# Билет 1

6 июня 2022 г. 15:24

**Уравнения Лапласа и Пуассона. Примеры стационарных явлений. Потенциалы (электростатический, потенциал скоростей и др.). Постановка краевых задач. Задачи Дирихле и Неймана.**

**Уравнение Лапласа:**

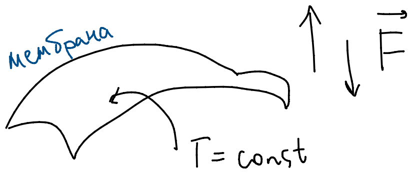
$$\Delta u = 0$$

В декартовых: $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

В цилиндрических: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$

В сферических: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$

**Уравнение Пуассона:** $\Delta u = f$




**Примеры стационарных явлений:**

**Мембрана:** $\rho u_{tt} = \operatorname{div} T \nabla u + F$

$\rho u_{tt} = 0$

Рассмотрим задачу, если нет зависимости от времени в F и проекция внешних сил на плоскость мембраны равна 0, тогда получим: $\Delta u = -\frac{F}{T}$

можем вынести T из div, а div ∇ = Δ

Это **уравнение Пуассона** будет описывать **стационарный прогиб мембраны**.

**Уравнение теплопроводности в твёрдом теле:**

$$c\rho u_t = \operatorname{div} k \nabla u + Q$$

Рассмотрим задачу, если мощность источников тепла Q не зависит от времени и k постоянно, тогда получим: $\Delta u = -\frac{Q}{k}$

Это **уравнение Пуассона** будет описывать **стационарное распределение температуры внутри твёрдого тела**.

**Потенциалы:**

**Электростатический потенциал:** $\Delta u = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$

$\rho$ — объемная плотность электрических зарядов

$\varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость, не зависит от пространственных координат

т.к. электро**статика**, то о времени очевидно ничего не зависит

**Потенциал стационарного тока:** $\Delta u = 0$

Всюду, вне источников тока, предполагая проводимость $\sigma$ не зависящей от пространственных координат, он удовлетворяет **уравнению Лапласа**.

**Потенциал скорости:**

Уравнение непрерывности для идеальной жидкости: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$

Если жидкость несжимаема, то $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Введём потенциал скоростей $\vec{v} = -\nabla u$ ($u$ — потенциал)

Подставим в исходное уравнение и получим что потенциал будет удовлетворять **уравнению Лапласа**.

**Постановка краевых задач.**

У нас есть несколько видов задач: **внешние** и **внутренние**

**Внутренние** ставятся в **ограниченной области** и **граница** этой области **обязательно** должна быть **замкнутой**.
Как пример постановки такой задачи можно привести:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u] = f(M), \; M \in D \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \mu(M), \; M \in S \end{cases} \quad \text{при этом: } \alpha(M) + \beta(M) > 0, \; M \in S$$

Оператор $\mathcal{L}[u] \equiv \mathrm{div}(-k(M)\underbrace{\nabla}_{\text{grad}} u) + q(M) \cdot u, \; k(M) > 0, \; q(M) \geq 0$

**Внешние** ставятся на **неограниченной области** и, в отличии от внутренней задачи при постановке внешних задач требуют **регулярность решения на бесконечности**.
Для чего это надо? А для того чтобы мы могли выделить единственное решение задачи.

Т.е. постановка будет выглядеть аналогично, однако рассмотрим это условие регулярности отдельно:

В **двухмерном случае** решение задачи должно быть ограничено на бесконечности, можно это формализовать как: $\lim\limits_{M \to \infty} |u(M)| < +\infty$

В **трёхмерном случае** решение задачи этого будет недостаточно, необходимо потребовать, чтобы функция $u(M)$ на бесконечности равномерно стремилась к нулю. Записать это можно так:

$$\lim_{M \to \infty} |u(M)| < g(r), \; g(r) \xrightarrow{r \to +\infty} 0 \quad \text{либо} \quad \lim_{M \to \infty} |u(M)| < \frac{A}{r}, \; A = const < +\infty$$

На практике обычно хватит просто $\lim\limits_{M \to \infty} |u(M)| = 0$

**Задачи Дирихле и Неймана.**

**Задача Дирихле** это внутренняя или внешняя краевая задача для уравнения Лапласа или Пуассона с граничным условием первого рода, например:

$$\begin{cases} \Delta u = f(M), \; M \in D \\ u|_S = \mu(M), \; M \in S \end{cases}$$

+условие регулярности для внешней задачи.

**Задача Неймана** это внутренняя или внешняя краевая задача для уравнения Лапласа или Пуассона с граничным условием второго рода, например:

$$\begin{cases} \Delta u = f(M), \; M \in D \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu(M), \; M \in S \end{cases}$$

+условие регулярности для внешней задачи.

# Билет 2

6 июня 2022 г. 19:57

**Вывод первой и второй формул Грина. Следствия из формул Грина.**

Рассмотрим интеграл

$$(\mathcal{L}[u], v) = \int_D \mathcal{L}[u]\cdot v\,dP$$

Условие применимости ф. Грина
D – ограничена
S – замкнута

Т.к. $\mathcal{L}[u] = \underbrace{-\operatorname{div} k\nabla u}_{\text{диффузионный перенос}} + qu$ , то

$$\int_D \mathcal{L}[u]v\,dP = -\int_D \operatorname{div} k\nabla u\cdot v\,dP + \int_D quv\,dP$$

$$\operatorname{div} kv\nabla u = v\cdot\operatorname{div} k\nabla u + k(\nabla u, \nabla v) \longrightarrow \int_D \operatorname{div} k\nabla u\cdot v\,dP = \int_D \operatorname{div} kv\nabla u\,dP - \int_D k(\nabla u,\nabla v)\,dP$$

$$\nabla(kv\nabla u) = \nabla(v\,k\nabla u) + \nabla(v\,k\nabla u) = \underset{\text{grad}}{\nabla v}\cdot k\underset{\text{grad}}{\nabla} u + v\cdot\underset{\text{div}}{\nabla}(k\underset{\text{grad}}{\nabla} u) = k(\nabla v, \nabla u) + v\cdot\operatorname{div}(k\nabla u)$$

div ~ grad
∇

вынести

по ф. О-Г.

$$\int_D \operatorname{div} kv\nabla u\,dP = \int_S (kv\nabla u, \vec{n})\,dS = \int_S kv(\nabla u, \vec{n})\,dS = \int_S kv\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$$

$$\Rightarrow \int_D \mathcal{L}[u]v\,dP = -\int_S kv\frac{\partial u}{\partial n}\,dS + \int_D k(\nabla u, \nabla v)\,dP + \int_D quv\,dP$$ — **Первая формула Грина**

Чтобы получить **вторую формулу Грина** просто меняем местами функции $u$ и $v$

получим: $$\int_D \mathcal{L}[v]u\,dP = -\int_S ku\frac{\partial v}{\partial n}\,dS + \int_D k(\nabla u, \nabla v)\,dP + \int_D quv\,dP$$

а затем вычтем это из предыдущей формулы, получим:

$$\int_D \left(\mathcal{L}[u]v - \mathcal{L}[v]u\right)dP = \int_S k\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$ — **Вторая формула Грина**

**Следствия:**

**Следствие 1:**

Решения первой и третьей внутренней краевой задачи для уравнения $\mathcal{L}[u] = f$ определены единственным образом.

**Доказательство:**

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u] = f(M), & M\in D \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \mu(M), & M\in S \end{cases}$$

при $\begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 1\end{cases}$ это будет первая внутренняя краевая задача (а) при $\begin{cases}\alpha>0\\ \beta>0\end{cases}$ это будет третья внутренняя краевая задача (в)

Решение задачи $u(M)$ из постановки и дальнейшего использования формул Грина должно быть таким: $u(M)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$

Пусть $u_1(M)$ и $u_2(M)$ любые два решения данной задачи. Разность этих функций назовём $v(M)=u_1(M)-u_2(M)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$

Выпишем задачу, решением которой будет эта новая функция:

$$\begin{cases}\mathcal{L}[v]=0,\ M\in D\\ \alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta v=0,\ M\in S\end{cases}$$

Запишем первую формулу Грина, где $u=v=v(M)$

$$\int_D \mathcal{L}[v]\,v\,dP=-\int_S kv\frac{\partial v}{\partial n}dS+\int_D k(\nabla v,\nabla v)dP+\int_D qv^2dP$$

Но мы знаем, что $\mathcal{L}[v]=0\Rightarrow 0=-\int_S kv\frac{\partial v}{\partial n}dS+\int_D k(\nabla v,\nabla v)dP+\int_D qv^2dP$

Рассмотрим **первую внутреннюю краевую задачу** (а)

Граничное условие будет $v|_S=0$, отсюда: $-\int_S kv\frac{\partial v}{\partial n}dS=0$,

$$\Rightarrow\int_D \overset{0}{\overset{\urcorner}{k}}(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\nabla v,\nabla v}})dP+\int_D \overset{0}{\overset{\shortparallel}{q}}\overset{0}{\overset{\shortparallel}{v^2}}dP=0,$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\int_D k(\nabla v,\nabla v)dP=0\to\nabla v=0\to \begin{matrix}v=\text{const в } D\\ v\in C^1(\overline{D})\end{matrix}\Big|\Rightarrow \begin{matrix}v=\text{const в }\overline{D}\\ v|_S=0\end{matrix}\Big|\Rightarrow v=0 \text{ в }\overline{D},\\ \int_D qv^2dP=0\end{cases}$$

$\Rightarrow u_1(M)=u_2(M)$ всюду в $\overline{D}$, а так как они были произвольны, то отсюда следует **единственность решения первой внутренней краевой задачи**

Рассмотрим **третью внутреннюю краевую задачу** (в)

Граничное условие будет $\alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v=0,\ M\in S,\ \begin{cases}\alpha>0\\ \beta>0\end{cases}$

Отсюда $\frac{\partial v}{\partial n}=-\frac{\beta v}{\alpha},\ M\in S$, подставим это в интеграл по поверхности из ф. Грина:

$$\int_S \overset{0}{\overset{\urcorner}{k}}\,\overset{0}{\overset{\urcorner}{v}}\,\overset{0}{\overset{\urcorner}{\beta v}}\frac{}{\underset{0}{\alpha}}dS+\int_D \overset{0}{\overset{\urcorner}{k}}(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\nabla v,\nabla v}})dP+\int_D \overset{0}{\overset{\shortparallel}{q}}\overset{0}{\overset{\shortparallel}{v^2}}dP=0$$

$$\begin{cases}\int_S k\beta\frac{v^2}{\alpha}dS=0\Rightarrow v|_S=0\Rightarrow \text{предыдущий случай}\to\text{доказано.}\\ \int_D k(\nabla v)^2dP=0\\ \int_D qv^2dP=0\end{cases}$$

**Замечание:** Решения первой и третьей внешних краевых задач для уравнения $\mathcal{L}[u]=f$ тоже обладают свойством единственности.

**Следствие 2:** Решения второй внутренней краевой задачи для уравнения $\mathcal{L}[u]=f$ могут отличаться на постоянную величину

**Доказательство:**

Постановка: $\begin{cases} \mathcal{L}[u]=f(M),\ M\in D \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\nu(M),\ M\in S \end{cases}$

Решение задачи $u(M)$ из постановки и дальнейшего использования формул Грина должно быть таким: $u(M)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$

Пусть $u_1(M)$ и $u_2(M)$ любые два решения данной задачи. Разность этих функций назовём $v(M)=u_1(M)-u_2(M)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$

Выпишем задачу, решением которой будет эта новая функция:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[v]=0,\ M\in D \\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S=0 \end{cases}$$

Аналогично:

Запишем первую формулу Грина, где $u=v=v(M)$

$$\int_D \mathcal{L}[v]v\,dP=-\int_S kv\frac{\partial v}{\partial n}dS+\int_D k(\nabla v,\nabla v)dP+\int_D qv^2dP$$

Но мы знаем, что $\mathcal{L}[v]=0 \Rightarrow 0=-\int_S kv\frac{\partial v}{\partial n}dS+\int_D k(\nabla v,\nabla v)dP+\int_D qv^2dP$

$$\Rightarrow \int_D \underset{\geq 0}{k}\underset{\geq 0}{(\nabla v,\nabla v)}dP+\int_D \underset{\geq 0}{q}\underset{\geq 0}{v^2}dP=0,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_D k(\nabla v,\nabla v)dP=0 \to \nabla v=0 \to \left.\begin{matrix} v=const\ в\ D \\ v\in C^1(\overline{D}) \end{matrix}\right| \Rightarrow v=const\ в\ \overline{D} \\ \int_D qv^2dP=0 \end{cases}$$

Рассмотрим два случая: $q>0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} v=0\ в\ D \\ v\in C^1(\overline{D}) \end{matrix}\right| \to v=0\ в\ \overline{D} \to$ единственность

$q=0 \Rightarrow v=const\ в\ \overline{D} \to u_1(M)-u_2(M)=const$ ■

**Замечание:** Решения второй внешней краевое задачи для уравнения $\mathcal{L}[u]=f$ для трёхмерного случая обладает свойством единственности, а 2хмерном могут отличаться на постоянную

**Следствие 3:** Условие разрешимости второй внутренней краевой задачи для уравнения $\mathcal{L}[u]=f$ в случае $q=0$

Доказывать ничего не будем, устали...

Постановка: $\begin{cases} \mathcal{L}[u]=f(M),\ M\in D \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\nu(M),\ M\in S \end{cases}$

Мы считаем, что $q=0$ всюду в области $D$. Поэтому теперь $\mathcal{L}[u]=-\operatorname{div} k\nabla u$ - чисто дифференциальный оператор

Воспользуемся **второй формулой Грина**, причем в качестве $u=u,\ v=1\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$, то есть условия применимости формулы Грина выполнены.

Вторая формула Грина приобретает вид:

$$\int_D(\mathcal{L}[u]-u\mathcal{L}[1])dP=\int_S k\left(u\frac{\partial 1}{\partial n}-\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

$$\int_D \mathcal{L}[u]\,dP=-\int_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

Это и есть искомая формула. Используя неоднородности из постановки можем представить в виде:

$$\int_D f\,dP = -\int_S k\nu\,dS$$

Если это равенство не выполняется, то задача вообще не будет иметь решения.

Поэтому прежде, чем решать вторую внутреннюю краевую задачу для уравнений Лапласа, Пуассона и им подобных, имеет смысл проверить выполнение этого условия. Возможно, что и решать-то ничего не надо будет. **Особенно на экзамене**.

**Замечание:** Для решения второй внешней краевое задачи условие разрешимости установить не удаётся

# Билет 3

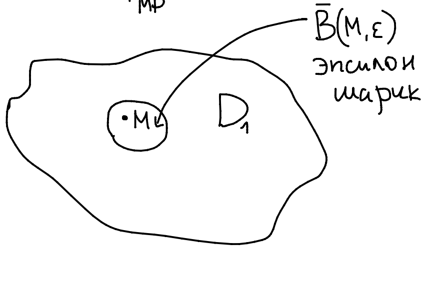
6 июня 2022 г.    19:57

**Гармонические функции. Вывод интегрального представления. Основные свойства (без доказательства).**

**Гармонической функцией в области** $D$ называется любое вещественное решение уравнения $u(M)$ Лапласа, такое что $u(M) \in C^2(D)$

Для начала необходимо вывести третью формулу Грина, ну как же без неё...
Напишем вторую формулу Грина для функции $u(M) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ и функции $\frac{1}{r_{MP}}$, где $M \in D$.

Но есть один нюанс: $\frac{1}{r_{MP}} \notin C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ и нарушается это в точке M.




Для этого выкинем из области $D$ точку M с какой-то окрестностью, обозначим за $\bar{B}(M,\varepsilon) = B(M,\varepsilon) + S(M,\varepsilon)$

Обозначим за $D_1 = D \setminus \bar{B}(M,\varepsilon)$, тогда $S_1 = S + S(M,\varepsilon)$

Для области $D_1$: $u(M) \in C^2(D_1) \cap C^1(\bar{D}_1)$ и $\frac{1}{r_{MP}}$ аналогично.

Теперь можем написать вторую формулу Грина:

$$\int\limits_{D_1} \left( L[u]\frac{1}{r_{MP}} - L\left[\frac{1}{r_{MP}}\right]u \right) dP = \int\limits_{S} k\left( u \frac{\partial \frac{1}{r_{MP}}}{\partial n} - \frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \int\limits_{S(M,\varepsilon)} k\left( u \frac{\partial \frac{1}{r_{MP}}}{\partial n} - \frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

Будем считать, что $k=1,\ q=0$: $\left. \begin{array}{l} L[u] = -\operatorname{div} k \nabla u = -\Delta u \\ \frac{1}{r_{MP}} - \text{гармоническая в } D_1 \end{array} \right| \Rightarrow L\left[\frac{1}{r_{MP}}\right] = 0$

$$\Rightarrow \int\limits_{D_1} \left( -\Delta u \cdot \frac{1}{r_{MP}} \right) dP = \int\limits_{S} \left( u \frac{\partial \frac{1}{r_{MP}}}{\partial n} - \frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \int\limits_{S(M,\varepsilon)} \left( u \frac{\partial \frac{1}{r_{MP}}}{\partial n} - \frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

Рассмотрим $\int\limits_{S(M,\varepsilon)} \frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S(M,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n} dS \ominus$ непрерывна в $S(M,\varepsilon)$, а значит можем применить теорему о среднем значении $\int\limits_S f\,dS = f(P^*)\cdot\int\limits_S dS$, $P^* \in S$

$$\ominus\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{P^*} \cdot \int\limits_{S(M,\varepsilon)} dS = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{P^*} \cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\varepsilon \cdot \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{P^*},\ P^* \in S(M,\varepsilon)$$

Рассмотрим предел этого интеграла $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S(M,\varepsilon)} \frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n} dS = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} 4\pi\varepsilon \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{P^*}}_{\text{ограничена из } C^2(D)\cap C^1(\bar{D})} = 0$

Рассмотрим $\int\limits_{S(M,\varepsilon)} u \frac{\partial \frac{1}{r_{MP}}}{\partial n} dS$.

$$\frac{\partial \frac{1}{r_{MP}}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) = -\frac{\partial}{\partial r_{MP}}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) = \frac{1}{r_{MP}^2}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{S(M,\varepsilon)} u \cdot \frac{1}{r_{MP}^2} dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{S(M,\varepsilon)} u\,dS = \frac{1}{\varepsilon^2} u(P^*) \cdot \int\limits_{S(M,\varepsilon)} dS = 4\pi u(P^*),\ P^* \in S(M,\varepsilon)$$

$$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S(M,\varepsilon)} u \frac{\partial \frac{1}{r_{MP}}}{\partial n} dS = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} 4\pi u(P^*) = 4\pi u(M)$$

Рассмотрим всю вторую формулу Грина в пределе:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_1}\left(-\Delta u\cdot\frac{1}{r_{MP}}\right)dP=-\int_D \Delta u\cdot\frac{1}{r_{MP}}\,dP$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_S\left(u\frac{\partial\frac{1}{r_{MP}}}{\partial n}-\frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+\int_{S(M,\varepsilon)}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r_{MP}}}{\partial n}-\frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS\right)=\int_S\left(u\frac{\partial\frac{1}{r_{MP}}}{\partial n}-\frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+4\pi u(M)$$

третья формула Грина

$$-\int_D \Delta u\cdot\frac{1}{r_{MP}}\,dP=\int_S\left(u\frac{\partial\frac{1}{r_{MP}}}{\partial n}-\frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+4\pi u(M)\to u(M)=-\frac{1}{4\pi}\left(\int_D \Delta u\cdot\frac{1}{r_{MP}}\,dP+\int_S\left(u\frac{\partial\frac{1}{r_{MP}}}{\partial n}-\frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS\right)$$

Получили интегральное представление функции, принадлежащей классу $C^2(D)\cap C^1(\bar{D})$
Тогда отсюда интегральное представление для гармонической функции выглядит:

$$\Delta u=0\Rightarrow u(M)=-\frac{1}{4\pi}\int_S\left(u\frac{\partial\frac{1}{r_{MP}}}{\partial n}-\frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

Аналогично для двухмерного случая: $u(M)=-\frac{1}{2\pi}\int_S\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r_{MP}}\right)-\ln\frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$

**Основные свойства гармонических функций**

**Свойство 1**: Бесконечная дифференцируемость гармонических функций.
**Свойство 2**:

Пусть $u$ - гармоническая в $D$, $u\in C^1(\bar{D})$, $S$- замкнутое, тогда:

$$\int_S\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$$

**Свойство 3**: **Теорема о среднем значении**

Пусть $B(M,R)$, $S(M,R)$; $u(P)$- гармоническая в $B$, $u(P)\in C(\bar{B}(M,R))$,
Тогда значение функции в центре шара - среднеарифметическое значение на поверхности

$$u(M)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{S(M,R)}u(P)\,dS$$

**Свойство 4**: **Принцип максимума для гармонических функций**

Более полное (и точное) название — теорема о наибольшем и наименьшем значении гармонической функции.

$u(M)$ - гармоническая в некоторой ограниченной области $D$.
Пусть, кроме того, $u(M)$ непрерывна на $\bar{D}$, тогда $u(M)$ достигает наибольшего и наименьшего значения на границе $S$ области $D$.

# Билет 4

6 июня 2022 г. 19:57

**Теорема о среднем значении гармонической функции.**

**Гармонической функцией в области** $D$ называется любое вещественное решение уравнения $u(M)$ Лапласа, такое что $u(M) \in C^2(D)$

**Теорема о среднем значении**

Пусть $B(M,R)$, $S(M,R)$; $u(P)$ - гармоническая в $B$, $u(P) \in C(\bar{B}(M,R))$,

Тогда значение функции в центре шара - среднеарифметическое значение на поверхности

$$u(M) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{S(M,R)} u(P)\,dS$$

**Доказательство**

**Часть 1**

Введём дополнительное требование: $u(P) \in C^1(\bar{B}(M,R))$

Это позволяет нам воспользоваться формулой интегрального представления для гармонической функции: $$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S(M,R)} \left( \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{MP}} \right) dS$$

Под интегралом $r_{MP} = R \Rightarrow \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S(M,P)} \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{S(M,P)} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = 0$ по свойству 2 гармонических функций

Область - шар, поэтому внешняя нормаль будет направлена наружу из шара, то есть по радиусу сферы, тогда: $$\left.\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{MP}}\right|_{P \in S(M,R)} = \left.\frac{\partial}{\partial r_{MP}} \frac{1}{r_{MP}}\right|_{P \in S(M,R)} = -\left.\frac{1}{r_{MP}^2}\right|_{P \in S(M,R)} = -\frac{1}{R^2}$$

Подставим полученные выражения в оставшийся интеграл:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S(M,R)} \left( \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{MP}} \right) dS = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S(M,R)} -u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{MP}}\,dS = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{S(M,R)} u\,dS$$

Казалось бы доказано,
но есть нюанс...

Теперь надо доказать, что можно избавиться от изначального предположения

**Часть 2.**

Считаем, что $u(P) \in C(\bar{B}(M,R))$, то есть все по честному теперь

Рассмотрим сферу $S(M,r)$, $r < R$, а значит она целиком находится в той области, в которой функция $u(P)$ является гармонической.

