



**Министерство образования Российской Федерации  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
им. Н.Э. БАУМАНА**

Факультет: Информатика и системы управления  
Кафедра: Информационная безопасность (ИУ8)

**Теория принятия решений в условиях информационных конфликтов**

**Лабораторная работа №3**

“Решение ЗЛП методом ветвей и границ”

Вариант 13

**Преподаватель:** Коннова Н. С.  
**Студент:** Андреев Г.А.  
**Группа:** ИУ8-71

2021 г.

**Цель работы** — Изучить постановку задачи целочисленного линейного программирования; получить решение задачи ЦЛП методом ветвей и границ.

### Постановка задачи

Требуется найти решение следующей задачи линейного программирования (ЛП):

Методом ветвей и границ найти среди всех  $n$ -мерных векторов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases},$$

Такой, для которого достигается минимум ЦФ:

$$\min F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

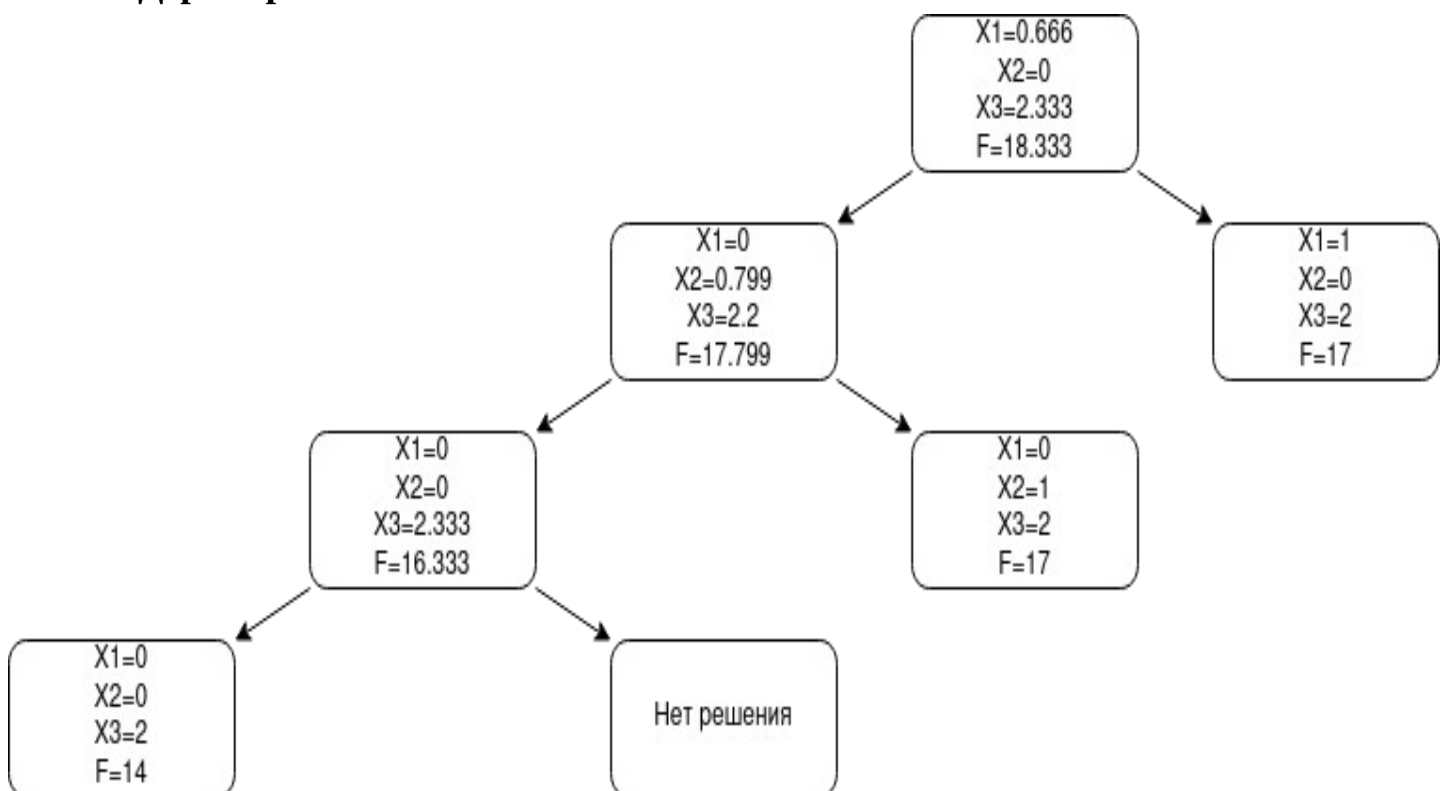
### Условие

$$c = [3, 3, 7]$$

$$b = [3, 5, 7]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 3 \end{bmatrix}$$

### Дерево решений



## Решение

Метод ветвей и границ:

|     | S0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|-----|----|-----|-----|-----|
| x_4 | 3  | 1   | 1   | 1   |
| x_5 | 5  | 1   | 4   | 0   |
| x_6 | 7  | 0   | 0.5 | 3   |
| F   | 0  | -3  | -3  | -7  |

Ищем оптимальное решение:

Индекс разрешающего элемента: (2, 3)

|     | S0       | x_1 | x_2      | x_6       |
|-----|----------|-----|----------|-----------|
| x_4 | 0.666667 | 1   | 0.833333 | -0.333333 |
| x_5 | 5        | 1   | 4        | 0         |
| x_3 | 2.33333  | 0   | 0.166667 | 0.333333  |
