Principio de Inducción Matemática Fuerte

M. Julia Bolívar

El principio de inducción fuerte es similar al principio de inducción que hemos visto hasta ahora, el objetivo es el mismo demostrar la validez de una afirmación acerca de los números naturales. Sin embargo, difieren en que el paso básico ahora podrá tener varios valores iniciales, y en el paso inductivo la hipótesis considerará que la proposición no solo es verdadera para k sino también para todos los anteriores. Es decir la hipótesis inductiva será que $P(a)$, $P(a+1) \ldots\ldots P(k)$ son todas verdaderas.

Sea $P(n)$ una función proposicional definida en $\mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$, si:

PB) $P(a), P(a+1), \ldots\ldots P(a+j)$ son todas verdaderas

PI) $\forall k \geq a+j, \quad si\ P(i)$ es verdadera para $i \in [a,k] \rightarrow P(k+1)$ es verdadera

Entonces el enunciado $\forall n \geq a$: $P(n)$ es verdadero

Ejemplos:

1) Se define una sucesión a_n de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_1 &= 7 \\ a_{n+1} &= 3a_n - 2a_{n-1} \quad para\ n \geq 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Demostrar que $a_n = 2^{n+2} - 1 \quad para\ n \geq 0$ (2)

Antes de comenzar la demostración voy a aclarar algunas cosas, la sucesión mencionada en (1) esta descripta en forma **recursiva**, en ella se define un término en función de los anteriores, por ejemplo con la información que nos dan podríamos calcular a_2 , ¿qué cuenta habría que hacer?

Nos dicen $a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3.7 - 2.3 = 21 - 6 = 15.$

¿Con esta expresión podríamos calcular el a_5?

Sí, lo complicado de tener una sucesión descripta de esta forma es que siempre necesitamos conocer los términos anteriores para poder encontrar un término dado, por ejemplo en el caso del a_5 necesitaríamos calcular antes el a_4 y el a_3.

Por otro lado, una sucesión la podemos tener expresada en forma explícita, esto parece ser mucho más práctico ya que en ese caso cada término puedo obtenerlo, rápidamente, por ejemplo, si reemplazo en (2) $a_2 = 2^{2+2} - 1 = 16 - 1 = 15$, en este caso no necesito conocer los términos anteriores así que podría calcular a_5 rápidamente.

Bueno volvamos a lo que pide el ejercicio, en el mismo nos dan la sucesión definida de forma recursiva (1) y nos piden probar que su forma explícita es (2)

Es decir queremos probar que $\forall\, n \geq 0 :\ a_n = 2^{n+2} - 1$

PB) Veremos que vale para $n = 0$ y $n = 1$

$a_0 = 2^{0+2} - 1 = 4 - 1 = 3$ $\qquad$ $a_1 = 2^{1+2} - 1 = 8 - 1 = 7$

PI) $\forall\, k \geq 1$: $si\ P(i)\ es\ verdadera\ para\ i\ \in [0, k]\ \rightarrow P(k+1)\ es\ verdadera$

$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} \quad = 3(2^{k+2} - 1) - 2(2^{k-1+2} - 1) =$

Por definición

HI) Como $k + 1 \geq 2$, entonces $k \geq 1$ y $k - 1 \geq 0$, así que ambos pertenecen al intervalo $[0, k]$

$= 3.2^k.4 - 3 - 2.2^k.2 + 2 = 12.2^k - 4.2^k - 1 = 8.2^k - 1 = 2^{k+3} - 1$

Utilizo propiedad distributiva y propiedades de la potencia

Así que $\forall\, n \geq 0 :\ a_n = 2^{n+2} - 1$, es verdadera.

2) Demostrar que es posible escribir cualquier número natural ≥ 14 como suma de tres y ochos (por ejemplo 14=3+3+8)

Vamos a demostrar lo afirmado usando el principio de inducción fuerte.

Antes de comenzar escribamos bien lo que queremos demostrar:

$\forall\, n \geq 14$: $\quad n\ se\ puede\ escribir\ como\ suma\ de\ números$ "3" y "8"

Es decir, $P(n)$: $\ n\ se\ puede\ escribir\ como\ suma\ de$ "3" y "8"

PB) 14 = 3+3+8

15 = 3+3+3+3+3

16 = 8+8

PI) $\forall\, k \geq 16$: $\quad si\ P(i)\ es\ verdadera\ para\ i \in [14, k] \rightarrow P(k+1)\ es\ verdadera$

Quiero ver que es posible escribir a $k+1$ sumando 3´s y 8´s, suponemos que $P(14), P(15), \ldots.\, P(k)$ son todas verdaderas.

Ahora como $k+1 \geq 17$, entonces $(k+1)-3 \geq 17-3 = 14$, asi que por hipótesis inductiva $P(k-2)$ es verdadera, es decir que $k-2$ puede escribirse como suma de treses y ochos.

Pero entonces, como $k+1 = (k-2)+3$, también puedo escribir a $k+1$ de esa manera.

Por lo tanto $\forall\, n \geq 14$: $\quad P(n)$ es verdadera.