Запишем ту же формулу для новой сферы:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{S(M,r)} u(P)\,dS$$

Теперь надо раздуть малую сферу до размеров исходной сферы радиуса R, обозначим правую часть равенства $f(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{S(M,r)} u(P)\,dS$

По условию подынтегральная функция непрерывна всюду в $\bar{B}(M,R)$, значит $u(P)$ ограничена в $\bar{B}(M,R)$

Если она ограничена, то собственный интеграл будет непрерывной функцией от r всюду в $\bar{B}(M,R)$

А значит, то оно непрерывно при r=R, а это значит, что $\lim\limits_{r \to R} f(r) = f(R)$

Если она ограничена, то собственный интеграл будет непрерывной функцией от r всюду в $B(M,R)$
А значит, то оно непрерывно при r=R, а это значит, что $\lim\limits_{r\to R} f(r) = f(R)$

А значит, что действительно можем раздуть до нужных размеров, получим:

$$\lim_{r\to R} \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{S(M,r)} u(P)\,dS = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{S(M,R)} u(P)\,dS = f(R) \Rightarrow u(M) = f(R) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{S(M,R)} u\,dS \quad \blacksquare$$

# Билет 5

6 июня 2022 г. 19:57

**Принцип максимума для гармонических функций. Корректность внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона.**

**Гармонической функцией в области** $D$ называется любое вещественное решение уравнения $u(M)$ Лапласа, такое что $u(M) \in C^2(D)$

**Принцип максимума для гармонических функций**

Более полное (и точное) название — теорема о наибольшем и наименьшем значении гармонической функции.

$u(M)$ - гармоническая в некоторой ограниченной области $D$.

Пусть, кроме того, $u(M)$ непрерывна на $\overline{D}$, тогда $u(M)$ достигает наибольшего и наименьшего значения на границе $S$ области $D$.

**Доказательство:**

Пусть $M_0$ - точка максимума функции $u(M)$, будем считать, что $M_0 \in D$, надо показать, что на поверхности S найдется хотя бы одна точка такая, что значение функции в этой точке будет совпадать с $u(M_0)$

В области $\overline{D}$ построим сферу $S(M_0, R_0) \subset \overline{D} \Rightarrow u(M_0) = \frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{S(M_0,R_0)} u(P)\,dS$ по т. о среднем для гармонической ф.

Т.к. $M_0$ - точка максимума функции $u(M)$, то $u(P) \leq u(M_0)\ \forall P \in S(M_0,R_0)$

$\exists P^* \in S(M_0,R_0):\ u(P^*) < u(M_0)$

$\Rightarrow (u(P) \in C(S(M_0,R_0)))\ \exists \Delta \subset S(M_0,R_0),\ \Delta \equiv U(P^*):\ \forall P \in \Delta \Rightarrow u(P) < u(M_0)$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{S(M_0,R_0)} u(P)\,dS = \frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{\Delta} u(P)\,dS + \frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{S(M_0,R_0)\setminus\Delta} u(P)\,dS$$

$$\frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{\Delta} u(P)\,dS < \frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{\Delta} u(M_0)\,dS \qquad \Bigg| \qquad \frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{S(M_0,R_0)\setminus\Delta} u(P)\,dS \leq \frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{S(M_0,R_0)\setminus\Delta} u(M_0)\,dS$$

$$u(M_0) < \frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{\Delta} u(M_0)\,dS + \frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{S(M_0,R_0)\setminus\Delta} u(M_0)\,dS = \frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{S(M_0,R_0)} u(M_0)\,dS$$

Теперь подынтегральная функция постоянная, так что можем вынести из под интеграла:

$$u(M_0) < \frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{S(M_0,R_0)} u(M_0)\,dS = \frac{u(M_0)}{4\pi R_0^2} \int\limits_{S(M_0,R_0)} dS = u(M_0) \Rightarrow u(M_0) < u(M_0)$$ мда, противоречие

Получается, что предположение то было неверное, а значит $\forall P \in S(M_0,R_0):\ u(P) = u(M_0)$

Вспомним, что $R_0$ мы брали произвольным, то есть этот факт справедлив для любой сферы, лежащей в $\overline{D}$, ну тогда чё нам, раздуем её до максимально возможного радиуса, так что: $R_0 = \min\limits_{P \in S} r_{PM_0}$, но она будет иметь хотя бы одну точку с границей $S$

Пусть $M^*$ - та самая общая точка, тогда $u(M^*) = u(M_0)$, т.к. $M^* \in S(M_0,R_0)$

В тоже время $M^* \in S$, т.е. максимум $u(M)$ достигается на границе $S$.

Рассмотрим функцию $w(M) = -u(M)$, для неё выполнено условие теоремы, а значит она достигает своего максимума на границе $S$, а так как максимум $w$, это минимум $u$, то доказали для минимального значения.

**Корректность внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона.**

Задача называется **корректной**, если её решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных.

**Существование решения** мы предполагаем по умолчанию.

**Единственность решения** внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

$$\begin{cases} \Delta u = f(M), M \in D \\ u|_S = \varphi(M), M \in S \end{cases}$$

Введём $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$, где $u_1(M)$ и $u_2(M)$ - любые два решения задачи

$u_1(M), u_2(M) \in C^2(D) \cap C(\overline{D}) \Rightarrow v(M) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$

Напишем постановку для $v$: $\begin{cases} \Delta v = 0, M \in D \\ v|_S = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow v$ гармоническая в $D$ и непрерывна в $\overline{D}$

Применим принцип максимума для $v$: $\max\limits_{M \in D} v(M) \le 0$, $\min\limits_{M \in D} v(M) \ge 0 \Rightarrow v(M) = 0 \ \forall M \in D$

$\Rightarrow u_1(M) = u_2(M) \ \forall M \in D$ ■

**Непрерывная зависимость от входных данных**

Рассмотрим две задачи: $\begin{cases} \Delta u_1 = f(M), M \in D \\ u_1|_S = \varphi_1(M), M \in S \end{cases}$, $u_1 \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$

$\begin{cases} \Delta u_2 = f(M), M \in D \\ u_2|_S = \varphi_2(M), M \in S \end{cases}$, $u_2 \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$

причём: $|\varphi_1(M) - \varphi_2(M)| < \varepsilon$, $\forall M \in S$

Введём $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$

$u_1(M), u_2(M) \in C^2(D) \cap C(\overline{D}) \Rightarrow v(M) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$

Напишем постановку для $v$: $\begin{cases} \Delta v = 0, M \in D \\ v|_S = \varphi_1 - \varphi_2, M \in S \end{cases}$ $\Rightarrow v$ гармоническая в $D$ и непрерывна в $\overline{D}$

По предположению $|\varphi_1(M) - \varphi_2(M)| < \varepsilon \ \forall M \in S$ ,тогда: $\max\limits_{M \in S} v(M) < \varepsilon$, $\min\limits_{M \in S} v(M) > -\varepsilon$, а из принципа максимума получаем то же для $D$:

$$\max_{M \in D} v(M) < \varepsilon, \ \min_{M \in D} v(M) > -\varepsilon \Rightarrow |v(M)| < \varepsilon \ \forall M \in D \Rightarrow |u_1(M) - u_2(M)| < \varepsilon \ \forall M \in D \ ■$$

Итог: из существования, единственности и устойчивости по входным данным внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона является корректно поставленной.

# Билет 6

6 июня 2022 г. 19:57

**Корректно и некорректно поставленные задачи математической физики. Примеры некорректно поставленных задач для уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа.**

Задача называется **корректно поставленной (корректной)**, если одновременно выполняются следующие три условия:

а) решение задачи существует
б) решение задачи единственно
в) решение задачи непрерывно зависит от входных данных.

Если хотя бы одно из условий нарушено, задача называется **некорректно поставленной (некорректной)**.

**Пример некорректно поставленной задачи для теплопроводности:**

Рассмотрим стержень конечной длины $l$, на его концах поддерживается нулевая температура, необходимо узнать температуру стержня до текущего момента.

Постановка: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ a^2 = \frac{k}{c\rho},\ 0<x<l,\ t<0 \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases} \rightarrow u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin\sqrt{\lambda_n}x \cdot e^{-a^2\lambda_n t}$

$u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin\sqrt{\lambda_n}x = \varphi(x)$, домножим скалярно на $\sin\sqrt{\lambda_m}x$: $A_m \int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_m}x\,dx = \int\limits_0^l \varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_m}x\,dx$

$\forall m:\ A_m = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_m}x\,dx$

Рассмотрим два $\varphi(x)$: $\varphi_1(x)=0 \longrightarrow \forall m: A_m = 0 \rightarrow u_1(x,t)=0$

$\varphi_2(x) = \sin\sqrt{\lambda_1}x \rightarrow \begin{matrix} m>1: A_m = 0 \\ m=1: A_m = 1 \end{matrix} \rightarrow u_2(x,t) = \sin\sqrt{\lambda_1}x\cdot e^{-a^2\lambda_1 t}$

$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)| = |\sin\sqrt{\lambda_1}x| < 1$, отсюда должно следовать, что $|u_1(x)-u_2(x)|<1$

$|u_1(x)-u_2(x)| = |\sin\sqrt{\lambda_1}x\cdot e^{-a^2\lambda_1 t}| \not< 1$, т.к. экспонента при $t<0$ неограничена, а значит нарушено 3 условие корректности, данная задача не устойчива по входным данным

**Замечание:** вообще, все задачи для уравнения теплопроводности, при $t < 0$ будут некорректно поставленными (некорректными)

А сегодня во вчерашний день не все могут смотреть.
Вернее смотреть могут не только лишь все, мало кто может это делать

**Пример некорректно поставленной задачи для уравнения Лапласа:**

Постановка: $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0,\ -\infty<x<+\infty,\ 0<y \\ u(x,0)=0,\ u_y(x,0)=\varphi(x) \end{cases}$, т.к. задача Коши, то доп. условий на $\infty$ задавать не нужно

Разный выбор $\varphi(x)$ даст разные решения задачи

$\varphi(x) = \varphi_1(x) = 0 \rightarrow u_1(x,y)=0$

$\varphi(x) = \varphi_2(x) = \sin x \rightarrow u_2 = A_1 \sin x\cdot \operatorname{sh} y = \sin x \operatorname{sh} y$

$u(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \sin\sqrt{\lambda_n}x\cdot \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}y + \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n \cos\sqrt{\lambda_n}x\cdot \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}y$

$\lambda_n = n^2$

$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)| = |\sin x| < 1$, отсюда должно следовать, что $|u_1(x)-u_2(x)|<1$

$|u_1(x)-u_2(x)| = |\sin x \operatorname{sh} y| \not< 1$, т.к. $\operatorname{sh} y$ при $y>0$ неограничен, а значит нарушено 3 условие корректности, данная задача не устойчива по входным данным

**Замечание:** задача Коши может быть поставлена корректно только для уравнений гиперболического типа

# Билет 7

6 июня 2022 г. 19:57

**Понятие функции Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Формула, дающая решение этой задачи.**

Постановка для внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона: $\begin{cases} \Delta u = f(M), M \in D \\ u|_S = \varphi(M), M \in S \end{cases}$

решение будем искать в классе $\to u(M) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$

Поскольку решение задачи есть частный случай дважды дифференцируемой функции (с непрерывными первыми производными на S), то мы можем выписать для этого решения полученное ранее интегральное представление:

не знаем

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi}\left(\int_D \Delta u \cdot \frac{1}{r_{MP}} dP + \int_S \left(u \frac{\partial \frac{1}{r_{MP}}}{\partial n} - \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS\right)$$

А значит придётся решать задачу Дирихле, но если мы решим её, то получается интегральное представление будет вообще не нужным. Так что нам нужно как то избавиться от этой самой $\frac{\partial u}{\partial n}$

Вспомним вторую формулу Грина: $\int_D (L[u]v - L[v]u) dP = \int_S k\left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS$

Будем считать, что $k=1$ и $q=0$ $\forall M \in \bar{D} \Rightarrow L[u] = -\Delta u$, $u = u(M)$, $v = w(M)$ - гармоническая в $D$, $\Rightarrow L[w] = 0$,

$$\Rightarrow -\int_D \Delta u\, w\, dP = \int_S \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS \to \int_S \left(w \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial w}{\partial n}\right) dS - \int_D w \Delta u\, dP = 0$$

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi}\left(\int_D \Delta u \cdot \frac{1}{r_{MP}} dP + \int_S \left(u \frac{\partial \frac{1}{r_{MP}}}{\partial n} - \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(\int_D \Delta u \cdot \frac{1}{r_{MP}} dP + \int_S \left(u \frac{\partial \frac{1}{r_{MP}}}{\partial n} - \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS\right) +$$

$$+ \int_S \left(w\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial w}{\partial n}\right) dS - \int_D w\Delta u\, dP = \int_S \left(w + \frac{1}{4\pi r_{MP}}\right)\frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_S u \frac{\partial}{\partial n}\left(w + \frac{1}{4\pi r_{MP}}\right) dS - \int_D \left(w + \frac{1}{4\pi r_{MP}}\right) \Delta u\, dP$$

Возьмём $w|_S = -\frac{1}{4\pi r_{MP}} \Rightarrow \int_S \left(w + \frac{1}{4\pi r_{MP}}\right)\frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$, $w = w(M,P)$

Введём обозначение $G(M,P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + w(M,P) \Rightarrow u(M) = -\int_S u(P) \frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P} dS_P - \int_D G(M,P) \Delta_P u(P)\, dP$

Предположим, что функция G(M, P) нам уже известна. Тогда мы только что получили формулу, дающую решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Если использовать неоднородности из постановки задачи, ту же самую формулу можно переписать в виде:

$$u(M) = -\int_S \varphi(P) \cdot \frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P} dS_P - \int_D G(M,P) f(P)\, dP$$ верно для $u(M) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$

т.е. для любой задачи Дирихле

Функция Грина, однако это не является её определением

# Билет 8

6 июня 2022 г. 19:57

**Основные свойства функции Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Физический смысл (электростатическая интерпретация) функции Грина.**

Большая часть свойств, о которых пойдет речь в этом вопросе, справедливы как в трехмерном, так и в двумерном случаях. Если же это вдруг не так, будут краткие комментарии.

или не будут…

**Свойство 1:** Функция Грина $G(M,P)$ равна нулю всюду на поверхности $S$.

**Доказательство:**

По построению: $G(M,P)=\frac{1}{4\pi r_{MP}}+w(M,P)$

Учитывая, что $w(M,P)$ - гармоническая в $D$, чтобы всюду на $S$ выполнялось условие: $w|_S=\frac{1}{4\pi r_{MP}}$

Отсюда $G|_S=0$ ∎

**Свойство 2:** Функция Грина $G(M,P)$ является гармонической функцией всюду в D за исключением одной точки P = M.

**Доказательство:**

По построению: $G(M,P)=\frac{1}{4\pi r_{MP}}+w(M,P)$, $\frac{1}{r_{MP}}$ - гармоническая в $\mathbb{R}^3\setminus\{M\}$

$u(M,P)$ - гармоническая в $D$

$\Rightarrow G(M,P)=\frac{1}{4\pi r_{MP}}+w(M,P)$ - гармоническая в $D\setminus\{M\}$ ∎

**Свойство 3:** Функция Грина $G(M,P)$ определена единственным образом

**Доказательство:**

По построению: $G(M,P)=\frac{1}{4\pi r_{MP}}+w(M,P)$, первое слагаемое очевидно однозначно, второе это гармоническая в $D$ и $w|_S=-\frac{1}{4\pi r_{MP}}$, $M\in S$

Отсюда следует что $w$ это решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа: $\begin{cases}\Delta w=0, M\in D\\ w|_S=-\frac{1}{4\pi r_{MP}}, M\in S\end{cases}$, а оно определено единственным образом ∎

**Свойство 4:** Функция Грина $G(M,P)$ имеет особенность в одной точке (при M = P), причем при $M\to P$ будет $G(M,P)=O\left(\frac{1}{r}\right)$

**Доказательство:**

По построению: $G(M,P)=\frac{1}{4\pi r_{MP}}+w(M,P)$

Напомним, что $w\in C(\bar{D})\to w$ ограничена, в тоже время $\frac{1}{r_{MP}}$ не ограничена при $M=P$,

$\Rightarrow G(M,P)\overset{M\to P}{\sim}\frac{1}{4\pi r_{MP}}$, расположим начало локальной системы координат в точке $P$, а r - радиальная координата M, тогда: $\frac{1}{4\pi r_{MP}}=\frac{1}{4\pi r}=O\left(\frac{1}{r}\right)$ ∎

**Замечание:** В двумерном случае функция Грина тоже имеет особенность при M = P, однако характер особенности уже другой. Поскольку в $\mathbb{R}^2$: $G(M,P)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP}}+w(M,P)$, $\underset{M\to P}{\Rightarrow} G(M,P)=O\left(\ln\frac{1}{r}\right)$

**Свойство 5:** Всюду в области D для функции Грина G(M, P) справедливо следующее двойное неравенство: $0<G(M,P)<\frac{1}{4\pi r_{MP}}$

**Доказательство:**

По построению: $G(M,P)=\frac{1}{4\pi r_{MP}}+w(M,P)$

Задача Дирихле, решением которой является $w(M,P)$: $\begin{cases}\Delta w=0, M\in D\\ w|_S=-\frac{1}{4\pi r_{MP}}, M\in S\end{cases}$

$w(M,P)$ - гармоническая в D и $w\in C(\bar{D})$, то можно применить теорему о макс и мин значении гармонической функции

$\max\limits_{M\in S} w(M,P)<0 \to \max\limits_{M\in D} w(M,P)<0 \Rightarrow w(M,P)<0$ в $\bar{D}$,

$\Rightarrow G(M,P)=\frac{1}{4\pi r_{MP}}+w(M,P)<\frac{1}{4\pi r_{MP}}$

$M \to P \Rightarrow G(M,P) \to +\infty$, но функция Грина - гармоническая в $D \setminus \{P\}$, а значит непрерывная в $D \setminus \{P\}$,
$\Rightarrow G(M,P) > 0$ в нек. $U(P)$

Построим открытый шар $B(P,\varepsilon) \subset U(P) \Rightarrow S(P,\varepsilon) \subset U(P)$, $\Rightarrow G(M,P) > 0 \;\forall P' \in S(P,\varepsilon)$
Ц $D_1 = D \setminus \bar{B}(P,\varepsilon)$ - не содержит $P$, $\Rightarrow G(M,P)$ - гармоническая в $D_1$ и $G(M,P) \in C(\bar{D}_1)$

Воспользуемся принципом максимума:
$$\left.\begin{array}{l} G|_S = 0 \\ G|_{S(P,\varepsilon)} > 0 \\ S_1 = S + S(P,\varepsilon) \end{array}\right| \to \begin{array}{l} G(M,P) \geq 0 \text{ в } D_1 \\ \text{также } G(M,P) > 0 \text{ в } B(P,\varepsilon) \end{array} \Big| \to G(M,P) \geq 0 \text{ в } D$$

Если $G(M,P)$ где-то обращается в нуль, то из следствия принципа максимума $G(M,P) = 0$ в $D$,
Но $G(M,P) > 0$ в $B(P,\varepsilon) \Rightarrow$ противоречие, а значит $G(M,P) > 0$ в $D$

**Замечание:** В двумерном случае можно доказать лишь одно неравенство G(M, P) > 0 всюду в D.

**Свойство 6:** В области D функция Грина будет решением уравнения Пуассона: $\Delta G(M,P) = -\delta(M,P)$
$M \in D, P \in D$

**Пояснение:**

По построению: $G(M,P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + w(M,P)$, $w(M,P)$ - гармоническая в $D$ функция, то $\Delta w = 0$ в $D$,
$\Rightarrow \Delta G(M,P) = \Delta \frac{1}{4\pi r_{MP}}$, потенциал точечного заряда равен: $u(M) = \frac{q}{r_{MP}}$ ← заряд, в точке P; точка наблюдения
↓ подчиняется ур-ю Пуассона
$\Delta u = -4\pi\rho$ ← ф. плотности заряда

В случае точечного заряда будет иметь вид $\rho(M) = q\delta(M,P) \Rightarrow u(M)$ - решение $\Delta u = -4\pi q \delta(M,P)$
Ц $q = \frac{1}{4\pi}$, $\Rightarrow u(M) = \frac{q}{r_{MP}} = \frac{1}{4\pi r_{MP}}$, $\Delta u = -4\pi q\delta(M,P) = -\delta(M,P) \Rightarrow \Delta \frac{1}{4\pi r_{MP}} = -\delta(M,P)$ ← диффур для ф. Грина

**Замечание:** В двумерном случае функция Грина подчиняется тому же самому дифференциальному уравнению. Но результат этот будет следовать из равенства: $\Delta \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MP}} = -\delta(M,P)$

**Свойство 7:** Функция Грина симметрична по своим аргументам, $G(M,P) = G(P,M)$
**Пояснение:**

**Вторая формула Грина:** $\int\limits_D \left(L[u]v - L[v]u\right) dP = \int\limits_S k\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS$

выберем k=1, q=0 всюду в $\bar{D}$, тогда формула станет такой: $\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v) dP = \int\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS$

$u(P) = G(P, M_1)$ - ф. Грина для $D$, $M_1 \in D$
$v(P) = G(P, M_2)$ - ф. Грина для $D$, $M_2 \in D$
$M_1 \neq M_2$

$\int\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS = 0$, т.к. $u|_S = 0$, $v|_S = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u = \Delta G(P,M_1) = -\delta(P,M_1) \\ \Delta v = \Delta G(P,M_2) = -\delta(P,M_2) \end{array}\right| \to \int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v) dP = \int\limits_D \left(G(P,M_1)\delta(P,M_2) - G(P,M_2)\delta(P,M_1)\right) dP = G(M_2,M_1) - G(M_1,M_2) = 0$$

Теперь у нас достаточно знаний, чтобы сформулировать **математически строгое определение функции Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона**.
**Определение:** Функцией Грина $G(M,P)$ задачи Дирихле для уравнения Пуассона называется непрерывное при $M \neq P$ решение задачи: $\begin{cases} \Delta G = -\delta(M,P), & M \in D \\ G(M,P) = 0, & M \in S \end{cases}$

**Физический смысл (электростатическая интерпретация) функции Грина.**
Ф. Грина $G(M,P)$ задачи Дирихле для ур-я Пуассона это потенциал точечного заряда величины $\frac{1}{4\pi}$ в присутствии заземленной проводящей поверхности.
Теперь совершенно понятным становится смысл всех слагаемых, содержащихся в функции Грина:

$$G(M,P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + w(M,P)$$

$w(M,P)$ ← потенциал индуцированных на S зарядов
$\frac{1}{4\pi r_{MP}}$ ← потенциал точечного заряда величины $\frac{1}{4\pi}$ в вакууме

Функция Грина в двумерном случае — это потенциал точечного заряда величины $\frac{1}{2\pi}$ в присутствии проводящей заземленной поверхности

# Билет 9

6 июня 2022 г. 19:57

**Объемный потенциал. Определение, основные свойства. Доказательство непрерывности объемного потенциала и его первых производных.**

**Объемный потенциал** - любой интеграл вида: $u(M)=\iiint\limits_D \frac{\rho(P)\,dP}{r_{MP}}$, $\rho(P)$ - ограниченная и интегрируемая в $D$ т.е. $\left|\iiint\limits_D \rho(P)\,dP\right|<+\infty$

Это в **трёхмерном случае**.
В **двумерном случае объёмный потенциал** (ну или логарифмический) имеет вид: $u(M)=\iint\limits_D \rho(P)\cdot\ln\frac{1}{r_{MP}}\,dP$

**Основные свойства:**

**Свойства 1:** Объемный потенциал всюду непрерывен вместе со всеми своими первыми производными. Всюду — это во всем пространстве. В более краткой записи $u(M)\in C^1(\mathbb{R}^n)$

**Доказательство:**

**Часть 1.** M вне области, т.е. $M\notin\overline{D}$

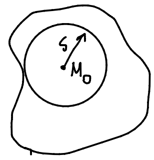
Объёмный потенциал будет собственным интегралом, так как событие $P=M$ не наступает при интегрировании, подынтегральная функция не обращается в бесконечность.