| F   | 16.3333  | -3  | -1.83333 | 2.33333   |

Индекс разрешающего элемента: (0, 1)

|     | S0       | x_4 | x_2      | x_6       |
|-----|----------|-----|----------|-----------|
| x_1 | 0.666667 | 1   | 0.833333 | -0.333333 |
| x_5 | 4.33333  | -1  | 3.16667  | 0.333333  |
| x_3 | 2.33333  | 0   | 0.166667 | 0.333333  |
| F   | 18.3333  | 3   | 0.666667 | 1.33333   |

$x_1 = 0.6666666666666665$   
 $x_2 = 0$   
 $x_3 = 2.3333333333333335$   
 $F = 18.333333333333332$

Ветвимся влево по переменной  $x_0 \leq 0$

|       | S0 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|-------|----|-------|-------|-------|
| $x_4$ | 3  | 1     | 1     | 1     |
| $x_5$ | 5  | 1     | 4     | 0     |
| $x_6$ | 7  | 0     | 0.5   | 3     |
| $x_7$ | 0  | 1     | 0     | 0     |
| F     | 0  | -3    | -3    | -7    |

Ищем оптимальное решение:

Индекс разрешающего элемента: (2, 3)

|       | S0       | $x_1$ | $x_2$    | $x_6$     |
|-------|----------|-------|----------|-----------|
| $x_4$ | 0.666667 | 1     | 0.833333 | -0.333333 |
| $x_5$ | 5        | 1     | 4        | 0         |
| $x_3$ | 2.33333  | 0     | 0.166667 | 0.333333  |
| $x_7$ | 0        | 1     | 0        | 0         |
| F     | 16.3333  | -3    | -1.83333 | 2.33333   |

Индекс разрешающего элемента: (3, 1)

|     | S0       | x_7 | x_2      | x_6       |
|-----|----------|-----|----------|-----------|
| x_4 | 0.666667 | -1  | 0.833333 | -0.333333 |
| x_5 | 5        | -1  | 4        | 0         |
| x_3 | 2.33333  | 0   | 0.166667 | 0.333333  |
| x_1 | 0        | 1   | 0        | 0         |
| F   | 16.3333  | 3   | -1.83333 | 2.33333   |

