



## Tarea #1

*Estudiante: Luciano Andres Juárez López***Problema 1**

Considera la serie de tiempo  $\{X_t\}$  contenida en la primera columna del archivo `airline.csv`. Dicho conjunto de datos consiste en los totales mensuales (en miles) de pasajeros internacionales de una aerolínea durante el período de enero de 1949 a diciembre de 1960 (ver Brockwell and Davis (2006)). Realiza lo siguiente:

- (a) Grafica la serie de tiempo (como función del tiempo). ¿Hay algunas tendencias obvias?
- (b) ¿Es necesario transformar los datos? Si se requiere una transformación, ¿qué sugerirías?
- (c) Calcula la mediana del número de pasajeros internacionales de cada año. Grafica simultáneamente boxplots del número de pasajeros en cada año para detectar cualquier otra tendencia.
- (d) Encuentra un estimado de la tendencia usando un filtro de medias móviles. Grafica la tendencia.

*(Solución)*

- (a) Como se muestra en la Figura 1, la grafica muestra una tendencia positiva, de igual forma muestra ciclos regulares. Podemos inferir que esto se basa en las fechas de vacaciones, donde incrementa más el número de ventas en la aerolínea.

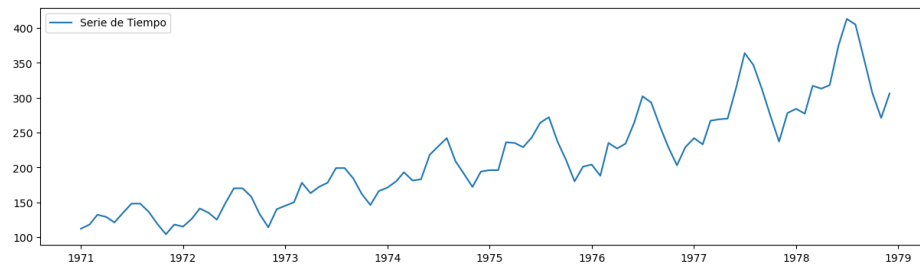


Figura 1: Serie de tiempo del archivo airline

- (b) Para poder observar mejor ese patrón, se debe realizar una transformación de los datos, en la cual podríamos quitar la tendencia o trabajar la estacionalidad.
- (c) Como se muestra en la Figura 2, podemos observar un incremento tanto en la mediana y la variabilidad dentro de cada año, del cual podemos decir que hay un incremento con el número de pasajeros internacionales a lo largo del tiempo.

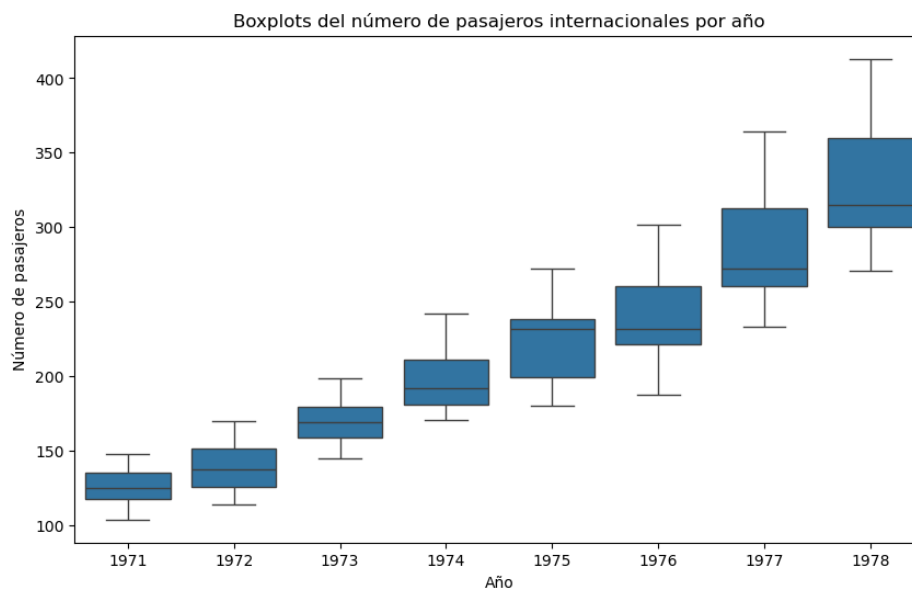


Figura 2: Boxplots del número de pasajeros internacionales por año

- (d) En la Figura 3, se muestra la serie de tiempo, haciendo uso de la media móvil, utilizando un promedio móvil de 12 meses, donde la tendencia es positiva y se colorea de azul la varianza alrededor de ella.

