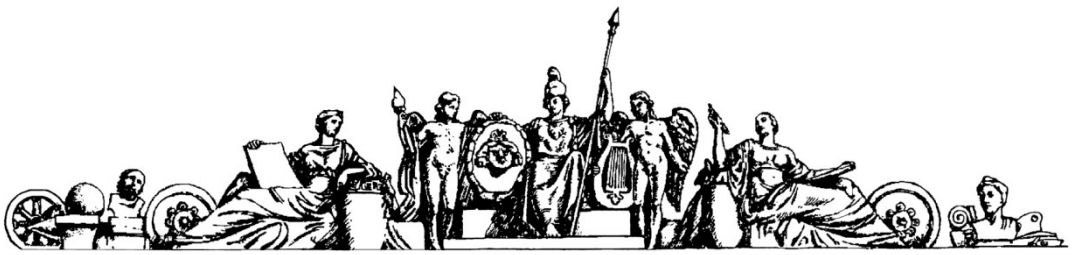


Министерство образования Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Э. БАУМАНА

Факультет: Информатика и системы управления
Кафедра: Информационная безопасность (ИУ8)

Теория принятия решений в условиях информационных конфликтов

Лабораторная работа №3

“Решение ЗЛП методом ветвей и границ”

Вариант 13

Преподаватель: Коннова Н. С.
Студент: Андреев Г.А.
Группа: ИУ8-71

2021 г.

Цель работы — Изучить постановку задачи целочисленного линейного программирования; получить решение задачи ЦЛП методом ветвей и границ.