Индекс разрешающего элемента: (0, 2)

|     | S0   | x_7  | x_4  | x_6  |
|-----|------|------|------|------|
| x_2 | 0.8  | -1.2 | 1.2  | -0.4 |
| x_5 | 1.8  | 3.8  | -4.8 | 1.6  |
| x_3 | 2.2  | 0.2  | -0.2 | 0.4  |
| x_1 | 0    | 1    | 0    | 0    |
| F   | 17.8 | 0.8  | 2.2  | 1.6  |

x1 = 0.0

x2 = 0.7999999999999998

x3 = 2.2

F = 17.799999999999997

Ветвимся влево по переменной x\_1 <= 0

|     | S0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|-----|----|-----|-----|-----|
| x_4 | 3  | 1   | 1   | 1   |
| x_5 | 5  | 1   | 4   | 0   |
| x_6 | 7  | 0   | 0.5 | 3   |
| x_7 | 0  | 1   | 0   | 0   |
| x_8 | 0  | 0   | 1   | 0   |
| F   | 0  | -3  | -3  | -7  |

Ищем оптимальное решение:

Индекс разрешающего элемента: (2, 3)

|     | S0       | x_1 | x_2      | x_6       |
|-----|----------|-----|----------|-----------|
| x_4 | 0.666667 | 1   | 0.833333 | -0.333333 |
| x_5 | 5        | 1   | 4        | 0         |
| x_3 | 2.33333  | 0   | 0.166667 | 0.333333  |
| x_7 | 0        | 1   | 0        | 0         |
| x_8 | 0        | 0   | 1        | 0         |
| F   | 16.3333  | -3  | -1.83333 | 2.33333   |

Индекс разрешающего элемента: (3, 1)

|     | S0       | x_7 | x_2      | x_6       |
|-----|----------|-----|----------|-----------|
| x_4 | 0.666667 | -1  | 0.833333 | -0.333333 |
| x_5 | 5        | -1  | 4        | 0         |
| x_3 | 2.33333  | 0   | 0.166667 | 0.333333  |
| x_1 | 0        | 1   | 0        | 0         |
| x_8 | 0        | 0   | 1        | 0         |
| F   | 16.3333  | 3   | -1.83333 | 2.33333   |

Индекс разрешающего элемента: (4, 2)

|     | S0       | x_7 | x_8       | x_6       |
|-----|----------|-----|-----------|-----------|
| x_4 | 0.666667 | -1  | -0.833333 | -0.333333 |
| x_5 | 5        | -1  | -4        | 0         |
| x_3 | 2.33333  | 0   | -0.166667 | 0.333333  |
| x_1 | 0        | 1   | 0         | 0         |
| x_2 | 0        | 0   | 1         | 0         |
| F   | 16.3333  | 3   | 1.83333   | 2.33333   |

$x_1 = 0.0$   
 $x_2 = 0.0$   
 $x_3 = 2.3333333333333335$   
 $F = 16.333333333333332$

Ветвимся влево по переменной  $x_2 \leq 2$

|       | S0 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|-------|----|-------|-------|-------|
| $x_4$ | 3  | 1     | 1     | 1     |
| $x_5$ | 5  | 1     | 4     | 0     |
| $x_6$ | 7  | 0     | 0.5   | 3     |
| $x_7$ | 0  | 1     | 0     | 0     |
| $x_8$ | 0  | 0     | 1     | 0     |
| $x_9$ | 2  | 0     | 0     | 1     |
| F     | 0  | -3    | -3    | -7    |

Ищем оптимальное решение:

Индекс разрешающего элемента: (5, 3)

|       | S0 | $x_1$ | $x_2$ | $x_9$ |
|-------|----|-------|-------|-------|
| $x_4$ | 1  | 1     | 1     | -1    |
| $x_5$ | 5  | 1     | 4     | 0     |
| $x_6$ | 1  | 0     | 0.5   | -3    |
| $x_7$ | 0  | 1     | 0     | 0     |
| $x_8$ | 0  | 0     | 1     | 0     |
| $x_3$ | 2  | 0     | 0     | 1     |
| F     | 14 | -3    | -3    | 7     |

Индекс разрешающего элемента: (3, 1)

|     | S0 | x_7 | x_2 | x_9 |
|-----|----|-----|-----|-----|
| x_4 | 1  | -1  | 1   | -1  |
| x_5 | 5  | -1  | 4   | 0   |
| x_6 | 1  | 0   | 0.5 | -3  |
| x_1 | 0  | 1   | 0   | 0   |
| x_8 | 0  | 0   | 1   | 0   |
| x_3 | 2  | 0   | 0   | 1   |
| F   | 14 | 3   | -3  | 7   |