Под интегралом зависит от $M$ только $\frac{1}{r_{MP}}$, а она бесконечно дифф в нашем случае, поэтому $u(M)$ тоже, а отсюда следует, что $u(M)\in C^1(\mathbb{R}^n\setminus\{\overline{D}\})$

**Часть 2.** M внутренняя точка области, т.е. $M\in D$

Событие P=M обязательно наступит при интегрировании, поэтому $u(M)$ будет **несобственным интегралом**. Чтобы доказать его непрерывность.

$\iiint\limits_D \rho(P)\frac{1}{r_{MP}}\,dP$ однако такого вида интеграл является непрерывным из вида подынтегральной функции из свойств несобственных интегралов, зависящих от параметра:



Определение равномерной сходимости в точке $M_0: \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: \forall\Delta: M_0\in\Delta\subset B(M_0,\delta),\ \forall M\in\Delta \Rightarrow \left|\iiint\limits_\Delta \rho(P)\frac{1}{r_{MP}}\,dP\right|<\varepsilon$

Возьмём произвольную $M_0\in D$, рассмотрим $\left|\iiint\limits_\Delta \rho(P)\frac{1}{r_{MP}}\,dP\right| \le \overset{const}{A}\cdot\iiint\limits_\Delta \frac{dP}{r_{MP}}$

Если перейти от интеграла по $\Delta$ к интегралу по $B(M_0,\delta)$, то интеграл станет только больше, получим:

$$\left|\iiint\limits_\Delta \rho(P)\frac{1}{r_{MP}}\,dP\right| < A\cdot\iiint\limits_{B(M_0,\delta)}\frac{dP}{r_{MP}} = A\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\delta}\frac{r^2\sin\theta}{r}\,dr\,d\theta\,d\varphi = A\cdot4\pi\cdot\int_0^{\delta} r\,dr = A\cdot4\pi\cdot\frac{\delta^2}{2}=2\pi A\delta^2$$

Введём $\delta_0: 2\pi\cdot A\cdot\delta_0^2=\varepsilon$ отсюда, если в условии равномерной сходимости выбрать $\delta\le\delta_0$,
$\Rightarrow \left|\iiint\limits_\Delta \rho(P)\frac{1}{r_{MP}}\,dP\right|<\varepsilon$ следовательно интеграл сходится равномерно.

Рассмотрим теперь несобственный интеграл: $\iiint\limits_D \rho(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)dP$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_{MP}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right)^{1/2}} = \frac{\xi-x}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right)^{3/2}}=\frac{\xi-x}{r_{MP}^3}$$

$$\left|\frac{\xi-x}{r_{MP}}\right|\le1 \longrightarrow \left|\frac{\xi-x}{r_{MP}^3}\right|\le\frac{1}{r_{MP}^2}$$

$$\left|\int\limits_D \rho(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)dP\right| \leqslant A\cdot\int\limits_D \frac{1}{r^2_{MP}}dP$$ Аналогично предыдущему равномерно сходится.

Аналогично можно доказать для производной по y и по z. $\Rightarrow u(M)\in C^1(D)$

**Часть 3.** М на границе области, т.е. $M\in S$

Построим вспомогательную область $D_1 : \overline{D}\subset D_1 \Rightarrow M\in D_1$

Также построим вспомогательную функцию: $\rho_1(P)=\begin{cases}\rho(P), & P\in D\\ 0, & P\notin D\end{cases}$

$$u(M)=\int\limits_D \rho(P)\frac{dP}{r_{MP}}=\int\limits_{D_1}\rho_1(P)\frac{dP}{r_{MP}}$$

Интеграл в правой части равенства есть объемный потенциал в смысле определения. Точка М является внутренней точкой области $D_1$. То есть все свелось к предыдущему случаю, для которого нужное утверждение уже доказано.

Объединяя результаты всех трех частей, получаем, что $u(M)\in C^1(\mathbb{R}^3)$ $\blacksquare$

**Свойство 2:** Объемный потенциал $u(M)$ является гармонической функцией всюду вне области D, т.е. $\Delta u=0,\ M\notin\overline{D}$

**Доказательство:**

Ранее упоминали бесконечную дифф объёмного потенциала вне $D$

Применим оператор Лапласа к $u$:

$$\Delta u=\Delta\int\limits_D \rho(P)\frac{dP}{r_{MP}}=\int\limits_D \rho(P)\Delta\frac{1}{r_{MP}}dP=0,\ M\notin\overline{D}$$ $\blacksquare$

**Свойство 3:** Объемный потенциал $u(M)$ в области $D$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u=-4\pi\rho(M)$ в трехмерном случае и уравнению Пуассона $\Delta u=-2\pi\rho(M)$ — в двумерном случае.

**Пояснение**:

$$\Delta u=\Delta\int\limits_D \rho(P)\frac{dP}{r_{MP}}=\int\limits_D \rho(P)\Delta\frac{1}{r_{MP}}dP=\int\limits_D \rho(P)(-4\pi\delta(M,P))\,dP=-4\pi\rho(M),\ M\in D$$

**Свойство 4:** Асимптотика объемного потенциала. Результаты, которые мы получим, справедливы лишь в случае ограниченной области $D$. Для неограниченных областей асимптотика может быть вообще какой угодно

$\sqcup\ M\to\infty \Rightarrow$ ($D$ ограничена) $u(M)$ станет собственным интегралом.

Используя непрерывность подынтегральной функции, а точнее $\frac{1}{r_{MP}}$, мы может воспользоваться теоремой о среднем значении: $$u(M)=\int\limits_D \rho(P)\frac{dP}{r_{MP}}=\frac{1}{r_{MP^*}}\int\limits_D \rho(P)\,dP,\ P^*\in D$$

Разместим начало локальной системы координат в точке $P^* \Rightarrow r_{MP^*}=r$ - будет радиальной координатой $M$. В силу интегрируемости $\rho(P)$: $$u(M)=\frac{const}{r}=O\left(\frac{1}{r}\right),\ M\to\infty$$

Эта асимптотика верна лишь для **трёхмерного случая**. Действуя аналогично, в **двумерном случае** находим: $u(M)=O\left(\ln\frac{1}{r}\right),\ M\to\infty$

Если полный заряд области равен нулю, т.е. $\int\limits_D \rho(P)\,dP=0 \Rightarrow u(M)=O\left(\frac{1}{r^n}\right),\ M\to\infty$. $\begin{matrix}3D: n\geqslant 2\\ 2D: n\geqslant 1\end{matrix}$

# Билет 10

7 июня 2022 г. 21:35

**Потенциал простого слоя. Определение, основные свойства. Доказательство непрерывности потенциала простого слоя.**

Под **потенциалом простого слоя** понимается любой интеграл вида: $v(M)=\int_S \frac{\sigma(P)dS_P}{r_{MP}}$ в 3D
и $v(M)=\int_S \sigma(P)\cdot\ln\frac{1}{r_{MP}}dS_P$ в 2D

поверхность Ляпунова

$\sigma(P)$ — ограниченная и интегрируемая на S, т.е.
$\forall P\in S \Rightarrow |\sigma(P)|\le A,\ \left|\int_S \sigma(P)dS\right|<+\infty$

**Свойства:**

**Свойство 1:** Потенциал простого слоя непрерывен всюду, т.е. $v(M)\in C(\mathbb{R}^n)$

док-во аналогично билету 9

**Часть 1.** $M\notin S$

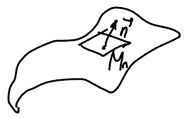
по св-ву собств. $\int$

$\Rightarrow u(M)$ - собственный интеграл, а т.к. $\frac{1}{r_{MP}}\in C^\infty(S), M\neq P \Rightarrow v(M)\in C^\infty(S), M\notin S,$
$\Rightarrow v(M)\in C(S), M\notin S$ ∎

**Часть 2.** $M\in S$

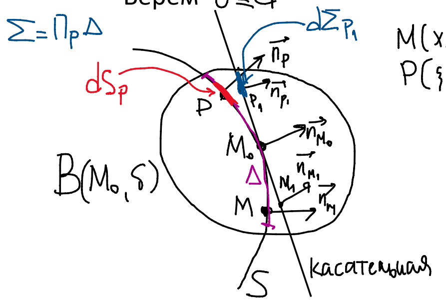
$\Rightarrow u(M)$ - несобственный интеграл, то чтобы доказать непрерывность собственного интеграла, нам сначала потребуется установить его равномерную сходимость.

Определение равномерной сходимости по поверхности:
$\forall\varepsilon>0:\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall\Delta\in S: M_0\in\Delta\subset B(M_0,\delta)\ \forall M\in\Delta, \Rightarrow \left|\int_\Delta \sigma(p)\frac{1}{r_{MP}}dS_P\right|<\varepsilon$




Выберем систему координат так, чтобы $M_0$ было началом координат, ось Z направлена по нормали, а оси X и Y лежат в касательной плоскости.

Построим шар $B(M_0,\delta)$, из свойства поверхности Ляпунова: $\exists d: \forall M,P\in S: P\in B(M,d) \Rightarrow (\vec n_M,\vec n_P)>\frac12$
Берем $\delta\le d$




$M(x,y,z),\ P(\xi,\eta,\zeta) \Rightarrow M_1(x,y,0),\ P_1(\xi,\eta,0) \Rightarrow r_{M_1P_1}\le r_{MP} \Leftrightarrow \frac{1}{r_{MP}}\le\frac{1}{r_{M_1P_1}}$

$d\Sigma_{P_1}=dS_P\cdot\cos\gamma,\ \gamma=(\widehat{\vec n_P,\vec n_{P_1}}) \Rightarrow \cos\gamma=(\vec n_P,\overset{\vec n_{M_0}}{\overset{\|}{\vec n_{P_1}}})=(\vec n_P,\vec n_{M_0})>\frac12$

$\left|\int_\Delta \sigma(p)\frac{1}{r_{MP}}dS_P\right|\le A\cdot\left|\int_\Delta\frac{dS_P}{r_{MP}}\right| = A\cdot\left|\int_\Sigma\frac{d\Sigma_{P_1}}{\cos\gamma\cdot r_{MP}}\right|\le A\cdot\left|\int_\Sigma\frac{d\Sigma_{P_1}}{\underset{\vee 1/2}{\cos\gamma}\, r_{M_1P_1}}\right|<2A\int_\Sigma\frac{d\Sigma_{P_1}}{r_{M_1P_1}} \le$

$d\Sigma_{P_1}=d\xi\cdot d\eta$, перейдём к полярным координатам с центром в точке $M_1$, получим интеграл по кругу $K(M_1,\delta)$

$\le 2A\cdot\int_{K(M_1,\delta)}\frac{d\xi\, d\eta}{r_{M_1P_1}} = 2A\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} r\cdot\frac{1}{r}dr\, d\varphi = 2A\cdot 2\pi\cdot\delta = 4A\pi\delta$

Рассмотрим $\delta_0: 4A\pi\delta_0=\varepsilon \Rightarrow$ возьмём $\delta=\min(\delta_0, d) \Rightarrow \left|\int_\Delta \sigma(P)\frac{1}{r_{MP}}dS_P\right|<\varepsilon \Rightarrow$ равномерно сходится в точке $M_0$

А $M_0$ произвольная точка поверхности S, поэтому потенциал простого слоя равномерно сходится на S, а значит непрерывен на S.

Объединив часть 1 и часть 2, получаем, что $v(M)\in C(\mathbb{R}^3)$ ∎

**Свойство 2:** Нормальные производные потенциала простого слоя имеют разрыв первого рода (то есть конечной величины) в точках поверхности S. Если S есть поверхность Ляпунова, то величина разрыва может быть описана следующими формулами:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_- = \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_M + 2\pi\sigma(M),\ M\in S$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_+ = \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_M - 2\pi\sigma(M),\ M\in S$$

$\sigma(M)$ - функция плотности зарядов

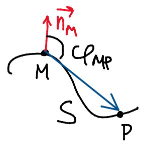
Рассмотрим $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_M$ - прямое значение нормальной производной простого слоя

получим явное выражение: $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_M = \frac{\partial}{\partial n_M}\int\limits_S \frac{\sigma(P)\,dS_P}{r_{MP}} = \int\limits_S \sigma(P)\frac{\partial}{\partial n_M}\frac{1}{r_{MP}}\,dS_P$

$$\frac{\partial}{\partial n_M}\frac{1}{r_{MP}} = \left(\vec{n},\ \nabla_M \frac{1}{r_{MP}}\right),$$

$$\nabla_M \frac{1}{r_{MP}} = \left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{1/2}} = \frac{(\xi-x)\vec{e}_x+(\eta-y)\vec{e}_y+(\zeta-z)\vec{e}_z}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{3/2}} = \frac{\vec{r}_{MP}}{r^3_{MP}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial n_M}\frac{1}{r_{MP}} = \left(\vec{n},\ \frac{\vec{r}_{MP}}{r^3_{MP}}\right) = |\vec{n}|\cdot\left|\frac{\vec{r}_{MP}}{r^3_{MP}}\right|\cdot\cos\varphi_{MP} = \frac{\cos\varphi_{MP}}{r^2_{MP}},\quad \varphi_{MP} = (\widehat{\vec{n}_M, \vec{r}_{MP}})$$




$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_M = \int\limits_S \frac{\sigma(P)\cdot\cos\varphi_{MP}\,dS_P}{r^2_{MP}}$$

$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_-$ — предельное значение нормальной производной, вычисленное с внутренней стороны поверхности S бесконечно близко к точке M

$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_+$ – предельное значение нормальной производной, вычисленное с наружной стороны поверхности S бесконечно близко к точке M

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_- = -4\pi\sigma(M),\ M\in S$$

Это всё было для трёхмерного случая, для двумерного получится так:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_- = \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_M + \pi\sigma(M),\quad \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_+ = \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_M - \pi\sigma(M),\ M\in S$$

Все обозначения здесь имеют прежний смысл. Отсюда сразу можно найти скачок производной в $\mathbb{R}^2$:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_- = -2\pi\sigma(M),\ M\in S$$

Выпишу еще выражение для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя в $\mathbb{R}^2$: $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_M = \frac{\partial}{\partial n_M}\int\limits_S \sigma(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}\,dS_P = \int\limits_S \sigma(P)\frac{\partial}{\partial n_M}\ln\frac{1}{r_{MP}}\,dS_P = \int\limits_S \frac{\sigma(P)\cos\varphi_{MP}\,dS_P}{r_{MP}}$

Если S не является поверхностью (или кривой) Ляпунова, то разрыв нормальных производных у потенциала простого слоя все равно будет. Вот только выписанные нами формулы могут быть верны уже лишь приближенно

**Свойство 3:** Вне точек поверхности S потенциал простого слоя является гармонической функцией, т.е. $\Delta v = 0,\ M\notin S$

**Свойство 4:** Асимптотика потенциала простого слоя (только для ограниченных поверхностей). при $M\to\infty$ потенциал простого слоя ведет себя, как:

$u(M) = O\left(\frac{1}{r}\right),\ M\in\mathbb{R}^3$

$v(M) = O\left(\ln\frac{1}{r}\right),\ M\in\mathbb{R}^2$

В случае равенства нулю полного заряда поверхности $S$: $\int\limits_S \sigma(P)\,dS_P = 0$ асимптотика становится следующей: $v(M) = O\left(\frac{1}{r^n}\right)$, $n\geq 2$ в 3D, $n\geq 1$ в 2D

Это мы обосновывать не будем.

# Билет 11

8 июня 2022 г. 0:54

**Потенциал двойного слоя. Определение, основные свойства. Вывод формул, описывающих разрыв потенциала двойного слоя в точках несущей поверхности.**

Под **потенциалом двойного слоя** понимается любой интеграл вида:

$$W(M) = \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{r_{MP}}\, dS_P = \int_S \frac{\nu(P) \cos\varphi_{PM}\, dS_P}{r^2_{MP}} \quad \text{в } 3D$$

$M$ – произвольная

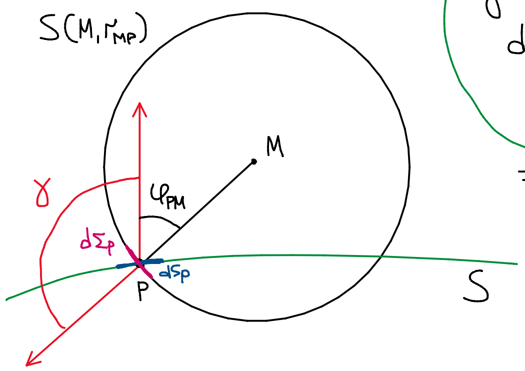
$P \in S$

$, \varphi_{PM} = (\widehat{\vec{n}_P, \vec{PM}})$

$$w(M) = \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln\frac{1}{r_{MP}}\, dS_P = \int_S \frac{\nu(P) \cos\varphi_{PM}\, dS_P}{r_{MP}} \quad \text{в } 2D$$

$\forall P \in S \Rightarrow |\nu(P)| \le A,\ \left|\int_S \nu(P)\, dS_P\right| < +\infty,$ $S$ – Поверхность (кривая) Ляпунова

Напишем представление через телесный угол $\omega_{MP}$:




$$\gamma = \pi - \varphi_{PM} \Rightarrow \cos\gamma = -\cos\varphi_{PM}$$

$$d\Sigma_P = \Pi_{P\, S(M, r_{MP})}\, dS_P \rightarrow d\Sigma_P = \cos\gamma \cdot dS_P \rightarrow d\Sigma_P = -\cos\varphi_{PM}\, dS_P,$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\varphi_{PM}\, dS_P}{r^2_{MP}} = -\frac{d\Sigma_P}{r^2_{MP}} = -d\omega_{MP}$$ – элементарный телесный угол

$$\Rightarrow w(M) = \int_S \frac{\nu(P) \cos\varphi_{PM}\, dS_P}{r^2_{MP}} = -\int_S \nu(P)\, d\omega_{MP} = -\int_\Omega \nu(P)\, d\omega_{MP}$$

$\Omega$ ← полный телесный угол

И в самом деле, новое представление потенциала двойного слоя вышло очень компактным. Но у него есть еще одно полезное свойство. Оказывается, что в двумерном случае это представление выглядит точно так же. Только под $d\omega_{MP}$ надо понимать уже не телесный, а плоский угол.

**Свойство 1:** Потенциал двойного слоя определен всюду, т.е. в каждой точке пространства. При этом, заметьте, о непрерывности его речи не идет.

**Доказательство:**

Фактически нам надо доказать то, что интеграл $W(M)$ сходится (а, стало быть, и определен) в любой точке. Оцениваем этот интеграл по модулю:

$$|w(M)| = \left| -\int_S \nu(P)\, d\omega_{MP} \right| \le A \cdot \int_S |d\omega_{MP}|$$ здесь использована ограниченность функции плотности моментов

Вспомним теперь про последнее свойство поверхности Ляпунова:

Существует максимально возможный телесный угол $\Omega_0$, под которым эту поверхность или любую ее часть можно увидеть из любой точки пространства

Получим: $|w(M)| \le A \int_S |d\omega_{MP}| \le A \cdot \Omega_0 < +\infty$ ну а значит сходится, и значит определен ∎

**Свойство 2:** Потенциал двойного слоя имеет разрыв первого рода (т.е. конечный) в точках поверхности S. Если S — поверхность Ляпунова, а функция плотности моментов $\nu(P)$ непрерывна всюду на этой поверхности, то имеют место формулы:

$$w_- = w(M) - 2\pi\nu(M),\quad w_+ = w(M) + 2\pi\nu(M),\quad M \in S$$

**Доказательство:**

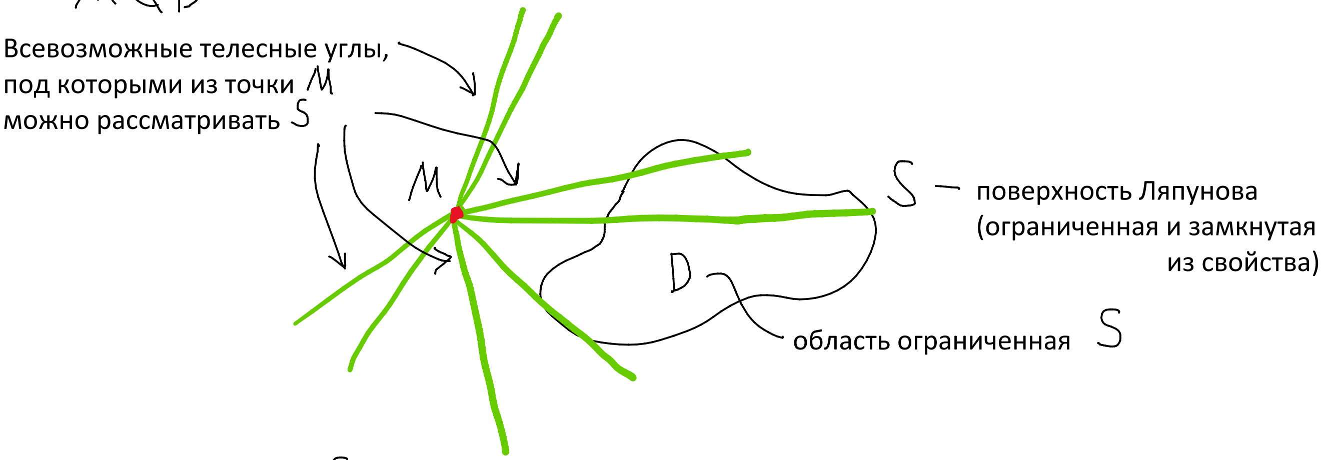
**Часть 1 (Вычисление потенциала двойного слоя с постоянной плотностью моментов):**

Рассмотрим интеграл:

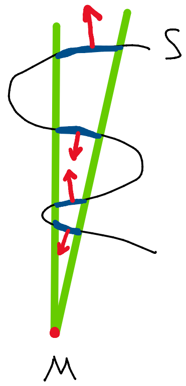
$$I(M) = -\int_S d\omega_{MP}, \quad W(M) \text{ при } \nu(P) = 1$$

**Случай 1:**

$M \notin \overline{D}$




Все конусы пересекают $S$ либо чётное число раз, либо не пересекают.
Куски $S$, которые пересекает один и тот же конус видны под одним и тем же телесным углом.
Однако знаки этих углов (для кусков $S$) попарно различны по знаку из-за различного направления нормалей.

