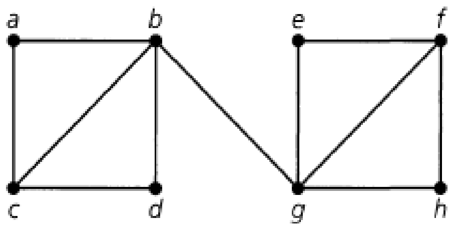
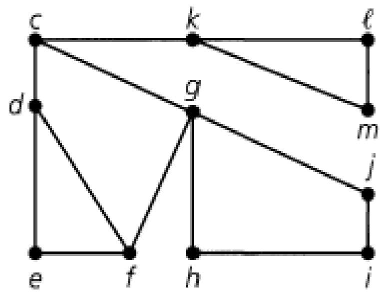
Práctica 4 — Grafos

1. Determine el grado de cada vértice en los siguientes grafos:





2. En los casos que sea posible, dibuje un grafo que verifique las condiciones dadas. En caso de no ser posible, justifique:

a) que tenga 4 vértices de grado 1, 1, 2 y 3

b) que tenga 4 vértices de grado 1, 1, 3 y 3

c) que tenga 4 vértices cada uno de grado 1

d) que tenga 4 vértices de grados 1, 2, 3, 4 y 4 aristas

3. En un edificio de departamento donde reina la discordia habitan 25 personas. ¿Es posible que cada persona se lleve bien exactamente con 5 de las restantes?

4. Se desea diseñar una red con 5 ordenadores que denotaremos A, B, C, D y E de manera que esten conectados de la siguiente forma: A está conectado con los 4 restantes, B está conectado con 3 ordenadores, C se conecta con 3 ordenadores, D está conectado con 2 ordenadores, E está conectado con 2 ordenadores. ¿Será posible construir dicha red?

5. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, sin bucles, 3- regular (esto es, cada vértice tiene grado 3). Si $|E|$ $=2\ |V|$ - 6 ¿Cuánto valen $|E|$ y $|V|$?

6. Si $G = (V, E)$ un grafo no dirigido con n vértices y e aristas. Sea δ el mínimo entre todos los grados de todos vértices de G y Δ el máximo. Probar que

$$\delta \leqslant \frac{2e}{n} \leqslant \Delta$$

7. Demuestre que en todo grafo simple de n vértices siempre existe al menos un par de vértices con igual grado (Ayuda: considere el rango de valores que pueden tomar los grados de los vértices).

8. Un grafo simple de n vértices en el que cada vértice es adyacente a todos los demás se denomina grafo completo de n vértices y se lo denota K_n.

a) Represente K_2, K_3, K_4

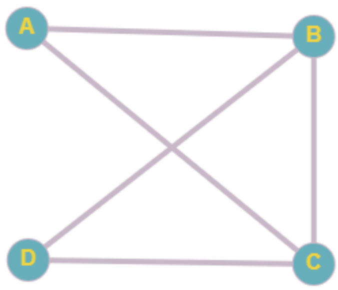
b) ¿Cuál es el grado de cada vértice de K_n?

c) Halle una fórmula de recurrencia que relacione la cantidad de aristas de K_n con la cantidad de aristas de K_{n-1}

d) Encuentre la fórmula que permita obtener la cantidad de aristas de K_n en función de n e interprete su resultado.

9. Sea A la matriz de adyacencia del grafo sin lazos G, con n vértices, probar que el elemento (i, j) de la matriz A^q indica la cantidad de caminos de longitud q que conectan el vértice v_i con el vértice v_j.

10. El diagrama muestra los vuelos que hay entre las ciudades A, B, C y D



a) Dar la matriz de adyacencia M

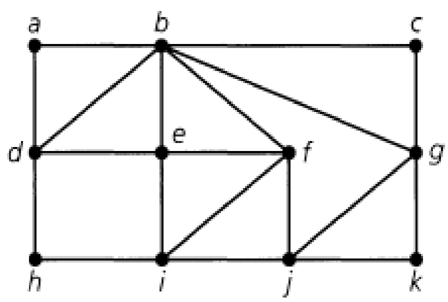
b) Calcular M^2

c) ¿Cuántas formas hay de viajar de A a D haciendo una escala? ¿Cuáles serían?

