Parcialito → Unidad 2 Lucas Ariel Saavedra

15-180013-1

Sea R la relación en $\mathbb{Z}$ definida en aRb si y solo si $a \equiv b\,(4)$, demostrar que R es una relación de equivalencia

Si $a \equiv b\,(4)$ quiere decir que $4 \mid a-b$

$$\boxed{aRb \Longleftrightarrow a-b \text{ es múltiplo de } 4}$$

Veamos si es reflexiva, simétrica, y transitiva

- ¿Es reflexiva? ✓

$$a \equiv a \pmod 4 \rightarrow 4 \cdot 0 = a - a \rightarrow 4 \cdot 0 = 0$$

Es reflexiva ya que un número es congruente a si mismo.

- ¿Es simétrica? ✓

Si $a \equiv b \pmod 4$ implica $b \equiv a \pmod m$)

Si $a \equiv b \pmod 4$, entonces $4 \mid b-a$, es decir

$$a-b = 4 \cdot d \qquad d \in \mathbb{Z}$$

Entonces

$$b-a = 4(-d)$$

Por lo tanto $4 \mid b-a$ y $b \equiv a\,(4)$

• ¿Es transitiva? ✓

$a \equiv b \pmod 4$ y $b \equiv c \pmod 4$ entonces $a \equiv c \pmod 4$

$$\left\{\begin{array}{l} b-a = d\cdot 4 \\ c-b = d'\cdot 4 \end{array}\right\} c-a = c-b+b-a = d'4 - d4 = 4(d'-d)$$

Entonces, estamos ante una relación de equivalencia ya que es reflexiva, simétrica, y transitiva.

Veamos si $10x \equiv 6\ (4)$. Existe solución si y solo si

$10x \equiv 6\ (4)$ tiene solución $\Longleftrightarrow$ 6 es múltiplo de $mcd(10,4)$

Calculamos (por el algoritmo de euclides):

$mcd(10,4) = mcd(4, r_{10,4})$

$10 = 2\cdot 4 + 2 \rightarrow r_{10,4} = 2$

$mcd(4,2) = mcd(2,0) = 2$

4 es múltiplo de 2 $\rightarrow 2\cdot 2 = 4$

Entonces, hay solución, ya que $mcd(10,4) = 2 = d$ y $6 = 2 \cdot 3$.

Hallamos las soluciones

Hallemos la solución de $\frac{10}{2} x \equiv \frac{6}{2} \left(\frac{4}{2}\right)$ que sería hallar las soluciones de

$$5x \equiv 3 \ (2)$$

Es lo mismo que hallar la solución de x en la combinación lineal

$$5x + (-k)2 = 3$$

Vemos cuanto da $mcd(5,2)$

$mcd(5,2) = mcd(2,1) = mcd(1,0) = 1$

Por lo tanto hallamos que valores a y b satisfacen

$$5a + 2b = 1$$

Hallemos estos valores. Para hallar el $mcd(5,2)$ se realizó (el algoritmo de Euclides)

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$
$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

Por lo tanto

$$1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1$$

Multiplicamos 3 y nos queda

$$x \leftarrow 3 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 3$$

Por lo tanto una solución, tal que $0 \leq x < 4$ es 3

Hallamos otra mas con

$$x_k = 3 + k\,2 \qquad k = 0, 1$$

Otra solución es $x_1 = 3+2 = 5$. Como queremos soluciones tal que se cumpla

$$0 \leq x < 4$$

Vemos a que numero es congruente 5 tal que se cumpla esa condición. Como

$$5 = 1 \cdot 4 + 1$$

Y como 5 es congruente al resto de dividirlo con 4:

$$5 \equiv 1 \ (4)$$

Por lo tanto, las soluciones tal que $0 \leq x \leq 4$, son 1 y 3.