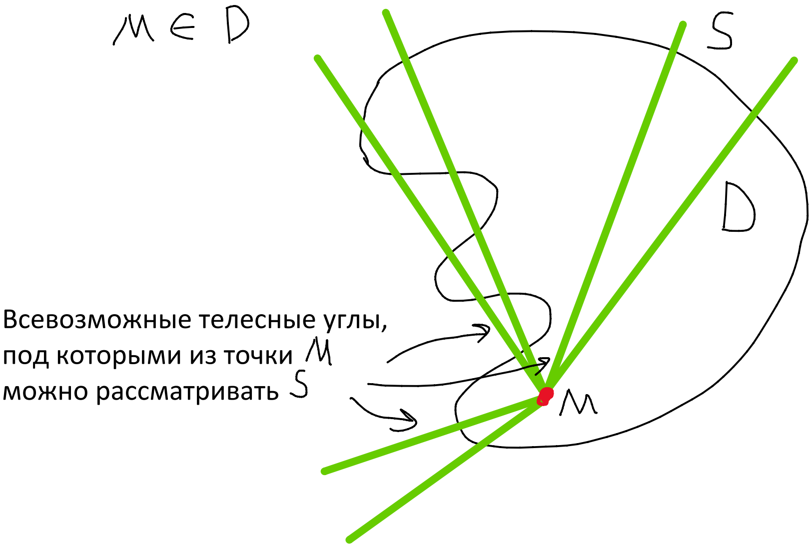



Значит если зафиксировать конус и просуммировать все телесные углы, то получится 0.
Отсюда, если каждый конус даёт нулевой вклад в интеграл, то:

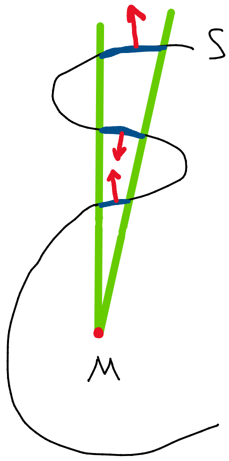
$$I(M) = 0 \quad M \notin \overline{D}$$

**Случай 2:**

$M \in D$



Все конусы пересекают $S$ нечётное число раз.
Куски $S$, которые пересекает один и тот же конус видны под одним и тем же телесным углом. Однако знаки этих углов (для кусков $S$) попарно различны по знаку из-за различного направления нормалей.



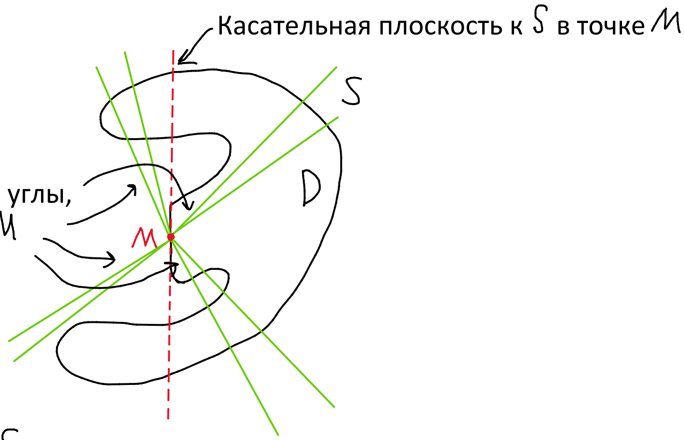

Значит если зафиксировать конус и просуммировать все телесные углы, то чётное число углов взаимно уничтожатся (как в случае 1). Но одно пересечение вклад в интеграл даст. Тот же результат получится, если вместо $S$ рассмотреть сферу. Если внутри неё разместить точку $M$ и посмотреть на пересечения различных конусов из этой точки, то получим ровно одно пересечение. Выходит интеграл по поверхности $S$ эквивалентен интегралу по сфере. Ну а сфера видна из внутренней точки под телесным углом $4\pi$.
Отсюда, учитывая знак "-" перед интегралом $I(M)$, получим:

$$I(M) = -4\pi \quad M \in D$$

**Случай 3:**

$M \in S$

Всевозможные телесные углы, под которыми из точки $M$ можно рассматривать $S$




Все конусы пересекают $S$ любое число раз. Но есть закономерность. Все конусы расположенные с одной стороны касательной плоскости имеют чётное число пересечений с $S$ либо вообще не имеют, а конусы, расположенные с другой стороны от касательной плоскости имеют нечётное число пересечений с $S$.
Куски $S$, которые пересекает один и тот же конус видны под одним и тем же телесным углом. Однако знаки этих углов (для кусков $S$) попарно различны по знаку из-за различного направления нормалей. (аналогично случаю 1 и 2)
Отсюда следует, что если интегрировать по телесному углу, то все конусы с внешней стороны касательной плоскости дадут ноль как в случае 1. А если интегрировать по внутренней стороне касательной плоскости, то при каждом фиксированном конусе, сложение чётного числа телесных углов даст ноль, но останется одно пересечение (кусок $S$). Аналогично случаю 2. Такая же ситуация возникнет при интегрировании полусферы по телесному углу, а значит данный интеграл будет эквивалентен интегралу по полусфере. Ну а это ровно половина случая 2:

$$I(M) = -2\pi, \quad M \in S$$

**Часть 2:**

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\tilde{W}(M) = W(M) - D(M_0)\, I(M), \quad M_0 \in S$$

$$\tilde{W}(M) = -\int_S D(P)\, d\omega_{MP} - D(M_0)\cdot\left(-\int_S d\omega_{MP}\right) = \int_S \left(D(M_0) - D(P)\right) d\omega_{MP}$$

Данный интеграл является несобственным. Нам нужно установить непрерывность $\tilde{W}(M)$ в точке $M_0$. Для этого покажем его равномерную сходимость в $M_0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \Delta \in S : M_0 \in \Delta \subset B(M_0, \delta) \ \forall M \in B(M_0, \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_\Delta \left(D(M_0) - D(P)\right) d\omega_{MP} \right| < \varepsilon$$

Из непрерывности $D(P)$ на $S \Rightarrow D(P)$ непрерывна в $M_0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall P \in S : r_{M_0P} < \delta_1 \Rightarrow |D(P) - D(M_0)| < \varepsilon / \Omega_0$$

$\Omega_0$ - угол из свойств поверхности Ляпунова

Если взять $\delta = \min(\underset{\uparrow}{d}, \delta_1)$, то $\left| \int_\Delta \left(D(M_0) - D(P)\right) d\omega_{MP} \right| < \frac{\varepsilon}{\Omega_0} \int_\Delta |d\omega_{MP}| \leqslant \frac{\varepsilon}{\Omega_0}\cdot \Omega_0 = \varepsilon$

для связности $\Delta$

$\Rightarrow$ В точке $M_0$ $\tilde{W}(M)$ равномерно сходится, отсюда $\tilde{W}(M)$ непрерывна в $M_0$

Точка $M_0$ может быть любой точкой $\in S$

**Часть 3:**

Проведём через точку $M_0 \in S$ прямую в направлении нормали к поверхности $S$.
Будем считать, что точка $M$ лежит на этой прямой. Непрерывность $\tilde{W}(M)$ в $M_0$ означает, что

$\tilde{W}_- = \tilde{W}(M_0) = \tilde{W}_+$, $\tilde{W}_-$ – предельное значение $\tilde{W}(M)$ с внутренней стороны поверхности $S$
$\tilde{W}_+$ – предельное значение $\tilde{W}(M)$ с внешней стороны поверхности $S$

$$\begin{cases} \tilde{W}_- = W_- - D(M_0)\, I_- \\ \tilde{W}_+ = W_+ - D(M_0)\, I_+ \\ \tilde{W}(M_0) = W(M_0) - D(M_0)\, I(M_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{W}_- = W_- + D(M_0)\cdot 4\pi \\ \tilde{W}_+ = W_+ \\ \tilde{W}(M_0) = W(M_0) + 2\pi D(M_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{W}_- = \tilde{W}(M_0) \\ \tilde{W}_+ = \tilde{W}(M_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{W}_- = \tilde{W}(M_0) - 2\pi D(M_0) \\ \tilde{W}_+ = W(M_0) + 2\pi D(M_0) \end{cases}, \quad M_0 \in S \quad \blacksquare$$

**Замечание:**

Величина разрыва потенциала двойного слоя:

$$W_+ - W_- = 4\pi D(M), \quad M \in S$$

Всё доказательство проводилось для случая трёх размерностей. Для двумерного случая будет:

$$\begin{cases} W_- = W(M) - \pi D(M) \\ W_+ = W(M) + \pi D(M) \end{cases}, \quad M \in S \qquad W_+ - W_- = 2\pi D(M), \quad M \in S$$

**Свойство 3: Поведение нормальной производной потенциала двойного слоя в окрестности несущей поверхности.**

Если предельное значение нормальной производной потенциала двойного слоя существуют, то они равны между собой:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_- = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_M = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_+ , \quad M \in S$$

**Свойство 4:**

Потенциал двойного слоя есть гармоническая функция всюду вне точек несущей поверхности:

$$\Delta W = 0 , \quad M \notin S$$

**Свойство 5:**

Свойство справедливо лишь для случая ограниченной поверхность $S$. При $M \to \infty$ потенциал двойного слоя асимптотически ведёт себя как $W(M) = O(1/r^n)$ $\left[\begin{array}{l} n=2 \ \ 3D \\ n=1 \ \ 2D \end{array}\right.$

**Замечание:**

Если полный дипольный момент поверхности $S$ равен нулю $\left(\int\limits_S \mathcal{D}(P)\, dS_P = 0\right)$, то асимптотика при $M \to \infty$ будет иметь вид $W(M) = O(1/r^n)$ $\left[\begin{array}{l} n \geq 3 \ \ 3D \\ n \geq 2 \ \ 2D \end{array}\right.$

# Билет 12

8 июня 2022 г. 2:41

**Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом теории потенциалов.**

Постановка: $\begin{cases} \Delta y = f(M), M \in D \\ y|_S = \varphi(M), M \in S \end{cases}$ $\quad y(M) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$

Решать задачу Дирихле для уравнения Лапласа легче, чем задачу для уравнения Пуассона, поэтому избавимся от неоднородности в диффуре.

Для этого найдём частное решения уравнения Пуассона.

Если область D непрерывно заполнить зарядами с объемной плотностью $\rho(M)$, то эта область породит объемный потенциал: $u(M) = \int_D \rho(P) \frac{1}{r_{MP}} dP$ : $\Delta u(M) = -4\pi \rho(M), \forall M \in D$

выберем $\rho(M) = -\frac{f(M)}{4\pi}$ $\Rightarrow$ неоднородности двух этих уравнений Пуассона станут одинаковыми

$\Rightarrow u(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_D f(P) \frac{1}{r_{MP}} dP$ - частое решение исходного уравнения Пуассона

Устраняем неоднородность из исходного уравнения Пуассона:

будем искать его решение в виде суммы двух функций: $y(M) = u(M) + \underbrace{y_1(M)}_{\text{новая неизвестная функция}}$

новая функция будет решением задачи: $\begin{cases} \Delta y_1 = 0, \\ y_1|_S = \varphi(M) - u(M) = \varphi_1(M), M \in S \end{cases}$

новая неоднородность граничного условия

известна

Таким образом, решение свелось к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Если на поверхности S разместить двойной слой с плотностью моментов $\nu(M)$, то эта поверхность породит потенциал двойного слоя: $w(M) = \int_S \frac{\nu(P) \cos \varphi_{PM} dS_P}{r^2_{MP}}$ подчиняется уравнению Лапласа вне $S$

$\Rightarrow \Delta w = 0, M \in D$

То есть решение $y_1$ интересующей нас задачи и потенциал двойного слоя в области D подчиняются одному и тому же уравнению, а значит будем искать решение в виде $w(M)$

$\Rightarrow y_1(M) = w(M), M \in D$ важно: на поверхности S это равенство выполняться не будет

Для того, чтобы решить задачу, осталось лишь вычислить интеграл $w(M)$, но чтобы его вычислить, надо знать функцию плотности моментов $\nu(P)$

Мы располагаем двумя формулами, описывающими скачок потенциала двойного слоя при пересечении несущей поверхности: $\begin{matrix} w_- = w(M) - 2\pi\nu(M) \\ w_+ = w(M) + 2\pi\nu(M) \end{matrix}, M \in S$

Интересующая нас функция входит в эти равенства линейно, так что ее нетрудно выразить через все остальное.

Сразу две формулы нам не понадобятся, достаточно одной. Т.к. задачу мы решаем в области D, про функции вне D мы не располагаем вообще никакой информацией, следовательно, предельное значение потенциала двойного слоя вне области D (т.е. w+) нам взять неоткуда. А потому вторая формула не подойдет. Пользуемся первой: $w_- = w(M) - 2\pi\nu(M)$

Выясним, как сосчитать $w_-$ – предельное значение потенциала двойного слоя с внутренней стороны поверхности S

$\left. \begin{matrix} y_1(M) = w(M), M \in D \Rightarrow w_- = y_- \\ y_1(M) \in C^1(\overline{D}) \end{matrix} \right| \Rightarrow y_{1-} = y_1(M) = \varphi(M), M \in S$, но тогда: $w_- = \varphi_1(M), M \in S$,

т.е. мы нашли предельное значение потенциала двойного слоя

Разрешая формулу скачка потенциала двойного слоя относительно функции плотности моментов, получаем: $\nu(M) = \frac{1}{2\pi} w(M) - \frac{w_-}{2\pi}(M \in S) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\nu(P) \cos \varphi_{PM} dS_P}{r^2_{MP}} - \frac{\varphi_1(M)}{2\pi}, M \in S$

Т.е. функция $\nu(M)$ будет решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид суммы интегралов:

$y(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \frac{f(P) dP}{r_{MP}} + \int_S \frac{\nu(P) \cos \varphi_{PM} dS_P}{r^2_{MP}}, M \in D$, $\nu(P)$ - решение интегрального уравнения Фредгольма

Это решение трехмерной задачи Дирихле.

Для двумерной задачи Дирихле постановки задач совпадают, а решение будет иметь вид:

$$y(M) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_D f(P)\cdot \ln\frac{1}{r_{MP}}\,dP + \int\limits_S \frac{\nu(P)\cos\varphi_{PM}\,dS_P}{r_{MP}}\,,\ M\in D\,,\ \nu(P)$$ - решение интегрального уравнения Фредгольма

$$\nu(M) = \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\nu(P)\cos\varphi_{PM}\,dS_P}{r_{MP}} - \frac{\varphi_1(M)}{\pi}\,,\ M\in S$$

**Изложенный метод одинаково применим как к внутренним, так и к внешним задачам.**

# Билет 13

8 июня 2022 г. 2:41

**Решение задачи Неймана для уравнения Пуассона методом теории потенциалов.**

Постановка: $\begin{cases} \Delta y = f(M), M \in D \\ \frac{\partial y}{\partial n} = \psi(M), M \in S \end{cases}$ $y(M) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$

Решать задачу Неймана для уравнения Лапласа легче, чем задачу для уравнения Пуассона, поэтому избавимся от неоднородности в диффуре.

Для этого найдём частное решения уравнения Пуассона.

Если область D непрерывно заполнить зарядами с объемной плотностью $\rho(M)$, то эта область породит объемный потенциал: $u(M) = \int_D \rho(P) \frac{1}{r_{MP}} dP$ : $\Delta u(M) = -4\pi \rho(M), \forall M \in D$

выберем $\rho(M) = -\frac{f(M)}{4\pi}$ => неоднородности двух этих уравнений Пуассона станут одинаковыми

$$\Rightarrow u(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_D f(P) \frac{1}{r_{MP}} dP$$ – частое решение исходного уравнения Пуассона

Устраняем неоднородность из исходного уравнения Пуассона:

новая неизвестная функция

будем искать его решение в виде суммы двух функций: $y(M) = u(M) + y_2(M)$

новая функция будет решением задачи: $\begin{cases} \Delta y_2 = 0, M \in D \\ \frac{\partial y_2}{\partial n}\Big|_S = \psi(M) - \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi_2(M), M \in S \end{cases}$, $y_2 \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$

новая неоднородность граничного условия

известна

Таким образом, решение свелось к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Если на поверхности S разместить простой слой с функцией плотности $\sigma(M)$, то эта поверхность породит потенциал простого слоя: $W(M) = \int_S \frac{\sigma(P)\, dS_P}{r_{MP}}$

подчиняется уравнению Лапласа вне $S$

$\Rightarrow \Delta v = 0, M \in D$

То есть решение $y_2$ интересующей нас задачи и потенциал двойного слоя в области D подчиняются одному и тому же уравнению, а значит будем искать решение в виде $v(M)$

$\Rightarrow y_2(M) = v(M), M \in D$ важно: на поверхности S это равенство выполняться не будет

Для того, чтобы решить задачу, осталось лишь вычислить интеграл $v(M)$, но чтобы его вычислить, надо знать функцию плотности моментов $\nu(P)$

Есть формулы, описывающие разрыв нормальной производной потенциала простого слоя при пересечении несущей поверхности, возьмём ту, которая содержит предельное значение производной внутри области $D$: $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_- = \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_M + 2\pi\sigma(M), M \in S$

Вторая формула содержит предельное значение производной вне области D, его мы найти никак не сумеем. А потому вторая формула оказывается в данном случае совершенно бесполезной.

Поскольку $y_2(M) = v(M), M \in D$ всюду в области D, то это равенство будет справедливо и для любых производных от этих функций. Лишь бы эти производные вычислялись во внутренних точках области D. Предельные значения нормальных производных, вычисленных с внутренней стороны поверхности S, вычисляются именно в области D. Поэтому: $\left.\begin{matrix}\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_- = \left(\frac{\partial y_2}{\partial n}\right)_- \\ y_2(M) \in C^1(\overline{D})\end{matrix}\right| \Rightarrow \left(\frac{\partial y_2}{\partial n}\right)_- = \left(\frac{\partial y_2}{\partial n}\right)_M, M \in S$

значение производной в точках границы известно из граничного условия, это — функция $\psi_2(M)$,

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_- = \psi_2(M), M \in S$$

Разрешая формулу скачка потенциала двойного слоя относительно функции плотности моментов, получаем: $\sigma(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\sigma(P) \cos\varphi_{MP}\, dS_P}{r^2_{MP}} + \frac{\psi_2(M)}{2\pi}, M \in S$

Т.е. функция $\sigma(P)$ будет решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид суммы интегралов:

$$y(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \frac{f(P)\, dP}{r_{MP}} + \int_S \frac{\sigma(P)\, dS_P}{r_{MP}}, M \in D,$$ $\sigma(P)$ - решение интегрального уравнения Фредгольма

Это решение трехмерной задачи Дирихле.

Для двумерной задачи Дирихле постановки задач совпадают, а решение будет иметь вид:

$$y(M) = -\frac{1}{2\pi}\int_D f(P)\cdot\ln\frac{1}{r_{MP}}\,dP + \int_S \sigma(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}\,dS_P,\ M\in D,\ \sigma(P)$$ - решение интегрального уравнения Фредгольма

$$\sigma(M) = -\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\sigma(P)\cos\varphi_{PM}\,dS_P}{r_{MP}} + \frac{\psi_2(M)}{\pi},\ M\in S$$

**Изложенный метод одинаково применим как к внутренним, так и к внешним задачам.**

# Билет 14

8 июня 2022 г. 12:13

**Основное уравнение теории специальных функций. Случай одной особой точки. Теорема об ограниченных и неограниченных решениях. Постановка краевых задач.**

Математические функции принято делить на **элементарные** и **специальные**.

**Основное уравнение теории специальных функций:** 1) $\mathcal{L}[u]=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx}-q(x)u=0$ — явный вид

2) $\mathcal{L}[u]=\lambda\rho u \Leftrightarrow \frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx}-q(x)u+\lambda\rho u=0$ линейное и однородное, всегда имеет тривиальное решение $u(x)\equiv 0$

Ту или иную форму записи основного уравнения мы будем использовать в зависимости от ситуации. Нужна задача на собственные значения — берем вторую форму записи. Ну а если не нужна, то и первая форма вполне сойдет.

**Основная лемма:** Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — какие угодно частные решения основного уравнения. То есть вообще какие угодно — линейно зависимые, линейно независимые, может, даже тривиальные. Тогда имеет место следующая формула: $k(x)W[u_1(x),u_2(x)]=const$, $W[u_1(x),u_2(x)]=u_1\frac{du_2}{dx}-u_2\frac{du_1}{dx}$ — определитель Вронского

**Доказательство:**

Выпишем две копии основного уравнения - для функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$: $\frac{d}{dx}k(x)\frac{du_1}{dx}-q(x)u_1=0$ (1)

$\frac{d}{dx}k(x)\frac{du_2}{dx}-q(x)u_2=0$ (2)

$$(2)\cdot u_1(x)-(1)\cdot u_2(x)=k(x)\underbrace{\left(u_1\frac{d^2u_2}{dx^2}-u_2\frac{d^2u_1}{dx^2}\right)}_{(a)}+\frac{dk}{dx}\underbrace{\left(u_1\frac{du_2}{dx}-u_2\frac{du_1}{dx}\right)}_{(b)}\ominus\boxed{(a)=\frac{d}{dx}(b)}$$

$$\Rightarrow \ominus\ \frac{d}{dx}k(x)\left(u_1\frac{du_2}{dx}-u_2\frac{du_1}{dx}\right)=\frac{d}{dx}k(x)W[u_1(x),u_2(x)]=0 \Rightarrow k(x)W[u_1(x),u_2(x)]=\int 0\,dx=const \blacksquare$$

Теперь, в отличие от прошлого семестра, где мы считали $k(x)>0$, теперь он может обращаться в нуль, правда только в одной или двух точках.

Определение: Точка $x_0$, в которой коэффициент $k(x)$ обращается в нуль, называется **особой точкой основного уравнения теории специальных функций**

Если раскрыть оператор дифференцирования в основном уравнении: $k(x)\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{dk}{dx}\frac{du}{dx}-q(x)\cdot u=0$
При $x=x_0$ исчезает слагаемое со старшей производной.

Мы будем иметь дело со случаями, когда основное уравнение имеет **одну особую точку** (т.е. коэффициент **k(x) обращается в нуль на одном конце рассматриваемого интервала**) или **две особых точки** (т.е. **коэффициент k(x) обращается в нуль на обоих концах рассматриваемого интервала**).

**Теорема об ограниченных и неограниченных решениях:**

Пусть $k(x)=(x-a)\varphi(x)$, $\varphi(x)\in C[a,b]$, $\varphi(x)>0$ $\forall x\in[a,b]$ $\quad y_1(x)=u(x)\cdot(x-a)^n$, $n\geq 0$, $u(x)\in C[a,b]$, $u(a)\neq 0$

$y_1(x)$, $y_2(x)$ – два ЛНЗ реш основного уравнения, $y_1(x)$ - частное решение, ограниченное в особой т. $x=a$

Тогда второе решение будет неограниченной функцией в этой точке.

Если из двух линейно независимых решений основного уравнения одно ограничено в особой точке, то второе — точно неограничено.

