Breve introducción a la Lógica Proposicional

Una proposición es un enunciado del cual podemos afirmar que es verdadero o bien falso

Para denotarlas se utilizan letras minúsculas p, q, r …

Ejemplos:

p: Marzo tiene 31 días

q: 4 es un número impar

El valor de verdad de p es verdadero.

El valor de verdad de q es falso.

Este tipo de proposiciones se llaman proposiciones **simples.**

Por otro lado, **no** son proposiciones enunciados como:

"¡Qué lindo día!"

"Estudien para el parcial"

A partir de proposiciones simples y **conectivos lógicos** se generan **proposiciones compuestas**.

Conectivos lógicos

❖ Negación:

Se nota: ~p

Se lee: no p

Su valor de verdad es opuesto al de p, esto se resume en la siguiente tabla:

p	~p
V	F
F	V

❖ Conjunción:

Se nota: p∧q

Se lee: p y q

Su valor de verdad será verdadero sólo cuando ambas proposiciones lo sean, lo resumimos en la siguiente tabla:

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

❖ Disyunción:

Se nota: p v q

Se lee: p o q

Su valor de verdad será falso sólo cuando ambas proposiciones lo sean, lo resumimos en la siguiente tabla:

p	q	pvq
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

❖ Condicional

Se nota: p → q

Se lee: si p entonces q (también puede decirse p es condición suficiente para q, q si p, p solo si q, q es condición necesaria para p)

En este caso se dice que p es el antecedente, y q el consecuente.

Se define mediante la siguiente tabla:

p	q	p→q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Podría parecer extraño los dos últimos renglones de la tabla, analicemos el siguiente ejemplo:

Ana le comenta a Pablo: "Si peso más de 65kg, voy a ir al gimnasio"

¿Qué situaciones podrían darse? ¿En cuál o cuáles estaría faltando a la verdad?

- ✓ En el primer caso las dos son verdaderas, es decir que Ana pesa más de 65 kg y va al gimnasio. En este caso Ana cumple con lo afirmado.
- ✓ En el segundo caso, Ana pesa más de 65 kg pero no va al gimnasio, así que no está cumpliendo lo afirmado.
- ✓ En el tercer y cuarto caso, el antecedente es falso así que Ana no pesa más de 65 kg. En un caso decide ir al gimnasio y en el otro no. ¿Cumplió Ana con lo afirmado? No podemos decir que es falso ya que la afirmación de Ana era en el caso de que pesará más de 65kg, ella no dice nada acerca de si esto no pasa.

Observación: El condicional puede ser verdadero o falso, cuando escribimos $p \Rightarrow q$ (p implica q) estamos afirmando que el condicional es verdadero, o sea que no sucede el caso que $p \rightarrow q$ sea falso. Por ejemplo, cuando afirmamos que derivabilidad implica continuidad ya que no puede darse el caso de una función que sea derivable y no continua.

❖ Bicondicional:

Se nota: $p \leftrightarrow q$

Se lee: p si y solo si q (también se dice p es condición necesaria y suficiente para q)

Es verdadero cuando los valores de verdad de las proposiciones coinciden. Su tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

❖ Disyunción excluyente:

Se nota: $p \underline{\vee} q$

Se lee: o bien p o bien q

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

En este caso no pueden darse ambas, por ejemplo, cuando se afirma:

Con este dinero me puedo comprar o una tele o un lavarropas. Pero no puedo comprar ambos.

Predicado o función proposicional

Analicemos el siguiente enunciado: "x es un número par", este enunciado no es una proposición ya que dependerá de quien sea x que sea verdadero o falso.

Ahora si le asignamos un valor a la x, por ejemplo "3 es un número par" sí es proposición y su valor de verdad es falso.

Diremos que p(x) es un predicado o función proposicional si para cada x en un cierto conjunto U (universo), se verifica que p(x) es proposición.

Por ejemplo, sea U= $\mathbb{Z}$, p(x): "x < 5"

En este caso p(1): "1 < 5" es una proposición verdadera.

En cambio p(8): "8 < 5" es una proposición falsa.

Otra forma de convertir un predicado en una proposición es utilizando cuantificadores.

Cuantificador Universal ⟶ $\forall\, x \in U : p(x)$ (se lee: para todo x)

Cuantificador Existencial ⟶ $\exists\, x \in U : p(x)$ (se lee: existe x)

Por ejemplo, consideremos: U=$\mathbb{Z}$, p(x): "2x+1=6"

Analicemos la proposición:

$\exists\, x \in U : p(x)$

En este caso falsa, ya que la igualdad se cumple para $x = \frac{5}{2}$ el cual no pertenece a $\mathbb{Z}$.

En cambio, si definimos como universo a los números racionales, la proposición es verdadera.

¿Cómo se niegan las afirmaciones anteriores?

Por ejemplo, si queremos negar la afirmación: Todos los alumnos aprobaron el parcial de matemática discreta. Si lo negamos entonces diríamos que será cierto que existe un alumno que no aprobó el examen.

En general:

$$\sim\left(\forall x \in U: p(x)\right) = \exists\, x \in U: \sim p(x)$$

$$\sim(\exists x \in U: p(x)) = \forall x \in U: \sim p(x)$$