Algoritmo 8.4.6

```
algor(w, a, z) {
  longitud = 0
  v = a
  T = conjunto de todos los vértices
  while(v ¬ = z) {
    T = T − {v}
    seleccionar x ∈ T con w(v, x) mínimo
    longitud = longitud + w(v, x)
    v = x
  }
  return longitud
}
```

11. ¿Falso o verdadero? El algoritmo 8.4.1 encuentra la longitud de una ruta más corta en una gráfica conexa ponderada incluso si algunos pesos son negativos. Si es verdadero, pruébelo; de otra manera, proporcione un contraejemplo.

8.5 ➜ Representaciones de gráficas

En las secciones anteriores se representó una gráfica con un dibujo. En ocasiones, como por ejemplo al usar una computadora para analizar una gráfica, se necesita una representación más formal. El primer método de representación de una gráfica usa la **matriz de adyacencia**.

Ejemplo 8.5.1 ▶

Matriz de adyacencia

Considere la gráfica de la figura 8.5.1. Para obtener la matriz de adyacencia de esta gráfica, primero se selecciona un orden de los vértices, por ejemplo, *a, b, c, d, e*. Después se etiquetan los renglones y columnas de una matriz con los vértices ordenados. El elemento en esta matriz en el renglón i y la columna j, $i \neq j$, es el número de aristas incidentes en i y j. Si $i = j$, el elemento es dos veces el número de ciclos que inciden en i. La matriz de adyacencia para esta gráfica es

WWW

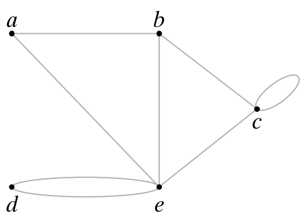


Figura 8.5.1 Gráfica para el ejemplo 8.5.1.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

◀

Observe que es posible obtener el grado de un vértice v en una gráfica G sumando el renglón v o la columna v en la matriz de adyacencia de G.

La matriz de adyacencia no es una manera muy eficiente para representar una gráfica. Como la matriz es simétrica respecto a la diagonal principal (los elementos en la línea de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha), la información aparece dos veces, excepto la de la diagonal principal.

Ejemplo 8.5.2 ▶

La matriz de adyacencia de la gráfica simple de la figura 8.5.2 es

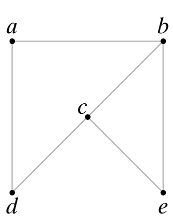


Figura 8.5.2 Gráfica para el ejemplo 8.5.2.

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

◀

Se demostrará que si A es la matriz de adyacencia de una gráfica simple G, las potencias de A,

$$A, A^2, A^3, \ldots,$$

cuentan el número de diferentes longitudes. De manera más precisa, si los vértices de G se etiquetan $1, 2, \ldots,$ el elemento ij de la matriz A^n es igual al número de trayectorias de i a j de longitud n. Por ejemplo, suponga que se eleva al cuadrado la matriz A del ejemplo 8.5.2

para obtener

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Considere el elemento del renglón a y la columna c en A^2, obtenido al multiplicar los elementos del renglón a por los de la columna c de la matriz A y sumarlos

$$a \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & b & & d & \end{array} \\ (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0) \end{array} \begin{array}{c} c \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ b \\ \\ d \\ \\ \end{array} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2.$$

La única manera de que aparezca un producto diferente de cero en esta suma es que los dos elementos que se multiplican sean 1. Esto ocurre si hay un vértice v cuyo elemento en el renglón a es 1 y cuyo elemento en la columna c es 1. En otras palabras, debe haber aristas de la forma (a, v) y (v, c). Estas aristas forman la trayectoria (a, v, c) de longitud 2 de a a c y cada trayectoria aumenta la suma en 1. En este ejemplo, la suma es 2 porque hay dos trayectorias

$$(a, b, c), \quad (a, d, c)$$

de longitud 2 de a a c. En general, el elemento en el renglón x y la columna y de la matriz A^2 es el número de trayectorias de longitud 2 del vértice x al vértice y.

Los elementos en la diagonal principal de A^2 dan los grados de los vértices (cuando se trata de una gráfica simple). Considere, por ejemplo, el vértice c. El grado de c es 3 ya que c es incidente en las tres aristas (c, b), (c, b) y (c, e). Pero cada una de estas aristas se puede convertir en una trayectoria de longitud 2 de c a c:

$$(c, b, c), \quad (c, d, c), \quad (c, e, c).$$

De manera similar, una trayectoria de longitud 2 de c a c define una arista incidente en c. Entonces, el número de trayectorias de longitud 2 de c a c es 3, el grado de c.

Ahora se usará inducción para demostrar que los elementos de la n-ésima potencia de una matriz de adyacencia dan el número de trayectorias de longitud n.

Teorema 8.5.3 *Si A es la matriz de adyacencia de una gráfica simple, el elemento ij de A^n es igual al número de trayectorias de longitud n del vértice i al vértice j, $n = 1, 2, \ldots$.*

Demostración Se usará inducción sobre n.

Si $n = 1$, A^1 es simplemente A. El elemento ij es 1 si hay una arista de i a j, que es una trayectoria de longitud 1, y 0 de otra manera. Entonces, el teorema se cumple si $n = 1$. Esto verifica el paso base.

