Series de Tiempo (Fecha: 25/09/2024)

CIMAT

Tarea #2

Estudiante: Luciano Andres Juárez López

Problema 1

Asume que $\{e_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es una sucesión de v.a. i.i.d. $(0, \sigma^2)$. Calcula $E(X_t)$ y $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$ para todo t y para todo h para los siguientes procesos estocásticos $\{X_t\}$.

(Solución)

a) $X_t = e_t e_{t-1}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Calculamos $E(X_t)$

$$E(X_t) = E\left(e_t e_{t-1}\right)$$

Dado que e_t y e_{t-1} son independientes, podemos realizar lo siguiente

$$E(X_t) = E\left(e_t\right) E\left(e_{t-1}\right)$$

Sabemos que $E(e_t) = 0$ entonces:

$$E(X_t) = 0 \cdot 0 = 0$$

Calculamos $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h})))$$

Sabemos que $E(X_t) = E(X_{t+h}) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E((X_t - 0)(X_{t+h} - 0)) \\ &= E(X_t X_{t+h}) \\ &= E\left((e_t e_{t-1})(e_{t+h} e_{t+h-1})\right)\end{aligned}$$

Para $h = 0$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E\left((e_t e_{t-1})(e_{t+h} e_{t+h-1})\right) \\ &= E\left((e_t e_{t-1})(e_{t+0} e_{t+0-1})\right) \\ &= E\left(e_t^2 e_{t-1}^2\right) \\ &= E\left(e_t^2\right) E\left(e_{t-1}^2\right) = \sigma^2 \sigma^2 = \sigma^4\end{aligned}$$

Para $h \neq 0$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E\left((e_t e_{t-1})(e_{t+h} e_{t+h-1})\right) \\ &= E\left(e_t e_{t-1}\right) E\left(e_{t+h} e_{t+h-1}\right)\end{aligned}$$

Sabemos que $E(e_t e_{t-1}) = E(e_t)E(e_{t-1}) = 0$ y $E(e_{t+h}) = E(e_{t+h-1}) = 0$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0 \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto

$$E(X_t) = 0$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^4 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

b)

$$X_t = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ X_{t-1} + e_t & t = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Calculamos $E(X_t)$

$$E(X_t) = E(X_{t-1} + e_t) = E(X_{t-1}) + E(e_t)$$

Dado que $E(e_t) = 0$, entonces

$$E(X_t) = E(X_{t-1})$$

Aplicando la misma relación anterior, obtenemos

$$E(X_t) = E(X_{t-2} + e_{t-1}) = E(X_{t-2}) + E(e_{t-1}) = E(X_{t-2})$$

Por lo tanto, después de varias iteraciones, llegamos a

$$E(X_t) = E(X_0) = 0$$

Calculamos $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h})$

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h})))$$

Sabemos que $E(X_t) = E(X_{t+h}) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E((X_t - 0)(X_{t+h} - 0)) \\ &= E(X_t X_{t+h}) \end{aligned}$$

Para $t \geq 1$, podemos expresar X_t como:

$$X_t = e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \cdots + e_1$$

Para X_{t+h} con $h \geq 0$, tenemos

$$X_{t+h} = X_t + e_{t+1} + e_{t+2} + \cdots + e_{t+h}$$

Sustituyendo X_{t+h}

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E(X_t(X_t + e_{t+1} + e_{t+2} + \cdots + e_{t+h})) = E(X_t^2 + X_t e_{t+1} + X_t e_{t+2} \cdots + X_t e_{t+h})$$

$$= E(X_t^2) + E(X_t e_{t+1}) + E(X_t e_{t+2}) + \cdots + E(X_t e_{t+h})$$

$$= E(X_t^2) + E((e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \cdots + e_1)e_{t+1})$$
$$+ E((e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \cdots + e_1)e_{t+2})$$
$$+ \cdots + E((e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \cdots + e_1)e_{t+h})$$

$$= E(X_t^2) + E(e_{t+1}e_t + e_{t+1}e_{t-1} + e_{t+1}e_{t-2} + \cdots + e_{t+1}e_1) +$$
$$E(e_{t+2}e_t + e_{t+2}e_{t-1} + e_{t+2}e_{t-2} + \cdots + e_{t+2}e_1) +$$
$$+ \cdots + E(e_{t+h}e_t + e_{t+h}e_{t-1} + e_{t+h}e_{t-2} + \cdots + e_{t+h}e_1)$$

$$= E(X_t^2) + E(e_{t+1})E(e_t) + E(e_{t+1})E(e_{t-1}) + E(e_{t+1})E(e_{t-2}) + \cdots + E(e_{t+1})E(e_1) +$$
$$E(e_{t+2})E(e_t) + E(e_{t+2})E(e_{t-1}) + E(e_{t+2})E(e_{t-2}) + \cdots + E(e_{t+2})E(e_1) +$$
$$+ \cdots + E(e_{t+h})E(e_t) + E(e_{t+h})E(e_{t-1}) + E(e_{t+h})E(e_{t-2}) + \cdots + E(e_{t+h})E(e_1)$$

Como $e_1, e_2, \ldots, e_t$ son independientes y $E(e_i) = 0$ para $i \geq 1$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E(X_t^2)$$

$$= E((e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \cdots + e_1)(e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \cdots + e_1))$$

$$= E((e_t^2 + e_t e_{t-1} + e_t e_{t-2} + \cdots + e_t e_1) + (e_{t-1}e_t + e_{t-1}^2 + e_{t-1}e_{t-2} + \cdots + e_{t-1}e_1)$$
$$+ (e_{t-2}e_t + e_{t-2}e_{t-1} + e_{t-2}^2 + \cdots + e_{t-2}e_1) + (e_1 e_t + e_1 e_{t-1} + e_1 e_{t-2} + \cdots + e_1^2))$$

$$= E(e_t^2 + e_{t-1}^2 + e_{t-2}^2 + \cdots + e_1^2 + (e_t e_{t-1} + e_t e_{t-2} + \cdots + e_t e_1 +$$
$$e_{t-1}e_t + e_{t-1}e_{t-2} + \cdots + e_{t-1}e_1 + e_{t-2}e_t + e_{t-2}e_{t-1} + \cdots + e_{t-2}e_1 +$$
$$e_1 e_t + e_1 e_{t-1} + e_1 e_{t-2} + \cdots + e_1 e_2))$$

$$= E(e_t^2) + E(e_{t-1}^2) + E(e_{t-2}^2) + \cdots + E(e_1^2) + (E(e_t e_{t-1}) + E(e_t e_{t-2}) + \cdots + E(e_t e_1) +$$
$$E(e_{t-1}e_t) + E(e_{t-1}e_{t-2}) + \cdots + E(e_{t-1}e_1) + E(e_{t-2}e_t) + E(e_{t-2}e_{t-1}) + \cdots + E(e_{t-2}e_1) +$$
$$E(e_1 e_t) + E(e_1 e_{t-1}) + E(e_1 e_{t-2}) + \cdots + E(e_1 e_2))$$

$$= \sum_{i=1}^{t} E(e_i^2) + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j \neq i} E(e_i e_j)$$

Dado que e_i y e_j son independientes para $i \neq j$, $E(e_i e_j) = E(e_i)E(e_j) = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{t} \sum_{j \neq i} E(e_i e_j) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j \neq i} E(e_i)E(e_j) = 0$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= \sum_{i=1}^{t} E(e_i^2) + 0 \\ &= t\sigma^2\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E(X_t) = 0$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = t\sigma^2$$

c) $X_t = a_1 + e_1 a_2^t + e_2$, para $a_1 \in \mathbb{R}$, $0 < a_2 < 1$, $t = 0, 1, 2, \ldots$
Calculamos $E(X_t)$

$$\begin{aligned}E(X_t) &= E(a_1 + e_1 a_2^t + e_2) \\ &= E(a_1) + E(e_1 a_2^t) + E(e_2) \\ &= a_1 + a_2^t E(e_1) + E(e_2)\end{aligned}$$

Sabemos que $E(e_t) = 0$ con $t = 0, 1, 2, \ldots$, entonces:

$$E(X_t) = a_1$$

Calculamos $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h}))) \\ &= E((X_t - a_1)(X_{t+h} - a_1)) \\ &= E(X_t X_{t+h} - a_1 X_{t+h} - a_1 X_t + a_1^2) \\ &= E(X_t X_{t+h}) - a_1 E(X_{t+h}) - a_1 E(X_t) + a_1^2 \\ &= E((a_1 + e_1 a_2^t + e_2)(a_1 + e_1 a_2^{t+h} + e_2)) - a_1^2 - a_1^2 + a_1^2 \\ &= E((a_1 + e_1 a_2^t + e_2)(a_1 + e_1 a_2^{t+h} + e_2)) - a_1^2\end{aligned}$$

$$= E((a_1^2 + a_2^t a_1 e_1 + a_1 e_2) + (a_1 a_2^{t+h} e_1 + a_2^{2t+h} e_1^2 + a_2^{t+h} e_2 e_1) + (a_1 e_2 + a_2^t e_1 e_2 + e_2^2)) - a_1^2$$

$$= a_1^2 + a_2^t a_1 E(e_1) + a_1 E(e_2) + a_1 a_2^{t+h} E(e_1) + a_2^{2t+h} E(e_1^2) + a_2^{t+h} E(e_2 e_1) +$$
$$a_1 E(e_2) + a_2^t E(e_1 e_2) + E(e_2^2) - a_1^2$$

$$= a_2^t a_1 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_1 a_2^{t+h} \cdot 0 + a_2^{2t+h} \sigma^2 + a_2^{t+h} \cdot 0 +$$
$$a_1 \cdot 0 + a_2^t \cdot 0 + \sigma$$

$$= a_2^{2t+h} \sigma^2 + \sigma^2 = \sigma^2 (a_2^{2t+h} + 1)$$

Por lo tanto

$$E(X_t) = a_1$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma^2 (a_2^{2t+h} + 1)$$

d)

$$X_t = \begin{cases} e_0 & t = 0 \\ X_{t-1} + e_t & t = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Calculamos $E(X_t)$

$$E(X_t) = E(X_{t-1} + e_t) = E(X_{t-1}) + E(e_t) = E(X_{t-1})$$

Aplicando la misma relación, obtenemos:

$$E(X_t) = E(X_{t-1}) = E(X_{t-2} + e_{t-1}) = E(X_{t-2}) + E(e_{t-1}) = E(X_{t-2})$$

