Relaciones de Recurrencia

M. Julia Bolívar

Recursión: Una definición es recursiva si hace referencia a ella misma.

Por ejemplo, hemos definido el factorial como:

$0! = 1 \qquad n! \ = n(n-1)! \quad para\ n \geq 1$

Definición: Una **relación de recurrencia** para una sucesión a_n es una fórmula que relaciona que relaciona cada término a_n con alguno o algunos de sus predecesores. Los valores de los primeros términos necesarios para empezar a calcular se llaman condiciones iniciales.

Ejemplo:

Una persona invierte \$10000 al 10% de interés anual. Sea $\mathrm{a_n}$ la cantidad de dinero que posee al cabo de n años si no ha realizado retiros, dar una relación de recurrencia para $\mathrm{a_n}$.

Inicialmente la persona posee \$10000, así que: $a_0 = 10000$ (esta sería la condición inicial)

Al cabo de 1 año ¿cuánto dinero tendrá? a_1 será $10000 + \frac{10}{100}10000$

Generalizando esto, al cabo de n años tendrá lo que tenía el año anterior, o sea a_{n-1} más el 10 % de ese monto, así que:

$$a_0 = 10000$$

$$a_n = a_{n-1} + \frac{10}{100}a_{n-1} \qquad n \geq 1$$

Podemos escribir de forma más compacta (sacando factor común a_{n-1}):

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 10000 \\ a_n = a_{n-1}(1{,}1) \qquad n \geq 1 \end{array}\right\} \text{Relación de recurrencia para la sucesión } \mathrm{a_n}$$

Diremos que **resolver** una ecuación de recurrencia es encontrar la fórmula explícita para la sucesión.

Veamos si en el ejemplo anterior podemos encontrar la forma explícita, notemos que esta forma es en algún sentido más práctica. Por ejemplo, si yo quisiera saber cuánto dinero tiene al cabo de 5 años, ¿qué debería hacer?

$$a_5 = (1{,}1)a_4 = (1{,}1)(1{,}1)a_3 = (1{,}1)^2a_3 = (1{,}1)^3a_2 = (1{,}1)^4a_1 = (1{,}1)^5a_0$$

O sea que al cabo de 5 años, sería: $(1{,}1)^5a_0 = 16105{,}1$

En definitiva, de los cálculos realizados podemos intuir que la fórmula general para la sucesión es:

$a_n = (1{,}1)^n 10000 \qquad con\ n \geq 0$

Pero ojo esto es sólo una suposición, para poder estar seguros de ello deberíamos probarlo utilizando inducción, veamos:

Sabemos que: $a_0 = 10000$

$a_n = a_{n-1}(1{,}1) \qquad n \geq 1$

Queremos probar que la forma explícita para la sucesión es: $a_n = (1{,}1)^n 10000 \qquad con\ n \geq 0$

PB) Veamos que vale para $n = 0$

$$a_0 = (1{,}1)^0 10000 = 10000$$

PI) $\forall\ k \geq 0$: $a_k = (1{,}1)^k 10000 \ \rightarrow \ a_{k+1} = (1{,}1)^{k+1} 10000$

$$a_{k+1} \underset{\text{Por definición}}{=} a_k(1{,}1) \underset{\text{Por HI}}{=} (1{,}1)^k 10000\,(1{,}1) = (1{,}1)^{k+1} 10000$$

Hemos llegado a lo que queríamos probar.

El ejemplo anterior nos conduce al siguiente resultado:

La solución general de la relación de recurrencia

$a_{n+1} = d a_n \qquad donde\ n \geq 0 \qquad d\ constante \qquad a_0 = A$

Es única y está dada por $a_n = A d^n$, $\quad n \geq 0$

Ejercicio: Probar el resultado anterior por inducción matemática.

La relación de recurrencia $a_{n+1} = da_n$ (o lo que es lo mismo $a_{n+1} - da_n = 0$) es lineal ya que cada término con subíndice aparece elevado a la uno y es homogénea debido a que está igualada a 0. Diremos que es de orden 1, ya que a_n está en función de un término anterior.

Relaciones de recurrencia lineales homogéneas

Llamamos **relación de recurrencia** homogénea lineal de orden k, con coeficientes constantes a una relación de la forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

$$a_0 = A_0$$

$$a_1 = A_1$$

$$.$$

$$.$$

$$a_{k-1} = A_{k-1}$$

Donde $c_i \in \mathbb{R} \quad para\ 1 \leq i \leq k; \quad A_j \in \mathbb{R} \quad para \ \ 0 \leq j \leq k-1$

Teorema: Dada la recurrencia lineal homogénea lineal de segundo orden con coeficientes constantes:

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ ó $a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} = 0$

a) Si S_n y T_n son soluciones de la ecuación entonces $U_n = aS_n + bT_n$ también es solución.
b) Si r es raíz de la ecuación $t^2 - c_1 t - c_2 = 0$ entonces r^n es solución de la ecuación.
c) Sea a_n una solución de la ecuación y si $r_1 \neq r_2$ son raíces de $t^2 - c_1 t - c_2 = 0$, entonces existen constantes $a\ y\ b$ tales que $a_n = a{r_1}^n + b{r_2}^n \quad \forall\, n \geq 0$

Para resolver la ecuación lineal homogénea de segundo orden, buscaremos las raíces de la **ecuación característica** $t^2 - c_1 t - c_2 = 0$ asociada a la ecuación de recurrencia.

