PRÁCTICA 1: PRINCIPIO DE INDUCCIÓN Y RELACIONES DE RECURRENCIA

1. Probar utilizando el principio de inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ si $q \neq 1$

e) $\sum_{i=1}^{n} (2i+1)\,3^{i-1} = n\,3^n$

f) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

2. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $8^n - 5^n$ es divisible por 3

b) $10^{n+1} + 10^n + 1$ es divisible por 3

c) 133 divide a $11^{n+2} + 12^{2n+1}$

d) $2^{2n} - 1$ es divisible por 3

e) $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ es divisible por 111

f) $x^n - y^n$ es divisible por $x - y$

3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $n!$ recursivamente, sabiendo que

$$0! = 1, \quad 1! = 1 \text{ y } (n+1)! = (n+1)n!$$

Probar para todo $n \in \mathbb{N}$ que $n! \geqslant 2^{n-1}$

4. Pruebe que la suma de los cubos de tres naturales consecutivos es múltiplo de 9.

5. Considere la siguiente proposición $p(n) : n^2 + 5n + 1$ es par

a) Demuestre que si $p(n)$ es verdadera, entonces $p(n+1)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$

b) ¿Para qué valores de n es $p(n)$ efectivamente verdadera? ¿Qué puede concluir?

6. Decidir para qué valores de n son verdaderas cada una de las siguientes desigualdades y demostrarlas en cada caso:

a) $3n < n^2 - 1$

b) $4n < n^2 - 7$

c) $(2n)! > 8^{n-1} n^2$

7. Probar, utilizando el principio de inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geqslant \sqrt{n}$

b) $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$, $\alpha \geqslant -1$

c) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

d) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} > \frac{1}{2}$, $n \geqslant 2$

8. Probar que

a) $3^n + 5^n \geqslant 2^{n+1}$, $\forall\, n \geqslant 1$

b) $2n + 1 < 2^n$, $\forall\, n \geqslant 3$

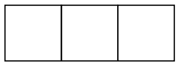
c) $n! \geqslant 3^{n-1}$, $\forall\, n \geqslant 5$

d) $n! > n^2$, $\forall\, n \geqslant 4$

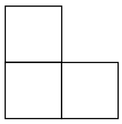
9. Probar que, la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono convexo es igual al número de lados menos 2 multiplicado por 180.

10. La palabra poliominó, es una generalización de dominó, que fue introducida por Salomón Golomb en 1954 cuando era un estudiante de 22 años en Harvard. Posteriormente, él y otros probaron muchas propiedades interesantes acerca de ellos y se convirtieron en la base para el popular juego de computadora Tetris. Un tipo particular de poliominó, llamado tromino, consiste de tres cuadrados juntos, que pueden ser de dos tipos:

En línea recta:



En forma de L:



Demostrar que, para cualquier natural, si se quita un cuadrado de un tablero de $\mathbf{2}^n \times \mathbf{2}^n$, los cuadrados restantes pueden ser completamente cubiertos por trominos en forma de L.

11. Probar, que para todo $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$ se cumple:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

c) $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, $\forall\, n \geqslant 1$ (Deducir del ítem c)

12. Probar que, puede pagarse, sin requerir cambio, cualquier artículo de precio mayor que \$ 3, usando sólo billetes de \$ 2 y \$ 5.

13. Se define una sucesión de la siguiente manera: $a_0 = 0,\ a_1 = 4,\ a_k = 6a_{k-1} - 5a_{k-2}$ para todo $k \geqslant 2$. Demostrar que los términos de la sucesión satisfacen $a_n = 5^n - 1$ para todo $n \geqslant 0$.

14. Una persona invierte \$10000 al 12 % de interés anual. Sea a_n el monto de dinero que posee al cabo de n años completos, si no ha hecho retiros. Obtenga una relación de recurrencia y una condición inicial para la sucesión a_n.

15. Un robot puede avanzar en pasos de 1 o 2 metros de longitud. Sea C_n el número de modos diferentes en que el robot puede caminar n metros. Encuentre una relación de recurrencia para C_n y las correspondientes condiciones iniciales.

16. Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y sea S_n el número de "palabras" de longitud n que se pueden formar con los elementos de A de modo que no tengan "aes" consecutivas (considere que la palabra vacía es una palabra). Obtenga una fórmula recursiva para S_n

17. Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia lineales homogéneas de coeficientes constantes:

a) $a_0 = 1, \quad a_{n+1} + 2a_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

b) $a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 3\,a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

c) $a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 3\,a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

d) $a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 6\,a_{n+1} - 9\,a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

e) $a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+2} = 3\,a_{n+1} - 2\,a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

f) $a_0 = 0, \quad a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 4\,a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

g) $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4 \quad a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 4\,a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ (y si fuera $a_2 = 3$?)

h) $a_0 = 1, \quad a_1 = 4, \quad a_{n+2} = 2\,a_{n+1} - a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

i) $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} - 2\,a_{n+1} + 2\,a_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

18. Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia lineales no homogéneas de coeficientes constantes:

a) $a_0 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 2n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

b) $a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad 2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5, \ \forall n \in \mathbb{N}$

c) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + 8, \ \forall n \in \mathbb{N}$

d) $a_0 = 7, a_1 = 12, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 42, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

e) $a_0 = 1, a_1 = 5, \quad a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3n - 4, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

f) $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} + 3\,a_{n+1} + 2\,a_n = 3^n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

g) $a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+2} + 4\,a_{n+1} + 4\,a_n = 5(-2)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

19. Probar que, para todo $n \geqslant 3$, la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

20. Hay 3^n palabras de longitud n que pueden construirse con un alfabeto de tres letras a, b, c. ¿Cúantas tienen una cantidad impar de letras b?

Rta: $x_n = (3^n - 1)/2$ palabras

21. Construir, siempre que exista, una ecuación de recurrencia $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = c_n$, que encuentre a las sucesiones dadas entre sus soluciones y determinar una solución que satisfaga la condición dada.

a) $u_n = 3^n + 2^n, v_n = 3^n + 1, w_n = 3^n, \quad x_0 = 3, \quad x_1 = 6$

b) $u_n = n(1 + 2^n), v_n = n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1$

Rta: a) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2.3^n, \ x_n = 1 + 2^n + 3^n$; b) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n - 2, \ x_n = (1 - n)2^n + n$

22. Encuentre y resuelva una relación de recurrencia para el número de sucesiones binarias de longitud n que no tienen ceros consecutivos.