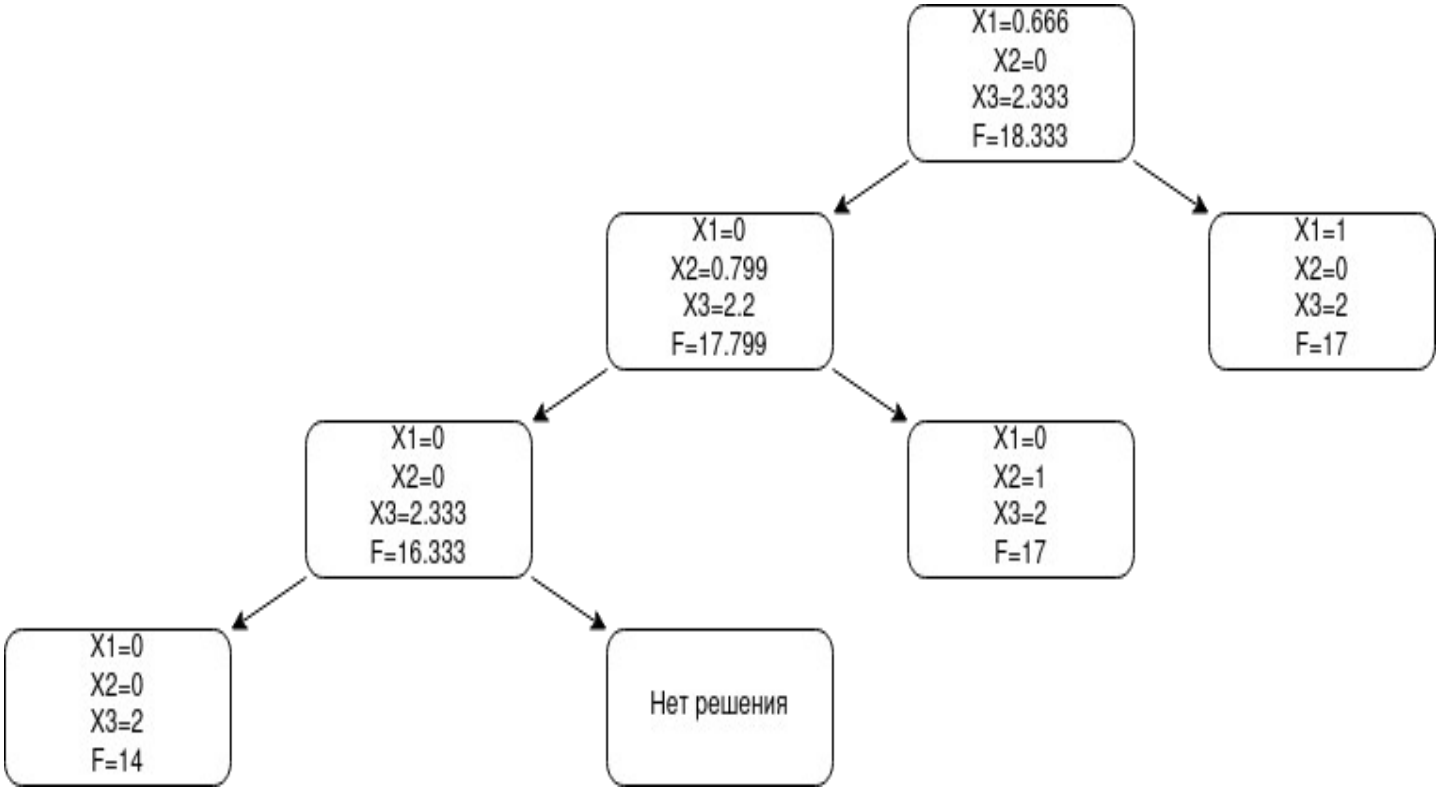
Постановка задачи

Требуется найти решение следующей задачи линейного программирования (ЛП):
Методом ветвей и границ найти среди всех n-мерных векторов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$¿, удовлетворяющих системе: $\sum x_i * Ai \le bi$,
Такой, для которого достигается минимум ЦФ:
$F=\sum x_i * c_i$

Условие

c = [3, 3, 7]
b = [3, 5, 7]
A = [[1, 1, 1],
[1, 4, 0],
[0, 0.5, 3]]

Дерево решений



Решение

Метод ветвей и границ:

	S0	x_1	x_2	x_3
x_4	3	1	1	1
x_5	5	1	4	0
x_6	7	0	0.5	3
F	0	-3	-3	-7

Ищем оптимальное решение:

Индекс разрешающего элемента: (2, 3)

	S0	x_1	x_2	x_6
x_4	0.666667	1	0.833333	-0.333333
x_5	5	1	4	0
x_3	2.33333	0	0.166667	0.333333
F	16.3333	-3	-1.83333	2.33333

Индекс разрешающего элемента: (0, 1)

	S0	x_4	x_2	x_6
x_1	0.666667	1	0.833333	-0.333333
x_5	4.33333	-1	3.16667	0.333333
x_3	2.33333	0	0.166667	0.333333
F	18.3333	3	0.666667	1.33333

---

x1 = 0.6666666666666665
x2 = 0
x3 = 2.3333333333333335
F = 18.333333333333332

Ветвимся влево по переменной x_0 <= 0

	S0	x_1	x_2	x_3
x_4	3	1	1	1
x_5	5	1	4	0
x_6	7	0	0.5	3
x_7	0	1	0	0
F	0	-3	-3	-7

Ищем оптимальное решение:

Индекс разрешающего элемента: (2, 3)

	S0	x_1	x_2	x_6
x_4	0.666667	1	0.833333	-0.333333
x_5	5	1	4	0
x_3	2.33333	0	0.166667	0.333333
x_7	0	1	0	0
F	16.3333	-3	-1.83333	2.33333

Индекс разрешающего элемента: (3, 1)

	S0	x_7	x_2	x_6
x_4	0.666667	-1	0.833333	-0.333333
x_5	5	-1	4	0
x_3	2.33333	0	0.166667	0.333333
x_1	0	1	0	0
F	16.3333	3	-1.83333	2.33333

Индекс разрешающего элемента: (0, 2)

	S0	x_7	x_4	x_6
x_2	0.8	-1.2	1.2	-0.4
x_5	1.8	3.8	-4.8	1.6
x_3	2.2	0.2	-0.2	0.4
x_1	0	1	0	0
F	17.8	0.8	2.2	1.6

---

x1 = 0.0
x2 = 0.7999999999999998
x3 = 2.2
F = 17.799999999999997
Ветвимся влево по переменной x_1 <= 0