Por lo tanto, después de varias iteraciones, llegamos a:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(X_0) \\ &= E(e_0) = 0 \end{aligned}$$

Calculamos $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h})))$$

Sabemos que $E(X_t) = 0$, por lo que nos queda:

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E((X_t - 0)(X_{t+h} - 0)) = E(X_t X_{t+h})$$

Para $t \geq 0$, podemos expresar X_t como:

$$X_t = X_{t-1} + e_t = X_{t-2} + e_{t-1} + e_t = e_0 + e_1 + \cdots + e_t$$

Para X_{t+h} con $h \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
X_{t+h} &= X_{t+h-1} + e_{t+h} \\
&= X_{t+h-2} + e_{t+h-1} + e_{t+h} \\
&\vdots \\
&= e_0 + e_1 + \cdots + e_t + e_{t+1} + \cdots + e_{t+h} \\
&= X_t + e_{t+1} + \cdots + e_{t+h}
\end{aligned}$$

Ahora sustitumos el valor X_{t+h}

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E(X_t X_{t+h}) \\
&= E(X_t(X_t + e_{t+1} + \cdots + e_{t+h})) \\
&= E(X_t^2 + X_t e_{t+1} + \cdots + X_t e_{t+h}) \\
&= E(X_t^2) + E(X_t e_{t+1}) + \cdots + E(X_t e_{t+h}) \\
&= E(X_t^2) + E((e_0 + e_1 + \cdots + e_t)e_{t+1}) + E((e_0 + e_1 + \cdots + e_t)e_{t+h}) \\
&= E(X_t^2) + E(e_{t+1}e_0 + e_{t+1}e_1 + \cdots + e_{t+1}e_t) + E(e_{t+h}e_0 + e_{t+h}e_1 + \cdots + e_{t+h}e_t) \\
&= E(X_t^2) + \\
&E(e_{t+1})E(e_0) + E(e_{t+1})E(e_1) + \cdots + E(e_{t+1})E(e_t) + \\
&E(e_{t+h})E(e_0) + E(e_{t+h})E(e_1) + \cdots + E(e_{t+h})E(e_t)
\end{aligned}$$

Como $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_t$ son independientes y $E(e_i) = 0$ para $i \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E(X_t^2) \\
&= E(X_t X_t) = E((e_0 + e_1 + \cdots + e_t)(e_0 + e_1 + \cdots + e_t)) \\
&= E((e_0^2 + e_0e_1 + \cdots + e_0e_t) + (e_0e_1 + e_1^2 + \cdots + e_1e_t) + (e_te_0 + e_te_1 + \cdots + e_t^2)) \\
&= E(e_0^2) + E(e_1^2) + \cdots + E(e_t^2) + \\
&E(e_0e_1) + \cdots + E(e_0e_t) + \\
&E(e_0e_1) + \cdots + E(e_1e_t) + \\
&E(e_te_0) + E(e_te_1) + \cdots + E(e_te_{t-1}) \\
&= \sum_{i=0}^{t} E(e_i^2) + \sum_{i=0}^{t} \sum_{j \neq j} E(e_ie_j) \\
&= \sum_{i=0}^{t} E(e_i^2) + \sum_{i=0}^{t} \sum_{j \neq j} E(e_i)E(e_j) \\
&= \sum_{i=0}^{t} E(e_i^2) = \sum_{i=0}^{t} \sigma^2 = (t+1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$E(X_t) = E(e_0) = 0$$

$$\operatorname{Cov}(X_t, X_{t+h}) = (t+1)\sigma^2$$

e) Sea $X_0 \sim N(0, \sigma^2)$ una v.a. independiente de $\{e_t\}$. Define

$$X_t = \begin{cases} X_0 & t = 0 \\ \rho X_{t-1} + e_t & t = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Calculamos $E(X_t)$:

$$
\begin{aligned}
E(X_t) &= E(\rho X_{t-1} + e_t) \\
&= \rho E(X_{t-1}) + E(e_t)
\end{aligned}
$$

Sabemos que $E(e_t) = 0$, por lo que:

$$E(X_t) = \rho E(X_{t-1})$$

Reiterando este proceso:

$$\begin{aligned}
E(X_t) &= \rho^2 E(X_{t-2}) \\
&= \rho^3 E(X_{t-3}) \\
&\vdots \\
&= \rho^t E(X_0)
\end{aligned}$$

Como $X_0 \sim N(0, \sigma^2)$, tenemos que $E(X_0) = 0$, por lo que:

$$E(X_t) = \rho^t E(X_0) = \rho^t \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto, $E(X_t) = 0$ para todo t.

Calculamos $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h})))$$

Sabemos que $E(X_t) = 0$, entonces nos queda:

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E((X_t - 0)(X_{t+h} - 0)) = E(X_t X_{t+h})$$

Para $t \geq 0$ podemos expresar X_t como:

$$
\begin{aligned}
X_t &= \rho X_{t-1} + e_t \\
&= \rho\left(\rho X_{t-2} + e_{t-1}\right) + e_t \\
&= \rho^2 X_{t-2} + \rho e_{t-1} + e_t \\
&= \rho^2\left(\rho X_{t-3} + e_{t-2}\right) + \rho e_{t-1} + e_t \\
&= \rho^3 X_{t-3} + \rho^2 e_{t-2} + \rho e_{t-1} + e_t \\
&= \rho^{t-1} e_1 + \cdots + \rho^2 e_{t-2} + \rho e_{t-1} + e_t \\
&= \rho^t X_0 + \rho^{t-1} e_1 + \cdots + \rho e_{t-1} + e_t
\end{aligned}
$$

Para X_{t+h} con $h \geq 0$, tenemos

$$
\begin{aligned}
X_{t+h} &= \rho X_{t+h-1} + e_{t+h} \\
&= \rho(\rho X_{t+h-2} + e_{t+h-1}) + e_{t+h} \\
&= \rho^2 X_{t+h-2} + \rho e_{t+h-1} + e_{t+h} \\
&= \rho^h X_t + \rho^{h-1} e_{t+1} + \cdots + \rho e_{t+h-1} + e_{t+h}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo el valor de X_{t+h}

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E(X_t X_{t+h}) \\
&= E(X_t(\rho^h X_t + \rho^{h-1} e_{t+1} + \cdots + \rho e_{t+h-1} + e_{t+h})) \\
&= E(\rho^h X_t^2 + \rho^{h-1} e_{t+1} X_t + \cdots + \rho e_{t+h-1} X_t + e_{t+h} X_t) \\
&= E(\rho^h X_t^2) + E(\rho^{h-1} e_{t+1} X_t) + \cdots + E(\rho e_{t+h-1} X_t) + E(e_{t+h} X_t) \\
&= \rho^h E(X_t^2) + \rho^{h-1} E(e_{t+1} X_t) + \cdots + \rho E(e_{t+h-1} X_t) + E(e_{t+h} X_t) \\
&= \rho^h E(X_t^2) + \rho^{h-1} E(e_{t+1}(\rho^t X_0 + \rho^{t-1} e_1 + \cdots + \rho e_{t-1} + e_t)) \\
&\quad + \cdots + \rho E(e_{t+h-1}(\rho^t X_0 + \rho^{t-1} e_1 + \cdots + \rho e_{t-1} + e_t)) + \\
&\quad E(e_{t+h}(\rho^t X_0 + \rho^{t-1} e_1 + \cdots + \rho e_{t-1} + e_t)) \\
&= \rho^h E(X_t^2) + \rho^{t+h-1} E(e_{t+1} X_0) + \rho^{t+h-2} E(e_{t+1} e_1) + \cdots + \rho^h E(e_{t+1} e_{t-1}) + \rho^{h-1} E(e_{t+1} e_t) \\
&\quad + \cdots + \rho^{t+1} E(e_{t+h-1} X_0) + \rho^t E(e_{t+h-1} e_1) + \cdots + \rho^2 E(e_{t+h-1} e_{t-1}) + \rho E(e_{t+h-1} e_t) + \\
&\quad \rho^t E(e_{t+h} X_0) + \rho^{t-1} E(e_{t+h} e_1) + \cdots + \rho E(e_{t+h} e_{t-1}) + E(e_{t+h} e_t)
\end{aligned}
$$

Sabemos que $X_0 \sim N(0, \sigma^2)$ es una v.a. independiente de $\{e_t\}$ y que $E(e_{t+i} e_i) = E(e_{t+i}) E(e_i) = 0$ para $t \geq i \geq 1$, lo anterior queda como:

$$
\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \rho^h E(X_t^2)
$$

Sabemos que $Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$ para un proceso AR(1) con $|\rho| < 1$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= \rho^h \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \\
&= \frac{\rho^h \sigma^2}{1-\rho^2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\boxed{E(X_t) = 0}
$$

$$
\boxed{\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\rho^h \sigma^2}{1-\rho^2}}
$$

f) $X_t = 0.5e_1 + 1.5e_2 t$, para $0 \leq t \leq 1$.

Calculamos $X(X_t)$

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(0.5e_1 + 1.5e_2 t) \\ &= 0.5E(e_1) + 1.5tE(e_2) \end{aligned}$$

Dado que $E(e_1)$ y $E(e_2)$ son v.a. i.i.d $(0, \sigma^2)$

$$E(X_t) = 0.5 \cdot 0 + 1.5t \cdot 0 = 0$$

Calculamos $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h}))) \\ &= E((X_t - 0)(X_{t+h} - 0)) \\ &= E(X_t X_{t+h}) \end{aligned}$$

Sabemos que $X_t = 0.5e_1 + 1.5e_2 t$, entonces

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t+h}) &= E\left[(0.5e_1 + 1.5e_2 t)\left(0.5e_1 + 1.5e_2(t+h)\right)\right] \\ &= E\left[0.25e_1^2 + 0.75e_1e_2 t + 0.75e_1e_2(t+h) + 2.25e_2^2 t(t+h)\right] \end{aligned}$$

Como los e_t son i.i.d. con $E(e_t) = 0$ y $E(e_t^2) = \sigma^2$, tenemos que $E(e_1e_2) = 0$.