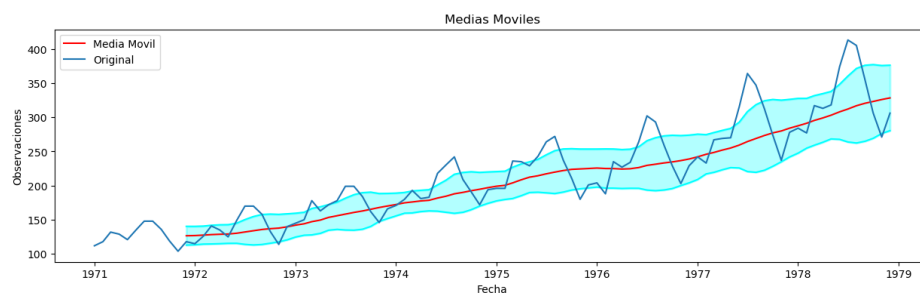


Figura 3: Media movil

**Problema 2**

Investigar qué es el operador de retardo (Lag Operator) y su relación con los polinomios característicos de una ecuación en diferencias asociada a una serie de tiempo y dar un ejemplo de polinomio característico asociado a un modelo AR(2) (ver Hamilton, J. D. 2020).

*(Solución)*

El operador de retardo (Lag Operator), el cual es denotado por  $L$ , se utiliza en series de tiempos para desplazar una secuencia de datos en el tiempo. Si tenemos  $\{y_t\}$ , entonces el operador **Lag** se aplica de la siguiente forma:

$$L^k(y_t) = y_{t-k}$$

Cuando se trabaja con ecuaciones en diferencias, el operador de retardo genera expresiones que se pueden asociar con polinomios característicos. Un polinomio característico en una ecuación en diferencias expresa cómo los términos pasados de una serie temporal afectan al valor presente.

Consideremos una ecuación en diferencias general de la forma:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

Usando el operador de retardo, lo podemos expresar como:

$$y_t = \phi_1 L y_t + \phi_2 L^2 y_t + \cdots + \phi_p L^p y_t + \epsilon_t$$

Reordenando todos los términos de  $y_t$  en un solo lado:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p) y_t = \epsilon_t$$

Donde, el término  $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)$  es el polinomio característico asociado a la ecuación en diferencias.

Ejemplo:

Considerando un modelo AR(2) dado por:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t$$

El cual podemos ver de la siguiente manera usando el Lag Operator:

$$\begin{aligned}y_t &= \phi_1 L y_t + \phi_2 L^2 y_t + \epsilon_t \\y_t - \phi_1 L y_t - \phi_2 L^2 y_t &= \epsilon_t \\(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) y_t &= \epsilon_t\end{aligned}$$

Por lo que el polinomio característico asociado al modelo AR(2) es:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2$$

**Problema 3**

Entregar un control de lectura de las secciones 1.4 y 1.5 de (Brockwell and Davis (2006)). Este debe incluir un resumen de cada sección, además de incluir una descripción de los métodos y fórmulas más importantes mostradas.

(Solución)

**Sección 1.4 La estimación y eliminación de la tendencia y componentes estacionales**

Como primer paso para el análisis de una serie de tiempo, es graficar los datos, lo cual permite visualizar posibles discontinuidades o cambios bruscos en la serie, por lo que se podría segmentar los datos en partes más homogéneas antes de realizar un análisis detallada. A través de la inspección visual del gráfico, puede surgir la posibilidad de representar los datos como una realización de un proceso bajo el modelo de descomposición clásico:

$$X_t = m_t + s_t + Y_t \quad (1)$$

El objetivo es estimar y extraer los componentes deterministas  $m_t$  y  $s_t$ , con la esperanza de que el componente residual o de ruido  $Y_t$  resulte ser un proceso aleatorio estacionario. Posteriormente, se puede utilizar la teoría de procesos estacionarios para encontrar un modelo probabilístico adecuado para este componente residual.

El enfoque desarrollado por Box y Jenkins (1970), consiste en aplicar operadores de diferenciación repetidamente a los datos  $X_t$  hasta que las observaciones diferenciadas se asemejen a una realización de un proceso estacionario, el cual nos permite modelar, analizar y predecir la serie original utilizando la teoría de procesos estacionarios.

**Eliminación de una tendencia en ausencia de estacionalidad**

En ausencia de un componente estacional, el modelo se convierte en

$$X_t = m_t + Y_t \quad t = 1, \dots, n \quad (2)$$

sin pérdida de generalidad asumimos que  $E(Y_t) = 0$

Para trabajar con estos modelos, podemos hacer uso de los siguientes métodos:

**Método 1 (Estimación de Mínimos Cuadrados de  $m_t$ ) :**

En este enfoque, se intenta ajustar una familia paramétrica de funciones  $m_t$  a los datos, por ejemplo.

$$m_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (3)$$

donde los parámetros  $a_0$ ,  $a_1$ , y  $a_2$  son coeficientes que deben determinarse, para minimizar  $\sum_t (X_t - m_t)^2$

Donde el componente de la tendencia  $\hat{m}$ , nos proporciona un predictor natural de valores futuros de  $X_t$ . Si los residuos de  $\{Y_t\}$  son altamente correlacionados, es posible usar sus valores para dar una mejor estimación de  $Y_t$  y por lo tanto de  $X_t$ .