	S0	x_1	x_2	x_3
x_4	3	1	1	1
x_5	5	1	4	0
x_6	7	0	0.5	3
x_7	0	1	0	0
x_8	0	0	1	0
F	0	-3	-3	-7

Ищем оптимальное решение:
Индекс разрешающего элемента: (2, 3)

	S0	x_1	x_2	x_6
x_4	0.666667	1	0.833333	-0.333333
x_5	5	1	4	0
x_3	2.33333	0	0.166667	0.333333
x_7	0	1	0	0
x_8	0	0	1	0
F	16.3333	-3	-1.83333	2.33333

Индекс разрешающего элемента: (3, 1)

	S0	x_7	x_2	x_6
x_4	0.666667	-1	0.833333	-0.333333
x_5	5	-1	4	0
x_3	2.33333	0	0.166667	0.333333
x_1	0	1	0	0
x_8	0	0	1	0
F	16.3333	3	-1.83333	2.33333

Индекс разрешающего элемента: (4, 2)

	S0	x_7	x_8	x_6
x_4	0.666667	-1	-0.833333	-0.333333
x_5	5	-1	-4	0
x_3	2.33333	0	-0.166667	0.333333
x_1	0	1	0	0
x_2	0	0	1	0
F	16.3333	3	1.83333	2.33333

---

x1 = 0.0
x2 = 0.0
x3 = 2.3333333333333335
F = 16.333333333333332

Ветвимся влево по переменной x_2 <= 2

	S0	x_1	x_2	x_3
x_4	3	1	1	1
x_5	5	1	4	0
x_6	7	0	0.5	3
x_7	0	1	0	0
x_8	0	0	1	0
x_9	2	0	0	1
F	0	-3	-3	-7

Ищем оптимальное решение:

Индекс разрешающего элемента: (5, 3)

	S0	x_1	x_2	x_9
x_4	1	1	1	-1
x_5	5	1	4	0
x_6	1	0	0.5	-3
x_7	0	1	0	0
x_8	0	0	1	0
x_3	2	0	0	1
F	14	-3	-3	7

Индекс разрешающего элемента: (3, 1)

	S0	x_7	x_2	x_9
x_4	1	-1	1	-1
x_5	5	-1	4	0
x_6	1	0	0.5	-3
x_1	0	1	0	0
x_8	0	0	1	0
x_3	2	0	0	1
F	14	3	-3	7

Индекс разрешающего элемента: (4, 2)

	S0	x_7	x_8	x_9
x_4	1	-1	-1	-1
x_5	5	-1	-4	0
x_6	1	0	-0.5	-3
x_1	0	1	0	0
x_2	0	0	1	0
x_3	2	0	0	1
F	14	3	3	7

---

x1 = 0.0
x2 = 0.0
x3 = 2.0
F = 14.0
Найдено целочисленное решение:
Ветвимся вправо по переменной x_2 => 3

	S0	x_1	x_2	x_3
x_4	3	1	1	1
x_5	5	1	4	0
x_6	7	0	0.5	3
x_7	0	1	0	0
x_8	0	0	1	0
x_9	-3	0	0	-1
F	0	-3	-3	-7

Индекс разрешающего элемента: (5, 3)

	S0	x_1	x_2	x_9
x_4	0	1	1	1
x_5	5	1	4	0
x_6	-2	0	0.5	3
x_7	0	1	0	0
x_8	0	0	1	0
x_3	3	0	0	-1
F	21	-3	-3	-7

В ветви x_2 >= 3 нет решения
Ветвимся вправо по переменной x_1 => 1

	S0	x_1	x_2	x_3
x_4	3	1	1	1
x_5	5	1	4	0
x_6	7	0	0.5	3
x_7	0	1	0	0
x_8	-1	0	-1	0
F	0	-3	-3	-7

Индекс разрешающего элемента: (4, 2)

	S0	x_1	x_8	x_3
x_4	2	1	1	1
x_5	1	1	4	0
x_6	6.5	0	0.5	3
x_7	0	1	0	0
x_2	1	0	-1	0
F	3	-3	-3	-7

Ищем оптимальное решение:

Индекс разрешающего элемента: (0, 3)