Pueden darse tres casos:

- ✓ Tenga dos raíces reales distintas, en ese caso la solución general será de la forma:
$$a_n = a{r_1}^n + b{r_2}^n$$

- ✓ Tenga raíz real doble, en ese caso la solución general será de la forma
$$a_n = a{r_1}^n + bn{r_1}^n$$

- ✓ Tenga raíces complejas conjugadas en ese caso debe usarse el Teorema de De Moivre (no veremos este caso este cuatrimestre)

Con las condiciones iniciales podremos hallar los valores de las constantes $a\ y\ b$.

Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia:

1) $a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \qquad a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad n \geq 2$

La ecuación característica en este caso es: $r^2 + r - 6 = 0$, sus raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = -3$

Entonces la solución general será de la forma:

$$a_n = a2^n + b(-3)^n$$

Obtenemos a y b usando las condiciones iniciales:

$$a_0 = a2^0 + b(-3)^0 = 1$$

$$a_1 = a2^1 + b(-3)^1 = 2$$

Nos queda el siguiente sistema con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a - 3b = 2 \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos que: $a = 1, \quad b = 0$

Así que: $a_n = 2^n \qquad n \geq 0$

2) $a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \qquad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad n \geq 0$

La ecuación característica en este caso es: $r^2 - 4r + 4 = 0$, tiene una sola raíz real doble

$r_1 = 2$

Entonces la solución general será de la forma:

$$a_n = a2^n + bn2^n$$

Obtenemos a y b usando las condiciones iniciales:

$$a_0 = a2^0 + b02^0 = 1$$

$$a_1 = a2^1 + b2^1 = 3$$

Nos queda el siguiente sistema con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a + 0 = 1 \\ 2a + 2b = 3 \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos que: $a = 1, \quad b = \frac{1}{2}$

Así que: $a_n = 2^n + \frac{1}{2}n2^n \qquad n \geq 0$

Relaciones de recurrencia lineales no homogéneas

Son de la forma:

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} = f(n)$$

$$a_0 = A_0$$

$$a_1 = A_1$$

Para resolver usaremos el siguiente resultado:

Sea a_n^h la solución general de la ecuación homogénea asociada y sea a_n^p una solución particular de la ecuación no homogénea, entonces:

$a_n = a_n^h + a_n^p$ es la solución general de la relación dada.

Para obtener a_n^p se propone algo similar a $f(n)$ según la siguiente tabla:

$f(n)$	a_n^p
C	A
n^t	$A_n n^t + A_{n-1} n^{t-1} + \cdots A_1 t + A_0$ (polinomio genérico de grado t)
r^n	Ar^n

Si fuese combinación lineal de alguna de las $f(n)$ se propone combinación lineal de las propuestas.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE:

Si algún sumando de la a_n^p propuesta es múltiplo del homogéneo debemos multiplicar a_n^p correspondiente por la mínima potencia de n (n^s) para la cual ningún sumando sea solución del homogéneo asociado.

Ejemplos

1) $a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \qquad a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 4^n \qquad n \geq 0$

Primero buscamos las raíces de la ecuación característica, que es $r^2 + r - 6 = 0$, en este caso son $r_1 = 2$ y $r_2 = -3$.

$a_n^h = A2^n + B(-3)^n$

Proponemos $a_n^p = C4^n$ y reemplazamos en la ecuación:

$$C4^{n+2} + C4^{n+1} - 6C4^n = 4^n$$

$$(C16 + C4 - 6C)4^n = 4^n$$

$$14C4^n = 4^n$$

$$14C = 1$$

$$C = \frac{1}{14}$$

$$a_n = A2^n + B(-3)^n + \frac{1}{14}4^n$$

Ahora hay que buscar $A\ y\ B$ utilizando las condiciones iniciales:

$$a_0 = A + B + \frac{1}{14} = 1$$

$$a_1 = A2^1 + B(-3)^1 + \frac{1}{14}4^1 = 2$$

Resolviendo el sistema, obtenemos que:

$a_n = \frac{9}{10}2^n + \frac{1}{35}(-3)^n + \frac{1}{14}4^n \qquad n \geq 0$

2) $a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \qquad a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 2^n \qquad n \geq 0$

En este caso veamos que la ecuación característica queda igual que en el ejercicio anterior, lo que cambia es $f(n)$.

Entonces:

$a_n^h = A2^n + B(-3)^n$

El tema es que $a_n^p = C2^n$ queda en este caso múltiplo del homogéneo, con lo cual esta propuesta no servirá, ¿Por qué? Los invito a reemplazar en la ecuación y ver qué sucede.

Entonces la solución particular propuesta será:

$$a_n^p = Cn2^n$$

Ahora sí reemplazamos en la ecuación:

$$C(n+2)2^{n+2} + C(n+1)2^{n+1} - 6Cn2^n = 2^n$$

$$[C(n+2)4 + C(n+1)2 - 6Cn]2^n = 2^n$$

$$(Cn4 + C8 + Cn2 + C2 - 6Cn)2^n = 2^n$$

$$Cn4 + C8 + Cn2 + C2 - 6Cn = 1$$

$$C10 = 1$$

$$C = \frac{1}{10}$$

Así que: $a_n = A2^n + B(-3)^n + \frac{1}{10}n2^n$

Ahora faltaría buscar A y B utilizando las condiciones iniciales, se los dejo como ejercicio.