## Método 2 (Suavizado mediante una media móvil) :

Se define el promedio móvil de dos lados de la serie temporal  $X_t$  como:

$$W_t = (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j} \quad (4)$$

donde  $q$  es un entero no negativo que determina el número de observaciones pasadas y futuras consideradas en el cálculo del promedio.

Si el modelo de la serie de tiempo se expresa como en (2), donde  $m_t$  es la tendencia y  $Y_t$  es el componente de ruido con media cero, entonces la media móvil de dos lados se convierte en:

$$W_t = (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q m_{t+j} + (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q Y_{t+j} \quad (5)$$

Donde  $W_t$  es una estimación de la tendencia  $m_t$  y es aproximadamente lineal en el intervalo  $[t - q, t + q]$  y el promedio de los términos de error durante este intervalo es cercano a cero, entonces  $W_t$  proporciona una buena estimación de  $m_t$ .

$$\hat{m}_t = (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j} \quad q + 1 \leq t \leq n - q \quad (6)$$

Dado que  $X_t$  no es observable para  $t \leq 0$  o  $t > n$  no podemos usarla en (6) para  $t \leq q$  o  $t > n - q$ , el programa SMOOTH aborda este problema definiendo  $X_t = X_1$  para  $t < 1$  y  $X_t = X_n$  para  $t > n$ .

Una vez que se aplica el suavizado, los terminos de ruido estimado se calculan de la forma  $\hat{Y}_t = X_t - \hat{m}_t$

La media móvil de un lado  $\hat{m}_t$ ,  $t = 1, \dots, n$ , con un  $a \in [0, 1]$  fijo, se define por la siguiente recursión:

$$\hat{m}_t = aX_t + (1 - a)\hat{m}_{t-1}, \quad t = 2, \dots, n \quad (7)$$

Para  $t = 1$  se define:  $m_1 = X_1$ , a esto se le conoce como suavizado exponencial.

### Método 3 (Diferenciación para Generar Datos Estacionarios) :

Se intenta eliminar el término de tendencia mediante la diferenciación, definiendo el operador de diferencia  $\nabla$  como:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t \quad (8)$$

Donde  $B$  es el operador de desplazamiento hacia atrás:

$$BX_t = X_{t-1} \quad (9)$$

Donde las potencias de los operadores  $B$  y  $\nabla$  se definen de la manera:  $B^j(X_t) = X_{t-j}$  y  $\nabla^j(X_t) = \nabla(\nabla^{j-1}(X_t))$ ,  $j \geq 1$  con  $\nabla^0(X_t) = X_t$

Si el operador  $\nabla$  es aplicado a una función lineal de tendencia  $m_t = at + b$ , entonces obtenemos la función constante  $\nabla m_t = a$ .

De manera similar, cualquier tendencia con una expresión polinómica de grado  $k$  se puede reducir a una constante al aplicar el operador  $\nabla^k$ . Consideremos el modelo  $X_t = m_t + Y_t$ , donde  $m_t = \sum_{j=0}^k a_j t^j$  es la tendencia polinómica y  $Y_t$  es una serie estacionaria con media cero. Al aplicar el operador  $\nabla^k$  a  $X_t$ , obtenemos:

$$\nabla^k X_t = k!a_k + \nabla^k Y_t$$

donde  $\nabla^k Y_t$  es un proceso estacionario con media  $k!a_k$ . Esto resulta en una serie  $\{\nabla^k X_t\}$  que puede considerarse como una realización de un proceso estacionario. Generalmente, el orden  $k$  necesario suele ser 1 o 2, dependiendo de la aproximación.

### Eliminación de la tendencia y la estacionalidad

Los métodos para la eliminación de la tendencia pueden adaptarse de manera natural para eliminar tanto la tendencia como la estacionalidad en el modelo general:

$$X_t = m_t + s_t + Y_t, \quad (10)$$

donde  $E[Y_t] = 0$ ,  $s_{t+d} = s_t$  y  $\sum_{i=1}^d s_i = 0$ . Los métodos para eliminar las tendencias y estacionalidades son los siguiente:



**Método S1 (Método de Tendencia Pequeña) :**

Cuando la tendencia es pequeña, es razonable suponer que el término de tendencia  $m_t$  es constante dentro de cada año, el componente estacional  $s_t$  tiene un periodo  $d = 12$  (para datos mensuales) y cumple que  $s_{t+d} = s_t$  y  $\sum_{k=1}^d s_k = 0$ .

La tendencia anual  $\hat{m}_j$  se estima promediando los valores mensuales de cada año:

$$\hat{m}_j = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{12} X_{j,k} \quad (11)$$

Donde  $X_{j,k}$  son los datos indexados por año y mes.

El componente estacional para cada mes  $k$  se estima eliminando la tendencia de cada año y promediando los valores a lo largo de los años disponibles:

$$\hat{s}_k = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 (X_{j,k} - \hat{m}_j) \quad k = 1, \dots, 12 \quad \text{y} \quad j = 1, \dots, 6 \quad (12)$$

lo que garantiza que  $\sum_{k=1}^{12} \hat{s}_k = 0$ .