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t+h}) &= E\left[0.25e_1^2\right] + E\left[0.75e_1e_2 t\right] + E\left[0.75e_1e_2(t+h)\right] + E\left[2.25e_2^2 t(t+h)\right] \\ &= 0.25\sigma^2 + 0 + 0 + 2.25\sigma^2 t(t+h) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E(X_t) = 0$$

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) = 0.25\sigma^2 + 2.25\sigma^2 t(t+h)$$

g) $X_t = 0.4 + (-1)^t e_t$, para $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
Calculamos $E(X_t)$

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(0.4 + (-1)^t e_t) \\ &= E(0.4) + E((-1)^t e_t) \\ &= 0.4 + (-1)^t E(e_t) \end{aligned}$$

Como los e_t son i.i.d. con $E(e_t) = 0$, tenemos

$$E(X_t) = 0.4 + (-1)^t \cdot 0 = 0.4$$

Calculamos $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h}))) \\ &= E((X_t - 0.4)(X_{t+h} - 0.4)) \\ &= E(X_t X_{t+h} - 0.4X_{t+h} - 0.4X_t + 0.16) \\ &= E(X_t X_{t+h}) - 0.4E(X_{t+h}) - 0.4E(X_t) + 0.16 \\ &= E(X_t X_{t+h}) - 0.16 \\ &= E((0.4 + (-1)^t e_t)(0.4 + (-1)^{t+h} e_{t+h})) - 0.16 \\ &= E((0.4^2 + 0.4 \cdot (-1)^t e_t) + (0.4 \cdot (-1)^{t+h} e_{t+h} + (-1)^t e_t (-1)^{t+h} e_{t+h})) - 0.16 \\ &= E(0.4^2) + 0.4 \cdot (-1)^t E(e_t) + 0.4 \cdot (-1)^{t+h} E(e_{t+h}) + (-1)^{2t+h} E(e_t e_{t+h}) - 0.16 \end{aligned}$$

Como los e_t son i.i.d. con $E(e_t) = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= 0.16 + 0.4 \cdot (-1)^t \cdot 0 + 0.4 \cdot (-1)^{t+h} \cdot 0 + (-1)^{2t+h} E(e_t e_{t+h}) - 0.16 \\ &= (-1)^{2t+h} E(e_t e_{t+h}) \end{aligned}$$

Dado que $E(e_t e_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0, \\ 0 & \text{si } h \neq 0, \end{cases}$ tenemos:

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0, \\ 0 & \text{si } h \neq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$E(X_t) = 0.4$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0, \\ 0 & \text{si } h \neq 0. \end{cases}$$

h) $X_t = e_2 \cos t + e_3 \sin t + e_t$, para $t = 4, 5, 6, \ldots$

Calculamos $E(X_t)$

$$E(X_t) = E(e_2 \cos t + e_3 \sin t + e_t).$$

Dado que e_2, e_3 y e_t son variables aleatorias independientes con $E(e_t) = 0$, tenemos:

$$E(X_t) = E(e_2)\cos t + E(e_3)\sin t + E(e_t)$$

$$= 0 \cdot \cos t + 0 \cdot \sin t + 0 = 0$$

Calculamos $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h})))$$

Sabemos que $E(X_t) = 0$, así que:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h}))) \\
&= E((X_t - 0)(X_{t+h} - 0)) \\
&= E(X_t X_{t+h}) \\
&= E((e_2 \cos t + e_3 \sin t + e_t)(e_2 \cos(t+h) + e_3 \sin(t+h) + e_{t+h})) \\
&= E(e_2^2 \cos t \cos(t+h) + e_2 e_3 \cos t \sin(t+h) + e_2 e_{t+h} \cos t + e_3 e_2 \sin t \cos(t+h) \\
&\quad + e_3^2 \sin t \sin(t+h) + e_3 e_{t+h} \sin t + e_t e_2 \cos(t+h) + e_t e_3 \sin(t+h) + e_t e_{t+h}) \\
&= \cos t \cos(t+h) E(e_2^2) + \cos t \sin(t+h) E(e_2 e_3) + \cos t E(e_2 e_{t+h}) \\
&\quad + \sin t \cos(t+h) E(e_3 e_2) + \sin t \sin(t+h) E(e_3^2) + \sin t E(e_3 e_{t+h}) + \\
&\quad \cos(t+h) E(e_t e_2) + \sin(t+h) E(e_t e_3) + E(e_t e_{t+h})
\end{aligned}$$

Sabemos que $E(e_2^2) = E(e_3^2) = \sigma^2$ y que $E(e_t e_{t+h}) = 0$ para $t \neq t+h$ (dado que las e_t son independientes), por lo que:

$$E(X_t X_{t+h}) = \sigma^2(\cos t \cos(t+h) + \sin t \sin(t+h)).$$

Resolviendo $\cos t \cos(t+h) + \sin t \sin(t+h)$

$$\begin{aligned}
\cos t \cos(t+h) + \sin t \sin(t+h) &= \cos t(\cos t \cos h - \sin t \sin h) + \sin t(\sin t \cos h + \cos t \sin h) \\
&= \cos^2 t \cos h - \cos t \sin t \sin h) + (\sin^2 t \cos h + \sin t \cos t \sin h \\
&= \cos^2 t \cos h + \sin^2 t \cos h - \cos t \sin t \sin h + \sin t \cos t \sin h \\
&= \cos h(\cos^2 t + \sin^2 t) = \cos h
\end{aligned}$$

Por lo que al final nos queda que:

$$E(X_t X_{t+h}) = \sigma^2 \cos(h)$$

Por lo tanto

$$E(X_t) = 0$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma^2 \cos(h)$$

Problema 2

¿Cuáles de las series de tiempo del ejercicio 1 son estacionarias en covarianza?

(Solución)

Las series de tiempo del ejercicio 1, que son estacionarias en covarianza son los incisos: a, e, g y h

a) Calcula $\rho(h)$ si las series son estacionarias.

Sabemos que la autocorrelación esta dada por

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

1a) Donde

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^4 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

Para $h = 0$

$$\rho(0) = \frac{\gamma(0)}{\gamma(0)} = 1$$

Para $h \neq 0$

$$\rho(h) = \frac{0}{\gamma(0)} = 0$$

Por lo tanto

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

1e) Donde

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\rho^h \sigma^2}{1 - \rho^2}$$

Obtenemos el valor de $\rho(h)$

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\frac{\rho^h \sigma^2}{1-\rho^2}}{\frac{\rho^0 \sigma^2}{1-\rho^2}} = \frac{\frac{\rho^h \sigma^2}{1-\rho^2}}{\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}} = \frac{\rho^h \sigma^2 (1 - \rho^2)}{(1 - \rho^2)\sigma^2} = \rho^h$$

Por lo tanto

$$\rho(h) = \rho^h$$

1g) Donde

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0, \\ 0 & \text{si } h \neq 0. \end{cases}$$

Para $h = 0$

$$\rho(0) = \frac{\gamma(0)}{\gamma(0)} = 1$$

Para $h \neq 0$

$$\rho(h) = \frac{0}{\gamma(0)} = 0$$

Por lo tanto

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

1h) Donde

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma^2 \cos(h)$$

Obtenemos el valor de $\rho(h)$

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\sigma^2 \cos(h)}{\sigma^2 \cos(0)} = \frac{\sigma^2 \cos(h)}{\sigma^2 \cdot 1} = \cos(h)$$

Por lo tanto

$$\rho(h) = \cos(h)$$

b) Da las condiciones en ρ y σ^2 para que la serie del inciso 1e) sea estacionaria de segundo orden.

Problema 3

¿Cuáles de las siguientes funciones corresponden a una función de covarianza de una serie estacionaria? ¿Por qué sí o por qué no? Explica.

Propiedades elementales

Si $\gamma(\cdot)$ es la función de autocovarianza de un proceso estacionario $X_t, t \in \mathbb{Z}$, entonces:

- $\gamma(0) \geq 0$
- Descrecimiento a medida que $|h|$ aumenta
$$|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \quad \text{para toda } h \in \mathbb{Z}$$
- $\gamma(\cdot)$ es par
$$\gamma(h) = \gamma(-h) \quad \text{para toda } h \in \mathbb{Z}$$

(Solución)

Ahora veremos que las siguientes funciones cumplan estas propiedades para que sean una función de autocovarianza de un proceso estacionario.

a) $g(h) = 4 + \cos(2h)$, para $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

- $\gamma(0) \geq 0$
$$g(0) = 4 + \cos(0) = 5 \geq 0$$
- $|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \quad \text{para toda } h \in \mathbb{Z}$
Para ello primero debemos encontrar el máximo de la función
$$\begin{aligned}\frac{\partial g(h)}{\partial h} &= \frac{\partial}{\partial h}(4 + \cos(2h)) \\ &= -2\sin(2h)\end{aligned}$$
Igualamos a cero:
$$\begin{aligned}-2\sin(2h) &= 0 \\ \sin(2h) &= 0\end{aligned}$$

Sabemos que $\sin(2h) = 0$ cuando el argumento del seno es un múltiplo de π, es decir, $2h = n\pi$, donde n es un número entero, por lo que $h = \frac{n\pi}{2}$

Para determinar si los puntos $h = \frac{n\pi}{2}$, son máximos o minimos, obtendremos la segunda derivada de $g(h)$:

$$g''(h) = \frac{d}{dh}(-2\sin(2h)) = -4\cos(2h)$$

Cuando $h = 0$, si evaluamos en la segunda derivada, tenemos lo siguiente

$$g''(0) = -4\cos(2 \cdot 0) = -4 \leq \gamma(0)$$

donde concluimos que $h = 0$ es un máximo, por lo que se cumple $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ para toda $h \in \mathbb{Z}$, pues cualquier punto evaluado será menor o igual que el máximo de la función.