**Доказательство:**

Согласно основной лемме: $W[y_1(x),y_2(x)]=W[y_1(x),y_2(x)]=\frac{C}{k(x)}$

т.к. $y_1(x)$, $y_2(x)$ – ЛНЗ решения основного уравнения $\Rightarrow C\neq 0$

Поделим обе части равенства на $y_1^2(x)$: $\frac{W[y_1(x),y_2(x)]}{y_1^2(x)}=\frac{1}{y_1}\frac{dy_2}{dx}-\frac{y_2}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1}=\frac{C}{k(x)y_1^2(x)}$

$a \leqslant x < x_0$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2(x)}{y_1(x)} - \frac{y_2(x_0)}{y_1(x_0)} = C\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{k(\xi)y_1^2(\xi)} \Rightarrow y_1(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{y_2(x_0)}{y_1(x_0)} = C_1 \Rightarrow y_2(x) = y_1(x)\left(C_1 + C\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{k(\xi)y_1^2(\xi)}\right)$$

$y_1(a)$ – ограниченная величина $\Rightarrow C_1 y_1(x)$ не скажется на доказательстве неограниченности

Поэтому для упрощения можно взять $C_1 = 0$

Далее, если взять что-нибудь неограниченное и умножить это на конечное число, то результат по-прежнему будет неограниченным. Поэтому совершенно все равно, как выбирать постоянную C. Положим для простоты C = 1, тогда будет:

$$y_2(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{k(\xi)y_1^2(\xi)} = u(x)(x-a)^n\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\varphi(\xi)u^2(\xi)(\xi-a)^{2n+1}}, \quad y_1(x), k(x) \text{ из условия}$$

$u(a) \neq 0$, $u(x) \in C[a, b]$

$x_0$ – нужно взять в окрестности $a \Rightarrow \forall x \in [a; x_0] \quad u(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{u^2(x)} \in C[a; x_0]$

$\varphi(x) > 0$ на $[a, b] \Rightarrow \dfrac{1}{\varphi(x)u^2(x)} \in C[a; x_0]$

Воспользуемся теоремой о среднем:

$$y_2(x) = u(x)(x-a)^n\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\varphi(\xi)u^2(\xi)(\xi-a)^{2n+1}} = \frac{u(x)(x-a)^n}{\varphi(\xi^*)u^2(\xi^*)}\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{(\xi-a)^{2n+1}}, \quad \xi^* \in [x; x_0]$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{(\xi-a)^{2n+1}} = \begin{cases} \ln(x-a) - \ln(x_0-a), & n=0 \\ -\frac{1}{2n}(x-a)^{-2n} + \frac{1}{2n}(x_0-a)^{-2n}, & n>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_2(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x)}{\varphi(\xi^*)u^2(\xi^*)}\cdot\left(\ln(x-a) - \ln(x_0-a)\right), & n=0 \\ \dfrac{u(x)}{2n\,\varphi(\xi^*)u^2(\xi^*)}\cdot\left(\dfrac{(x-a)^n}{(x_0-a)^{2n}} - \dfrac{1}{(x-a)^n}\right), & n>0 \end{cases} \Rightarrow y_2(x) \text{ – неограничена}$$

$\square$

**Следствие:**

Более того, ставить в особой точке обычное граничное условие (скажем, первого, второго или третьего рода) вместо условия ограниченности категорически не рекомендуется. Скорее всего в такой постановке задача вообще не будет иметь решений, поскольку обычные граничные условия накладывают на функции существенно более жесткие ограничения. Записывать условие ограниченности в виде $|u(x)| < +\infty$ (т.е. при всех x) можно, но совершенно не нужно. Дело в том, что во всех точках, кроме особых, все (то есть вообще все) решения основного уравнения и так ограничены. Ну и вдобавок граничное условие всё-таки принято ставить на границе, то есть в конкретной точке

# Билет 15

8 июня 2022 г. 15:22

**Уравнение Бесселя. Особенность. Построение ограниченного решения** $J_\nu(x)$

каноническая форма: $\frac{1}{z}\frac{d}{dz}z\frac{du}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)u=0$, $u(z)$ - неизвестная функция
$\nu$ – порядок уравнения Бесселя

Решения у-я Бесселя называют по-разному: цилиндрические функции порядка $\nu$, Бесселевы функции порядка $\nu$, или же функции Бесселя порядка $\nu$

Если записать оператор дифференцирования в факторизованном виде, получится: $\frac{d}{dz}z\frac{du}{dz}+\left(z-\frac{\nu^2}{z}\right)u=0$

Эта форма записи уравнения Бесселя позволяет легко сравнить его с основным уравнением теории специальных функций: $\frac{d}{dz}k(z)\frac{du}{dz}-q(z)u=0$, в случае уравнения Бесселя $k(z)=z$

Поэтому уравнение Бесселя имеет всего одну особую точку $z=0$

Согласно теореме об ограниченных и неограниченных решениях, уравнение Бесселя может иметь не более одного решения, ограниченного в особой точке $z=0$

Такое решение существует, давайте его найдем.

Ограниченное решение уравнения Бесселя мы будем искать в виде ряда Фробениуса (т.е. степенного ряда особого вида: $u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+\sigma}$, $a_0\neq 0$

Поскольку нас интересует ограниченное решение, должно быть $\sigma\geqslant 0$

Предположим, что этот ряд можно дифференцировать почленно:

$$\frac{du}{dz}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)a_n z^{n+\sigma-1},\quad \frac{d^2u}{dz^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n z^{n+\sigma-2}$$

Поставим в ур-е Бесселя: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n z^{n+\sigma}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)a_n z^{n+\sigma}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+\sigma+2}-\nu^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+\sigma}=0.$

В трех суммах показатели степени z получились одинаковыми. Перепишем сумму номер три так, чтобы в ней получился такой же показатель степени. Для этого переопределим счетчик, сделав замену $n'=n+2$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+\sigma+2}=\sum_{n'=2}^{\infty}a_{n'}z^{n+\sigma}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}z^{n+\sigma},\quad (n+\sigma)(n+\sigma-1)+(n+\sigma)=(n+\sigma)^2\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left((n+\sigma)^2-\nu^2\right)z^{n+\sigma}=-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}z^{n+\sigma}$$

Это равенство должно выполняться при всех $z$

Но степени z есть линейно независимые функции, поэтому для достижения равенства при всех z необходимо совпадение коэффициентов при различных степенях z. То есть одно функциональное равенство распадается на бесконечное число алгебраических уравнений.

$n=0$: $a_0(\sigma^2-\nu^2)=0$, $a_0\neq 0\Rightarrow\sigma^2=\nu^2\Rightarrow\boxed{\sigma=\nu}$

$n=1$: $a_1\left((1+\nu)^2-\nu^2\right)=0$ Решение нас интересует в самом общем случае, то есть для произвольного порядка v. Поэтому приходится выбирать $a_1=0$

Начиная со следующей степени $2+\sigma$, все уравнения будут выглядеть однотипно (именно начиная с n = 2 будет давать вклад сумма из правой части): $a_n\left((n+\nu)^2-\nu^2\right)=-a_{n-2}$, $n=2,3,\ldots\Rightarrow a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}$, $n=2,3,\ldots$

Получилось рекуррентное соотношение отдельно между четными и отдельно между нечетными, а раз $a_1=0$, то все коэффициенты с нечетными номерами обращаются в нуль $\left(a_3=-\frac{a_1}{3(3+2\nu)}\right)$

Следовательно, отличными от нуля могут быть лишь коэффициенты ряда с четными номерами:

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{2^2m(m+\nu)^2},\quad m=1,2,\ldots$$

Найдем явный вид нескольких первых коэффициентов:

$m=1$, $a_2=-\frac{a_0}{2^2\cdot 1(1+\nu)}$

$m=2$, $a_4=-\frac{a_2}{2^2\cdot 2(2+\nu)}=\frac{(-1)^2a_0}{2^4\cdot 1\cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}$

$$\Rightarrow a_{2m}=\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}m!(1+\nu)(2+\nu)\cdot\ldots\cdot(m+\nu)},\quad m=1,2,\ldots$$

Чтобы еще немного упростить это выражение, вспомним про гамма-функцию Эйлера:

$$\Gamma(m+\nu+1) = (m+\nu)\Gamma(m+\nu) = (m+\nu)(m+\nu-1)\,\Gamma(m+\nu-1) = \ldots = (m+\nu)(m+\nu-1)\cdot\ldots\cdot(1+\nu)\Gamma(1+\nu)$$

Поэтому: $(1+\nu)(2+\nu)\cdot\ldots\cdot(m+\nu) = \dfrac{\Gamma(m+\nu+1)}{\Gamma(1+\nu)}$

Таким образом, выражение для коэффициента ряда принимает вид: $a_{2m} = \dfrac{(-1)^m \cdot a_0 \cdot \Gamma(1+\nu)}{2^{2m} \cdot m! \cdot \Gamma(m+\nu+1)}$, $m = 1, 2, \ldots$

Выберем $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}$, $\Rightarrow u(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu-1)} \left(\dfrac{z}{2}\right)^{2m+\nu}$

Это решение принято обозначать символом $J_\nu(z)$

# Билет 16

8 июня 2022 г. 16:25

**Уравнение Бесселя. Определитель Вронского функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$. Вывод формулы, связывающей $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$**

каноническая форма: $\frac{1}{z}\frac{d}{dz} z \frac{du}{dz} + \left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)u=0$, $u(z)$ - неизвестная функция
$\nu$ – порядок уравнения Бесселя

Решения у-я Бесселя называют по-разному: цилиндрические функции порядка $\nu$, Бесселевы функции порядка $\nu$, или же функции Бесселя порядка $\nu$
Меняя в функции Бесселя $\nu$ на $-\nu$: $J_{-\nu}(z)=\sum\limits_{m=0} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-\nu}$

Это — тоже функция Бесселя, только отрицательного порядка. Функция Бесселя отрицательного порядка — это еще одно частное решение уравнения Бесселя.
Из явного вида рядов для функций $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ понятно, что в окрестности точки $z=0$, эти функции должны вести себя, как: $J_\nu(z)\sim z^\nu$, $J_{-\nu}(z)\sim \frac{1}{z^\nu}$, $z\to 0$

Действительно, мы имеем дело с рядами по увеличивающимся степеням $z$, т.е. в окрестности точки $z=0$ каждый следующий член ряда по абсолютной величине меньше предыдущего. Поэтому при z → 0 достаточно ограничиться самым первым членом ряда, соответствующим $m=0$.

Из анализа поведения функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ в окрестности т. z = 0 следует, что они должны быть ЛНЗ. Поэтому общее решение уравнения Бесселя можно представить в виде суперпозиции этих функций: $C_1 J_\nu(z) - C_2 J_{-\nu}(z)$

Однако пока это всего лишь гипотеза, пусть и весьма правдоподобная. Ее нужно проверить. Проверять линейную независимость функций удобнее всего при помощи определителя Вронского. Найдем выражение для этого определителя:
Согласно основной лемме: $W[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] = \frac{C}{z}$
В самом деле, в случае уравнения Бесселя $k(z)=z$, откуда и следует выписанное равенство.
=> $C$ - ?, а поскольку постоянная — она и в Африке постоянная, достаточно сосчитать произведение в какой-нибудь одной точке. $z\cdot W[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)]$
Возьмём $z=0$: $C=\lim\limits_{z\to 0} z\, W[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)]$

В рассматриваемом пределе все старшие степени z будут давать исчезающе малый вклад, поэтому от рядов для функций Бесселя достаточно оставить только первые слагаемые (с m = 0), тогда:

$$J_\nu(z)=\frac{z^\nu}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}+\mathcal{O}\left(z^{2+\nu}\right), \quad z\to 0,$$
$$J'_\nu(z)=\frac{\nu z^{\nu-1}}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}+\mathcal{O}\left(z^{1+\nu}\right), \quad z\to 0,$$
$$J_{-\nu}(z)=\frac{2^\nu}{\Gamma(1-\nu)z^\nu}+\mathcal{O}\left(z^{2-\nu}\right), \quad z\to 0,$$
$$J'_{-\nu}(z)=-\frac{\nu 2^\nu}{\Gamma(1-\nu)z^{\nu+1}}+\mathcal{O}\left(z^{1-\nu}\right), \quad z\to 0.$$

Здесь штрихом обозначены производные по аргументу, т.е. по z

Следовательно, определитель Вронского принимает вид: $W[J_\nu(z),J_{-\nu}(z)]=J_\nu(z)J'_{-\nu}(z)-J'_\nu(z)J'_{-\nu}(z)=$
$$=-\frac{2\nu}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(1+\nu)}\frac{1}{z}+\mathcal{O}(z), \quad z\to 0.$$
Поэтому: $C=\lim\limits_{z\to 0} zW[J_\nu(z),J_{-\nu}(z)]=-\frac{2\nu}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(1+\nu)}.$

Учтём, что $\Gamma(1+\nu)=\nu\Gamma(\nu)$, находим: $C=-\frac{2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}$

По формуле дополнения для гамма-функции Эйлера: $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)=\frac{1}{\sin\pi\nu}$ => $C=-\frac{2\sin\pi\nu}{\pi}$

Следовательно, мы нашли выражение для определителя Вронского в виде: $W[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)]=-\frac{2\sin\pi\nu}{\pi z}$

Если $\nu$ — не целое, то определитель Вронского нигде не обращается в нуль, т.е. функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ - ЛНЗ

Значит, в этом случае общее решение уравнения Бесселя и в самом деле можно представить в виде суперпозиции функций Бесселя положительного и отрицательного порядков: $u(z)=C_1 J_\nu(z)+C_2 J_{-\nu}(z)$

Однако если $\nu$ - целое, то определитель Вронского равен нулю, т.е. в случае целого порядка функции будут ЛЗ, что странно, поэтому давайте рассмотрим ряд для ф. Бесселя отрицательного целого порядка:

$$J_{-n}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}.$$

Пока значение счетчика m мало, аргумент гамма-функции — это отрицательное целое число. Но гамма-функция Эйлера Г(x) имеет полюса в точках x = 0, −1, −2, . . . Значит, в соответствующих коэффициентах ряда происходит деление на бесконечность. То есть эти коэффициенты в точности равны нулю.

Коэффициенты ряда будут отличны от нуля только тогда, когда аргумент гамма-функции станет больше единицы (или равен ей), т.е. при условии m−n+ 1 > 1. Другими словами, имеет смысл писать лишь члены ряда с m = n, n + 1, n + 2, . . ., т.е.:

$$J_{-n}(z)=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}$$

Переопределим счетчик с m на k, т.е. пусть k = m − n:

$$J_{-n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!\Gamma(k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

Учитывая, что $(k+n)!=\Gamma(k+n+1)$, а $\Gamma(k+1)=k!$, получаем

$$J_{-n}(z)=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}=(-1)^nJ_n(z).$$

То есть действительно, функции Бесселя отрицательного целого порядка лишь множителем (да и то не всегда) отличаются от функций Бесселя положительного целого порядка.

Что ж, загадка разгадана. Но проблема осталась. Мы по-прежнему не располагаем общим решением уравнения Бесселя в случае целого 4 порядка. А это досадно, поскольку очень большое число физических приложений приводит именно к уравнению Бесселя целого порядка.

# Билет 17

8 июня 2022 г. 17:06

**Функция Вебера $Y_\nu(x)$. Определение функции Вебера целого порядка. Линейная независимость функций $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$. Понятие о функциях Ганкеля.**

По определению: $Y_\nu(z) = \dfrac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$ цилиндрическая функция второго рода порядка $\nu$,
бесселевой функцией второго рода порядка $\nu$,
функцией Бесселя второго рода порядка $\nu$,
функцией Вебера порядка $\nu$,
функцией Неймана порядка $\nu$.

функция Вебера в случае нецелого порядка гарантированно будет частным решением уравнения Бесселя.
Но нас в первую очередь интересует все-таки целый порядок. В случае целого порядка $\nu = n$ само определение функции Вебера становится несостоятельным.

В самом деле: $\sin\pi n = 0$ и $J_n(z)\cos\pi n - J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) - (-1)^n J_n(z) = 0$
выходит неопределенность вида "$\dfrac{0}{0}$"

Впрочем, разрешить эту неопределенность можно при помощи правила Лопиталя. Поэтому в случае целого порядка используется следующее определение: $Y_n(z) = \lim\limits_{\nu\to n}\dfrac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$

Согласно правилу Лопиталя: $Y_n(z) = \lim\limits_{\nu\to n}\dfrac{\frac{\partial}{\partial\nu}\left(J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)\right)}{\frac{\partial}{\partial\nu}\sin\pi\nu} =$

$$= \lim_{\nu\to n}\frac{1}{\pi\cos\pi\nu}\left(-\pi\sin\pi\nu\cdot J_\nu(z) + \cos\pi\nu\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right).$$

т.к. устранили неопределённость, то можно всюду положить $\nu = n$ и предел больше не писать.
Тогда самое первое слагаемое исчезает, косинус можно заменить на $(-1)^n$, и мы получаем:

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right)_{\nu=n} - \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}$$

Для проверки выпишем уравнение Бесселя: $z\dfrac{d}{dz}z\dfrac{du}{dz} + (z^2-\nu^2)u = 0$
и продифференцируем его по $\nu$: $z\dfrac{d}{dz}z\dfrac{d}{dz}\dfrac{\partial u}{\partial\nu} + \left(z^2-\nu^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial\nu} - 2\nu u = 0$

В качестве первого частного решения уравнения Бесселя возьмём: $u = \frac{1}{\pi}J_\nu(z)$
А второго: $u = \frac{(-1)^n}{\pi}J_{-\nu}(z)$

Тогда эти частные решения будут подчиняться уравнениям:

$$z\frac{d}{dz}z\frac{d}{dz}\frac{1}{\pi}\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} + \left(z^2-\nu^2\right)\frac{1}{\pi}\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - \frac{2\nu}{\pi}J_\nu(z) = 0,$$
$$z\frac{d}{dz}z\frac{d}{dz}\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu} + \left(z^2-\nu^2\right)\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu} - \frac{2\nu(-1)^n}{\pi}J_{-\nu}(z) = 0$$

Вычтем из первого равенства второе, тогда получится:

$$z\frac{d}{dz}z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right) +$$
$$+\left(z^2-\nu^2\right)\left(\frac{1}{\pi}\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right) - \frac{2\nu}{\pi}\left(J_\nu(z) - (-1)^n J_{-\nu}(z)\right) = 0$$

Положим в этом равенстве $\nu = n$, тогда большая скобка превратится в функцию Вебера $Y_n(z)$, а самая последняя разность исчезнет, поскольку $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$. Тогда получится

$$z\frac{d}{dz}z\frac{dY_n}{dz} + \left(z^2-n^2\right)Y_n = 0,$$

т.е. и в случае целого порядка функция Вебера будет решением уравнения Бесселя.

Напомню, что функция Вебера — это кандидат на второе частное решение уравнения Бесселя, линейно независимое с функцией $J_\nu(z)$. Давайте проверим линейную независимость этих функций путем вычисления определителя Вронского, пока — для случая нецелых $\nu$

$$W[J_\nu(z), Y_\nu(z)] = W\left[J_\nu(z), \frac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}\right] =$$

$$= \operatorname{ctg}\pi\nu W[J_\nu(z), J_\nu(z)] - \frac{1}{\sin\pi\nu} W[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] =$$

$$= -\frac{1}{\sin\pi\nu}\left(-\frac{2\sin\pi\nu}{\pi z}\right) = \frac{2}{\pi z}.$$

Определитель Вронского никогда не обращается в нуль, поэтому $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ линейно независимы. Но как обстоят дела в случае целого порядка $\nu = n$? Этот случай нам наиболее интересен, поскольку только при $\nu = n$ мы пока не располагаем общим решением уравнения Бесселя. Вычисляем определитель Вронского

$$W[J_n(z), Y_n(z)] = W\left[J_n(z), \lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}\right].$$

Функция Бесселя аналитична по порядку $\nu$ и по переменной $z$. Это обстоятельство позволяет менять местами порядок дифференцирования в смешанных производных. Но производная, как известно, определяется при помощи предельного перехода. Поэтому можно еще и менять местами соответствующие пределы. Ну или предел и производную. То есть можно считать не производную от предела, а предел от производной. Поэтому:

$$W[J_n(z), Y_n(z)] = \lim_{\nu\to n} W\left[J_\nu(z), \frac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}\right] = \lim_{\nu\to n}\frac{2}{\pi z} = \frac{2}{\pi z}$$

**Таким образом, функция Бесселя и функция Вебера будут ЛНЗ частными решениями уравнения Бесселя в случае абсолютно любого порядка**, поэтому общее решение уравнения Бесселя всегда может быть записано в виде: $u(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z)$, $C_1, C_2 = \mathrm{const}$

Ну а раз так, то использовать функции Бесселя отрицательного порядка при записи общего решения уравнения Бесселя нет никакой необходимости. Поэтому при решении практических задач в подавляющем большинстве случаев используется запись общего решения через функцию Бесселя и функцию Вебера.

**Понятие о функциях Ганкеля.** **aka цилиндрические функции третьего рода**

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z)$$

Можно видеть, что эти функции — комплексно сопряженные по отношению друг к другу, поэтому функции Ганкеля линейно независимы. Следовательно, общее решение уравнения Бесселя всегда (то есть при всех значениях $\nu$) может быть записано и в таком виде: $u(z) = C_1 H_\nu^{(1)}(z) + C_2 H_\nu^{(2)}(z)$

Обе функции Ганкеля неограничены в точке z = 0, а при действительных значениях аргумента $z = x > 0$ комплекснозначны.

Поэтому мы не будем их использовать при решении задач на семинарах, для простых задач эти функции не нужны. Функции Ганкеля оказываются полезны при решении задач электродинамики и теории относительности из-за удобной асимптотики на бесконечности.

# Билет 18

8 июня 2022 г. 18:16

**Формулы дифференцирования цилиндрических функций**

$$U_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z)$$

Тогда для $U_\nu(z)$ справедливы следующие формулы:

$$\frac{d}{dz} z^\nu \cdot U_\nu(z) = z^\nu \cdot U_{\nu-1}(z) \qquad \frac{d}{dz}\frac{U_\nu(z)}{z^\nu} = -\frac{1}{z^\nu}\cdot U_{\nu+1}(z)$$

Установим справедливость первой формулы для функции Бесселя:

$$\frac{d}{dz} z^\nu J_\nu(z) = \frac{d}{dz}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\frac{z^{2m+2\nu}}{2^{2m+\nu}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\cdot(2m+2\nu)}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\cdot\frac{z^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu}} \;=$$

$$\Gamma(m+\nu+1) = \left[(m+\nu)! = (m+\nu)\cdot(m+\nu-1)!\right] = (m+\nu)\cdot\Gamma(m+\nu) \Rightarrow$$

если трудно с $\Gamma$.