El término de error estimado para el mes  $k$  del año  $j$  es:

$$\hat{Y}_{j,k} = x_{j,k} - \hat{m}_j - \hat{s}_k \quad (13)$$

**Método S2 (Estimación por Media Móvil) :**

A diferencia del método S1, este no depende de la suposición de que  $\hat{m}_t$  es casi constante durante cada ciclo. La tendencia se estima primero aplicando un filtro de media móvil, diseñado para eliminar el componente estacional y reducir el ruido.

Este filtro varia dependiendo del valor del periodo de  $d$ , el cual determina la longitud del ciclo estacional. Para el periodo de  $d$  es par ( $d = 2q$ ), la tendencia se estima con una media móvil ponderada:

$$m_t = \frac{0.5x_{t-q} + 0.5x_{t-q+1} + \dots + 0.5x_{t-q-1} + 0.5x_{t+q}}{d}, \quad q < t \leq n - q \quad (14)$$

Para periodos impares  $d = 2q + 1$ , se utiliza la media móvil simple.

El segundo paso es estimar el componente estacional, para cada  $k = 1, \dots, d$ , calculamos el promedio  $w_k$  de las desviaciones:

$$\{(x_{k+jd} - \hat{m}_{k+jd}) : q < k + jd \leq n - q\} \quad (15)$$

Dado que estas desviaciones promedio no necesariamente suman cero, las desviaciones son usadas para estimar el componente de estacionalidad  $s_k$  de la forma:

$$\hat{s}_k = w_k - d^{-1} \sum_{i=1}^d w_i \quad k = 1, \dots, d \quad (16)$$

y  $\hat{s}_k = s_{k-d}, k > d$ .

Los datos destacionalizados se definen como la serie original con el componente estacional estimado eliminado:

$$d_t = x_t - \hat{s}_t \quad t = 1, \dots, n \quad (17)$$

A partir de los datos destacionalizados  $d_t$ , se vuelve a estimar la tendencia, ya sea aplicando un filtro de media móvil o ajustando un polinomio a la serie. Los terminos de ruido estimados son:

$$\hat{Y}_t = x_t - \hat{m}_t - \hat{s}_t \quad t = 1, \dots, n \quad (18)$$

### Método S3 (Diferenciación de retraso $d$ ) :

La técnica de diferenciación aplicada se puede adaptar para manejar la estacionalidad del periodo  $d$ , introduciendo el operador de diferencia de retraso  $d$  ( $\nabla_d$ ), definido como:

$$\nabla_d = X_t - X_{t-d} = (1 - B^d)X_t \quad (19)$$

Aplicando este operador al modelo:

$$X_t = m_t + s_t + Y_t \quad (20)$$

donde  $s_t$  tiene periodo  $d$ , obtenemos:

$$\nabla_d X_t = m_t - m_{t-d} + Y_t - Y_{t-d} \quad (21)$$

Lo cual nos da un componente de tendencia ( $m_t - m_{t-d}$ ) y un termino de ruido ( $Y_t - Y_{t-d}$ ), donde la tendencia puede ser eliminada usando los metodos anteriormente descritos, por ejemplo, aplicando algún poder del operador  $\nabla$ .

### 1.5 Función de Autocovarianza de un Proceso Estacionario

(Propiedades elementales) Si  $\gamma(\cdot)$  es la función de autocovarianza de un proceso estacionario  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , las propiedades elementales son:

$$\gamma(0) \geq 0 \quad (22)$$

$$|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \quad h \in \mathbb{Z} \quad (23)$$

$$\gamma(\cdot) \text{ es par, es decir, } \gamma(h) = \gamma(-h) \quad h \in \mathbb{Z} \quad (24)$$

#### Definitividad no negativa

Una función  $k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es no negativa definida si y solo si:

$$\sum_{i,j=1}^n a_i k(t_i - t_j) a_j \geq 0 \quad (25)$$

Para todo entero positivo  $n$ , para todos los vectores  $a = (a_1, \dots, a_n)' \in \mathbb{R}^n$  y  $t = (t_1, \dots, t_n)' \in \mathbb{Z}^n$  o si y solo si:

$$\sum_{i,j=1}^n a_i k(i - j) a_j \geq 0 \quad (26)$$

para toda  $n$  y  $a$ .

#### Teorema: Caracterización de las Funciones de Autocovarianza:

Una función de valores reales definida sobre los enteros es la función de autocovarianza de una serie de tiempo estacionaria si y solo si es par y no negativa definida.

Para demostrar que la función de autocovarianza  $\gamma(\cdot)$  de cualquier serie de tiempo estacionaria  $\{X_t\}$  es no negativa definida, simplemente observamos que si  $a = (a_1, \dots, a_n)' \in \mathbb{R}^n$ ,  $t = (t_1, \dots, t_n)' \in \mathbb{Z}^n$  y  $Z_t = (X_{t_1} - EX_{t_1}, \dots, X_{t_n} - EX_{t_n})'$  entonces:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{Var}(a'Z_t) \\ &= a'EZ_tZ_t'a \\ &= a'\Gamma_n a \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i \gamma(t_i - t_j) a_j \end{aligned}$$

Donde  $\Gamma_n = [\gamma(t_i - t_j)]_{i,j=1}^n$  es la matriz de covarianza de  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})'$ .