Suponga que el teorema es cierto para n. Ahora

$$A^{n+1} = A^n A$$

de manera que el elemento i en A^{n+1} se obtiene al multiplicar por pares los elementos en el renglón i de A^n por los elementos en la columna k de A y sumarlos.

$$\begin{array}{rc} & \text{columna } k \text{ de } A \\ \text{renglón } i \text{ de } A^n \quad (s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_j,\ \ldots,\ s_m) & \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_j \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= s_1t_1 + s_2t_2 + \cdots + s_jt_j + \cdots + s_mt_m$$
$$= \text{elemento } ik \text{ de } A^{n+1}.$$

Por inducción, s_j da el número de trayectorias de longitud n de i a j en la gráfica G. Ahora t_j es 0 o 1. Si t_j es 0, no hay arista de j a k, por lo que hay $s_jt_j = 0$ trayectorias de longitud $n + 1$ de i a k, donde la última arista es (j, k). Si t_j es 1, hay una arista del vértice j al vértice k (figura 5.8.3). Como hay s_j trayectorias de longitud n del vértice i al vértice j, hay $s_jt_j = s_j$ trayectorias de longitud $n + 1$ de i a k, donde la última arista es (j, k) (figura 8.5.3). Al sumar sobre j se cuentan todas las trayectorias de longitud $n + 1$ de i a k. Entonces, el elemento ik en A^{n+1} da el número de trayectorias de longitud $n + 1$ de i a k, y esto verifica el paso inductivo.

Por el principio de inducción matemática, el teorema queda establecido.

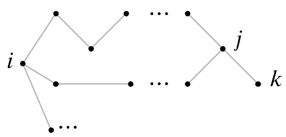


Figura 8.5.3 Prueba del Teorema 8.5.3. Una trayectoria de i a k de longitud $n + 1$ cuyo penúltimo vértice es j consiste en una trayectoria de longitud n de i a j seguida de la arista (j, k). Si hay s_j trayectorias de longitud n de i a j y t_j es 1 si la arista (i, k) existe y 0 de otra manera, la suma de s_jt_j sobre toda j da el número de trayectorias de longitud $n + 1$ de i a k.

Ejemplo 8.5.4 ▶

Después del ejemplo 8.5.2, se demostró que si A es la matriz de la gráfica de la figura 8.5.2, entonces

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Al multiplicar,

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

se encuentra que

$$A^4 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 9 & 3 & 11 & 1 & 6 \\ 3 & 15 & 7 & 11 & 8 \\ 11 & 7 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

El elemento en el renglón d y la columna e es 6, lo que significa que hay seis trayectorias de longitud 4 de d a e. Por inspección, se encuentra que son

$$(d, a, d, c, e), \quad (d, c, d, c, e), \quad (d, a, b, c, e),$$
$$(d, c, e, c, e), \quad (d, c, e, b, e), \quad (d, c, b, c, e).$$

◀

Otra representación matricial útil de una gráfica se conoce como **matriz de incidencia**.

Ejemplo 8.5.5 ▶

Matriz de incidencia

WWW

Para obtener la matriz de incidencia de la gráfica en la figura 8.5.4, se etiquetan los renglones con los vértices y las columnas con las aristas (en algún orden arbitrario). El elemento en el renglón v y la columna e es 1 si e es incidente en v, y 0 de otra manera. Entonces, la matriz de incidencia para la gráfica de la figura 8.5.4 es

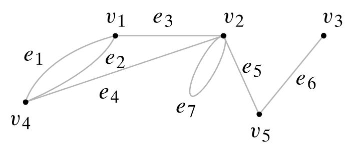


Figura 8.5.4 Gráfica para el ejemplo 8.5.5.

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Se entiende que una columna como e_7 representa un lazo. ◀

Observe que en una gráfica sin lazos cada columna tiene dos números 1 y que la suma de un renglón da el grado del vértice identificado con ese renglón.

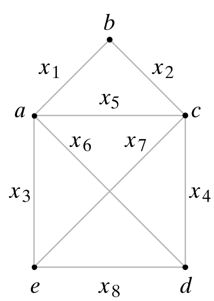
Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Qué es una matriz de adyacencia?
2. Si A es la matriz de adyacencia de una gráfica simple, ¿Cuáles son los valores de los elementos de A^n?
3. ¿Qué es una matriz de incidencia?

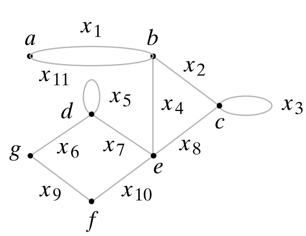
Ejercicios

En los ejercicios 1 al 6, escriba la matriz de adyacencia de cada gráfica.

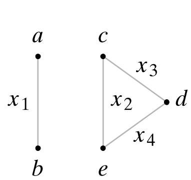
1.



2.



3.



4. La gráfica de la figura 8.2.2
5. La gráfica completa sobre cinco vértices K_5
6. La gráfica completa bipartita $K_{2,3}$

En los ejercicios 7 al 12, escriba la matriz de incidencia de cada gráfica.

7. La gráfica del ejercicio 1
8. La gráfica del ejercicio 2
9. La gráfica del ejercicio 3
10. La gráfica de la figura 8.2.1
11. La gráfica completa sobre cinco vértices K_5
12. La gráfica completa bipartita $K_{2,3}$

En los ejercicios 13 al 17, dibuje la gráfica representada por cada matriz de adyacencia.

13.
$$
\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c \\ d \\ e
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

14.
$$
\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c \\ d \\ e
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

15.
$$
\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

16.
$$
\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{pmatrix}
4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

17. La matriz de 7×7 cuyo elemento ij es 1 si $i + 1$ divide a $j + 1$ o $j + 1$ divide a $i + 1$, $i \neq j$; cuyo elemento ij es 2 si $i = j$, y cuyo elemento ij es 0 en otros casos.
18. Escriba la matriz de adyacencia de las componentes de las gráficas dadas por las matrices de adyacencia de los ejercicios 13 al 17.