- $\gamma(h) = \gamma(-h) \quad$ para toda $h \in \mathbb{Z}$
  Por las propiedades del coseno, sabemos que es una función par, por lo que

$$\gamma(h) = 4 + \cos(2h) = 4 + \cos(-2h) = \gamma(-h)$$

$\therefore g(h) = 4 + \cos(2h)$ corresponde a una función de covarianza de una serie estacionaria

b) $g(h) = 1 + \sin(2h)$, para $h = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Por las propiedades del seno, sabemos que no es una función par, por lo que:

$$g(h) = 1 + \sin(2h) \neq 1 + \sin(-2h) = g(-h)$$

$\therefore g(h) = 1 + \sin(2h)$ no corresponde a una función de covarianza de una serie estacionaria

c) $g(h) = 1 + |h|$, para $h = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

- $\gamma(0) \geq 0$

$$\gamma(0) = 1 + |0| = 1 \geq 0$$

- $|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \quad$ para toda $h \in \mathbb{Z}$

$$\gamma(1) = 1 + |1| = 2 > 1 = \gamma(0)$$

Dado que $\gamma(1) > \gamma(0)$ no se cumple que $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ para toda $h \in \mathbb{Z}$

$\therefore g(h) = 1 + |h|$ no corresponde a una función de covarianza de una serie estacionaria

Problema 4

Determina cuál de los siguientes procesos son causales y/o invertibles:

(Solución)

a) $Y_t + 0.2Y_{t-1} - 0.48Y_{t-2} = Z_t$

Obtenemos su polinomio característico:

$$\phi(z) = (1 + 0.2z - 0.48z^2)$$

Resolvemos el polinomio:

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= 0 \\
1 + 0.2z - 0.48z^2 &= 0 \\
z &= \frac{-0.2 \pm \sqrt{0.2^2 - 4 \cdot -0.48 \cdot 1}}{2 \cdot -0.48} \\
&= \frac{-0.2 \pm \sqrt{0.04 + 1.92}}{-0.96} \\
&= \frac{-0.2 \pm 1.4}{-0.96} \\
z_1 &= \frac{-0.2 + 1.4}{-0.96} = -1.25 \\
z_2 &= \frac{-0.2 - 1.4}{-0.96} = 1.66
\end{aligned}$$

Dado que $|z_1|$ y $|z_2|$ son mayores a 1, podemos decir que el proceso es causal.

Dado que no hay términos de rezagados de Z_t, el proceso es automáticamente invertible.

b) $Y_t + 1.9Y_{t-1} + 0.88Y_{t-2} = Z_t + 0.2Z_{t-1} + 0.7Z_{t-2}$

Obtenemos los polinomios caracteristicos:

$$Y_t + 1.9Y_{t-1} + 0.88Y_{t-2} = Z_t + 0.2Z_{t-1} + 0.7Z_{t-2}$$

$$(1 + 1.9L + 0.88L^2)Y_t = (1 + 0.2L + 0.7L^2)Z_t$$

$$\phi(z) = 1 + 1.9z + 0.88z^2$$

$$\theta(y) = 1 + 0.2y + 0.7y^2$$

Resolvemos el polinomio caracteristico de Y_t:

$$\phi(z) = 1 + 1.9z + 0.88z^2$$

$$1 + 1.9z + 0.88z^2 = 0$$

$$z = \frac{-1.9 \pm \sqrt{1.9^2 - 4 \cdot 0.88 \cdot 1}}{2 \cdot 0.88}$$

$$z = \frac{-1.9 \pm \sqrt{0.09}}{1.76}$$

$$z = \frac{-1.9 \pm 0.3}{1.76}$$

$$z_1 = \frac{-1.9 + 0.3}{1.76} = -0.91$$

$$z_2 = \frac{-1.9 - 0.3}{1.76} = -1.25$$

Resolvemos el polinomio caracteristico de Z_t:

$$\theta(y) = 1 + 0.2y + 0.7y^2$$

$$1 + 0.2y + 0.7y^2 = 0$$

$$y = \frac{-0.2 \pm \sqrt{0.2^2 - 4 \cdot 0.7 \cdot 1}}{2 \cdot 0.7}$$

$$y = \frac{-0.2 \pm \sqrt{-2.76}}{1.4}$$

$$y = \frac{-0.2 \pm \sqrt{2.76}i}{1.4}$$

$$y = \frac{-0.2 \pm 1.6i}{1.4}$$

$$y = -0.14 \pm 1.14i$$

$$y_1 = -0.14 + 1.14i$$

$$y_2 = -0.14 - 1.14i$$

$$|y_1| = \sqrt{(-0.14)^2 + 1.14^2} = \sqrt{1.3192} = 1.14$$

$$|y_2| = \sqrt{(-0.14)^2 + (-1.14)^2} = \sqrt{1.3192} = 1.14$$

El proceso no es causal, dado que $|z_1| = 0.91$ para Y_t, cae dentro del circulo unitario.

El proceso es invertible, dado que $|y_1|$ y $|y_1|$ para Z_t, caen fuera del circulo unitario.

c) $Y_t + 0.6Y_{t-2} = Z_t + 1.2Z_{t-1}$
Obtenemos los polinomios caracteristicos

$$(1 + 0.6L^2)Y_t = (1 + 1.2L)Z_t$$

$$\phi(z) = 1 + 0.6z^2$$

$$\theta(y) = 1 + 1.2y$$

Resolviendo el polinomio caracteristico de Y_t:

$$\phi(z) = 1 + 0.6z^2$$

$$1 + 0.6z^2 = 0$$

$$z = \frac{\pm\sqrt{-4 \cdot 0.6 \cdot 1}}{2 \cdot 0.6}$$

$$z = \frac{\pm\sqrt{-2.4}}{1.2}$$

$$z = \pm\frac{1.5}{1.2}i = \pm 1.25i$$

$$z_1 = z_2 = 1.25$$

Resolviendo el polinomio caracteristico de Z_t:

$$\theta(y) = 1 + 1.2y$$

$$1 + 1.2y = 0$$

$$y = -\frac{1}{1.2} = 0.83$$

El proceso es causal, dado que sus raices caen fuera del circulo unitario.

El proceso no es invertible, dado que su raiz cae dentro del circulo unitario.

d) $Y_t + 1.8Y_{t-1} + 0.81Y_{t-2} = Z_t$

Obtenemos el polinomio caracteristico:

$$(1 + 1.8L + 0.81L^2)Y_t$$

$$\phi(z) = 1 + 1.8z + 0.81z^2$$

Resolvemos el polinomio:

$$\phi(z) = 1 + 1.8z + 0.81z^2$$

$$1 + 1.8z + 0.81z^2 = 0$$

$$z = \frac{-1.8 \pm \sqrt{1.8^2 - 4 \cdot 0.81}}{2 \cdot 0.81}$$

$$z = \frac{-1.8 \pm \sqrt{1.8^2 - 4 \cdot 0.81}}{2 \cdot 0.81}$$

$$z = \frac{-1.8 \pm \sqrt{0}}{1.62}$$

$$z = \frac{-1.8}{1.62} = -1.1$$

Dado que sus raices son mayores a 1, podemos decir que el proceso es causal.

Dado que no hay términos de rezagados de Z_t, el proceso es automáticamente invertible.

e) $Y_t + 1.6Y_{t-1} = Z_t - 0.4Z_{t-1} + 0.04Z_{t-2}$
Obtenemos los polinomios caracteristicos

$$(1 + 1.6L)Y_t = (1 - 0.4L + 0.04L^2)Z_t$$

$$\phi(z) = 1 + 1.6z$$

$$\theta(y) = 1 - 0.4y + 0.04y^2$$

Resolviendo el polinomio caracteristico de Y_t:

$$\phi(z) = 1 + 1.6z$$

$$1 + 1.6z = 0$$

$$z = -\frac{1}{1.6} = -0.625$$

Resolviendo el polinomio caracteristico de Z_t:

$$\theta(y) = 1 - 0.4y + 0.04y^2$$

$$1 - 0.4y + 0.04y^2 = 0$$

$$y = \frac{0.4 \pm \sqrt{(-0.4)^2 - 4 \cdot 0.04}}{2 \cdot 0.04}$$

$$= \frac{0.4 \pm \sqrt{0}}{0.08} = 5$$

El proceso no es causal, dado que su raiz cae dentro del circulo unitario.

La raiz del polinomio cae fuera del circulo unitario, por lo que el proceso es invertible.

Problema 5

Considera un proceso estacionario AR(1) dado por

$$Y_t = \frac{1}{2}Y_{t-1} + e_t$$

donde e_t son no-correlacionadas $(0, \sigma^2)$. Define

$$v_t = Y_t - 2Y_{t-1}.$$

(Solución)

a) Demuestra que el residual v_t es una sucesión de v.a. no-correlacionados $(0, \sigma_v^2)$. ¿Cuál es la varianza de v_t? ¿Quién tiene más varianza, e_t o v_t?

Para demostrar que los residuales v_t son no correlacionados, debemos demostrar que:

$$\text{Cov}(v_t, v_{t-k}) = 0 \quad \text{para } k \neq 0$$

$$\text{Cov}(v_t, v_{t-k}) = E\left((v_t - E(v_t))(v_{t-k} - E(v_{t-k}))\right)$$

Dado que v_t, v_{t-k} son procesos estacionarios, sabemos que $E(v_t) = E(v_{t-k}) = 0$, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(v_t, v_{t-k}) &= E\left((v_t - 0)(v_{t-k} - 0)\right) \\ &= E(v_t v_{t-k})\end{aligned}$$

El residual v_t se define como:

$$v_t = Y_t - 2Y_{t-1}$$

Sustituyendo la ecuación del AR(1) para Y_t:

$$v_t = Y_t - 2Y_{t-1} = \frac{1}{2}Y_{t-1} + e_t - 2Y_{t-1}$$

$$= e_t - \frac{3}{2}Y_{t-1}$$

Sustituimos el valor del residual

$$
\begin{aligned}
E(v_t v_{t-k}) &= E\left((e_t - \frac{3}{2}Y_{t-1})(e_{t-k} - \frac{3}{2}Y_{t-k-1})\right) \\
&= E\left(e_t e_{t-k} - \frac{3}{2}e_{t-k}Y_{t-1} + \frac{3}{2}e_t Y_{t-k-1} - \frac{3}{2}^2 Y_{t-k-1}Y_{t-1}\right) \\
&= E(e_t e_{t-k}) - E(\frac{3}{2}e_{t-k}Y_{t-1}) + E(\frac{3}{2}e_t Y_{t-k-1}) - E(\frac{3}{2}^2 Y_{t-k-1}Y_{t-1}) \\
&= E(e_t e_{t-k}) - \frac{3}{2}E(e_{t-k}Y_{t-1}) + \frac{3}{2}E(e_t Y_{t-k-1}) - \frac{3}{2}^2 E(Y_{t-k-1}Y_{t-1})
\end{aligned}
$$

Dado que e_t es ruido blanco y no son correlacionados para $k \neq 0$

$$E(e_t e_{t-k}) = E(e_t)E(e_{t-k}) = 0$$

Dado que e_t es ruido blanco y no esta correlacionado con los valores pasados de Y_t, tenemos

$$E(e_{t-k}Y_{t-1}) = 0 \text{ y } E(e_t Y_{t-k-1}) = 0$$

Ahora calculamos $E(Y_{t-1}Y_{t-k-1})$.