Para cada función de autocovarianza  $\gamma(\cdot)$ , existe una serie temporal gaussiana estacionaria que tiene  $\gamma(\cdot)$  como su función de autocovarianza.

Una función de autocorrelación  $\rho(\cdot)$  tiene todas las propiedades de una función de autocovarianza y además cumple  $\rho(0) = 1$ .

### **Función de Autocovarianza Muestral de una Serie Observada**

La función de autocovarianza muestral de  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es definida como:

$$\hat{\gamma}(h) := n^{-1} \sum_{j=1}^{n-h} (x_{j+h} - \bar{x})(x_j - \bar{x}) \quad 0 \leq h \leq n \quad (27)$$

y  $\hat{\gamma}(h) = \hat{\gamma}(-h)$ ,  $-n < h \leq 0$ , donde  $\bar{x}$  es la media muestral  $\bar{x} = n^{-1} \sum_{j=1}^n x_j$

El divisor  $n$  asegura que la matriz de autocovarianzas muestrales sea no negativa definida.

La función de autocorrelación muestral se define en términos de la autocovarianza muestral como:

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad |h| < n \quad (28)$$

**Problema 4**

Aplicar lo aprendido en las secciones 1.4 y 1.5 de (Brockwell and Davis (2006)) a las series de tiempo contenidas en los archivos `Electricity.xls` y `ClayBricks.xls`.

(Solución)

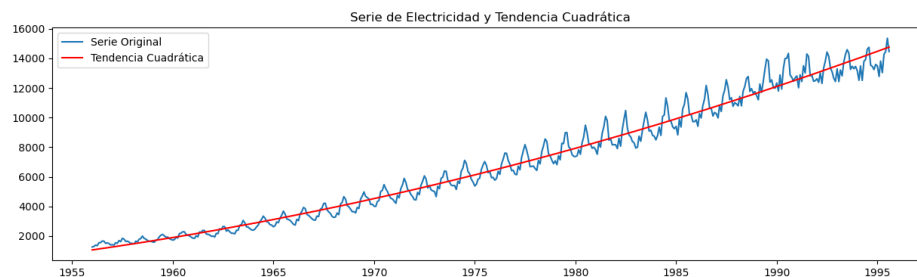
**Método 1 (Estimación por mínimos cuadrados de  $m_t$ )**

Figura 4: Tendencia cuadrática ajustada a los datos de consumo eléctrico (línea roja) utilizando el Método de Estimación por Mínimos Cuadrados. La serie original se muestra en azul, representando el consumo en kWh a lo largo del tiempo.

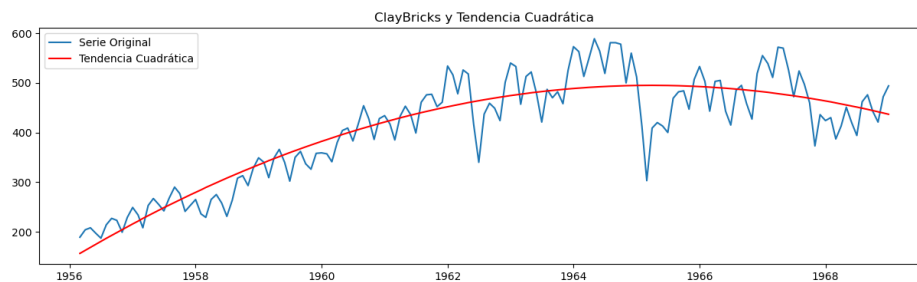


Figura 5: Tendencia cuadrática ajustada a los datos de producción de ladrillos (línea roja) utilizando el Método de Estimación por Mínimos Cuadrados. La serie original se muestra en azul, mostrando la variación en la producción de ladrillos a lo largo de los años.

## Metodo 2 (Suavizado mediante una media móvil)

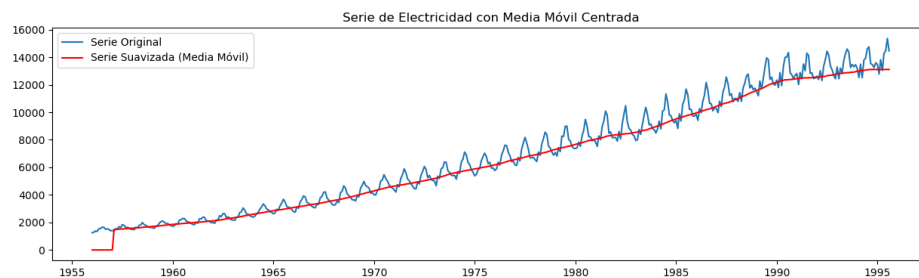


Figura 6: Tendencia obtenida mediante una media móvil centrada (línea roja). La serie original se muestra en azul, destacando las fluctuaciones en el consumo eléctrico.

