PRÁCTICA 2 – RELACIONES Y NÚMEROS ENTEROS

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, analice si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/ o transitivas. ¿Alguna es de equivalencia? ¿Alguna es de orden?

a) $R_1 = \{(1, 1), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 2)\}$

b) $R_2 = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

c) $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

d) En Z: $x\ R\ y\ sii\ x \mid y$ (“x divide a y”)

e) En N: $x\ R\ y\ sii\ x \mid y$

f) En Z: $x\ R\ y\ sii\ x^2 \leqslant y^2$

g) En Z: $x\ R\ y\ sii\ x^2 = y^2$

h) En $B = \{r/r$ es una recta en el plano$\}$, $r_1 R\ r_2\ sii\ r_1//r_2$

2. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$

a) $a \mid b$ y $a \mid c \Rightarrow a \mid b + c$

b) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$

c) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a + b \mid c$

d) $a \mid b \Rightarrow a \mid b \cdot c$

e) $a \cdot b \mid c \Rightarrow a \mid c$ y $b \mid c$

f) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$

g) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$

h) $a \mid b$ y $b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$

i) $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$

j) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

a) $99 \mid 10^{2n} + 197$,

b) $9 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1}$,

c) $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$,

d) $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$.

4. Probar que para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 1$, y para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que: $a - 1 \mid a^n - 1$

5. Calcular el cociente y el resto de la división de a por b en los casos

a) $a = 133, \quad b = -14$

b) $a = 13, \quad b = 111$

c) $a = -3, \quad b = 7$

d) $a = 5, \quad b = -3$

6. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de

a) la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18,

b) la división de a por 3,

c) la división de $4a + 1$ por 9,

d) la división de $a^2 + 7$ por 36,

7. En cada uno de los siguientes casos calcular el máximo común divisor entre a y b y escribirlo como combinación lineal entera de a y b:

a) $a = 2532, b = 63$, b) $a = 5335, b = 110$, c) $a = 131, b = 23$.

8. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabiendo que el resto de dividir a a por b es 27 y que el resto de dividir b por 27 es 21, calcular $mcd(a, b)$.

9. Sea R la relacion en $\mathbb{Z}$ definida por $aRb\ sii\ a \equiv b\ (3)$, demostrar que R es una relacion de equivalencia. Dar las clases de equivalencia.

10. a) Si $a \equiv 22\ (14)$, hallar el resto de dividir a a por 14, por 2 y por 7.

b) Si $a \equiv 13\ (5)$, hallar el resto de dividir a $33a^3 + 3a^2 - 197a + 2$ por 5.

11. a) Probar que $2^{5n} \equiv 1\ (31)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Hallar el resto de la división de 2^{51833} por 31.

c) Calcular el resto de dividir por 5 a $166^{1328}.4878 + 199999$

d) Calcular el resto de dividir por 35 a $34^{17771} - 6^{1001}$

Rtas: b) El resto es 8; c) El resto es 2; d) El resto es 28

12. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 125, \quad a_{n+1} = 25^{3n} + 2^{23} + 23 + a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv n\ (31)$.

13. Hallar, cuando existan, todas las soluciones de las siguientes ecuaciones de congruencia

a) $17X \equiv 3\ (11)$, b) $56X \equiv 28\ (35)$, c) $9X \equiv 2\ (15)$, d) $33X \equiv 27\ (45)$.

14. Hallar, cuando existan, todos los enteros a que satisfacen simultáneamente:

a) $\begin{cases} a \equiv 1 & (3) \\ a \equiv 2 & (5) \\ a \equiv 3 & (7) \end{cases}$ $\begin{cases} a \equiv 0 & (8) \\ a \equiv 2 & (5) \\ a \equiv 1 & (21) \end{cases}$ b) $\begin{cases} a \equiv 3 & (10) \\ a \equiv 2 & (7) \\ a \equiv 5 & (9) \end{cases}$ c) $\begin{cases} a \equiv 1 & (6) \\ a \equiv 2 & (20) \\ a \equiv 3 & (9) \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3\,a \equiv 4 & (5) \\ 5\,a \equiv 4 & (6) \\ 6\,a \equiv 2 & (7) \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3\,a \equiv 1 & (10) \\ 5\,a \equiv 3 & (3) \\ 9\,a \equiv 1 & (7) \end{cases}$ g) $\begin{cases} 4\,a \equiv 2 & (9) \\ 3\,a \equiv 5 & (14) \\ 3\,a \equiv 1 & (20) \end{cases}$

15. a) Hallar el menor entero positivo a tal que el resto de la división de a por 21 es 13 y el resto de la división de $6a$ por 15 es 9.

b) Hallar un entero a entre 60 y 90 tal que el resto de la división de $2a$ por 3 es 1 y el resto de la división de $7a$ por 10 es 8.

16. Trece ladrones roban 1000 monedas de oro. Mientras se escapan pierden parte del botín. Ya en la guarida reparten las monedas entre los 13 y sobran 11. Pretendiendo "que no sobren" monedas, echan a 2 ladrones (con las manos vacías) y distribuyen de nuevo entre los 11 restantes. Como sobran 7 monedas, echan a 4 y vuelven a repartir entre 7, pero sobra 1 moneda. ¿Cuántas monedas perdieron mientras escapaban?

17. Hallar el resto de la división de a por p en los casos

a) $a = 33^{1427}$, $p = 5$,

b) $a = 71^{22283}$, $p = 11$,

c) $a = 5 \cdot 7^{2451} + 3 \cdot 65^{2345} - 23 \cdot 8^{138}$, $p = 13$.

18. Resolver en $\mathbb{Z}$ las ecuaciones de congruencia

a) $7^{13}X \equiv 5\ (11)$,

b) $2^{194}X \equiv 7\ (97)$.