$$
\begin{aligned}
E(Y_{t-1}Y_{t-k-1}) &= E[(\frac{1}{2}Y_{t-2} + e_{t-1})Y_{t-k-1}] \\
&= \frac{1}{2}E(Y_{t-2}Y_{t-k-1}) + E(e_{t-1}Y_{t-k-1}) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \sigma_Y^2
\end{aligned}
$$

A medida que k aumenta, el término $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ decrece exponencialmente y tiende a cero. Por lo que, al final nos queda.

$$E(v_t v_{t-k}) = 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 0 - \frac{3}{2}^2 \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto

Los residuales v_t son no correlacionados

Obtenemos las varianza $\text{Var}(v_t)$

$$
\begin{aligned}
\text{Var}(v_t) &= \text{Var}(Y_t - 2Y_{t-1}) \\
&= \text{Var}(\frac{1}{2}Y_{t-1} + e_t - 2Y_{t-1}) \\
&= \text{Var}(e_t - \frac{3}{2}Y_{t-1}) \\
&= \text{Var}(e_t) + \text{Var}(-\frac{3}{2}Y_{t-1}) \\
&= \text{Var}(e_t) + \frac{9}{4}\text{Var}(Y_{t-1})
\end{aligned}
$$

Donde la $\text{Var}(e_t) = \sigma^2$, por lo que debemos de saber cuanto vale $\text{Var}(Y_{t-1})$.
Para un procesos AR(1), la varianza de Y_t, se puede calcular

$$\text{Var}(Y_{t-1}) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \frac{\sigma^2}{1-\frac{1}{2}^2} = \frac{\sigma^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sigma^2}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\sigma^2$$

Sustituyendo el valor de la varianza $\text{Var}(Y_{t-1})$ y $\text{Var}(e_t) = \sigma^2$:

$$
\begin{aligned}
\text{Var}(v_t) &= \text{Var}(e_t) + \frac{9}{4}\text{Var}(Y_{t-1}) \\
&= \sigma^2 + \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3}\sigma^2 \\
&= \sigma^2 + 3\sigma^2 = 4\sigma^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

Tenemos que $\text{Var}(v_t) = 4\sigma^2$ y$\text{Var}(e_t) = \sigma^2$, por lo que $\text{Var}(v_t) > \text{Var}(e_t)$

b) Demuestra que e_t no está correlacionado con Y_{t-1} y que v_t está correlacionado con Y_{t-1}.
Para demostrar que e_t no está correlacionado con Y_{t-1}, debemos demostrar que:

$$\text{Cov}(e_t, Y_{t-1}) = 0 \quad \text{para } k \neq 0$$

$$\text{Cov}(e_t, Y_{t-1}) = E[(e_t - E(e_t))(Y_{t-1} - E(Y_{t-1}))]$$

Donde e_t es ruido blanco, por lo que $E(e_t) = 0$ y para un proceso estacionario AR(1), obtenemos su valor esperado:

$$\begin{aligned}
E(Y_{t-1}) &= E\left[\frac{1}{2}Y_{t-2} + e_{t-1}\right] \\
&= E\left[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}Y_{t-3} + e_{t-2}) + e_{t-1}\right] \\
&= E\left[(\frac{1}{2})^2 Y_{t-3} + \frac{1}{2}e_{t-2} + e_{t-1}\right]
\end{aligned}$$

Por lo que aplicando la recursion, podemos obtener que

$$\begin{aligned}
E(Y_{t-1}) &= E\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j e_{t-1-j}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j E(e_{t-1-j}) = 0
\end{aligned}$$

Por lo que sustituyendo el valor de $E(Y_{t-1})$ y $E(e_t)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(e_t, Y_{t-1}) &= E[(e_t - 0)(Y_{t-1} - 0))] \\
&= E(e_t Y_{t-1})
\end{aligned}$$

De igual forma sabemos que e_t es independiente de Y_{t-1}, por lo que $E(e_t Y_{t-1}) = 0$

Por lo tanto

e_t no está correlacionado con Y_{t-1}

Para demostrar que v_t está correlacionado con Y_{t-1}

$$\text{Cov}(v_t, Y_{t-1}) \neq 0 \quad \text{para } k \neq 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(v_t, Y_{t-1}) &= E[(v_t - E(v_t))(Y_{t-1} - E(Y_{t-1}))] \\
&= E[(Y_t - 2Y_{t-1} - E(Y_t - 2Y_{t-1}))(Y_{t-1} - E(Y_{t-1}))] \\
&= E[(Y_t - 2Y_{t-1} - E(Y_t) - 2E(Y_{t-1}))(Y_{t-1} - E(Y_{t-1}))] \\
&= E[(Y_t - 2Y_{t-1} - 0 - 0)(Y_{t-1} - 0)] \\
&= E[Y_tY_{t-1} - 2Y_{t-1}Y_{t-1}] \\
&= E[Y_tY_{t-1} - 2Y_{t-1}^2] \\
&= E[Y_tY_{t-1}] - 2E[Y_{t-1}^2] \\
&= \frac{1}{2}\sigma_Y^2 - 2\left[\frac{\sigma_e^2}{1 - [\frac{1}{2}]^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}E[Y_t^2] - 2\left[\frac{\sigma_e^2}{1 - [\frac{1}{2}]^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_e^2}{1 - [\frac{1}{2}]^2}\right] - 2\left[\frac{\sigma_e^2}{1 - [\frac{1}{2}]^2}\right] \\
&= -\frac{3}{2}\left[\frac{\sigma_e^2}{1 - [\frac{1}{2}]^2}\right] \\
&= -\frac{3}{2}\left[\frac{\sigma_e^2}{1 - \frac{1}{4}}\right] = -\frac{3}{2}\left[\frac{\sigma_e^2}{\frac{3}{4}}\right] = -\frac{3}{2}\left[\frac{4\sigma_e^2}{3}\right] = -2\sigma_e^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto

v_t está correlacionado con Y_{t-1}

c) Expresa Y_t como una media móvil MA(∞).

La raíz de la ecuación característica de la ecuación en diferencias asociada a

$$Y_t = 2Y_{t-1} + v_t$$

es 2 (i.e., es mayor que uno). Entonces, para $Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + v_t$, las condiciones v_t no-correlacionadas $(0, \sigma_v^2)$ y $|\alpha_1| > 1$ no implican que Y_t es no-estacionario.

En este ejemplo preferimos la representación $Y_t = \frac{1}{2}Y_{t-1} + e_t$ sobre $Y_t = 2Y_{t-1} + v_t$ pues, como demostrarás en a)-c), el error tiene menor varianza, no está correlacionado con Y_{t-1} y permite escribir a Y_t como una MA(∞).

solución Para encontrar Y_t en términos de e_t y Y_{t-k}, sustituimos Y_{t-1}

$$Y_{t-1} = \frac{1}{2}Y_{t-2} + e_{t-1}.$$

Al sustituir esto en la ecuación de Y_t, obtenemos:

$$Y_t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Y_{t-2} + e_{t-1}\right) + e_t,$$

dandonos:

$$Y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^2 Y_{t-2} + \frac{1}{2}e_{t-1} + e_t.$$

aplicamos la recursión en Y_{t-2}:

$$Y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^3 Y_{t-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e_{t-2} + \frac{1}{2}e_{t-1} + e_t.$$

Notamos que los coeficientes forman una serie geometrica, por lo que podemos expresar Y_t como:

$$Y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^k Y_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j e_{t-j}$$

Tomando el límite cuando $k \to \infty$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} Y_t &= \lim_{k\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k Y_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j e_{t-j}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j e_{t-j} = MA(\infty)\end{aligned}$$

Por lo que, Y_t sigue un proceso de media móvil $MA(\infty)$.

Problema 6

Entregar un control de lectura del capítulo 3 de *Brockwell and Davis (2009).*

(Solución)

3. Procesos estacionarios ARMA

Este capítulo introduce los procesos de media móvil autorregresiva (ARMA), una clase importante de series temporales $\{ X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$ definidas mediante ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes. Los procesos ARMA son útiles para modelar series temporales estacionarias, en parte debido a su capacidad para aproximar funciones de autocovarianza $\gamma(h)$ que tienden a cero cuando $h \to \infty$.

3.1 Procesos ARMA Causales e Invertibles

Las variables aleatorias $\{X_t\}$ son independientes e idénticamente distribuidas (iid) con media cero y σ^2. Ignorando todas las propiedades de las distribuciones conjuntas de $\{X_t\}$ excepto aquellas que se pueden deducir de los momentos $E(X_t)$ y $E(X_t X_{t+h})$, tales procesos se identifican con la clase de todos los procesos estacionarios que tienen media cero y función de autocovarianza:

$$y(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Definición 3.1.1. Se define el **ruido blanco** como un proceso $\{Z_t\}$ con media cero y varianza constante σ^2, denotado como:

$$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2) \tag{2}$$

Además, si las variables aleatorias $\{Z_t\}$ son independientes e idénticamente distribuidas (iid) con la misma media y varianza, se denota como:

$$\{Z_t\} \sim IID(0, \sigma^2) \tag{3}$$

Este tipo de ruido blanco es fundamental para generar una amplia clase de procesos estacionarios, al utilizarlo como un término de forzamiento en ecuaciones lineales. Esto introduce la noción de los **procesos ARMA** (Autorregresivos de Media Móvil), que son clave en la modelación de series temporales.

Definición 3.1.2. (Proceso ARMA(p,q)) Un proceso $\{ X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, ... \}$ se denomina proceso ARMA(p,q) si es estacionario y está descrito por la ecuación:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_p Z_{t-p} \tag{4}$$

donde $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, es decir, un ruido blanco con media cero y varianza constante. Si $\{X_t - \mu\}$ sigue esta ecuación, entonces el proceso ARMA tiene media μ.

La ecuación (4) se puede escribir de manera más compacta como:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t \tag{5}$$

donde ϕ y θ son polinomios de grado p y q, respectivamente:

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \tag{6}$$

y

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q \tag{7}$$

y B es el operador de desplazamiento hacia atrás:

$$B^j X_t = X_{t-j} \tag{8}$$

Definición 3.1.3. Un proceso ARMA(p,q) definido por las ecuaciones $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ se dice que es causal si existe una secuencia de constantes $\{ \phi_j \}$ tal que $\sum_{j=0}^{\infty} |\phi_j| < \infty$ y :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j Z_{t-j}, \quad t = 0, \pm 1, \ldots \tag{9}$$

Es importante destacar que la causalidad no es una propiedad del proceso $\{X_t\}$ en sí, sino de la relación entre los procesos $\{X_t\}$ y $\{Z_t\}$ en las ecuaciones ARMA definitorias. En términos de filtros, $\{X_t\}$ se considera causal si se obtiene de $\{Z_t\}$ mediante la aplicación de un filtro lineal causal. La proposición siguiente aclara el significado de la suma en (9).