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu)}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu-1}\cdot z^\nu = J_{\nu-1}(z)\cdot z^\nu \quad \checkmark$$

$$\frac{d}{dz}\frac{J_\nu(z)}{z^\nu} = \frac{d}{dz}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\frac{z^{2m}}{2^{2m+\nu}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\cdot 2m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\frac{z^{2m-1}}{2^{2m+\nu}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\cdot 2\cdot m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\frac{z^{2m-1}}{2^{2m+\nu}} = -\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{(m+1)}}{\cancel{(m+1)}!\,\Gamma(m+\nu+2)}\cdot\frac{z^{2m+1+\nu}}{2^{2m+\nu+\cancel{2}\,1}}}_{J_{\nu+1}(z)}\cdot\frac{1}{z^\nu} = -J_{\nu+1}(z)\cdot\frac{1}{z^\nu} \quad \checkmark$$

(в знаменателе: $\cancel{(m+1)}!$ заменено на $m!$)

Установим теперь верность этих выражений для функции Вебера:

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)} \qquad Y_{\nu-1}: \begin{array}{l}\cos(\pi(\nu-1)) = -\cos(\pi\nu)\\ \sin(\pi(\nu-1)) = -\sin(\pi\nu)\end{array}$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^\nu\cdot\frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}\right) = \frac{\cos(\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\cdot\frac{d}{dz}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) - \frac{1}{\sin\pi\nu}\frac{d}{dz}\left(z^\nu J_{-\nu}(z)\right) =$$

$$= \frac{\cos(\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\cdot z^\nu J_{\nu-1}(z) - \frac{1}{\sin\pi\nu}\frac{d}{dz}\left(\frac{J_{-\nu}(z)}{z^{-\nu}}\right) = \frac{\cos(\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\cdot z^\nu J_{\nu-1}(z) + \frac{1}{\sin\pi\nu}\cdot J_{-\nu+1}\cdot z^\nu =$$

$$= z^\nu\cdot\frac{\cos\pi\nu\, J_{\nu-1}(z) + J_{1-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} = z^\nu\cdot\frac{\cos(\pi(\nu-1))J_{\nu-1}(z) - J_{1-\nu}(z)}{\sin(\pi(\nu-1))} = z^\nu Y_{\nu-1}(z) \quad \checkmark$$

$\nu\notin\mathbb{Z}$, если $\nu\in\mathbb{Z}$: $\frac{d}{dz}\left(z^\nu \lim\limits_{\nu\to n} Y_\nu(z)\right) \underset{\uparrow}{=} \lim\limits_{\nu\to n}\frac{d}{dz}\left(z^\nu Y_\nu(z)\right) = \lim\limits_{\nu\to n} z^\nu Y_{\nu-1}(z) = z^n Y_{n-1}(z)$

из анал. $\underbrace{J_\nu \text{ и } J_{-\nu}}_{Y_\nu}$

$$\frac{d}{dz}\frac{Y_\nu(z)}{z^\nu} = -\frac{Y_{\nu+1}(z)}{z^\nu} \;-\; ? \qquad \begin{array}{l}\cos(\pi(\nu+1)) = -\cos(\pi\nu)\\ \sin(\pi(\nu+1)) = -\sin(\pi\nu)\end{array}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^\nu}\cdot\frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}\right) = \frac{\cos(\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{J_\nu(z)}{z^\nu}\right) - \frac{1}{\sin(\pi\nu)}\cdot\frac{d}{dz}\left(z^{-\nu}J_{-\nu}(z)\right) =$$

$$= -\frac{1}{z^\nu}\cdot\frac{\cos(\pi(\nu+1))\,J_{\nu+1}(z) - J_{-\nu-1}(z)}{\sin(\pi(\nu+1))} = -\frac{1}{z^\nu}\cdot Y_{\nu+1}(z) \quad \checkmark$$

Для целого порядка аналогично предыдущему.

# Билет 19

8 июня 2022 г. 19:25

**Функции Jv(x) и Yv(x) в случае полуцелого порядка. Асимптотика цилиндрических функций (без доказательства).**

Полуцелые порядки, это $\nu = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \ldots$

Рассмотрим функцию Бесселя с $\nu = 1/2$:

$$J_{1/2}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+3/2)} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+1/2}$$

$$\Gamma(m+3/2) = (m+1/2)\,\Gamma(m+1/2) = (m+1/2)\cdot(m-1/2)\,\Gamma(m-1/2) = \frac{(2m+1)(2m-1)}{2^2}\cdot\Gamma(m-1/2) =$$

$$= \frac{(2m+1)\cdot(2m-1)\cdot(2m-3)\cdot\ldots\cdot 1}{2^{m+1}}\,\underbrace{\Gamma(1/2)}_{=\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{m+1}}\cdot\frac{(2m+1)\cdot 2m\cdot(2m-1)\cdot(2m-2)\cdot(2m-3)\cdot\ldots\cdot 1}{2m\cdot(2m-2)\cdot\ldots\ldots\cdot 2} =$$

$$\left[\Gamma(\underbrace{1}_{m}+3/2) = (1+1/2)\cdot\Gamma(1+1/2) = (1+1/2)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(1/2) = \frac{2+1}{2^{\underbrace{2}_{m+1}}}\Gamma(1/2)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{m+1}}\,\frac{(2m+1)!}{2^m\cdot m!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m+1}}\cdot\frac{(2m+1)!}{m!}$$

$$J_{1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{2m+1}(-1)^m}{\sqrt{\pi}\cdot(2m+1)!}\,\frac{z^{2m+1/2}}{2^{2m+1/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\sin(z)$$

Рассмотрим функцию Бесселя с $\nu = -1/2$

$$J_{-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+1/2)}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-1/2}$$

$$\Gamma(m+1/2) = \frac{\Gamma(m+3/2)}{m+1/2} = \frac{2\,\Gamma(m+3/2)}{(2m+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m}}\cdot\frac{(2m)!}{m!}$$

$$J_{-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\cdot 2^{2m}}{\sqrt{\pi}\cdot(2m)!}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\sqrt{\frac{2}{z}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}z^{2m} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z)$$

$$J_\nu: \begin{cases}\dfrac{d}{dz}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) = z^\nu J_{\nu-1}(z)\\[2mm] \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{J_\nu(z)}{z^\nu}\right) = -\dfrac{J_{\nu+1}(z)}{z^\nu}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\nu z^{\nu-1} J_\nu(z) + z^\nu\dfrac{d}{dz}J_\nu(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z) & \Big|\cdot\dfrac{1}{z^\nu}\\[2mm] -\nu\cdot\dfrac{1}{z^{\nu+1}}J_\nu(z) + \dfrac{1}{z^\nu}\dfrac{d}{dz}J_\nu(z) = -\dfrac{J_{\nu+1}(z)}{z^\nu} & \Big|\cdot z^\nu\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\nu}{z}J_\nu(z) + \dfrac{d}{dz}J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) & (1)\\[2mm] -\dfrac{\nu}{z}J_\nu(z) + \dfrac{d}{dz}J_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z) & (2)\end{cases}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \frac{2\nu}{z}J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)$$

Рекуррентная формула
для цилиндрических функций
(аналогичная для функций $Y_\nu$ )

С помощью рекуррентной формулы мы можем получить любую функцию $J_\nu$ с полуцелым порядком, зная функции $J_{\nu-1/2}$, $J_{\nu+1/2}$

Например:

$J_{\nu+3/2}$: $\frac{1}{z}J_{1/2}(z) = J_{-1/2}(z) + J_{3/2}(z) \Rightarrow J_{3/2}(z) = \frac{1}{z}J_{1/2}(z) - J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\left(\frac{1}{z}\cdot\sin(z) - \cos(z)\right)$

...

Рассмотрим функции Вебера с полуцелым порядком:

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos(\pi\nu) J_\nu - J_{-\nu}}{\sin(\pi\nu)}$$

Рассмотрим $\nu = 1/2$ :

$$Y_{1/2}(z) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}) \cdot J_{1/2} - J_{-1/2}}{\sin(\frac{\pi}{2})} = -J_{-1/2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos(z)$$

Рассмотрим $\nu = -1/2$ :

$$Y_{-1/2}(z) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2}) \cdot J_{-1/2} - J_{1/2}}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin(z)$$

Для всех остальных функций Вебера полуцелого порядка можно получить выражения, используя рекуррентную формулу для цилиндрических функций.

**Асимптотика цилиндрических функций:** $x \to +\infty$ , $x \in \mathbb{R}$

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{-i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

# Билет 20

8 июня 2022 г. 21:14

**Свойства нулей цилиндрических функций.**

Будем рассматривать $J_\nu(z)$, $\nu \geq 0$

**Свойство 1:**

Функция Бесселя имеет бесконечное число действительных нулей.

**Доказательство:**

Т.к. при $x \to \infty$: $J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$

$\Rightarrow$ действительных нулей у функции Бесселя бесконечно много, как и у косинуса

**Свойство 2:**

Нули функции Бесселя расположены симметрично относительно начала координат.

**Доказательство:**

Для функции Бесселя справедлива формула: $J_\nu(-z) = (-1)^\nu J_\nu(z)$

$\Rightarrow$ Если $J_\nu(z_0) = 0 \Rightarrow J_\nu(-z_0) = 0$, а значит $z_0$ и $-z_0$ являются нулями $J_\nu(z)$

Ну и они же расположены симметрично относительно начала координат.

**Свойство 3:**

Все нули функции Бесселя - простые, за исключением, быть может, точки $z = 0$

**Доказательство:**

Рассмотрим $z_0 \neq 0$ : $J_\nu(z_0) = 0$

Предположим, что $z_0$ - кратный нуль функции Бесселя.

$z_0$ - ноль только целой кратности, так как, если это не так, значит в окрестности $z_0$ функция Бесселя вела бы себя как $(z - z_0)^\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Тогда $z_0$ была бы точкой ветвления и функция Бесселя в этой точке теряла бы свою аналитичность. Но функция Бесселя аналитична всюду за исключением может $z = 0$, а у нас $z_0 \neq 0$.

Поэтому нуль $z_0$ имеет кратность минимум $2$. $\Rightarrow J_\nu'(z_0) = 0$

Выпишем уравнение Бесселя:

$$J_\nu'' + \frac{1}{z} J_\nu' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_\nu = 0 \Rightarrow \text{в } z_0: \quad J_\nu''(z_0) = 0$$

Продифференцировав уравнение по переменной $z$:

$$J_\nu''' + \frac{1}{z} J_\nu''(z) - \frac{1}{z^2} J_\nu'(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_\nu' + \frac{2\nu^2}{z^3} J_\nu = 0$$

$$\text{в } z_0: \quad J_\nu'''(z_0) = 0$$

Так можно продолжать и дальше. Получим, что все производные функции Бесселя в $z_0$ равны нулю.

Из аналитичности $J_\nu$ разложим её в сходящийся ряд Тейлора по степеням $z - z_0$:

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_\nu^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Все коэффициенты этого ряда равны нулю всюду на $\mathbb{C}$ за исключением может $z = 0$.

Отсюда $J_\nu(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, за исключением быть может $z = 0$. А это не так, значит нуль $z_0$ -простой.

**Свойство 4:**

Все нули функции Бесселя - изолированные.

**Доказательство:**

**Часть 1.** Рассмотрим сначала точку $z = 0$

Все нули функции Бесселя - изолированные.

**Доказательство:**

**Часть 1.** Рассмотрим сначала точку $z=0$

$J_\nu = z^\nu \Psi(z)$, $\Psi(z)$ - аналитическая всюду функция $\Psi(0)\neq 0$

$\Rightarrow \Psi(z)\in C(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists\, O_\varepsilon$ - окрестность точки $z=0$ : $\forall z\in O_\varepsilon\ \Psi(z)\neq 0$

$\Rightarrow \forall z\in O_\varepsilon\ J_\nu(z)\neq 0 \Rightarrow z=0$ -изолирован

**Часть 2**. Рассмотрим $z_0\neq 0$ : $J_\nu(z_0)=0$

Пусть в любой достаточно малой окрестности $z_0$ существует бесконечно много других нулей функции Бесселя.

Т.к. $z=z_0$ - конечная, её окрестность ограниченное множество. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса из всей совокупности нулей функции Бесселя в окрестности $z_0$ можно выделить сходящуюся к $z_0$ последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$J_\nu'(z_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{J_\nu(z_n)-J_\nu(z_0)}{z_n-z_0}$$

Получаем, что числитель дроби всегда равен нулю, а знаменатель отличен.

$\Rightarrow J_\nu'(z_0)=0 \Rightarrow z=z_0$-нуль кратности 2, что быть не может по свойству 3

$\Rightarrow z_0$ изолирован

**Свойство 5:**

Нули функции $J_\nu$ и $J_{\nu+1}$ не совпадают, за исключением может точки $z=0$

**Доказательство:**

Пусть $z_0$ - нуль функции $J_\nu(z)$, $z_0\neq 0$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^\nu}\cdot J_\nu(z)\right) = -\frac{J_{\nu+1}(z)}{z^\nu} \Rightarrow \frac{1}{z^\nu}J_\nu'(z) - \frac{\nu}{z^{\nu+1}}J_\nu(z) = -\frac{1}{z^\nu}J_{\nu+1}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z_0^\nu}\underbrace{J_\nu'(z_0)}_{\neq 0 \text{ т.к. } z_0 - \text{простой нуль}} = -\frac{1}{z_0^\nu}J_{\nu+1}(z_0) \quad \Rightarrow J_{\nu+1}(z_0)\neq 0$$

**Свойство 6:**

Положительные нули функций $J_\nu$ и $J_{\nu+1}$ чередуются.

**Доказательство:**

Будем рассматривать только действительные нули $J_\nu(x)$

$$\frac{d}{dx}x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x) = x^{\nu+1}J_\nu(x)$$

Пусть $\alpha$ и $\beta$ два соседних нуля функции $x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)$

$\Rightarrow$ по теореме Ролля $\exists\,\gamma\in$ между $\alpha$ и $\beta$: $\left.\frac{d}{dx}\left(x^{\nu+1}J_{\nu+1}\right)\right|_\gamma=0 \Rightarrow$

$\gamma^{\nu+1}J_\nu(\gamma)=0 \Rightarrow$ между двумя корнями $x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)$ существует корень $x^{\nu+1}J_\nu(x)$

$\Rightarrow$ между двумя корнями $J_{\nu+1}(x)$ существует корень $J_\nu(x)$

Аналогично из соотношения $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^\nu}J_\nu(x)\right)=\frac{-1}{x^\nu}J_{\nu+1}(x)$ получаем, что между двумя корнями $J_\nu(x)$ существует корень $J_{\nu+1}(x)$

Из полученных утверждений следует, что корни $J_\nu(x)$ и $J_{\nu+1}(x)$ чередуются.

**Свойство 7:**

Положительные нули функции Бесселя растут с ростом $\nu$.

$\sqcup\,\alpha: J_\nu(\alpha)=0 \Rightarrow \frac{d\alpha}{d\nu}>0$

**Доказательство:**

Положительные нули функции Бесселя растут с ростом $\nu$.

$\forall \alpha : J_\nu(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{d\alpha}{d\nu} > 0$

**Доказательство:**

Устал

**Свойство 8:**

Функция Бесселя имеет только действительные нули.

# Билет 21

8 июня 2022 г. 22:35

**Интегралы от цилиндрических функций. Вычисление интеграла от произведения двух цилиндрических функций. Вычисление интеграла от квадрата цилиндрической функции.**

**Вычисление интеграла от произведения двух цилиндрических функций.**

Прежде всего сделаем замену $z=px$ в уравнении Бесселя, тогда оно примет вид:

$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{du}{dx}+\left(p^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)u=0$ это тоже уравнение Бесселя, только записанное не в каноническом виде

Решениями этого нового уравнения будут функции: $u_\nu(px)=C_1 J_\nu(px)+C_2 Y_\nu(px)$

Обозначим для краткости: $u_1=u_\nu(p_1x)$, $u_2=u_\nu(p_2x)$, $p_1\neq p_2$

Это решения уравнений Бесселя одного и того же порядка, но с различными значениями параметра p

Выпишем уравнения, которым удовлетворяют функции:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{du_1}{dx}+\left(p_1^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)u_1=0,\quad \frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{du_2}{dx}+\left(p_2^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)u_2=0$$

Умножим первое уравнение на u2, второе на u1, и вычтем из второго результата первый:

$$\frac{u_1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{du_2}{dx}-\frac{u_2}{x}\frac{d}{dx}x\frac{du_1}{dx}+\left(p_2^2-p_1^2\right)u_1u_2=0$$

Умножим это равенство на x и разрешим его относительно произведения $x\cdot u_1\cdot u_2$. Заодно выполним дифференцирование явно, тогда:

$$\begin{aligned}xu_1u_2&=\frac{1}{p_1^2-p_2^2}\left(xu_1\frac{d^2u_2}{dx^2}+u_1\frac{du_2}{dx}-xu_2\frac{d^2u_1}{dx^2}-u_2\frac{du_1}{dx}\right)=\\&=\frac{1}{p_1^2-p_2^2}\left(x\left(u_1\frac{d^2u_2}{dx^2}-u_2\frac{d^2u_1}{dx^2}\right)+\left(u_1\frac{du_2}{dx}-u_2\frac{du_1}{dx}\right)\right)=\\&=\frac{1}{p_1^2-p_2^2}\left(x\frac{d}{dx}\left(u_1\frac{du_2}{dx}-u_2\frac{du_1}{dx}\right)+\left(u_1\frac{du_2}{dx}-u_2\frac{du_1}{dx}\right)\right)=\\&=\frac{1}{p_1^2-p_2^2}\frac{d}{dx}x\left(u_1\frac{du_2}{dx}-u_2\frac{du_1}{dx}\right)=\frac{1}{p_1^2-p_2^2}\frac{d}{dx}xW[u_1,u_2]\end{aligned}$$

Интегрируя полученное равенство по x в пределах от x1 до x2, находим:

$$\int_{x_1}^{x_2}u_\nu(p_1x)u_\nu(p_2x)x\,dx=\frac{x}{p_1^2-p_2^2}W[u_\nu(p_1x),u_\nu(p_2x)]\Big|_{x_1}^{x_2}$$

Здесь вместо обозначений u1 и u2 подставлены их исходные выражения.

**Вычисление интеграла от квадрата цилиндрической функции.**

Если в предыдущей формуле взять p1 = p2, то левая часть даст требуемый интеграл, однако правая часть будет содержать неопределенность вида «нуль делить на нуль». Поэтому нам придется воспользоваться правилом Лопиталя. Для этого в правой части равенства положим p2 = p, p1 = q и будем считать q переменной, стремящейся к постоянной p, тогда:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}u_\nu^2(px)x\,dx&=\lim_{q\to p}\frac{\frac{\partial}{\partial q}xW[u_\nu(qx),u_\nu(px)]}{\frac{\partial}{\partial q}\left(q^2-p^2\right)}\Bigg|_{x_1}^{x_2}=\\&=\lim_{q\to p}\frac{x}{2q}W\left[\frac{\partial u_\nu(qx)}{\partial q},u_\nu(px)\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2}\end{aligned}$$

Заметим, что имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial u_\nu(qx)}{\partial q}=xu_\nu'(qx),\quad \frac{du_\nu(qx)}{dx}=qu_\nu'(qx)\Rightarrow\frac{\partial u_\nu(qx)}{\partial q}=\frac{x}{q}\frac{du_\nu(qx)}{dx}$$

Используя связь производных по q и по x мы формально можем избавиться от производной по q в определителе Вронского. Тогда всякая неопределенность исчезнет, то есть вместо q всюду можно будет подставить p и символ предела более не писать:

$$\int_{x_1}^{x_2}u_\nu^2(px)x\,dx=\frac{x}{2p}W\left[\frac{x}{p}\frac{du_\nu(px)}{dx},u_\nu(px)\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2}=\frac{x}{2p^2}W\left[x\frac{du_\nu(px)}{dx},u_\nu(px)\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2}=\frac{x}{2p^2}\left(x\left(\frac{du_\nu(px)}{dx}\right)^2-u_\nu(px)\frac{d}{dx}x\frac{du_\nu(px)}{dx}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

Из уравнения Бесселя следует, что:

$$\frac{d}{dx}x\frac{du_\nu(px)}{dx}=-x\left(p^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)u_\nu(px)$$

$$\frac{du_\nu(px)}{dx}=pu_\nu'(px)$$

$$\Rightarrow\int_{x_1}^{x_2}u_\nu^2(px)x\,dx=\frac{x}{2p^2}\left(xp^2\left(u_\nu'(px)\right)^2+x\left(p^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)u_\nu^2(px)\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

Осталось вынести из скобки общий множитель $p^2x$, тогда формула приобретет окончательный вид:

$$\int_{x_1}^{x_2} u_\nu^2(px)x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\left(u'_\nu(px)\right)^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{p^2x^2}\right)u_\nu^2(px)\right)\Big|_{x_1}^{x_2}$$

Вычисленные нами интегралы называют интегралами Ломмеля.
Можно видеть, что полученные выражения справедливы в том числе и для неопределенных интегралов (если не забывать про константу в правой части). Однако при использовании выписанных формул имеются некоторые ограничения:

Во-первых, пределы интегрирования должны быть неотрицательными, т.е. $0 \le x_1 < x_2$. Для большинства цилиндрических функций x = 0 является точкой ветвления, так что путь интегрирования не должен включать эту точку. В качестве нижнего предела $x_1 = 0$ брать можно, тогда интеграл понимается как несобственный. Во-вторых, должно быть $\nu > -1$. Если это условие окажется нарушено, то на нижнем пределе $x_1 = 0$ интеграл гарантированно будет расходиться. Стало быть, полученные нами формулы потеряют смысл.

# Билет 22

8 июня 2022 г. 22:35

**Первая краевая задача на собственные значения для уравнения Бесселя (на интервале 0 < r < R). Условие самосопряженности оператора краевой задачи. Ортогональность собственных функций. Теорема Фурье — Бесселя (без доказательства).**

При решении задач методом Фурье нередко возникает следующая задача на собственные значения:
$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{du}{dr}+\left(\lambda-\frac{\nu^2}{r^2}\right)u=0, \quad 0<r<R, \\ |u(0)|<+\infty, \quad u(r_0)=0. \end{cases}$$

Если умножить дифференциальное уравнение на r, получится: $\frac{d}{dr}r\frac{du}{dr}-\frac{\nu^2}{r}u+\lambda ru=0.$

Сравним его с основным уравнением теории специальных функций: $\frac{d}{dr}k(r)\frac{du}{dr}-q(r)u+\lambda\rho(r)u=0.$

Отсюда явный вид оператора L этой задачи: $\mathcal{L}[u]=-\frac{d}{dr}r\frac{du}{dr}+\frac{\nu^2}{r}u, \quad k(r)=r, \quad q(r)=\frac{\nu^2}{r}, \quad \rho(r)=r.$

Поскольку коэффициент k(r) обращается в нуль при r = 0, для рассматриваемого диффура эта точка будет особой. Особая точка попадает на левый конец области определения диффура 0 < r < R. Согласно следствию из теоремы об ограниченных и неограниченных решениях, в этом случае при r = 0 необходимо ставить условие ограниченности.

Еще одно важное наблюдение — наличие в задаче на собственные значения весовой функции ρ(r) = r. Весовая функция сыграет свою роль при записи свойства ортогональности собственных функций этой задачи. Ну и, конечно, при вычислении всевозможных интегралов от собственных функций.

Выписанное здесь ОДУ похоже на уравнение Бесселя в канонической форме записи, но всё же немного отличается от него. Мешается коэффициент λ. Однако если использовать замену $z=\sqrt{\lambda r}$, то мы получим уже каноническое уравнение Бесселя: $\frac{1}{z}\frac{d}{dz}z\frac{du}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)u=0.$

Поэтому общее решение исходного уравнения: $u(z)=C_1J_\nu(z)+C_2Y_\nu(z)=C_1J_\nu\left(\sqrt{\lambda}r\right)+C_2Y_\nu\left(\sqrt{\lambda}r\right)$

Поскольку функция Вебера любого порядка неограничена при r = 0, то т.к. $|u(0)|<+\infty$, $C_2=0$

Учитывая, что собственные функции в любой задаче на собственные значения определены с точностью до произвольного постоянного множителя, можно сразу же положить $C_1=1$, тогда кандидатом в собственные функции будет: $u=J_\nu\left(\sqrt{\lambda}r\right)$, а граничное условие при r = R дает $J_\nu\left(\sqrt{\lambda}R\right)=0$, что эквивалентно равенству $\sqrt{\lambda}R=\mu$, где $\mu$ — нуль функции Бесселя $J_\nu(z)$

Рассматриваемая задача не является задачей Штурма — Лиувилля в смысле определения прошлого семестра, поэтому заранее мы ничего не можем сказать ни про поведение собственных значений, ни про наличие свойства ортогональности у собственных функций. Получим заново:

Если удастся доказать самосопряженность оператора рассматриваемой задачи на всех возможных собственных функциях (т.е на функциях Бесселя порядка $\nu$ > 0), то и собственные значения будут вещественными, и собственные функции — попарно ортогональными (с весом r).