Индекс разрешающего элемента: (4, 2)

|     | S0 | x_7 | x_8  | x_9 |
|-----|----|-----|------|-----|
| x_4 | 1  | -1  | -1   | -1  |
| x_5 | 5  | -1  | -4   | 0   |
| x_6 | 1  | 0   | -0.5 | -3  |
| x_1 | 0  | 1   | 0    | 0   |
| x_2 | 0  | 0   | 1    | 0   |
| x_3 | 2  | 0   | 0    | 1   |
| F   | 14 | 3   | 3    | 7   |



$x_1 = 0.0$

$x_2 = 0.0$

$x_3 = 2.0$

$F = 14.0$

Найдено целочисленное решение:

Ветвимся вправо по переменной  $x_2 \Rightarrow 3$

|       | S0 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|-------|----|-------|-------|-------|
| $x_4$ | 3  | 1     | 1     | 1     |
| $x_5$ | 5  | 1     | 4     | 0     |
| $x_6$ | 7  | 0     | 0.5   | 3     |
| $x_7$ | 0  | 1     | 0     | 0     |
| $x_8$ | 0  | 0     | 1     | 0     |
| $x_9$ | -3 | 0     | 0     | -1    |
| F     | 0  | -3    | -3    | -7    |

Индекс разрешающего элемента: (5, 3)

|       | S0 | $x_1$ | $x_2$ | $x_9$ |
|-------|----|-------|-------|-------|
| $x_4$ | 0  | 1     | 1     | 1     |
| $x_5$ | 5  | 1     | 4     | 0     |
| $x_6$ | -2 | 0     | 0.5   | 3     |
| $x_7$ | 0  | 1     | 0     | 0     |
| $x_8$ | 0  | 0     | 1     | 0     |
| $x_3$ | 3  | 0     | 0     | -1    |
| F     | 21 | -3    | -3    | -7    |

В ветви  $x_2 \geq 3$  нет решения

Ветвимся вправо по переменной  $x_1 \Rightarrow 1$

|       | S0 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|-------|----|-------|-------|-------|
| $x_4$ | 3  | 1     | 1     | 1     |
| $x_5$ | 5  | 1     | 4     | 0     |
| $x_6$ | 7  | 0     | 0.5   | 3     |
| $x_7$ | 0  | 1     | 0     | 0     |
| $x_8$ | -1 | 0     | -1    | 0     |
| F     | 0  | -3    | -3    | -7    |

-----

Индекс разрешающего элемента: (4, 2)

|     | S0  | x_1 | x_8 | x_3 |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_4 | 2   | 1   | 1   | 1   |
| x_5 | 1   | 1   | 4   | 0   |
| x_6 | 6.5 | 0   | 0.5 | 3   |
| x_7 | 0   | 1   | 0   | 0   |
| x_2 | 1   | 0   | -1  | 0   |
| F   | 3   | -3  | -3  | -7  |

-----

Ищем оптимальное решение:

-----

Индекс разрешающего элемента: (0, 3)

|     | S0  | x_1 | x_8  | x_4 |
|-----|-----|-----|------|-----|
| x_3 | 2   | 1   | 1    | 1   |
| x_5 | 1   | 1   | 4    | 0   |
| x_6 | 0.5 | -3  | -2.5 | -3  |
| x_7 | 0   | 1   | 0    | 0   |
| x_2 | 1   | 0   | -1   | 0   |
| F   | 17  | 4   | 4    | 7   |

-----

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1.0$$

$$x_3 = 2.0$$

$$F = 17.0$$

Найдено целочисленное решение:

Ветвимся вправо по переменной  $x_0 \Rightarrow 1$

|     | S0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|-----|----|-----|-----|-----|
| x_4 | 3  | 1   | 1   | 1   |
| x_5 | 5  | 1   | 4   | 0   |
| x_6 | 7  | 0   | 0.5 | 3   |
| x_7 | -1 | -1  | 0   | 0   |
| F   | 0  | -3  | -3  | -7  |

