Relaciones

M. Julia Bolívar

Definición

Sean A, B conjuntos. El producto cartesiano de A con B, que se nota $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados:

$$A \times B = \{(x, y): \ x \in A, \ \ y \in B\}$$

Ejemplo:

$$A = \{1,2\}, \qquad B = \{a, b\}$$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

Definición

Sean A, B conjuntos. Una relación R de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$

Ejemplos:

1) $A = \mathbb{N}, \quad B = \mathbb{N}, \quad R_1 = \{(1,2), (1,3), (2,1)\}$

2) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \quad x < y\}$

En este caso hay infinitos pares que pertenecen a la relación. Por ejemplo decimos que $(1,2) \in R_2$.

También diremos que $1R_2 2$.

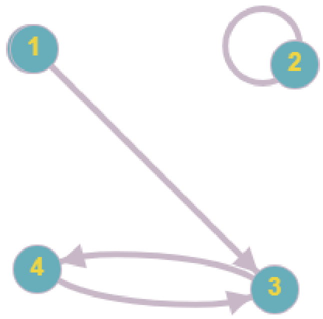
3) $A = B \ = \ \{1,2,3,4\} \ \ , R_3 = \{(1,3), (2,2), (3,4), (4,3)\}$

Relaciones en un conjunto

Sean A un conjunto. Se dice que R es una relación en A cuando $R \subseteq A \times A$

Cuando el conjunto es finito la relación puede representarse con un grafo dirigido (dígrafo), es decir, un conjunto de vértices y flechas entre ellos que indican quienes se relacionan y como (si el par (x, y) pertenece a la relación habrá una flecha que vaya de x a y.

Por ejemplo representamos R_3 con un dígrafo:



Clasificación de Relaciones:

R una relación en un conjunto A, se dice que:

- R es **reflexiva** si $\forall\, x \in A$: $\quad x\, R\, x$
- R es **simétrica** si $\forall\, x, y\ \in A$: $(x\, R\, y\ \rightarrow y\, R\, x)$
- R es **antisimétrica** si $\forall\, x, y\ \in A$: $(x\, R\, y \wedge y\, R\, x\ \rightarrow x = y)$
- R es **transitiva** si $\forall\, x, y, z \in A$: $(x\, R\, y \wedge y\, R\, z\ \rightarrow x\, R\, z)$

Se dice que R en A es una relación de **equivalencia** cuando es reflexiva, simétrica y transitiva

Se dice que R en A es una relación de **orden** cuando es reflexiva, antisimétrica y transitiva

Ejemplos:

1) $A = \{1,2,3\} \qquad R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3)\}$

Es reflexiva, ya que $(1,1), (2,2), (3,3) \in R$.

No es simétrica, ya que $(1,3) \in R$ pero $(3,1)$ no pertenece a R.

Es antisimétrica (observen que no hay ningún par que haga que el antecedente sea verdadero, con lo cual si el antecedente es falso el condicional es verdadero).

Es transitiva, debemos que ver que se cumple para todos los casos posibles, pero los que hagan el antecedente falso sabemos que hacen que el condicional sea verdadero, con lo cual los casos que hay que observar son los que hacen al antecedente verdadero:

$(1,1) \in R \wedge (1,3) \in R \ \rightarrow (1,3) \in R$

$(1,3) \in R \wedge (3,3) \in R \ \rightarrow (1,3) \in R$

Así que es una relación de orden.

2) $A = \mathbb{R} : \ x\,R\,y \quad si\ y\ solo\ si \quad x^2 = y^2$

¿Es reflexiva? El enunciado $\forall\, x \in \mathbb{R} : \ x^2 = x^2$ es verdadero por la reflexividad de la igualdad así que es reflexiva.

¿Es simétrica? El enunciado $\forall\, x, y \ \in \mathbb{R} : \ x^2 = y^2 \rightarrow y^2 = x^2$ es verdadero por la simetría de la igualdad, así que es simétrica.

¿Es transitiva? Nuevamente el enunciado $\forall\, x, y, z \ \in \mathbb{R} : \ x^2 = y^2 \ \wedge \ y^2 = z^2 \ \rightarrow \ x^2 = z^2$ es verdadero por la transitividad de la igualdad.

Así que la relación dada es una relación de equivalencia.

¿Es antisimétrica? El enunciado $\forall\, x, y \ \in \mathbb{R} : \ x^2 = y^2 \ \wedge \ y^2 = x^2 \ \rightarrow \ x = y$, ¿es verdadero?

No, por ejemplo tomando $x = 2$ y $x = -2$:

$2^2 = (-2)^2 \ \wedge \ (-2) = 2^2$ pero $2 \neq -2$

Las Relaciones de equivalencia funcionan de algún modo como una generalización de la igualdad ya que clasifican a los elementos del conjunto según algún atributo o característica especial.

Por ejemplo, podemos pensar la relación en el conjunto de los habitantes del país definida por:

$H_1\ R\ H_2$ si y solo si el último número de DNI es el mismo.

En algún sentido todos los habitantes cuyo DNI termina con 1 pasarían a estar en el mismo conjunto o “ser iguales” para esta relación. Vamos a decir que pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Clase de equivalencia:

$\bar{a} = [a] = \{x \in A: \quad x\ R\ a\}$ (se lee “la clase de a")

Es decir en la clase de equivalencia de a están todos los elementos que se relacionan con a.

En el ejemplo 2)

$[2] = \{2, -2\}$

$[3] = \{3, -3\}$

Conjunto Cociente:

Dada una relación R de equivalencia definida en un conjunto A, llamaremos conjunto cociente al conjunto formado por todas las clases de equivalencia:

$$\frac{A}{R} = \{[a] : a \in A\}$$

Una **partición** de un conjunto A es un conjunto finito o infinito de subconjuntos no vacíos, mutuamente disjuntos, cuya unión es A.

Las clases de equivalencia forman una partición del conjunto original.