Proposición 3.1.1 Si $\{ X_t \}$ es cualquier secuencia de v.a. tal que $\sup_t E\left|X_t\right| < \infty$, si $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |\Psi_j| < \infty$, entonces la serie.

$$\Psi(B)X_t = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \Psi_j B^j X_t = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \Psi_j X_{t-j} \tag{10}$$

converge absolutamente con probabilidad uno. Si, además, $\sup_t E\left|X_t\right|^2 < \infty$, entonces la serie converge en media cuadrática al mismo límite.

Proposición 3.1.2 Si $\{X_t\}$ es un proceso estacionario con función de autocovarianza $\phi(\cdot)$ y se cumple que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Psi| < \infty,$$

entonces, para cada $t \in \mathbb{Z}$, la serie (11) converge absolutamente con probabilidad uno y en media cuadrática al mismo límite, si

$$Y_t = \Psi(B)X_t \tag{11}$$

entonces el proceso $\{Y_t\}$ también es estacionario y su función de autocovarianza está dada por:

$$\gamma_Y(h) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \Psi_j \Psi_k \gamma(h - j + k)$$

Teorema 3.1.1 Sea $\{X_t\}$ un proceso ARMA(p,q), para el cual los polinomios $\phi(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$ no tiene ceros comunes. Entonces, $\{X_t\}$ es causal si y solo si $\phi(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$. Los coeficientes $\{\psi_t\}$ en (9) están determinados por la relación:

$$\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j z^j = \theta(z)\phi(z), \quad |z| \leq 1 \tag{12}$$

Observación 1 Si $\{X_t\}$ es un proceso ARMA para el cual los polinomios $\phi(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$ tienen ceros comunes, entonces hay dos posibilidades:

a) Ninguno de los ceros comunes se encuentra en el círculo unitario, en cuyo caso $\{X_t\}$ es la solución estacionaria única de las ecuaciones ARMA sin ceros comunes, obtenida al cancelar los factores comunes de $\phi(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$.

b) Al menos uno de los ceros comunes se encuentra en el círculo unitario, en cuyo caso las ecuaciones ARMA pueden tener más de una solución estacionaria.

Por consiguiente, los procesos ARMA para los cuales $\phi(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$ tienen ceros comunes son raramente considerados.

Observación 2 La primera parte de la prueba del Teorema 3.1.1 muestra que si $\{X_t\}$ es una solución estacionaria de las ecuaciones ARMA con $\phi(z) \neq 0$ para $|z| \leq 1$, entonces debemos tener

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j},$$

donde $\{\psi_j\}$ se define por (12). Por otro lado, si

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j},$$

entonces

$$\phi(B)X_t = \phi(B)\theta(B)Z_t = \theta(B)Z_t.$$

Así, el proceso $\{\psi(B)Z_t\}$ es la solución estacionaria única de las ecuaciones ARMA si $\phi(z) \neq 0$ para $|z| \leq 1$.

Observación 3 Si $\phi(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$ no tienen ceros comunes y si $\phi(z) = 0$ para algún $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, entonces no hay solución estacionaria de $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$.

Definición 3.1.4. Un proceso ARMA(p, q) definido por las ecuaciones $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ se dice que es invertible si existe una secuencia de constantes $\{\pi_j\}$ tal que $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ y

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}, \quad t = 0, \pm 1, \ldots. \tag{13}$$

Al igual que la causalidad, la propiedad de invertibilidad no es una propiedad del proceso $\{X_t\}$ por sí sola, sino de la relación entre los dos procesos $\{X_t\}$ y $\{Z_t\}$ que aparecen en las ecuaciones ARMA definitorias. El siguiente teorema proporciona condiciones necesarias y suficientes para la invertibilidad y especifica los coeficientes π_j en la representación (13).

Teorema 3.1.2 Sea $\{X_t\}$ un proceso ARMA(p,q) para el cual los polinomios $\phi(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$ no tienen ceros comunes. Entonces, $\{X_t\}$ es invertible si y solo si $\theta(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$. Los coeficientes $\{\pi_j\}$ en (13) están dados por la relación:

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \frac{\phi(z)}{\theta(z)}, \quad |z| \leq 1 \tag{14}$$

Observación 4 Si $\{X_t\}$ es una solución estacionaria de las ecuaciones:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2), \tag{15}$$

y si $\phi(z)\theta(z) \neq 0$ para $|z| \leq 1$, entonces $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ y $Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$, donde $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}$ y $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \frac{\phi(z)}{\theta(z)}$, $|z| \leq 1$.

Observación 5 Si un proceso ARMA $\{X_t\}$, descrito por las ecuaciones $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$, tiene un polinomio $\phi(z)$ que no es cero para $|z| = 1$, entonces es posible encontrar nuevos polinomios $\hat{\phi}(\cdot)$, $\hat{\theta}(\cdot)$ y un nuevo proceso de ruido blanco $\{Z_t^*\}$, tal que $\hat{\phi}(B)X_t = \hat{\theta}(B)Z_t^*$ y tal que $\{X_t\}$

se puede expresar como una función causal de $\{Z_t^*\}$, ademas si $\theta(z)$ no es cero cuando $|z| = 1$, entonces $\hat{\theta}(\cdot)$ puede elegirse de manera que $\{X_t\}$ sea función invertible de $\{Z_t^*\}$.

Observación 6 El *Teorema 3.1.2* puede extenderse al caso cuando el polinomio de promedio móvil tiene ceros en el círculo unitario, si se extiende la definición de la invertibilidad para requerir solo que $Z_t \in \sigma\{X_s, -\infty < s \leq t\}$. Con esta nueva definición, un proceso ARMA es invertible si y solo si $\theta(z) \neq 0$ para todo $|z| < 1$.

Cuando se asume que $\phi(z) \neq 0$ para todo z con $|z| = 1$, un resultado del análisis complejo garantiza la existencia de $r > 1$ tal que el cociente $\theta(z)/\phi(z)$ admite una expansión en serie de Laurent:

$$\theta(z)\phi(z)^{-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j, \tag{16}$$

que es absolutamente convergente en el anillo $r^{-1} < |z| < r$.

Teorema 3.1.3. Si $\phi(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$, entonces las ecuaciones ARMA $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ tienen la única solución estacionaria:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} \tag{17}$$

donde los coeficiente ψ_j están determinados por la ecuación (16)

3.2 Procesos de Promedios Móviles de Orden Infinito

Definición 3.2.1. Sea $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, entonces decimos que $\{X_t\}$ es un proceso de media movil ($MA(\infty)$) de $\{Z_t\}$ si existe una secuencia $\{\psi_j\}$ con $\sum |\psi_j| < \infty$ tal que:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_i Z_{t-j}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{18}$$

Ejemplo 3.2.1. El proceso $MA(q)$ definido por $X_t = \theta(B)Z_t$ es una media movil de $\{Z_t\}$ con $\psi_j = \theta^j, j = 0, 1, 2, \dots, q$ y $\psi_j = 0, j > q$.

Ejemplo 3.2.2. El proceso $AR(1)$ con $|\phi| < 1$ es una media móvil de $\{Z_t\}$ con $\psi_j = 0, j = 0, 1, 2, \dots$

Ejemplo 3.2.3. Por el teorema 3.1.1 el proceso $ARMA(p, q)$ causal $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$, es una media móvil de $\{Z_t\}$ con $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, |z| \leq 1$

Proposición 3.2.1. Si $\{X_t\}$ es un proceso estacionario con media cero y función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ tal que $\gamma(h) = 0$ para $|h| > q$ y $\gamma(q) \neq 0$, entonces $\{X_t\}$ es un proceso $MA(q)$, es decri, existe un proceso de ruido blanco $\{Z_t\}$ tal que

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q} \tag{19}$$

Teorema 3.2.1. El proceso $MA(\infty)$ definido por (18) es estacionario con media cero y función de autocovarianza:

$$\gamma(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \tag{20}$$

La noción de proceso $AR(p)$ introducida en la Seccion 3.1, también puede extenderse para permitir que p sea infinito. A partir del Teorema 3.1.2 cualquier proceso $ARMA(p, q)$ invertible, satisface las ecuaciones:

$$X_t + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j X_{t-j} = Z_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{21}$$

que tienen la misma forma que las ecuaciones $AR(p)$ con $p = \infty$

3.3 Cálculo de la Función de Autocovarianza de un Proceso ARMA(p,q)

Se presentan tres métodos para calcular la función de autocovarianza de un proceso ARMA. Donde el tercer método es el más conveniente para obtener valores numéricos y el segundo es el más conveniente para obtener una solución en forma cerrada.

Primer método Para calcular la función de autocovarianza $\gamma(k)$ de un proceso causal ARMA(p,q), $\psi(B)X_t = \theta(B)Z_t$, se basa en la relación:

$$\gamma(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|k|} \tag{22}$$

donde la función generadora $\psi(z)$ se define como:

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, \quad |z| \leq 1 \tag{23}$$

Para determinar los coeficientes ψ_j, se resuelven las siguientes ecuaciones al igualar los coeficientes de z^j:

$$\psi_j - \sum_{0<k\leq j} \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j, \quad 0 \leq j < max(p, q+1) \tag{24}$$

y

$$\psi_j - \sum_{0<k\leq p} \phi_k \psi_{j-k} = 0, \quad j \geq max(p, q+1) \tag{25}$$

Este método resuelve iterativamente los coeficientes ψ_j, y a partir de esto, se calcula la función de autocovarianza $\gamma(k)$.

Segundo método Un método alternativo para calcular la función de autocovarianza $\gamma(k)$ de un proceso causal ARMA(p,q),

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t \tag{26}$$

se basa en las ecuaciones diferenciales para $\gamma(k), k = 0, 1, 2, \ldots$, que se obtienen multiplicando ambos lados de (26) por X_{t-k}.