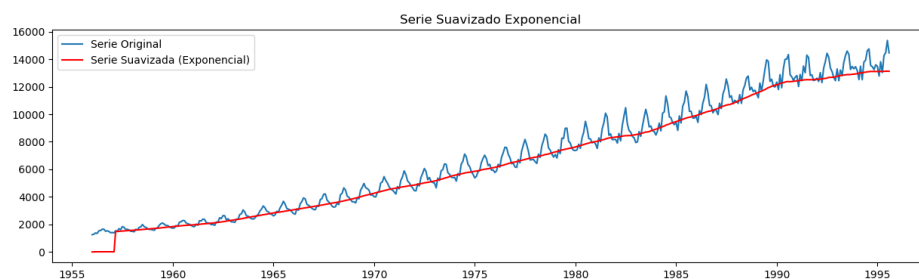


Figura 7: Tendencia obtenida mediante un suavizado exponencial (línea roja). La serie original se muestra en azul, reflejando el comportamiento del consumo eléctrico.

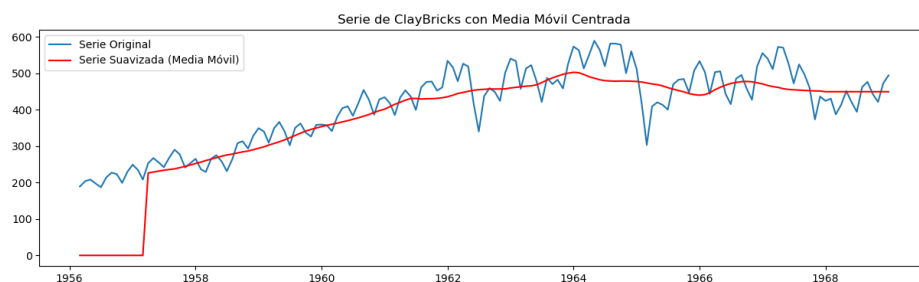


Figura 8: Tendencia obtenida mediante una media móvil centrada (línea roja). La serie original se muestra en azul, mostrando la tendencia y variabilidad en la producción de ladrillos.

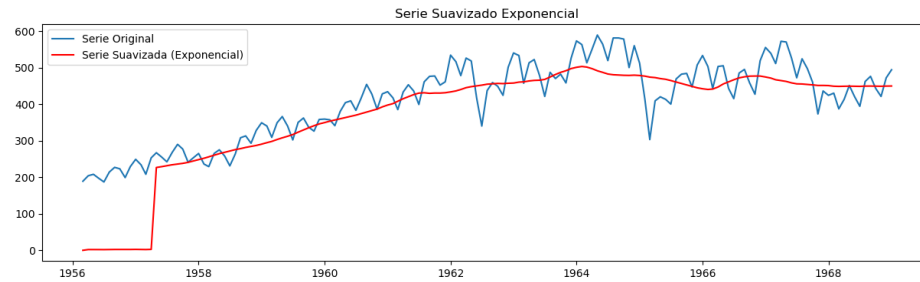


Figura 9: Tendencia obtenida mediante un suavizado exponencial (línea roja). La serie original se muestra en azul, destacando la evolución y fluctuación en la producción de ladrillos.

### Método 3 (Diferenciación para Generar Datos Estacionarios)

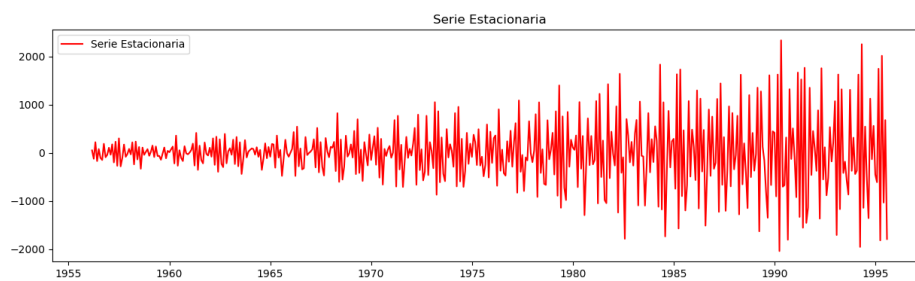


Figura 10: Serie estacionaria de los datos del consumo eléctrico.

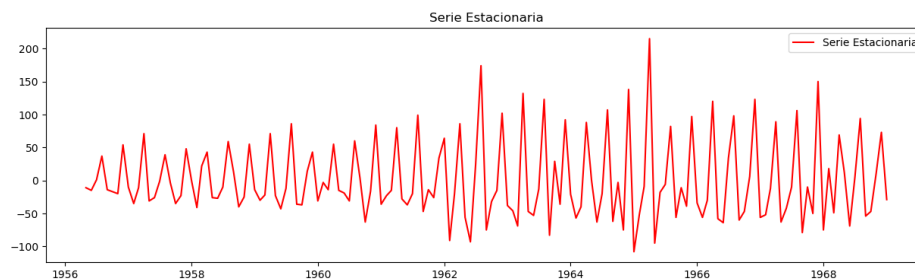


Figura 11: Serie estacionaria de los datos en la producción de ladrillos.