11. Dado el grafo de la figura,

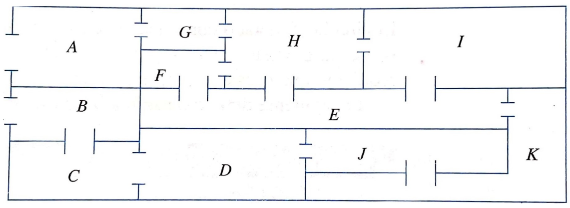
a) Hallar un camino cerrado que pase por todos las aristas exactamente una vez (circuito eureliano).

b) Para el subgrafo resultante de remover la arista {**d**,**e**}, hallar un camino que pase por todos las aristas exactamente *una* vez (camino eureliano).

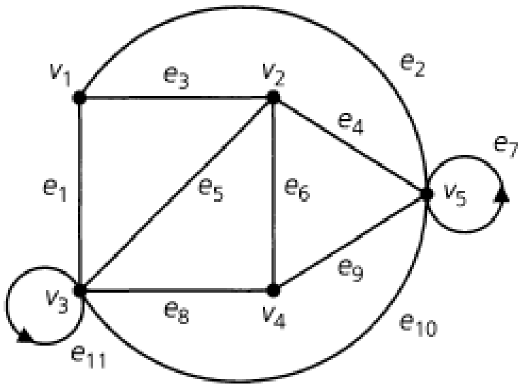


12. ¿Para qué valores de n el grafo K_n tiene un circuito eureliano?

13. El plano que se muestra a continuación es de el de un museo. ¿Es posible recorrerlo iniciando en la sala A, terminando en la sala B y pasando exactamente una vez por cada puerta interior del museo? Si es así determine la forma de recorrerlo.



14. Hallar las matrices de adyacencia e incidencia asociadas con el grafo de la figura.



15. Demostrar, utilizando inducción, que cualquier árbol con n vértices tiene $n-1$ aristas.

16. Sean $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ árboles tales que $\#E_1 = 17$ y $\#V_2 = 2\cdot\#V_1$. Determinar $\#V_1, \#V_2$ y $\#E_2$.

17. Dar un ejemplo de un grafo $G = (V, E)$ donde $\#V = \#E + 1$ pero G no es un árbol.

18. Dado el árbol de la siguiente figura,

a) ¿Qué vértices son hojas?

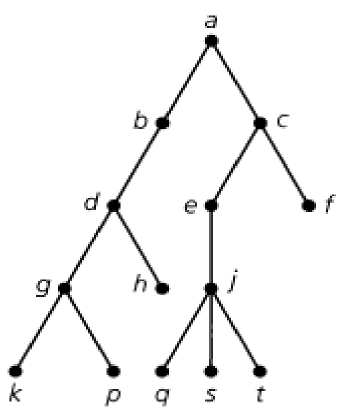
b) ¿Cuál es la raíz?

c) ¿Qué vértice es el padre de **g**?

d) ¿Qué vértices son hijos de **c**?

e) ¿Cuál es el nivel de **f**?

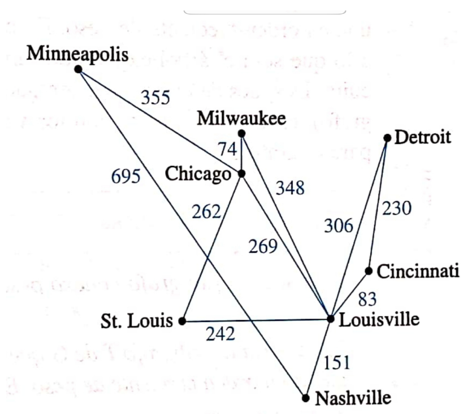
f) ¿Qué vértices tienen nivel 4?