Индекс разрешающего элемента: (3, 1)

|     | S0 | x_7 | x_2 | x_3 |
|-----|----|-----|-----|-----|
| x_4 | 2  | 1   | 1   | 1   |
| x_5 | 4  | 1   | 4   | 0   |
| x_6 | 7  | 0   | 0.5 | 3   |
| x_1 | 1  | -1  | 0   | 0   |
| F   | 3  | -3  | -3  | -7  |

Ищем оптимальное решение:

Индекс разрешающего элемента: (0, 3)

|     | S0 | x_7 | x_2  | x_4 |
|-----|----|-----|------|-----|
| x_3 | 2  | 1   | 1    | 1   |
| x_5 | 4  | 1   | 4    | 0   |
| x_6 | 1  | -3  | -2.5 | -3  |
| x_1 | 1  | -1  | 0    | 0   |
| F   | 17 | 4   | 4    | 7   |

$$x_1 = 1.0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 2.0$$

$$F = 17.0$$

Найдено целочисленное решение:

-----

Все целочисленные решения

$$F(0.0, 0.0, 2.0) = 14.0$$

$$F(0, 1.0, 2.0) = 17.0$$

$$F(1.0, 0, 2.0) = 17.0$$

Рисунок с деревом см на картинке.

-----

Полный перебор:

-----

$$F(0, 0, 0) = 0$$

$$F(0, 0, 1) = 7$$

$$F(0, 0, 2) = 14$$

$$F(0, 1, 0) = 3$$

$$F(0, 1, 1) = 10$$

$$F(0, 1, 2) = 17$$

$$F(1, 0, 0) = 3$$

$$F(1, 0, 1) = 10$$

$$F(1, 0, 2) = 17$$

$$F(1, 1, 0) = 6$$

$$F(1, 1, 1) = 13$$

$$F(2, 0, 0) = 6$$

$$F(2, 0, 1) = 13$$

$$F(3, 0, 0) = 9$$

Оптимальное решение полным перебором:

$$F = 17, x = (1, 0, 2)$$

**Сравнение результатов от округления с найденным решением**

Результат решения ЗЛП симплекс методом:

$$x_1 = 0.667$$

$$x_2 = 0$$

X3 = 2.333  
F = -18.333

Результат решения ЗЛП методом ветвей и границ:

X = (1, 0, 2)  
F = 17.0

### Листинг

**main.py** ([https://github.com/andreev-g/iu8-decision-theory/blob/master/lab\\_3/main.py](https://github.com/andreev-g/iu8-decision-theory/blob/master/lab_3/main.py))

```
import math
import numpy as np
import pandas as pd

from src.brute import BruteForce
from src.utility import print_separator
from src.simplex.simplex import SimplexMethod

class MinToward:
    def __str__(self):
        return 'min'

class MaxToward:
    def __str__(self):
        return 'max'

class TreeNode:
    def __init__(self, f, value: SimplexMethod):
        self.left = None
        self.right = None
        self.f = f
        self.value = value

class BranchesAndBoundsMethod:
    def __init__(self, f, value):
        self.integer_solutions = []
        self.root = TreeNode(f, value)

    @staticmethod
    def find_float_idx(arr):
        if arr[0] == 'Нет решения':
            return False, 0, 0
        for idx, el in enumerate(arr[1:]):
            if not int(el) == float(el):
                return True, idx, math.floor(el)
```

```

return False, 0, 0

def branching(self, node):
    find, idx, el = self.find_float_idx(node.value.answer[:4])
    if find:
        # Ветвление влево если найдено дробное решение
        new_row = np.zeros(node.value.c.size)
        new_row[idx] = 1
        a = np.vstack((node.value.A, new_row))
        b = np.append(node.value.b, el)
        simplex = SimplexMethod(a, b, node.value.c, mode=MaxTowardng())
        try:
            print(f'Ветвимся влево по переменной  $x_{\{idx\}} \leq \{el\}$ ')
            simplex.get_result()
        except AssertionError:
            node.left = TreeNode('Нет\n решения', simplex)
            print(f'В ветви  $x_{\{idx\}} \leq \{el\}$  нет решения')
            return
        node.left = TreeNode(simplex.answer[0], simplex)
        self.branching(node.left)
        # Ветвление вправо если найдено дробное решение
        new_row_right = np.zeros(node.value.c.size)
        new_row_right[idx] = -1
        a_right = np.vstack((node.value.A, new_row_right))
        b_right = np.append(node.value.b, -(el + 1))
        simplex = SimplexMethod(a_right, b_right, node.value.c, mode=MaxTowardng())
        try:
            print(f'Ветвимся вправо по переменной  $x_{\{idx\}} \geq \{el+1\}$ ')
            simplex.get_result()
        except AssertionError:
            node.right = TreeNode('Нет решения', simplex)
            print(f'В ветви  $x_{\{idx\}} \geq \{el+1\}$  нет решения')
            return
        node.right = TreeNode(simplex.answer[0], simplex)
        self.branching(node.right)
    if not find:
        if node.value.answer[0] == 'Нет\n решения':
            return
        print('Найдено целочисленное решение:')
        self.integer_solutions.append(node)
        return

def start(self):
    self.branching(self.root)
    print_separator()
    print('Все целочисленные решения')
    for solution in self.integer_solutions:
        print(f"F({solution.value.answer[1]}, {solution.value.answer[2]}, {solution.value.answer[3]}) = {solution.value.answer[0]}")
    self.print()

def print(self):
    lines, *_ = self._make_string_representation(self.root)