	S0	x_1	x_8	x_4
x_3	2	1	1	1
x_5	1	1	4	0
x_6	0.5	-3	-2.5	-3
x_7	0	1	0	0
x_2	1	0	-1	0
F	17	4	4	7

---

x1 = 0
x2 = 1.0
x3 = 2.0
F = 17.0
Найдено целочисленное решение:
Ветвимся вправо по переменной x_0 => 1

	S0	x_1	x_2	x_3
x_4	3	1	1	1
x_5	5	1	4	0
x_6	7	0	0.5	3
x_7	-1	-1	0	0
F	0	-3	-3	-7

Индекс разрешающего элемента: (3, 1)

	S0	x_7	x_2	x_3
x_4	2	1	1	1
x_5	4	1	4	0
x_6	7	0	0.5	3
x_1	1	-1	0	0
F	3	-3	-3	-7

Ищем оптимальное решение:

Индекс разрешающего элемента: (0, 3)

	S0	x_7	x_2	x_4
x_3	2	1	1	1
x_5	4	1	4	0
x_6	1	-3	-2.5	-3
x_1	1	-1	0	0
F	17	4	4	7

```
x1 = 1.0
x2 = 0
x3 = 2.0
F = 17.0
Найдено целочисленное решение:

---------------------------------------------------------

Все целочисленные решения
F(0.0, 0.0, 2.0) = 14.0
F(0, 1.0, 2.0) = 17.0
F(1.0, 0, 2.0) = 17.0

Рисунок с деревом см на картинке.
---------------------------------------------------------

Полный перебор:

---------------------------------------------------------

F(0, 0, 0) = 0
F(0, 0, 1) = 7
F(0, 0, 2) = 14
F(0, 1, 0) = 3
F(0, 1, 1) = 10
F(0, 1, 2) = 17
F(1, 0, 0) = 3
F(1, 0, 1) = 10
F(1, 0, 2) = 17
F(1, 1, 0) = 6
F(1, 1, 1) = 13
F(2, 0, 0) = 6
F(2, 0, 1) = 13
F(3, 0, 0) = 9
Оптимальное решение полным перебором:
F = 17, x = (1, 0, 2)
```

Сравнение результатов от округления с найденным решением

Результат решения ЗЛП симплекс методом:

```
X1 = 0.667
X2 = 0
```

```
X3 = 2.333
F =  -18.333
```