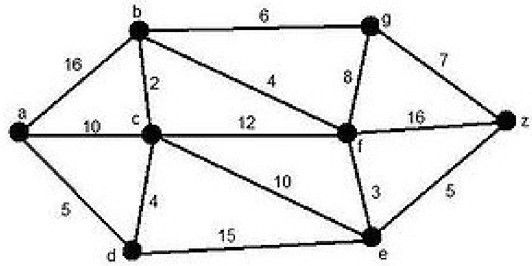
19. La tabla muestra las distancias entre 7 switchs. Representar el grafo ponderado que representa la situación e indicar cómo minimizar la cantidad de cable total para conectar los 7 switchs.

	O	A	B	C	D	E	T
O	×	2	5	4	×	×	×
A	2	×	2	×	7	×	×
B	5	2	×	1	4	3	×
C	4	×	1	×	×	4	×
D	×	7	4	×	×	1	5
E	×	×	3	4	1	×	7
T	×	×	×	×	5	7	×

20. Una compañía aérea quiere ampliar su servicio y ha recibido permiso para volar a cualquiera de las rutas que se muestran en la figura, con las respectivas distancias (en millas) entre cada par de ciudades. La compañía quiere llegar a todas las ciudades pero con un sistema de ruta que minimice el kilometraje total. ¿Qué rutas debería volar para reducir el kilometraje total del sistema?

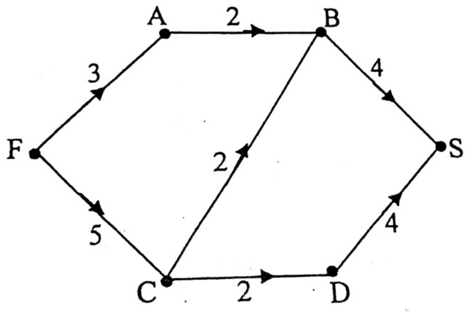


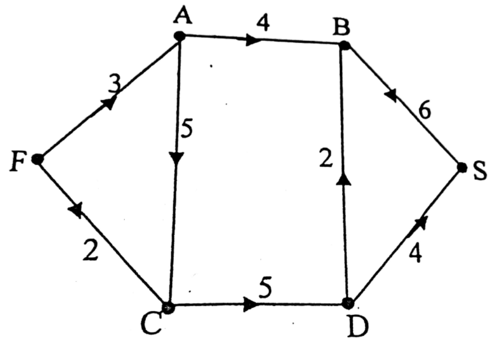
21. Hallar el camino más corto para ir desde a hasta z.

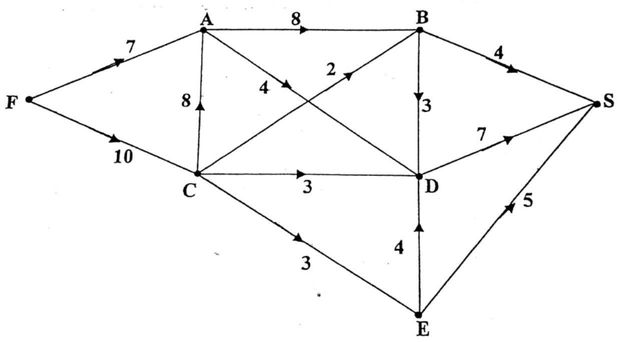


22. Utilizando los datos del ejercicio 19, pero considerando ahora que sólo nos interesa conectar los switchs O y T, determinar de que modo podría hacerse utilizando la menor cantidad de cable posible. Detallar el algoritmo utilizado.

23. Obtenga el flujo máximo compatible con cada una de las siguientes redes y halle, en cada caso, el corte minimal correspondiente:


A
2
B
3
4
F
S
2
5
4
C
2
D


A
4
B
3
6
5
F
2
S
2
4
5
C
D


A
8
B
7
4
2
4
F
8
3
S
7
10
C
3
D
5
4
3
E