### Método S1 (Método de Tendencia Pequeña)

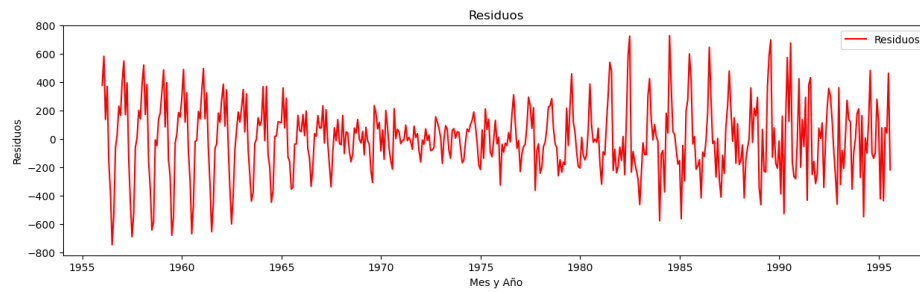


Figura 12: Residuos obtenidos aplicando el metodo de tendencia pequeña a los datos de consumo eléctrico

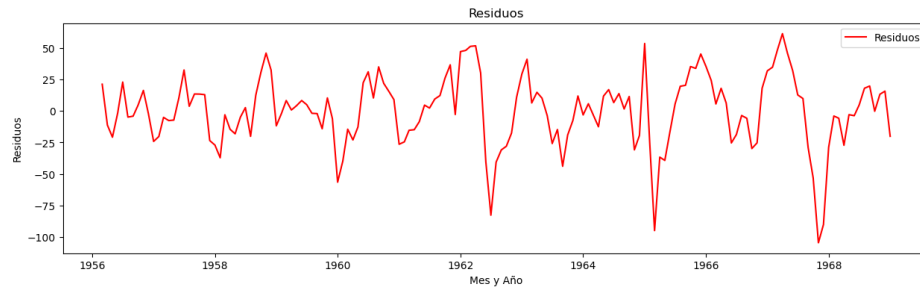


Figura 13: Residuos obtenidos aplicando el metodo de tendencia pequeña a los datos en la producción de ladrillos.



### Método S2 (Método de Estimación de media móvil)

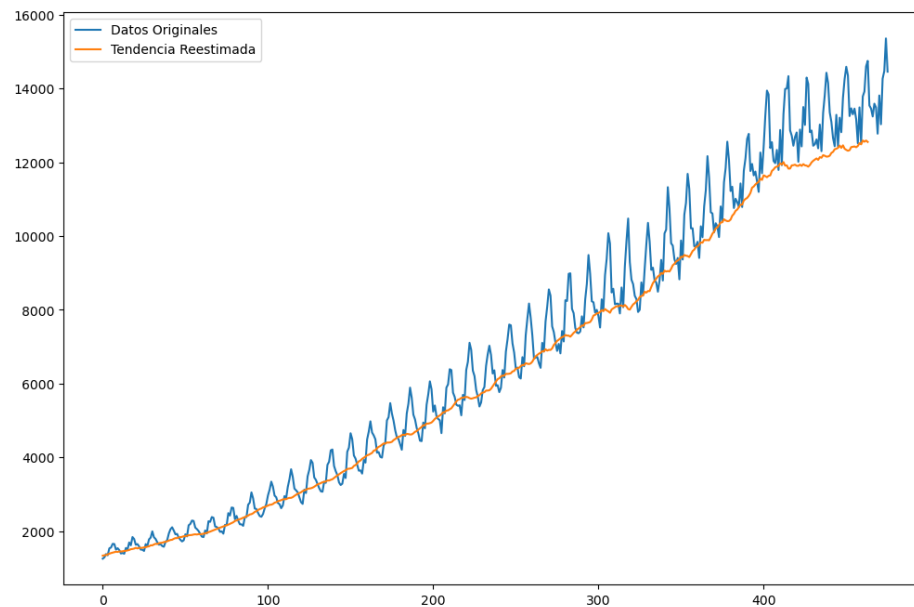


Figura 14: Tendencia estimada mediante el método de Estimación de media móvil ajustada a los datos de consumo eléctrico (línea roja). La serie original se muestra en azul, representando el consumo en kWh a lo largo del tiempo.