La solución general tiene la forma:

$$\gamma(h) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{r_i - 1} \beta_{ij} h^j \xi_i^{-h}, \quad h \geq max(p, q+1) - p \tag{27}$$

donde ξ_i son las distintas raices de $\phi(z)$

Teorema 3.2.1 La función de autovarianza del proceso

$$X_t = \sum_{j=0}^{q} \theta_j Z_{t-j}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

tiene la forma simple:

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \theta_{j+|k|}, & |k| \leq q \\ 0, & |k| > q \end{cases} \tag{28}$$

donde θ_0 se define como 1 y $\theta_j = 0$ para $j > q$.

Tercero método La determinacion numérica de la función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ a partir de las ecuaciones:

$$\gamma(k) - \phi_1\gamma(k-1) - \cdots - \phi_p\gamma(k-p) = \sigma^2 \sum_{k\leq j\leq q} \theta_j\psi_{j-k}, \quad 0 \leq k < max(p, q+1)$$

y

$$\gamma(k) - \phi_1\gamma(k-1) - \cdots - \phi_p\gamma(k-p) = 0, \quad 0 \leq k < max(p, q+1)$$

se puede realizar facilmente encontrando primero $\gamma(0), \ldots, \gamma(p)$ a partir de las ecuaciones con $k = 0, 1, \ldots, p$ y luego utilizando las ecuaciones subsecuentes para determinar $\gamma(p+1), \gamma(p+2), \ldots$ de forma recursiva.

3.4 Función de Autocorrelación Parcial

La función de autocorrelación parcial, transmite información vital sobre la estructura de dependencia de un proceso estacionario, depende únicamente de las propiedades de segundo orden del proceso. La autocorrelación parcial $\alpha(k)$ en el retraso k puede considerarse como la correlación entre X_1 y X_{k+1}, ajustada por las observaciones intermedias $X_2, \ldots, X_k$.

Definición 3.4.1 La función de autocorrelación parcial (pacf) $\alpha(\cdot)$ de una serie de tiempo estacionaria se define como:

$$\alpha(1) = Corr(X_2, X_1) = \rho(1)$$

y

$$\alpha(k) = Corr(X_{k+1} - P_{\bar{sp}\{1,X_2,\ldots,X_k\}}X_{k+1}, X_1 - P_{\bar{sp}\{1,X_2,\ldots,X_k\}}X_1), \quad k > 2$$

donde son proyecciones $P_{\bar{sp}\{1,X_2,\ldots,X_k\}}X_{k+1}$ y $P_{\bar{sp}\{1,X_2,\ldots,X_k\}}X_1$. El valor $\alpha(k)$ se conoce como la autocorrelación parcial en el retraso k.

Una definición equivalente de la función de autocorrelación parcial

Sea $\{X_t\}$ un proceso estacionario con media cero, con función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ tal que $\gamma(h) \sim 0$ cuando $h \sim \infty$, y supongamos que $\phi_{k,j}, j = 1, 2, \ldots, k; k == 1, 2, \ldots,$ son los coeficientes en la representación

$$P_{\bar{sp}\{X_1,\ldots,X_k\}}X_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \phi_{kj}X_{k+1-j}$$

a partir de las ecuaciones

$$\langle X_{k+1} - P_{\bar{sp}\{X_1,\ldots,X_k\}}X_{k+1}, X_j\rangle = 0, \quad j = k,\ldots,1$$

obtenemos

$$\begin{bmatrix} \rho(0) & \rho_1(1) & \rho_1(2) & \ldots & \rho_{k-1} \\ \rho(1) & \rho_1(0) & \rho(1) & \ldots & \rho_{k-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho_1(k-2) & \rho(k-3) & \ldots & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(k) \end{bmatrix} \quad k \geq 1. \tag{29}$$

Definición 3.4.2 La autocorrelación parcial $\alpha(k)$ de $\{X_t\}$ en el rezago k es:

$$\alpha(k) = \phi_{kk}, \quad k \geq 1$$

donde ϕ_{kk} es determindado de manera única por la ecuación (29)

Definición 3.4.3 La autocorrelación parcial muestra $\hat{\alpha}$ es el rezago k de $\{x_1,\ldots,x_n\}$. se define, dado $x_i \neq x_j$, para algún i y j por

$$\hat{\alpha}(k) = \hat{\phi}_{kk}, \quad 1 \leq k < n$$

donde $\hat{\phi}_{kk}$ se determina de manera unica por (29) con cada $\rho(j)$ remplazada por la correspondiente autocorrelación muestral $\hat{\rho}(j)$.

3.5 La función generadora de autocovarianza

Si $\{X_t\}$ es un proceso estacionario con funcion de autocovarianza $\gamma(\cdot)$, entonces la función generadora de autocovarianza se define por:

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) z^k \tag{30}$$

siempre que la serie converja para todos los z en algún anillo $r^{-1} < |<| < r$ con $r > 1$. $\{X_t\}$ es ruido blanco si y solo si la función generadora de autocovarianza $G(z)$ es constante para todo z, si

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} \quad \{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2) \tag{31}$$

y existe $r > 1$ tal que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| \, z^j < \infty \quad r^{-1} < |z| < r \tag{32}$$

la función generadora $G(\cdot)$ toma una forma simple,

$$\gamma(k) = Cov(X_{t+k}, X_t) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|k|}$$

y de ahi que

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|k|} z^k \\
&= \sigma^2 \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} (z^k + z^{-k}) \right] \\
&= \sigma^2 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k z^{-k} \right)
\end{aligned}$$

definiendo

$$\psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j, r^{-1} < |z| < r$$

rescribiendo este resultado más claramente en la forma

$$G(z) = \sigma^2 \psi(z) \psi(z^{-1}), \quad r^{-1} < |z| < r \tag{33}$$

Definición 3.5.1 Sea $\{X_t\}$ un proceso ARMA(p,q) que satisface las ecuaciones:

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

donde $\phi(z) \neq 0$ y $\theta(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$, donde existen polinomios $\phi(z)$ y $\theta(z)$ que no son cero para $|z| \leq 1$, de grado p y q respectivamente, y una secuencia de ruido blanco $\{Z_j^*\}$ tal que $\{X_t\}$ satisface las ecuaciones causales e invertibles:

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t^* \tag{34}$$

Esto significa que un proceso ARMA(p,q) puede ser descrito por ecuaciones en términos de una secuencia de ruido blanco causal e invertible bajo ciertas condiciones para los polinomios ϕ y θ.

3.6 Ecuaciones Lineales Diferenciales Homogéneas con Coeficientes Constantes

Se aborda la solución de una ecuación de diferencia lineal de orden k:

$$h_t + \alpha_1 h_{t-1} + \cdots + \alpha_k h_{t-k} = 0, \quad t \in T \tag{35}$$

donde $\alpha_i, i = 1, \ldots, k$ son constantes reales y $\alpha_k \neq 0$. Utilizando el operador de desplazamiento hacia atrás B, la ecuación se reescribe de manera más compacta como:

$$\alpha(B)h_t = 0 \tag{36}$$

donde $\alpha(B) = 1 + \alpha_1 B + \cdots + \alpha_k B^k$

Definición 3.6.1 Un conjunto de $m \leq k$ soluciones, $\{h_1, \ldots, h_m\}$, de la ecuación (36) se llamará linealmente independiente si apartir de:

$$c_1 h_1 + c_2 h_2 + \cdots + c_m h_m \quad \text{para todo } t = 0, 1, k-1 \tag{37}$$

se sigue que $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

Si $\{h_1\}$ y $\{h_2\}$ son soluciones de (36), entonces $\{c_1 h_1 + c_2 h_2\}$ también es solución. Además, para cualquier valor especificado h_i donde $0 \leq i \leq k-1$, que se denominarán condiciones iniciales, están determinados de manera única por una de las relaciones de recuerrencia:

$$h_t = -\alpha h_{t-1} - \cdots - \alpha_k h_{t-k}, \quad t = k, k+1, \ldots, \tag{38}$$

y

$$\alpha_k h_t = -h_{t+k} - \alpha_1 h_{t+k-1} - \cdots - \alpha_{k-1} h_{t+1} \quad t = -1, -2, \ldots \tag{39}$$

Si podemos encontrar k soluciones linealmente independientes $\{h_1^{(1)}, \ldots, h_k^{(k)}\}$ de (36), entonces, debido a la independencia lineal, existirá exactamente un conjunto de coeficientes $c_1, \ldots, c_k$, tal que la solución:

$$h_t = c_1 h_1^{(1)} + \cdots + c_k h_k^{(k)} \tag{40}$$

concluyendo que (40) es la solución unica de (36) que satisface las condiciones iniciales.

Teorema 3.6.1 Si $h_t = (a_0 + a_1 t + \cdots + a_j t^j)m^t$, donde $a_0, \ldots, a_j, m$ son constantes, entonces existen contantes $b_0, \ldots, b_j$ tales que:

$$(1 - mB)h_t = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_j t^j)m^t$$

Teorema 3.6.2. Si

$$\sum_{l=1}^{q} \sum_{j=0}^{p} c_{lj} t^j m_l^t = 0 \quad \text{para} \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{41}$$

donde $m_1, m_2, \ldots, m_q$ son números distintos, entonces $c_{lj} = 0$ para $l = 1, 2, \ldots, q$ y $j = 0, 1, \ldots, p$.

Problema 7

Entregar un control de lectura de las secciones 9.2 (*Identification Techniques*) y 9.3 (*Order Selection*) de *Brockwell and Davis (2009)* y de la sección 4.8 (*Order Selections*) de *Chan, N. H. (2004)*.

(Solución)

9.2 Identificación de técnicas

a) Transformaciones preliminares: Mediante métodos de estimación, para valores dados de p y q, es posible encontrar un modelo ARMA(p,q) que se ajuste a una serie de datos dada. Para que este procedimiento sea significativo, debe ser almenos recomendable que los datos sean una realización de un proceso ARMA, en particular de un proceso estacionario. Si los datos muestran características que sugieren no estacionariedad, puede ser necesario realizar una transformación para producir una nueva serie más compatible con el supuesto de estacionariedad.

La inspección del gráfico de la serie ocasionalmente revelará una fuerte dependencia de la variabilidad con el nivel de la serie, en cuyo caso los datos deben transformarse primero para reducir o eliminar esta dependencia. La ecuación que define la transformación general de Box-Cox f_λ es:

$$f_\lambda(U_t) = \begin{cases} \lambda^{-1}(U_t^\lambda - 1), & U_t \geq 0, \lambda > 0, \\ lnU_t, & U_t > 0, \lambda = 0 \end{cases}$$

El programa PEST proporciona la opción de aplicar f_λ antes de la eliminación de tendencia y/o estacionalidad de los datos. En la practica, si una transformación Box-Cox es necesaria, a menudo es suficiente usar f_0 o $f_{\frac{1}{2}}$.