Результат решения ЗЛП методом ветвей и границ:

```
X = (1, 0, 2)
F = 17.0
```

Листинг
main.py
(https://github.com/andreev-g/iu8-decision-theory/blob/master/lab_3/main.py)

```
import math
import numpy as np

from src.brute import BruteForce
from src.utility import print_separator
from src.simplex.simplex import SimplexMethod


class TreeNode:
    def __init__(self, f, value: SimplexMethod):
        self.left = None
        self.right = None
        self.f = f
        self.value = value


class MinTowarding:
    def __str__(self):
        return 'min'


class MaxTowarding:
    def __str__(self):
        return 'max'


class BranchesAndBoundsMethod:
    def __init__(self, f, value):
        self.integer_solutions = []
        self.root = TreeNode(f, value)

    @staticmethod
    def find_float_idx(arr):
        if arr[0] == 'Нет решения':
            return False, 0, 0
        for idx, el in enumerate(arr[1:]):
            if not int(el) == float(el):
                return True, idx, math.floor(el)
        return False, 0, 0

    def branching(self, node):
        find, idx, el = self.find_float_idx(node.value.answer[:4])
        if find:
```

```
            # Ветвление влево если найдено дробное решение
            new_row = np.zeros(node.value.c.size)
            new_row[idx] = 1
            a = np.vstack((node.value.A, new_row))
            b = np.append(node.value.b, el)
            simplex = SimplexMethod(a, b, node.value.c, mode=MaxTowarding())
            try:
                print(f'Ветвимся влево по переменной x_{idx} <= {el}')
                simplex.get_result()
            except AssertionError:
                node.left = TreeNode('Нет\n решения', simplex)
                print(f'В ветви x_{idx} <= {el} нет решения')
                return
             node.left = TreeNode(simplex.answer[0], simplex)
            self.branching(node.left)
            # Ветвление вправо если найдено дробное решение
            new_row_right = np.zeros(node.value.c.size)
            new_row_right[idx] = -1
            a_right = np.vstack((node.value.A, new_row_right))
            b_right = np.append(node.value.b, -(el + 1))
            simplex = SimplexMethod(a_right, b_right, node.value.c, mode=MaxTowarding())
            try:
                print(f'Ветвимся вправо по переменной x_{idx} => {el+1}')
                simplex.get_result()
            except AssertionError:
                node.right = TreeNode('Нет решения', simplex)
                print(f'В ветви x_{idx} >= {el+1} нет решения')
                return
             node.right = TreeNode(simplex.answer[0], simplex)
            self.branching(node.right)
        if not find:
            if node.value.answer[0] == 'Нет\n решения':
                return
             print('Найдено целочисленное решение:')
            self.integer_solutions.append(node)
            return

    def start(self):
        self.branching(self.root)
        print_separator()
        print('Все целочисленные решения')
        for solution in self.integer_solutions:
            print(f"F({solution.value.answer[1]}, {solution.value.answer[2]},
{solution.value.answer[3]}) = {solution.value.answer[0]}")
        self.print()

    def print(self):
        lines, *_ = self._make_string_representation(self.root)
        for line in lines:
            print(line)

    def _make_string_representation(self, node):
        """
        Создает рекурсивное представление дерева
        """
        # нет ни одного поддерева
        if node.right is None and node.left is None:
            line = '%s' % node.f
            width = len(line)
            height = 1
            middle = width // 2
            return [line], width, height, middle
```

```
        # есть только левое поддерево
        if node.right is None:
            lines, n, p, x = self._make_string_representation(node.left)
            s = '%s' % node.f
            u = len(s)
            first_line = (x + 1) * ' ' + (n - x - 1) * '_' + s
            second_line = x * ' ' + '/' + (n - x - 1 + u) * ' '
             shifted_lines = [line + u * ' ' for line in lines]
            return [first_line, second_line] + shifted_lines, n + u, p + 2, n + u // 2

        # есть только правое поддерево
        if node.left is None:
            lines, n, p, x = self._make_string_representation(node.right)
            s = '%s' % node.f
            u = len(s)
            first_line = s + x * '_' + (n - x) * ' '
             second_line = (u + x) * ' ' + '\\' + (n - x - 1) * ' '
             shifted_lines = [u * ' ' + line for line in lines]
            return [first_line, second_line] + shifted_lines, n + u, p + 2, u // 2

        # есть оба поддерева
        left, n, p, x = self._make_string_representation(node.left)
        right, m, q, y = self._make_string_representation(node.right)
        s = '%s' % node.f
        u = len(s)
        first_line = (x + 1) * ' ' + (n - x - 1) * '_' + s + y * '_' + (m - y) * ' '
         second_line = x * ' ' + '/' + (n - x - 1 + u + y) * ' ' + '\\' + (m - y - 1) * ' '
         if p < q:
            left += [n * ' '] * (q - p)
        elif q < p:
            right += [m * ' '] * (p - q)
        zipped_lines = zip(left, right)
        lines = [first_line, second_line] + [a + u * ' ' + b for a, b in zipped_lines]
        return lines, n + m + u, max(p, q) + 2, n + u // 2


if __name__ == '__main__':
    print('Метод ветвей и границ:')
    print_separator()

    # c = [2, 8, 3]
    # A = [[2, 1, 1],
    #      [1, 2, 0],
    #      [0, 0.5, 1]]
    # b = [4, 6, 2]

    c = [3, 3, 7]
    A = [[1, 1, 1],
         [1, 4, 0],
         [0, 0.5, 3]]
    b = [3, 5, 7]

    simplex = SimplexMethod(A, b, c, MaxTowarding())
    solution = simplex.get_result()

    tree = BranchesAndBoundsMethod(solution[0], simplex)
    tree.start()

    print_separator()
    print('Полный перебор:')
    print_separator()
```

```
bf = BruteForce(A, b, c, solution[0])
brute_solution, value = bf.brute_optimal()
print("Оптимальное решение полным перебором:")
print(f'F = {brute_solution}, x = {value}')
```