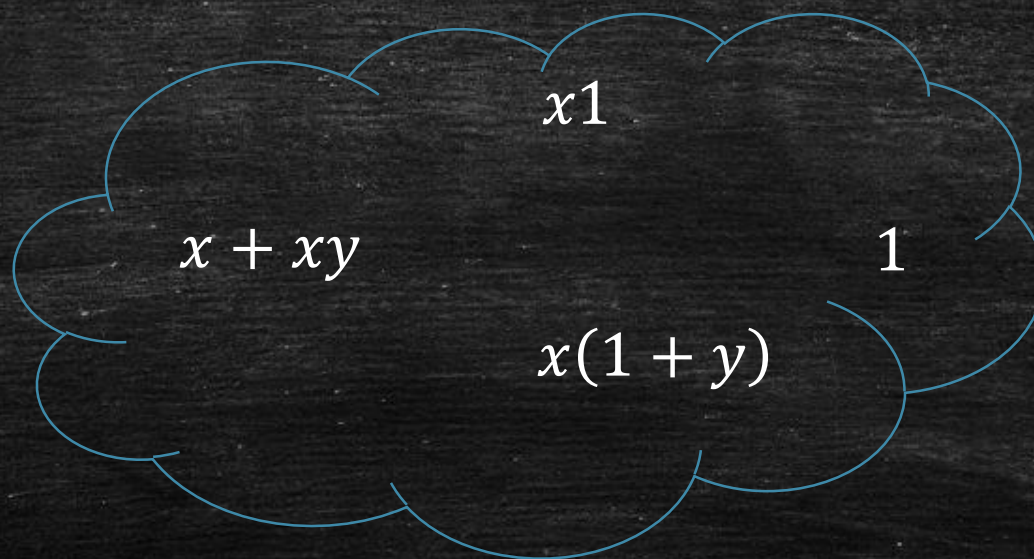


Acotación





## Absorción





Morgan

$$\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}$$

Quiero ver que

$$x + y + \bar{x}\bar{y} = 1$$

1

$$(x + y)\bar{x}\bar{y} = 0$$

2

1

$$x + y + \bar{x}\bar{y} =$$

2

$$(x + y)\bar{x}\bar{y} =$$



Ej 1) Simplificar las sig expresiones:

i)  $b(a+c) + \bar{a}c + aa$

ii)  $[x\bar{y} + z(\bar{x}+y)](y+z)$

iii)  $\overline{(\bar{x}y)(xz)}(x+x\bar{y})(\overline{\bar{x}+y})$

Ej 2) Dar un contraejemplo para probar que las sig afirmaciones son falsas en un algebra de Boole

a)  $x+z = y+z \Rightarrow y=x$

b)  $xz = yz \Rightarrow x=y$

c)  $xy = 0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$