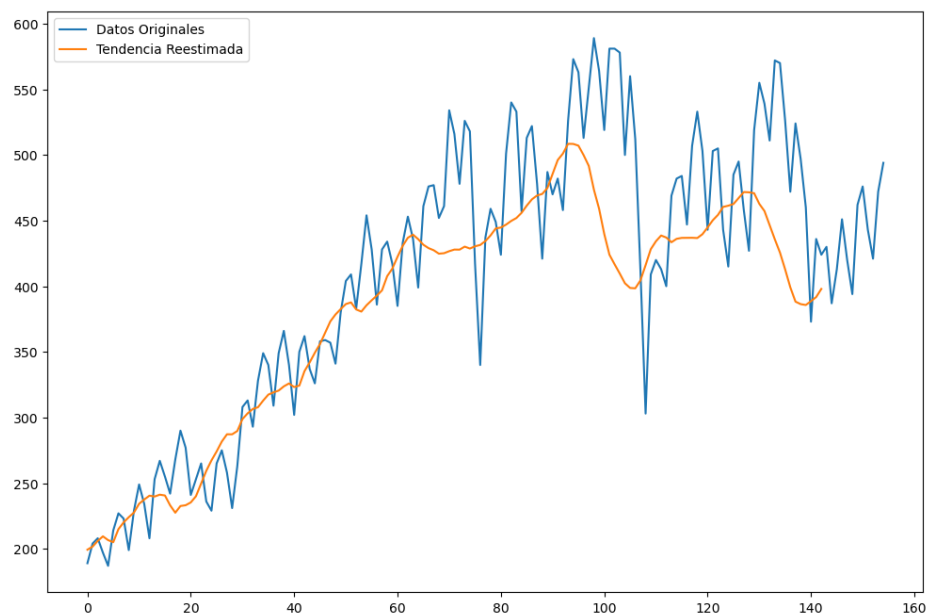


Figura 15: Tendencia estimada mediante el método de Estimación de media móvil ajustada a los datos de producción de ladrillos (línea roja). La serie original se muestra en azul, representando el consumo en kWh a lo largo del tiempo.

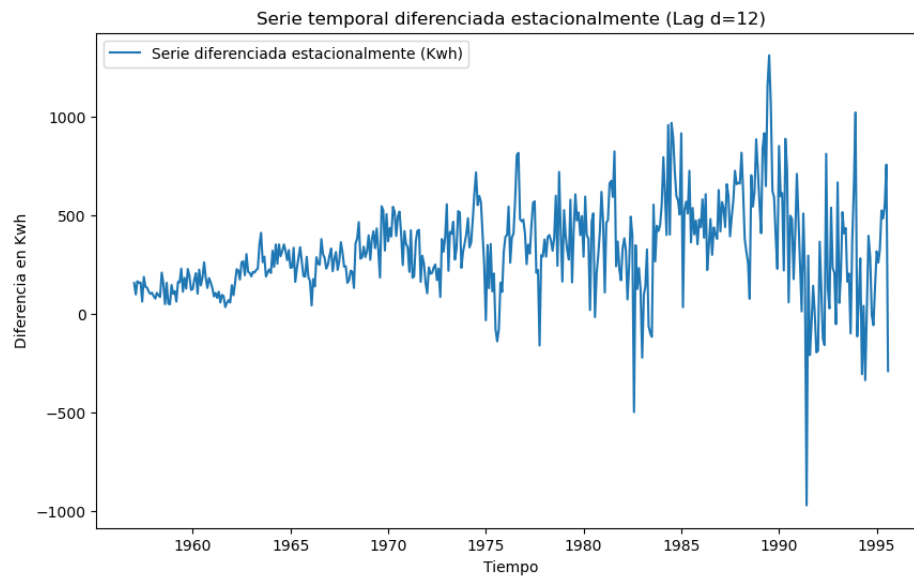
**Método S3 (Método de Diferenciación de retraso  $d$ )**

Figura 16: Serie estacionalizada de los datos de consumo eléctrico

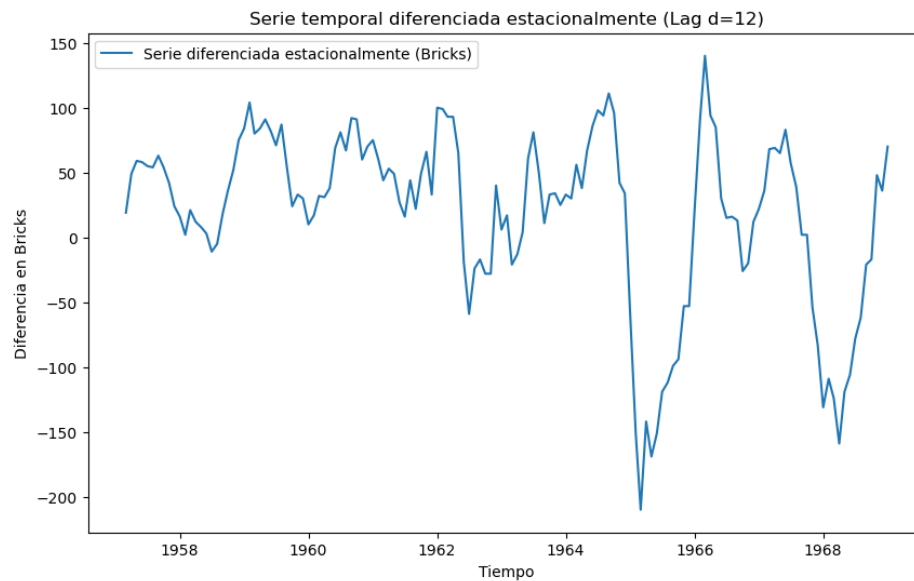


Figura 17: Serie estacionalizada de los datos de producción de ladrillos