Se describen dos métodos para la eliminación de la tendencia y la estacionalidad: **i) Descomposición clásica** de la serie en un componente de tendencia, un componente estacionaly un componente residual aleatorio, y **ii) Diferenciación**, el cual consta de eliminar tendencia y estacionalidad por medio de un operador de diferencia.

b) El problema de identificación: Sea $\{X_t\}$ la serie transformada corregida por la media, obtenida como se describe anteriormente en (a). El problema ahora es encontrar el modelo ARMA(p,q) más satisfactorio para representar $\{X_t\}$. Si p y q son desconocidas, es necesario identificar valores apropiados para p y q.

Para evitar el sobre ajuste, se han desarrollado criterios, en particularel criterio AIC de Akaike y el criterio CAT de Parzen, que intentan prevenir el sobreajuste al asignar efectivamente un costo a la introducción de cada parámetro adicional. Para corregir el sesgo del AIC, definida para un modelo ARMA(p,q) con vectores de coeficientes ϕ y θ, como:

$$AICC(\phi, \theta) = -2lnL(\phi, \theta, S(\phi, \theta)/n) + 2(p + q + 1)n/(n - p - q - 2) \tag{42}$$

donde $L(\phi, \theta, \sigma^2)$ es la verosimilitud de los datos bajo el modelo ARMA gaussiano con parámetros (ϕ, θ, σ^2) y $S(\phi, \theta)$ es la suma de cuadrados residuales, se selecciona el modelo que minimiza el valor de $AICC$. Una vez encontrado un modelo que minimiza el valor de $AICC$ debe verificarse la bondad de ajuste.

Las herramientas principales utilizadas como indicadores de p y q son las funciones de autocorrelación muestral y de autocorrelación parcial, así como los estimadores parciales ϕ_m y θ_m, $m = 1, 2, \ldots$. A partir de estas, generalmente es fácil juzgar si un modelo autorregresivo o de media móvil de bajo orden será satisfactorio. Si es asi, podemos proceder ajustando sucesivamente modelos de órdenes 1, 2, 3, etc., hasta encontrar un valor minimo del $AICC$.

c) Identificación de modelos mixtos: La identificación de un proceso puramente autorregresivo o de media móvil es relativamente sencilla utilizando las funciones de autocorrelación muestral y autocorrelación parcial, así como los estimadores preliminares ϕ y θ y el $AICC$. Sin embargo, para los procesos ARMA(p, q) con p y q ambos distintos de cero, las funciones ACF y PACF son más difíciles de interpretar. Por lo tanto, se busca directamente valores de p y q que minimicen el $AICC$ definido por la ecuación (42).

La búsqueda puede llevarse a cabo de diversas maneras, por ejemplo, probando todos los valores de $p + q = 1$, luego $p + q = 2$, etc., o alternativamente utilizando los siguientes pasos:

1. Utilizar estimación de máxima verosimilitud para ajustar procesos ARMA de órdenes (1,1), (2,2), ..., a los datos, seleccionando el modelo que dé el menor valor del $AICC$.

2. Partiendo del modelo ARMA(p, p) con el mínimo $AICC$, eliminar uno o más coeficientes (guiándose por los errores estándar de los coeficientes estimados), maximizar la verosimilitud para cada modelo reducido y calcular el valor de $AICC$.

3. Seleccionar el modelo con el valor de $AICC$ más pequeño, sujeto a que pase las pruebas de bondad de ajuste.

d) Uso de los residuos para la modificación del modelo: Cuando se ajusta un modelo ARMA $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ a una serie dada, una parte esencial del procedimiento es examinar los residuos, los cuales, si el modelo es satisfactorio, deberían comportarse como una realización de ruido blanco. Si las autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales de los residuos sugieren que provienen de algún otro proceso claramente identificable, entonces este modelo más complicado para los residuos puede ser utilizado para sugerir un modelo más apropiado para los datos originales.

Si los residuales parecen provenir de un proceso ARMA con vectores de coeficientes ϕ_z y θ_z, esto indica que $\{Z_t\}$ en nuestro modelo ajustado debería satisfacer $\phi_z(B)Z_t = \theta_z(B)Z_t$, donde $\{W_t\}$ es ruido blanco. Aplicando el operador $\phi_z(B)$ a ambos lados de la ecuación que define $\{X_t\}$, obtnemos:

$$\phi_z(B)\phi(B)X_t = \phi_z(B)\theta(B)Z_t = \theta_z(B)\theta(B)W_t$$

donde $\{W_t\}$ es ruido blanco. El modelo modificado para $\{X_t\}$ es entonces un proceso ARMA con operadores autorregresivos y de media móvil $\phi_z(B)\phi(B)$ y $\theta_z(B)\theta(B)$, respectivamente.

9.3 Selección de orden

Una forma de evitar sobreajuste para modelos puramente autorregresivos es minimizar el error de predicción final (FPE) de Akaike (1969), el cual es una estimación del error cuadrático medio de predicción a un paso para una realización del proceso independiente de la observada. Si ajustamos procesos autorregresivos de orden creciente p a los datos observados, la estimación de máxima verosimilitud de la varianza del ruido blanco generalmente disminuirá con p.

Segun el criterio FPE, se selecciona el orden del proceso ajustado como el valor de p para el cual el FPE es mínimo, Para aplicar dicho criterio, solo queda expresar el FPE en términos de los datos $X_1, \ldots, X_n$, como se muestra a continuación:

Supongamos que $\{X_1, \ldots, X_n\}$ es una realización de un proceso AR(p) con coeficientes $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_n$ son los estimadores de máxima verosimilitud de los coeficientes basados en $\{\hat{\phi}_1 Y_n + \cdots + \hat{\phi}_p Y_{n+1-p}\}$ de Y_{n+1} entonces el error cuadrático medio de predicción es:

$$
\begin{aligned}
&E_x(Y_{n+1} - \hat{\phi_{p1}} Y_n - \cdots - \hat{\phi}_p Y_{n+1-p})^2 \\
&= E[Y_{n+1} - \hat{\phi}_1 Y_n - \cdots - \hat{\phi}_p Y_{n+1-p} - (\hat{\phi}_1 - \phi_1) Y_n - \cdots - (\hat{\phi}_p - \phi_p) Y_{n+1-p}]^2 \\
&= \sigma^2 + E[(\hat{\phi}_p - \phi_p)'[Y_{n+1-i} Y_{n+1-j}]_{i,j=1}^{p} (\hat{\phi}_p - \phi_p)]
\end{aligned}
$$

donde $\phi_p = (\phi_1, \ldots, \phi_p), \hat{\phi}_p = (\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_p)$ y σ^2 es la varianza del ruido blanco del modelo AR(p). Escribiendo el útimo termino en la ecuación anterior como la esperanza de la esperanza condicional dada $X_1, \ldots, X_n$ y usando la independencia de $\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
E_x(Y_{n+1} - \hat{\phi_{p1}} Y_n - \cdots - \hat{\phi}_p Y_{n+1-p})^2 &= \sigma^2 + E[(\hat{\phi}_p - \phi_p)' F_p (\hat{\phi}_p - \phi_p)] \\
&= \sigma^2 + E[(\hat{\phi}_p - \phi_p)' \Gamma_p (\hat{\phi}_p - \phi_p)]
\end{aligned}
\tag{43}
$$

donde $\Gamma_p = E[Y_n Y_n']$. Podemos aproximar los últimos términos asumiendo que $n^{1/2}(\hat{\phi}_p - \phi_p)$ tiende asintoticamente a una distribución $N(0, \sigma^2 \Gamma_p^{-1})$, entonces:

$$
E\left(Y_{n+1} - \hat{\phi}_1 Y_n - \cdots - \hat{\phi}_p Y_{n+1-p}\right)^2 \approx \sigma^2 \left(1 + \frac{p}{n}\right)
$$

Si consideramos que $\hat{\sigma}^2$ es el estimador de máxima verosimilitud para σ^2, podemos afirmar que, para valores grandes de n, el cociente $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ sigue aproximadamente una distribución chi-cuadrado con $n-p$ grados de libertad. Por consiguiente, reemplazamos σ^2 en la expresión anterior por el estimador $\frac{n\hat{\sigma}^2}{n-p}$ para calcular el error cuadrático medio de predicción estimado para Y_{n+1}:

$$
FPE = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{n+p}{n-p}\right)
$$

Un criterio más amplio para la selección de modelos es el criterio de información de Akaike (AIC), que fue propuesto por Akaike en 1973. Este criterio fue diseñado para proporcionar una estimación que sea aproximadamente insesgada del índice de Kullback-Leibler del modelo ajustado en relación con el modelo verdadero (que se definirá más adelante). Aquí empleamos una versión del AIC que ha sido corregida por sesgo, conocida como AICC, sugerida por Hurvich y Tsai en 1989.

Si X representa un vector aleatorio de dimensión n cuya densidad de probabilidad pertenece a la familia $\{f(\cdot;\psi), \psi \in \Psi\}$, la discrepancia de Kullback-Leibler entre $f(\cdot;\psi)$ y $f(\cdot;\theta)$ se establece como

$$d(\psi|\hat{\theta}) = \Delta(\psi|\theta) - \Delta(\theta|\theta),$$

donde

$$\Delta(\psi|\hat{\theta}) = E_\theta\left(-2\ln f(X;\psi)\right) = -2\int \ln(f(x;\psi))f(x;\theta)dx,$$

es el índice de Kullback-Leibler de $f(\cdot;\psi)$ con respecto a $f(\cdot;\hat{\theta})$. (En términos generales, $\Delta(\psi|\theta) \neq \Delta(\theta|\psi)$).

Aplicando la desigualdad de Jensen, observamos que

$$\begin{aligned} d(\psi|\theta) = -2\int \ln\left(\frac{f(x;\psi)}{f(x;\theta)}\right) f(x;\theta)dx &\geq -2\ln\left(\int \frac{f(x;\psi)}{f(x;\theta)} f(x;\theta)dx\right) \\ &= -2\ln\left(\int f(x;\psi)dx\right) = 0. \end{aligned}$$

La igualdad se alcanza si y solo si $f(x;\psi) = f(x;\theta)$.