Оператор L будет самосопряженным на функциях u и w, если выполняется равенство: $\langle\mathcal{L}[u],w\rangle-\langle u,\mathcal{L}[w]\rangle=0$

$\sqcup$ $v=\overline{w}$, т.е. v комплексно-сопряженная к w $\Rightarrow$ $v$ - тоже собственная функция той же задачи.

Проверять условие самосопряженности будет удобнее, если переписать его через интегралы по области 0 < r < R. Левая часть равенства примет вид: $\langle\mathcal{L}[u],w\rangle-\langle u,\mathcal{L}[w]\rangle=$
$$=\int_0^R\left(-\frac{d}{dr}r\frac{du}{dr}+\frac{\nu^2}{r}u\right)v\,dr-\int_0^R u\left(-\frac{d}{dr}r\frac{dv}{dr}+\frac{\nu^2}{r}v\right)dr$$

Можно видеть, что не содержащие производных слагаемые взаимно уничтожаются. Ну а остальное можно проинтегрировать один раз по частям, тогда получится:
$$\langle\mathcal{L}[u],w\rangle-\langle u,\mathcal{L}[w]\rangle=-rv\frac{du}{dr}\bigg|_{r=0}^{r=R}+\int_0^R r\frac{du}{dr}\frac{dv}{dr}\,dr+ru\frac{dv}{dr}\bigg|_{r=0}^{r=R}-\int_0^R r\frac{dv}{dr}\frac{du}{dr}\,dr.$$

Интегралы в правой части равенства взаимоуничтожают друг друга, следовательно, условие самосопряженности оператора L на функциях u и v приобретает вид: $r\left(u\dfrac{dv}{dr} - v\dfrac{du}{dr}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R} = 0$

Остается лишь проверить справедливость этого равенства на всех возможных собственных функциях исследуемой задачи. Нетрудно догадаться, что если для любых собственных функций u и v рассматриваемой задачи будет верно равенство:

$$ru\frac{dv}{dr}\bigg|_{r=0}^{r=R} = 0$$

При $r = R$: $u(R) = 0$, $\left.\dfrac{dv}{dr}\right|_R$ - ограничена из аналитичности $v$ в $r = R$ $\Rightarrow$ $ru\left.\dfrac{dv}{dr}\right|_R = 0$

При $r \to 0$: $J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sim r^\nu \Rightarrow J_\nu'(\sqrt{\lambda}r) \sim r^{\nu-1} \Rightarrow \lim\limits_{r\to 0} ru\dfrac{dv}{dr} = \lim\limits_{r\to 0} ur^\nu = 0$, $\nu > 0$

$+$ по условию: $|u| < +\infty$

$\nu = 0$: $J_0(\sqrt{\lambda}r) \sim 1 \Rightarrow J_0'(\sqrt{\lambda}r) = 0$

$\Rightarrow ru\left.\dfrac{dv}{dr}\right|_{r=0} = 0$, $\nu \geq 0$

Итак, теперь мы уже точно доказали, что условие самосопряженности оператора краевой задачи выполнено для всех возможных собственных функций, значит, все собственные значения будут вещественными. Однако про знак собственных значений мы пока ничего не знаем. Между тем это важно, ведь наличие отрицательных собственных значений приведет к комплексному аргументу собственной функции.

Запишем уравнение задачи на собственные значения в операторном виде: $\mathcal{L}[u] = \lambda\rho u$

• и скалярно: $\langle\mathcal{L}[u], \bar{u}\rangle = \lambda\langle\rho u, u\rangle = \lambda||u||^2$ т.к. квадрат нормы с. ф. всегда положителен, знак любого собственного значения будет совпадать со знаком скалярного произведения

Представим это скалярное произведение в виде интеграла, интегрируя по частям, находим:

$$\langle\mathcal{L}[u], u\rangle = \int_0^R \left(-\frac{d}{dr}r\frac{du}{dr} + \frac{\nu^2}{r}u\right)u\,dr = \underbrace{-ru\frac{du}{dr}\bigg|_{r=0}^{r=R}}_{0} + \int_0^R \underbrace{r\left(\frac{du}{dr}\right)^2}_{\geq 0} dr + \int_0^R \underbrace{\frac{\nu^2}{r}u^2}_{\geq 0}\,dr. \geq 0$$

$\Rightarrow$ $(\mathcal{L}[u], u) \geq 0$, $\Rightarrow \lambda \geq 0$ $\forall$ собственных значений

Можно прямо сразу выяснить, будет ли λ = 0 собственным значением рассматриваемой задачи. Подставляя λ = 0 в дифференциальное уравнение, получаем:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{du}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2}u = 0.$$

В случае $\nu > 0$ выходит обычное уравнение Эйлера с общим решением: $u(r) = C_1 r^\nu + C_2/r^\nu$

$\nu = 0$: $u(r) = C_1 + C_2\ln r$. В любом случае подстановка граничных условий приводит лишь к тривиальному решению, так что λ = 0 не будет собственным значением задачи. $\Rightarrow \lambda > 0$

Но тогда $\sqrt{\lambda}$ - действительное число, значит, и произведение $\sqrt{\lambda R}$ - всегда вещественное, тогда все нули функции Бесселя - действительные

**Ортогональность собственных функций.**

Из самосопряженности оператора на всех без исключения собственных функциях задачи следует, что все собственные функции попарно ортогональны на интервале $0 < r < R$ (можно говорить, что на отрезке — это все равно) с весом $\rho(r) = r$, т.е. $\langle u_n, \rho u_m\rangle = 0$, если $n \neq m$ (т.е. если $\lambda_n \neq \lambda_m$). В явном виде свойство ортогональности собственных функций можно записать так

$$\int_0^R J_\nu\left(\sqrt{\lambda_n}r\right)J_\nu\left(\sqrt{\lambda_m}r\right)r\,dr = 0, \quad n \neq m \quad (\lambda_n \neq \lambda_m).$$

**Теорема Фурье — Бесселя:**

Пусть $f(r) \in C^2[0, R]$, $|f(0)| < +\infty$, $f(R) = 0$ $\Rightarrow$ $f(r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n J_\nu\left(\sqrt{\lambda_n}r\right)$

причем этот ряд будет сходиться абсолютно и равномерно на отрезке $[\delta, R]$ $\forall\delta > 0$

коэффициенты ряда получаются обычным образом на основе свойства ортогональности собственных функций:

$$C_n = \frac{\langle f(r), rJ_\nu\left(\sqrt{\lambda_n}r\right)\rangle}{\left\|J_\nu\left(\sqrt{\lambda_n}r\right)\right\|^2} = \frac{1}{\int_0^R J_\nu^2\left(\sqrt{\lambda_n}r\right)r\,dr}\int_0^R f(r)J_\nu\left(\sqrt{\lambda_n}r\right)r\,dr.$$

собственных функций:

$$C_n = \frac{\left\langle f(r), rJ_\nu\left(\sqrt{\lambda_n}r\right)\right\rangle}{\left\|J_\nu\left(\sqrt{\lambda_n}r\right)\right\|^2} = \frac{1}{\int_0^R J_\nu^2\left(\sqrt{\lambda_n}r\right) r\,dr} \int_0^R f(r) J_\nu\left(\sqrt{\lambda_n}r\right) r\,dr.$$

# Билет 23

8 июня 2022 г. 22:35

**Модифицированное уравнение Бесселя. Ограниченное решение. Функция Макдональда. Основные свойства функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$**

Модифицированное ур-е Бесселя в канонической форме записи имеет вид: $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{du}{dx} - \left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0$

Вот так вот сразу разницу с обычным уравнением Бесселя и не заметишь. Поэтому выпишу тут же уравнение Бесселя: $\frac{1}{z}\frac{d}{dz}z\frac{du}{dz} + \left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0$ Оказывается, что если в обычном уравнении Бесселя выбрать $z = ix$, то мы придем к модифицированному уравнению Бесселя. Так что эти уравнения совпадают с точностью до замены переменной.

Поскольку мы по-прежнему имеем дело с уравнением Бесселя (пусть и модифицированным), вопрос поиска ограниченных решений можно даже и не ставить. Все равно ничего ограниченного, кроме функции Бесселя неотрицательного порядка, найти не удастся. Давайте посмотрим, как она будет выглядеть в случае чисто мнимого аргумента $z = ix$

$$J_\nu(ix) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{2m+\nu} = i^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

В самом деле $i^{2m+\nu} = i^\nu(-1)^m$, так что ряд выходит знакопостоянным.
Можно видеть, что за исключением комплексного множителя $i^\nu$ все остальное вышло действительным. Поэтому в качестве базового ограниченного решения модифицированного уравнения Бесселя берут знакопостоянный ряд, который является действительной функцией в случае действительного аргумента $x \geqslant 0$: $I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$

Полученная функция называется модифицированной функцией Бесселя порядка $\nu$
модифицированная и обычная функции Бесселя связаны очень простыми соотношениями:

$$J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x), \quad \text{или} \quad I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix)$$

Отметим очевидную формулу: $I_\nu(-x) = (-1)^\nu I_\nu(x)$
Отсюда в случае целого порядка v = n вытекает свойство четности модифицированной функции Бесселя: $I_n(-x) = (-1)^n I_n(x)$, $I_0(x)$ – четная функция, $I_1(x)$ – нечетная функция, ...
Для случая целого порядка v = n имеет место следующее равенство: $I_{-n}(x) = I_n(x)$

В самом деле: $$I_{-n}(x) = i^{-(-n)}J_{-n}(ix) = i^n(-1)^n J_n(ix) = (-i)^n i^n I_n(x) = I_n(x)$$

В качестве второго базового решения модифицированного уравнения Бесселя, линейно независимого с $K_\nu$ (и потому неограниченного в x = 0) берут функцию: $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)$

Эту функцию называют модифицированной цилиндрической функцией третьего рода порядка v, модифицированной функцией Ганкеля порядка v или функцией Макдональда порядка v

Поскольку функция Ганкеля (с аргументом z) есть решение уравнения Бесселя, то эта же функция с аргументом $ix$ будет решением модифицированного уравнения Бесселя. Поэтому сразу же ясно, что функция $K_\nu(x)$ будет решением модифицированного уравнения Бесселя.
Здесь и проверять ничего не нужно. Но из этого определения совершенно не очевидно, что функция Макдональда действительного аргумента вещественнозначна. Поэтому давайте преобразуем определение, вспомнив явный вид функции Ганкеля:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} \big(J_\nu(ix) + iY_\nu(ix)\big) =$$
$$= \frac{\pi}{2} i^\nu \big(iJ_\nu(ix) - Y_\nu(ix)\big) = \frac{\pi}{2} i^\nu \left(iJ_\nu(ix) - \frac{J_\nu(ix)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(ix)}{\sin\pi\nu}\right) =$$
$$= \frac{\pi i^\nu}{2\sin\pi\nu}\big(J_{-\nu}(ix) - (\cos\pi\nu - i\sin\pi\nu)J_\nu(ix)\big) =$$
$$= \frac{\pi i^\nu}{2\sin\pi\nu}\big(J_{-\nu}(ix) - e^{-i\pi\nu}J_\nu(ix)\big) =$$
$$= \frac{\pi i^\nu}{2\sin\pi\nu}\big(i^{-\nu}I_{-\nu}(x) - e^{-i\pi\nu}i^\nu I_\nu(x)\big).$$

Поскольку $i^{2\nu} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{2\nu} = e^{i\pi\nu}$, то все мнимые единицы сокращаются, и мы получаем

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\big(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\big).$$

В случае целого порядка это выражение становится несостоятельным, поскольку появляется неопределенность типа «нуль делить на нуль». Поэтому (как и в случае функции Вебера) в случае ν = n его заменяют на конструкцию с пределом: $K_n(x) = \lim\limits_{\nu\to n} \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\big(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\big)$

Из приведенных для функции Макдональда формул можно видеть: $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x) \ \forall \nu$

Линейная независимость функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ очевидна из определения функции Макдональда через функцию Ганкеля, но можно сосчитать и определитель Вронского для этих функций. Предполагая, что ν не является целым числом, находим:

$$W\left[I_\nu(x), K_\nu(x)\right] = W\left[I_\nu(x), \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\big(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\big)\right] =$$
$$= \frac{\pi}{2\sin\pi\nu} W[I_\nu(x), I_{-\nu}(x)] = \frac{\pi}{2\sin\pi\nu} W\left[i^{-\nu}J_\nu(ix), i^\nu J_{-\nu}(ix)\right]$$

Интересующий нас определитель Вронского содержит производные по x. В уже известном выражении: $W[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] = -\frac{2\sin\pi\nu}{\pi z}$

производные вычисляются по z, то есть в данном случае по z = ix. Поэтому

$$W\left[J_\nu(ix), J_{-\nu}(ix)\right] = iW[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] \ \Rightarrow \ W[I_\nu(x), K_\nu(x)] = -\frac{1}{x}$$

Отмечу, что этот результат будет верен и в случае целого порядка.

Линейная независимость функций Iν(x) и Kν(x) позволяет записать общее решение $\forall \nu \geq 0$ модифицированного уравнения Бесселя в виде суперпозиции этих функций: $u(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x)$

Для модифицированной функции Бесселя имеют место формулы дифференцирования:

$\frac{d}{dx}x^\nu I_\nu(x) = x^\nu I_{\nu-1}(x)$, $\frac{d}{dx}\frac{I_\nu(x)}{x^\nu} = \frac{I_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$ и рекуррентная формула $\frac{2\nu}{x}I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x)$

Формулы дифференцирования для функции Макдональда: $\frac{d}{dx}x^\nu K_\nu(x) = -x^\nu K_{\nu-1}(x)$, $\frac{d}{dx}\frac{K_\nu(x)}{x^\nu} = -\frac{K_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$

Рекуррентная формула для функции Макдональда: $\frac{2\nu}{x}K_\nu(x) = K_{\nu+1}(x) - K_{\nu-1}(x)$

Рассмотрим теперь модифицированные цилиндрические функции полуцелого порядка. Опираясь на полученную нами для $J_{1/2}(z)$ формулу, находим: $I_{1/2}(x) = i^{-1/2}J_{1/2}(ix) = \frac{1}{\sqrt{i}}\sqrt{\frac{2}{\pi ix}}\sin ix$

$$\sin ix = \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = i\frac{e^x - e^{-x}}{2} = i\,\mathrm{sh}\,x \ \Rightarrow \ I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sh}\,x$$

Как и следовало ожидать, $I_{1/2}(x)$ конечным образом выражается через элементарные функции. Вспоминая выражение для $J_{1/2}(z)$: $I_{-1/2}(x) = i^{-(-1/2)}J_{-1/2}(ix) = \sqrt{i}\sqrt{\frac{2}{\pi ix}}\cos ix$

$$\cos ix = \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x \Rightarrow \quad I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{ch} x$$

Наличие рекуррентной формулы позволяет утверждать, что модифицированные функции Бесселя всех полуцелых порядков конечным образом выражаются через элементарные функции.

Теперь рассмотрим функцию Макдональда полуцелого порядка

$$K_{1/2}(x) = \frac{\pi}{2\sin(\pi/2)}\big(I_{-1/2}(x) - I_{1/2}(x)\big) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} = K_{-1/2}(x).$$

Ну и опять, наличие рекуррентной формулы гарантирует то, что функции Макдональда всех полуцелых порядков — это конечная комбинация элементарных функций.

Асимптотика модифицированных цилиндрических функций в случае $x \to +\infty$:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left(e^{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left(e^{-x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Модифицированные функции Бесселя не имеют действительных нулей (за исключением точки x = 0 для функций $I_\nu(x)$ с ν > 0), при x > 0 они либо монотонно растут, либо монотонно убывают. При решении задач полезно помнить, что функция $I_\nu(x)$ ограничена в нуле и неограничена на +∞, а функция $K_\nu(x)$, наоборот, неограничена в нуле и стремится к нулю на бесконечности.

# Билет 24

8 июня 2022 г. 22:35

**Основное уравнение теории специальных функций. Случай двух особых точек. Постановка краевых задач. Условие самосопряженности оператора краевой задачи.**

основное уравнение теории специальных функций: $\frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx} - q(x)u + \lambda\rho(x)u = 0.$

$x \in (a, b)$ как и в первом случае, но теперь $k(a)=0$ и $k(b)=0$

Поэтому в случае двух особых точек прямо сразу выходит краевая задача на собственные значения: $\begin{cases} \frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx} - q(x)u + \lambda\rho(x)u = 0, \quad a < x < b, \\ |u(a)| < +\infty, \quad |u(b)| < +\infty. \end{cases}$ – условия ограниченности

По теореме об ограниченных и неограниченных решениях в особой точке x = a, то можно утверждать, что существует не более одного ограниченного в точке x = a решения и бесконечно много линейно независимых между собой неограниченных решений.
Аналогично для точки b.

Отсюда ясно, что существование решения, ограниченного и в точке x = a, и в точке x = b, — это событие довольно редкое, возможное лишь при определенном выборе коэффициентов уравнения $k(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ и $\lambda$. В частности, отсюда будет следовать, что собственные значения $\lambda$ образуют дискретный набор.

Поэтому, если a = −∞, b = +∞,
то задача на собственные значения: $\begin{array}{l} \frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx} - q(x)u + \lambda\rho(x)u = 0, \quad -\infty < x < +\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} |u(x)| \leqslant Cx^N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots, C=\text{const} \end{array}$

Таким образом, решение на бесконечности может быть неограниченным, однако возрастать оно должно не быстрее степенной функции. То есть, например, экспоненциальный рост запрещен.

Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело с классическими ортогональными полиномами, условие степенного роста может быть заменено на условие квадратичной интегрируемости с весом, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2\rho(x)\,dx < +\infty.$ Для полиномов эти два условия эквивалентны, так что при постановке задачи на собственные значения можно писать любое из них.

Возможна еще ситуация, когда одна особая точка конечна (например, x = a), а другая — бесконечна. Тогда задача на собственные значения принимает вид: $\begin{array}{l} \frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx} - q(x)u + \lambda\rho(x)u = 0, \quad a < x < +\infty, \\ |u(a)| < +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} |u(x)| \leqslant Cx^N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots \end{array}$

Как и в предыдущей задаче, условие степенного роста на ∞ может быть заменено на условие квадратичной интегрируемости с весом

Выписанные нами задачи на собственные значения не являются задачами Штурма — Лиувилля в смысле определения прошлого семестра.

Установим **условие самосопряженности оператора краевой задачи**:

Введём обозначение $v = \bar{w}$ (комплексно сопряжённое)
$u, w$ - собственные функции $\Rightarrow v, \bar{w}$ - собственные тоже
условие самосопряженности оператора L на функциях u и w имеет вид: $\langle \mathcal{L}[u], w\rangle - \langle u, \mathcal{L}[w]\rangle = 0.$

Для определенности рассмотрим самую первую задачу на конечном интервале $x \in (a, b)$
Перепишем левую часть условия самосопряженности через интегралы:

$$\langle \mathcal{L}[u], w\rangle - \langle u, \mathcal{L}[w]\rangle = \int_a^b \left(-\frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx} + q(x)u\right) v\,dx - \int_a^b u\left(-\frac{d}{dx}k(x)\frac{dv}{dx} + q(x)v\right)dx.$$

здесь взаимно уничтожаются подынтегральные функции, не содержащие производных
Интегрируем по частям то, что осталось: $\langle \mathcal{L}[u], w\rangle - \langle u, \mathcal{L}[w]\rangle =$

$$-k(x)v\frac{du}{dx}\bigg|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b k(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx + k(x)u\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b k(x)\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}\,dx.$$

так что условие самосопряженности оператора на функциях u и v приобретает вид:

$k(x)\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=a}^{x=b} = 0.$ выполнено, если $k(x)u\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=a}^{x=b} = 0.$

поэтому работать мы будем именно с ним.

**Случай 1: конечные особые точки**

Рассматриваем с.ф. такие, что: $u(x)\in C^2(a,b)$, $|u(a)|<+\infty$, $|u(b)|<+\infty$

т.к. $\left.\begin{array}{l} k(a)=k(b)=0 \\ |u(a)|<+\infty,\ |u(b)|<+\infty \end{array}\right| \Rightarrow$ нам нужно установить ограниченность $\frac{dv}{dx}$

Для этого обычно выдвигают требование $v(x)\in C^1[a,b]$, поэтому, в случае конечных особых точек оператор задачи на собственные значения будет самосопряженным на всех собственных функциях, если эти функции удовлетворяют следующим требованиям:

$$u(x) \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b],\ |u(a)| < +\infty,\ |u(b)| < +\infty.$$

Это требование сильное, можно его ослабить, в случае конечных особых точек для выполнения условия самосопряженности необходимыми условиями являются:

$$\lim_{x\to a} k(x)\frac{du}{dx} = 0, \quad \lim_{x\to b} k(x)\frac{du}{dx} = 0. \quad u(x) \in C^2(a,b),\ |u(a)| < +\infty,\ |u(b)| < +\infty$$

**Случай 2: бесконечные особые точки**

Естественные условия: $u(x) \in C^2(-\infty,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |u(x)| \leqslant Cx^N, \quad N = 0,1,2,\ldots$

Но этого совершенно недостаточно для выполнения условия самосопряженности. Условие самосопряженности придется добавить в явном виде: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x)u\frac{dv}{dx} = 0.$

Если учесть, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |u(x)| \leqslant Cx^N, \quad N = 0,1,2,\ldots$, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\frac{dv}{dx}\right| \leq Cx^N$

Если это учесть явно, тогда: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x)x^M = 0, \quad M = 0,1,2,\ldots$

Таким образом, условие самосопряженности оператора L в данном случае равносильно наличию ограничения на коэффициент k(x) этого оператора, он должен убывать на бесконечности быстрее любой степенной функции, например экспоненциально. Следовательно, далеко не в каждой задаче с бесконечными особыми точками можно получить самосопряженный оператор.

Итак, условия самосопряженности, в случае бесконечных особых точек:
$$\begin{cases} u(x) \in C^2(-\infty,+\infty), \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} |u(x)| \leqslant Cx^N, \quad N = 0,1,2,\ldots, \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x)x^M = 0, \quad M = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

**В случае 3: одна конечная, другая $\infty$** :
$$\begin{cases} u(x) \in C^2(a,+\infty) \cap C^1[a,+\infty),\ |u(a)| < +\infty, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} |u(x)| \leqslant Cx^N, \quad N = 0,1,2,\ldots, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} k(x)x^M = 0, \quad M = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

или чуть более слабый набор требований:
$$\begin{cases} u(x)\in C^2(a,+\infty),\ |u(a)|<+\infty \\ \lim\limits_{x\to a} k(x)\frac{du}{dx} = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} |u(x)| \leqslant Cx^N, \quad N = 0,1,2,\ldots, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} k(x)x^M = 0, \quad M = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Во всех приведенных примерах условие степенного роста может быть заменено на условие квадратичной интегрируемости с весом.

# Билет 25

8 июня 2022 г. 22:35

**Дифференциальное уравнение гипергеометрического типа. Приведение к самосопряженному виду. Весовые функции. Уравнения и весовые функции для производных от функции гипергеометрического типа.**

Уравнение гипергеометрического типа: $\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0$

где $x$ — переменная, $y(x)$ — неизвестная функция, $\sigma(x)$, $\tau(x)$ и $\lambda$ — коэффициенты уравнения, которые предполагаются известными. При этом $\sigma(x)$ — многочлен не выше второй степени по $x$, $\tau(x)$ — многочлен не выше первой степени по $x$, $\lambda$ — постоянная.