```

```

for line in lines:
    print(line)

def _make_string_representation(self, node):
    """
    Создает рекурсивное представление дерева
    """
    # нет ни одного поддеревя
    if node.right is None and node.left is None:
        line = '%s' % node.f
        width = len(line)
        height = 1
        middle = width // 2
        return [line], width, height, middle

    # есть только левое поддерево
    if node.right is None:
        lines, n, p, x = self._make_string_representation(node.left)
        s = '%s' % node.f
        u = len(s)
        first_line = (x + 1) * ' ' + (n - x - 1) * '_' + s
        second_line = x * ' ' + '/' + (n - x - 1 + u) * ' '
        shifted_lines = [line + u * ' ' for line in lines]
        return [first_line, second_line] + shifted_lines, n + u, p + 2, n + u // 2

    # есть только правое поддерево
    if node.left is None:
        lines, n, p, x = self._make_string_representation(node.right)
        s = '%s' % node.f
        u = len(s)
        first_line = s + x * '_' + (n - x) * ' '
        second_line = (u + x) * ' ' + '\\' + (n - x - 1) * ' '
        shifted_lines = [u * ' ' + line for line in lines]
        return [first_line, second_line] + shifted_lines, n + u, p + 2, u // 2

    # есть оба поддерева
    left, n, p, x = self._make_string_representation(node.left)
    right, m, q, y = self._make_string_representation(node.right)
    s = '%s' % node.f
    u = len(s)
    first_line = (x + 1) * ' ' + (n - x - 1) * '_' + s + y * '_' + (m - y) * ' '
    second_line = x * ' ' + '/' + (n - x - 1 + u + y) * ' ' + '\\' + (m - y - 1) * ' '
    if p < q:
        left += [n * ' '] * (q - p)
    elif q < p:
        right += [m * ' '] * (p - q)
    zipped_lines = zip(left, right)
    lines = [first_line, second_line] + [a + u * ' ' + b for a, b in zipped_lines]
    return lines, n + m + u, max(p, q) + 2, n + u // 2

if __name__ == '__main__':
    print('Метод ветвей и границ:')

```

```
print_separator()

c = [3, 3, 7]
A = [[1, 1, 1],
      [1, 4, 0],
      [0, 0.5, 3]]
b = [3, 5, 7]

simplex = SimplexMethod(A, b, c, MaxTowardling())
solution = simplex.get_result()

tree = BranchesAndBoundsMethod(solution[0], simplex)
tree.start()

print_separator()
print('Полный перебор:')
print_separator()
bf = BruteForce(A, b, c, solution[0])
brute_solution, value = bf.brute_optimal()
print("Оптимальное решение полным перебором:")
print(f'F = {brute_solution}, x = {value}')
```