Álgebra de Boole

Matemática Discreta – UCA
M. Julia Bolívar

Álgebra de Boole

Sea $B \neq \emptyset$, un conjunto que contiene 2 elementos especiales 0 y 1, sobre el cual se definen 2 operaciones binarias cerradas, la suma y el producto (+, $\cdot$), y una operación unaria el complemento $(-)$

$(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ es un álgebra de Boole si $\forall\, x, y, z \in B$ se cumple :

Axiomas

- $x + y = y + x$ $\qquad$ $xy = yx$ $\qquad$ *Conmutativa*
- $x(y + z) = xy + xz$ $\qquad$ $x + yz = (x + y)(x + z)$ $\qquad$ *Distributiva*
- $x + 0 = x$ $\qquad$ $x1 = x$ $\qquad$ *Neutros*
- $\forall\, x \in B,\ \exists\, \bar{x} \in B :\quad x + \bar{x} = 1,\quad x\bar{x} = 0$ $\qquad$ *Complemento*

Ejemplo 1

$B = \{0,1\}$, definimos la suma, el producto y el complemento en las siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{\overline{x}}$
0	1
1	0

$(B, +, \cdot\,, -, 0,1)$ es un álgebra de Boole

Ejemplo 2

$(D_6, +, \cdot, -, 1, 6)$ D_6 son los divisores positivos del 6

$Donde$: $x + y = mcm(x, y)$, $xy = mcd(x, y)$, $\bar{x} = \frac{6}{x}$

+	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

·	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

x	$\bar{x}$
1	6
2	3
3	2
6	1

Ejemplo 3

$(P(U),\ \cup,\ \cap,\ \emptyset,\ U)$ es un álgebra de Boole

Si por ejemplo $U = \{1,2\}$ $P(U) = \{\emptyset, U, \{1\}, \{2\}\}$ (es el conjunto de partes de un conjunto, el cual esta formado por todos los subconjuntos del conjunto)

Observación: El complemento es único

Demostración/

Sabemos que: $x+\bar{x}=1$ y $x\bar{x}=0$

Sea y tal que $x+y=1$ $xy=0$

$$\underset{(1)}{y=y1}\underset{(2)}{=}y(x+\bar{x})\underset{(3)}{=}yx+y\bar{x}\underset{(4)}{=}0+y\bar{x}=$$

$$\underset{(4)}{=}x\bar{x}+y\bar{x}\underset{(3)}{=}(x+y)\bar{x}\underset{(4)}{=}1\bar{x}\underset{(1)}{=}\bar{x}$$

$\Longrightarrow$ $y=\bar{x}$

(1) Neutro

(2) Complemento

(3) Distributiva

(4) Hipótesis

Leyes del Álgebra de Boole

1) $x + x = x$	$xx = x$	*Idempotencia*
2) $x + 1 = 1$	$x0 = 0$	*Acotación*
3) $x + xy = x$	$x(x + y) = x$	*Absorción*
4) $\bar{\bar{x}} = x$		*Involución*
5) $\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}$	$\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$	*Morgan*
6) $x + (y + z) = (x + y) + z$	$x(yz) = (xy)z$	*Asociativa*

Leyes del Álgebra de Boole

$7)\; x + y = x + z \quad \wedge \quad \bar{x} + y = \bar{x} + z \quad \rightarrow \quad y = z$

Cancelación

$xy = xz \quad \wedge \quad \bar{x}y = \bar{x}z \quad \rightarrow \quad y = z$

Principio de la Dualidad

El dual de una afirmación relacionada con expresiones de un álgebra de Boole se obtiene reemplazando el 0 por el 1, el 1 por el 0, $+$ por $\cdot$ y $\cdot$ por $+$

Principio de la Dualidad:

El dual de un teorema de un Álgebra de Boole también es un teorema

Ejercicio: Utilizando los axiomas demostrar las leyes de Idempotencia, Acotación, Absorción y Morgan

1) $x + x = x$ $\qquad xx = x$ $\qquad \textit{Idempotencia}$

Complemento

$$x = x + 0 = x + x\bar{x} = (x + x)(x + \bar{x}) = (x + x)1 = x + x$$

Neutro

Distributiva

Complemento

Neutro

Acotación

$(x+1)(x+\bar{x})$

$(x+1)1$

$x+1\bar{x}$

$x+1$

1

Absorción

$x1$

$x + xy$

1

$x(1 + y)$

Morgan $\overline{x+y} = \bar{x}\bar{y}$

Quiero ver que
$$\begin{cases} x + y + \bar{x}\bar{y} = 1 & 1 \\ (x+y)\bar{x}\bar{y} = 0 & 2 \end{cases}$$

1 $x + y + \bar{x}\bar{y} =$

2 $(x+y)\bar{x}\bar{y} =$

Ej 1) Simplificar las sig expresiones:

i) $b(a+c)+\bar{a}c+aa$

ii) $[x\bar{y}+z(\bar{x}+y)](y+z)$

iii) $\overline{(\bar{x}y)(xz)}\,(x+x\bar{y})\,\overline{(\bar{x}+y)}$

Ej 2) Dar un contraejemplo para probar que las sig afirmaciones son falsas en un álgebra de Boole

a) $x+z=y+z \Rightarrow y=x$

b) $xz=yz \Rightarrow x=y$

c) $xy=0 \Rightarrow x=0$ ó $y=0$