Рассмотрим основное уравнение теории специальных функций: $\frac{d}{dx}k(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$

Мы хотим получить выражения коэффициентов $k(x), q(x), \rho(x)$ через известные $\sigma(x), \tau(x)$ и $\lambda$

Раскроем оператор дифференцирования в основном уравнении: $ky'' + \underline{k'y'} - qy + \underline{\lambda\rho y} = 0$

Теперь умножим уравнение гипергеометрического типа на $\rho(x)$: $\sigma\rho y'' + \underline{\tau\rho y'} + \underline{\lambda\rho y} = 0$

Чтобы уравнения совпали нужно: $q(x) = 0$, $k(x) = \sigma(x)\rho(x)$ и $k'(x) = \tau(x)\rho(x)$

Из последних равенств можно исключить $k(x)$ => получится ур-е Пирсона: $\frac{d}{dx}\sigma\rho = \tau\rho.$

Поделим уравнение Пирсона на произведение $\sigma\rho$ => $\frac{(\sigma\rho)'}{\sigma\rho} = \frac{\tau}{\sigma}$ => $\ln(\sigma\rho) = \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}dx$

Аргумент логарифма — это коэффициент k(x), который по умолчанию в этом семестре неотрицателен (по крайней мере при тех значениях переменной x, с которыми мы работаем). Т.е. модуль не нужен.
Таким образом, мы нашли явный вид весовой функции: $\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)}\exp\left(\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}dx\right)$

Но тогда можно найти и коэффициент $k(x) = \sigma(x)\rho(x)$
А это означает, что уравнение гипергеометрического типа может быть записано в самосопряженном виде: $\frac{d}{dx}\sigma(x)\rho(x)\frac{dy}{dx} + \lambda\rho(x)y = 0$
то есть оно является частным случаем основного уравнения теории специальных функций.

Решения уравнений гипергеометрического типа называются функциями гипергеометрического типа:
Введём обозначения: $u_0(x) = y(x), \quad u_1(x) = \frac{dy}{dx}, \quad u_2(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad u_n(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$
Продифференцируем по x уравнение гипергеометрического типа:

$\sigma y'' + \tau y' + \lambda y = 0$ => $\sigma y''' + (\sigma' + \tau)y'' + (\tau' + \lambda)y' = 0$ или, что то же: $\sigma u_1'' + \tau_1 u_1' + \mu_1 u_1 = 0,$

где $\tau_1(x) = \sigma'(x) + \tau(x)$, $\mu_1 = \tau'(x) + \lambda.$

Поскольку коэффициент $\tau_1(x)$ получился многочленом не выше первой степени, а $\mu_1$ постоянной, то функция $u_1(x)$ - решение уравнения гипергеометрического типа.
т.е. есть первая производная от функции гипергеометрического типа — это тоже функция гипергеометрического типа.
Дифференцируем уравнение еще раз:

$\sigma u_1''' + (\sigma' + \tau_1)u_1'' + (\tau_1' + \mu_1)u_1' = 0$ => $\sigma u_2'' + \tau_2 u_2' + \mu_2 u_2 = 0$

где $\tau_2(x) = \sigma'(x) + \tau_1(x)$, $\mu_2 = \tau_1'(x) + \mu_1$

То есть и вторая производная функции гипергеометрического типа есть тоже функция гипергеометрического типа.
Нетрудно догадаться, что это утверждение будет справедливо и для всех остальных производных.
Повторяя дифференцирование, через n шагов мы получим: $\sigma u_n'' + \tau_n u_n' + \mu_n u_n = 0$

$\tau_n(x) = \sigma'(x) + \tau_{n-1}(x)$, $\mu_n = \tau_{n-1}'(x) + \mu_{n-1}$

т.е. уравнение гипергеометрического типа для производной порядка n от функции $y(x)$
Найдем теперь выражения для коэффициентов $\tau_n(x)$ и $\mu_n$ через коэффициенты исходного уравнения $\sigma(x)$, $\tau(x)$ и $\lambda$.

$$\tau_n = \sigma' + \tau_{n-1} = \sigma' + \sigma' + \tau_{n-2} = \ldots = n\sigma' + \tau,$$

где использовано обозначение $\tau_0(x) \equiv \tau(x)$.

Пусть $\mu_0 \equiv \lambda$, тогда

$$\mu_n = \tau'_{n-1}+\mu_{n-1} = \tau'_{n-1}+\tau'_{n-2}+\mu_{n-2} = \ldots = \tau'_{n-1}+\tau'_{n-2}+\ldots+\tau'+\lambda =$$
$$= \lambda + \sum_{k=0}^{n-1} \tau'_k = \lambda + \sum_{k=0}^{n-1}(k\sigma''+\tau') = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''.$$

Здесь учтено хорошо известное вам выражение для суммы арифметической прогрессии из n членов, первый из которых равен нулю, а последний, соответственно, n − 1. Приведем теперь уравнение для производной порядка n к самосопряженному виду. Действуя так же, как и прежде, выпишем основное уравнение теории специальных функций для неизвестной функции $u_n$ в виде: $k_n u''_n + k'_n u'_n - q_n u_n + \mu_n \rho_n u_n = 0.$

Сравним его с уравнением для производной $u_n(x)$, умноженным на весовую функцию $\rho_n(x)$:
$\sigma\rho_n u''_n + \tau_n \rho_n u'_n + \mu_n \rho_n u_n = 0.$ Эти уравнения совпадут, если $q_n = 0,\ k_n = \sigma\rho_n,\ k'_n = \tau_n\rho_n.$

Исключая $k_n(x)$ из двух последних равенств, приходим к новому уравнению Пирсона: $\dfrac{d}{dx}\sigma\rho_n = \tau_n\rho_n.$

Разделив уравнение Пирсона на произведение $\sigma\rho_n$: $\dfrac{(\sigma\rho_n)'}{\sigma\rho_n} = \dfrac{\tau_n}{\sigma} = \dfrac{n\sigma'}{\sigma} + \dfrac{\tau}{\sigma}.$

Воспользуемся старым уравнением Пирсона, чтобы последнее слагаемое правой части превратить в логарифмическую производную: $\dfrac{(\sigma\rho_n)'}{\sigma\rho_n} = \dfrac{n\sigma'}{\sigma} + \dfrac{(\sigma\rho)'}{\sigma\rho} \Rightarrow \ln(\sigma\rho_n) = \ln C + n\ln\sigma + \ln(\sigma\rho).$

Считаем: $\sigma > 0$, $C = 1$: $\rho_n(x) = \sigma^n(x)\rho(x) \Rightarrow k_n(x) = \sigma(x)\rho_n(x)$ и, $\Rightarrow$ уравнение для производной может быть записано в самосопряженном виде $\dfrac{d}{dx}\sigma(x)\rho_n(x)\dfrac{du_n(x)}{dx} + \mu_n\rho_n(x)u_n(x) = 0.$

# Билет 26

8 июня 2022 г. 22:35

**Дифференциальное уравнение гипергеометрического типа. Решения в виде полиномов. Формула Родрига.**

Если записать уравнение гипергеометрического типа в самосопряженном виде: $\frac{d}{dx}\sigma(x)\rho(x)\frac{dy}{dx} + \lambda\rho(x)y = 0$

Видно, что при $\lambda = 0$ имеется частное решение $y(x) = const =: p_0(x)$

Однако уравнение в самосопряженном виде может быть записано не только для функции y(x), но и для ее производных. Так, диффур для первой производной $u_1(x)$: $\frac{d}{dx}\sigma(x)\rho_1(x)\frac{du_1}{dx} + \mu_1\rho_1(x)u_1 = 0.$

Видно, что при $\mu_1 = 0$ имеется частное решение $u_1(x) = \text{const} \neq 0 \Rightarrow u_1(x) = \frac{dy}{dx} \to y(x) =: p_1(x)$

Это новое решение будет иметь место уже при другом выборе коэффициента $\lambda$

поскольку $\mu_1 = \lambda + \tau'(x)$, то из $\mu_1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\tau'(x)$

Таким образом, при таком $\lambda$ уравнение гипергеометрического типа имеет частное решение $y(x) = p_1(x)$.

Продолжая этот алгоритм, мы построим бесконечную цепочку решений исходного уравнения в виде полиномов. Правда, каждое из решений будет иметь место лишь при своем собственном выборе коэффициента λ, именно:

$$\begin{array}{ll}
\lambda = 0, & y(x) = p_0(x), \\
\lambda = -\tau'(x), & y(x) = p_1(x), \\
\lambda = -2\tau'(x) - \sigma''(x), & y(x) = p_2(x), \\
\dots & \\
\lambda = -n\tau'(x) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x), & y(x) = p_n(x), \\
\dots &
\end{array}$$

Обратите внимание, что так мы получаем полиномы всех неотрицательных степеней, ни одна степень пропущена не будет, коэффициент при старшей степени полинома получается интегрированием тех самых констант, которые нулю не равны. Коэффициенты же при остальных степенях могут быть какими угодно, в том числе и равными нулю. Здесь никаких ограничений нет.

**Определение: Совокупность полиномов всех неотрицательных степеней называется нормальной системой полиномов.**

Мы построили нормальную систему полиномов, теперь установим их вид

Из уравнения гипергеометрического типа, записанного в самосопряженном виде $\frac{d}{dx}\sigma\rho\frac{dy}{dx} + \lambda\rho y = 0$:

$\rho y = -\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\sigma\rho\frac{dy}{dx}$ Вспомним, что $\sigma\rho = \rho_1$, а $dy/dx = u_1$, тогда $\rho y = -\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\rho_1 u_1.$

Из уравнения для первой производной $\frac{d}{dx}\sigma\rho_1\frac{du_1}{dx} + \mu_1\rho_1 u_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 u_1 = -\frac{1}{\mu_1}\frac{d}{dx}\sigma\rho_1\frac{du_1}{dx}.$

Но $\sigma\rho_1 = \rho_2$, а $du_1/dx = u_2$, поэтому $\rho_1 u_1 = -\frac{1}{\mu_1}\frac{d}{dx}\rho_2 u_2.$

Подставим полученное для $\rho_1 u_1$ выражение в формулу для произведения $\rho y$, полученную абзацем выше $\Rightarrow \rho y = \frac{(-1)^2}{\lambda\mu_1}\frac{d^2}{dx^2}\rho_2 u_2.$

Эту процедуру можно продолжать и дальше, тогда

$$\rho y = \frac{(-1)^3}{\lambda\mu_1\mu_2}\frac{d^3}{dx^3}\rho_3 u_3 = \ldots = \frac{(-1)^n}{\lambda\mu_1\cdot\ldots\cdot\mu_{n-1}}\frac{d^n}{dx^n}\rho_n u_n.$$

Вспомним теперь, что нас интересуют решения в виде полиномов.

$\sqcup$ $y(x) = p_n(x)$, т.е. ищем решение в виде полинома порядка $n \Rightarrow u_n(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n} = \frac{d^n p_n(x)}{dx^n} = const$

Вынесем константы из оператора, поделим на весовую функцию, получим:

$y(x) = p_n(x) = \frac{(-1)^n\cdot\text{const}}{\lambda\mu_1\cdot\ldots\cdot\mu_{n-1}}\frac{1}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\rho_n(x).$ Константы обозначим за $C_n$

Вспоминая еще, что $\rho_n = \sigma^n\rho$, получаем $p_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\sigma^n(x)\rho(x).$

Выписанная нами формула (если задать явно значение Cn) полностью определяет вид полиномиальных решений. Это и есть **формула Родриго**

# Билет 27

8 июня 2022 г. 22:35

**Свойства нормальной системы полиномов, ортогональных на отрезке. Теорема о нулях полиномов.**

В рамках этого вопроса символом $p_n(x)$ мы будем обозначать полином порядка n, принадлежащий к нормальной системе полиномов. Предполагается, что эти полиномы попарно ортогональны с весом ρ(x) на отрезке действительной оси [a, b], т.е. $\int_a^b p_n(x)p_m(x)\rho(x)\,dx = 0, \quad n \neq m.$

Будем считать, что $\rho(x) \geqslant 0$ всюду на рассматриваемом отрезке, причем обращение в нуль весовой функции может иметь место лишь на концах отрезка.
Символом $Q_n(x)$ будем обозначать многочлен порядка n, причем все равно, какой. То есть этот полином может принадлежать к нормальной системе, а может и не принадлежать.

Установим некоторые свойства полиномов нормальной системы, ортогональных на отрезке [a, b] с весом $\rho(x)$

**Свойство 1:** Любой многочлен может быть разложен по полиномам нормальной системы

$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k p_k(x)$ причем коэффициенты $C_k$ определены единственным образом, т.е. полиномы нормальной системы образуют базис в пространстве многочленов.

**Доказательство:**

$\sqcup\, Q_n(x):\ Q_n(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_n x^n$, т.е. $q_k$ есть числовые коэффициенты.

Полином будем записывать в виде $p_k(x) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)}x + a_2^{(k)}x^2 + \ldots + a_k^{(k)}x^k.$

$a_m^{(k)}$ – числовые коэффициенты при степени m, верхний индекс указывает на порядок полинома.

Равенство, которое мы намерены доказать, должно выполняться при любых значениях x. Но оно содержит степенные функции $x^k$, ЛНЗ между собой. Поэтому надо потребовать, чтобы в левой и правой части равенства совпадали коэффициенты при одинаковых степенях x. То есть это функциональное равенство оказывается эквивалентным системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
q_0 &= a_0^{(0)}C_0 + a_0^{(1)}C_1 + a_0^{(2)}C_2 + \ldots + a_0^{(n)}C_n,\\
q_1 &= \quad a_1^{(1)}C_1 + a_1^{(2)}C_2 + \ldots + a_1^{(n)}C_n,\\
q_2 &= \quad a_2^{(2)}C_2 + \ldots + a_2^{(n)}C_n,\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
q_n &= \quad a_n^{(n)}C_n.
\end{aligned}$$

Можно видеть, что получилась система из n + 1 уравнения относительно n + 1 неизвестных C0, C1, . . . , Cn. Это СЛ неоднородных АУ с верхнетреугольной матрицей. Поэтому определитель системы есть просто произведение диагональных элементов $a_0^{(0)} \cdot a_1^{(1)} \cdot a_2^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_n^{(n)}$.

Вспомним теперь, что $a_k^{(k)} \neq 0$, т.к. нормальная система полиномов
Следовательно, определитель системы алгебраических уравнений не равен нулю, а потому она имеет единственное решение. Т.е. все коэффициенты $C_k$ определены единственным образом, что и требовалось доказать.

**Свойство 2:** Если n < m, то имеет место следующее равенство: $\int_a^b Q_n(x)p_m(x)\rho(x)\,dx = 0.$

Иногда говорят, что многочлен $Q_n(x)$ ортогонален всем полиномам нормальной системы более высокого порядка.

**Доказательство:**

Из предыдущего свойства следует, что интересующий нас интеграл можно переписать в виде:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{n} C_k p_k(x)p_m(x)\rho(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} C_k \int_a^b p_k(x)p_m(x)\rho(x)\,dx = 0, \quad k \neq m$$

**Свойство 3:** Полиномы нормальной системы определены единственным образом (с точностью до произвольного постоянного множителя).

**Доказательство:**
Предположим, что это не так, т.е. два различных полинома $p_n(x)$ и $\tilde{p}_n(x)$ принадлежат к одной и той же нормальной системе. Если удастся показать, что эти полиномы линейно зависимы, это и будет означать справедливость сформулированного утверждения.
Из свойства 1 следует, что многочлен $\tilde{p}_n(x)$ можно разложить по полиномам нормальной системы:

$$\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k p_k(x).$$

Пусть m есть фиксированное число из диапазона 0, 1, 2, . . . , n. Умножим обе части равенства на $p_m(x)\rho(x)$ и проинтегрируем по x от a до b:

$$\int_a^b \tilde{p}_n(x)p_m(x)\rho(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} C_k p_k(x)p_m(x)\rho(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} C_k \int_a^b p_k(x)p_m(x)\rho(x)\,dx = C_m \int_a^b p_m^2(x)\rho(x)\,dx.$$

Самый последний интеграл не равен нулю, поскольку подынтегральная функция неотрицательна всюду на рассматриваемом отрезке. Тогда на него можно поделить, и мы получим выражение для постоянной

$$C_m = \frac{1}{\int_a^b p_m^2(x)\rho(x)\,dx} \int_a^b \tilde{p}_n(x)p_m(x)\rho(x)\,dx., \quad m = 0,1,2,\dots,n$$

$\tilde{p}_n(x)$ - полином той же самой нормальной системы, а значит ортогонален всем полиномам этой системы отличного от $n$ порядка, а это значит $C_m = 0 \ \forall m \neq n$

Следовательно, из первоначальной суммы остается лишь одно ненулевое слагаемое $\tilde{p}_n(x) = C_n p_n(x)$ т.е. многочлены $\tilde{p}_n(x)$ и $p_n(x)$ ЛЗ ∎

**Свойство 4:** Для полиномов нормальной системы имеет место рекуррентная формула:

$$x p_n(x) = C_{n-1}p_{n-1}(x) + C_n p_n(x) + C_{n+1}p_{n+1}(x),$$

где $C_k$ — числовые коэффициенты, возможно, зависящие от $k$.

**Доказательство:**
Из свойства 1: $x p_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_k p_k(x)$

$\sqcup\, m \in \overline{0\dots n+1}$ Умножим обе части равенства на $p_m(x)\rho(x)$ и проинтегрируем по $x \in (a,b)$

$$\int_a^b x p_n(x)p_m(x)\rho(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n+1} C_k p_k(x)p_m(x)\rho(x)\,dx = C_m \int_a^b p_m^2(x)\rho(x)\,dx,$$

$$\Rightarrow C_m = \frac{1}{\int_a^b p_m^2(x)\rho(x)\,dx} \int_a^b p_n(x)x p_m(x)\rho(x)\,dx, \quad m = 0,1,\dots,n+1.$$

Подынтегральное выражение в числителе дроби содержит многочлен $Q_{m+1}(x) = x p_m(x)$ степени $m+1$ т.е. интеграл вычисляется от произведения $Q_{m+1}(x)p_n(x)\rho(x)$, тогда по св-ву 2 этот интеграл будет равен нулю для всех $m: m+1 < n \Rightarrow$ все $C_m$ с $m < n-1$ будут равны нулю
Следовательно, могут быть отличны от нуля лишь коэффициенты $C_{n-1}$, $C_n$ и $C_{n+1}$
А это как раз и приведет к рекуррентной формуле заявленного вида.

**Свойство 5: Теорема о нулях полиномов.**
Все нули полиномов нормальной системы действительные, простые, и лежат строго внутри интервала ортогональности (a, b). То есть в точках a и b нулей точно нет. Разумеется, здесь имеются в виду лишь полиномы нормальной системы, попарно ортогональные с весом ρ(x) на отрезке [a, b]. Для произвольных многочленов эта теорема не работает.

**Доказательство:**
По св-ву ортогональности $\forall n > 0: \int_a^b p_0(x)p_n(x)\rho(x)\,dx = 0$, но $p_0(x) = const$, поэтому выписанное равенство можно упростить, поделив все на эту постоянную: $\int_a^b p_n(x)\rho(x)\,dx = 0, \quad n = 1,2,\dots$

Интеграл может быть равен нулю лишь в том случае, если подынтегральная функция меняет знак по крайней мере один раз на интервале интегрирования, поскольку $\rho(x) > 0$ на $(a,b)$, то знак менять должен полином $p_n(x)$. Он имеет одну или более точек перемены знака строго внутри нашего интервала, поэтому его можно представить в виде:

$$p_n(x) = Q_k(x)\psi_{n-k}(x), \quad Q_k(x) = (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k), \quad k \geqslant 1.$$

Здесь x1, x2, . . . , xk — точки смены знака (а по совместительству — нули) полинома между a и b, все они различные. Из сказанного выше ясно, что $k \geqslant 1$

$\psi_{n-k}(x)$ не меняет знак во внутренних точках интервала, хотя в нуль обращаться может
Согласно основной теореме алгебры, полином порядка n имеет ровно n нулей, если считать нули столько раз, какова их кратность. Значит, $k \leq n$ . Поэтому $\psi_{n-k}(x)$ есть полином порядка n − k. Утверждение теоремы эквивалентно равенству k = n. В самом деле, тогда все нули лежат там, где надо. Вдобавок все они различны, а потому — простые.

Поэтому оптимальным способом доказательства будет доказательство от противного.
Если мы покажем, что предположение k < n неверно, то останется лишь возможность k = n, что нам и требуется.

$\sqcup\, k<n$: $\int_a^b Q_k(x)p_n(x)\rho(x)\,dx = 0$ по свойству 2

С другой стороны, тот же самый интеграл представляется в виде: $\int_a^b Q_k^2(x)\psi_{n-k}(x)\rho(x)\,dx.$

Можно видеть, что подынтегральная функция в этом интеграле не меняет знак на интервале (a, b). Следовательно, этот интеграл не равен нулю. Но один и тот же интеграл не может одновременно и быть равным нулю, и не быть равным нулю. То есть мы получили противоречие, которое и доказывает теорему.

# Билет 28

8 июня 2022 г. 22:35

**Нормальная система полиномов, ортогональных на отрезке. Полиномы Лежандра и их свойства.**

Уравнение гипергеометрического типа: $\sigma(x)y''(x)+\tau(x)y'(x)+\lambda y(x)=0$

где $x$ — переменная, $y(x)$ — неизвестная функция, $\sigma(x)$, $\tau(x)$ и $\lambda$ — коэффициенты уравнения, которые предполагаются известными. При этом $\sigma(x)$ — многочлен не выше второй степени по $x$, $\tau(x)$ — многочлен не выше первой степени по $x$, $\lambda$ — постоянная.

$\sqcup\, \sigma(x)$ - полином второго порядка, наиболее общим его видом будет: $\sigma(x)=C(x-a)(b-x)$, $a,b\in\mathbb{R}$

Диффур можно делить и умножать на любое число, ничего не изменится, а значит, всегда есть возможность масштабировать один из коэффициентов, поэтому без ограничения общности C=1, тогда: $\sigma(x)=(x-a)(b-x)$, $\sigma(x)>0$ на $(a,b)$

Поскольку возможность масштабирования коэффициента использована, упростить коэффициент $\tau(x)$ уже не получится, поэтому для него берём самый общий вид полинома первого порядка: $\tau(x)=Ax+B$

A, B, a, b — известные числа.

Ну а теперь, опираясь на известный вид коэффициентов уравнения гипергеометрического типа, попробуем восстановить всю доступную нам информацию об этом уравнении и некоторых его решениях.

Весовая функция имеет вид: $\rho(x)=\dfrac{1}{\sigma(x)}\exp\left(\int\dfrac{\tau(x)}{\sigma(x)}\,dx\right).$

Преобразуем сначала отношение $\tau/\sigma$

$$\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}=\frac{Ax+B}{(x-a)(b-x)}=\frac{\alpha}{x-a}-\frac{\beta}{b-x},$$

$\Rightarrow \displaystyle\int\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}\,dx=\alpha\ln(x-a)+\beta\ln(b-x),$ $a<x<b$ $\Rightarrow$ $\rho(x)=\dfrac{1}{(x-a)(b-x)}\exp\left(\alpha\ln(x-a)+\beta\ln(b-x)\right)=$

$$=(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}.$$

Теперь найдем коэффициент k(x), необходимый для приведения уравнения к самосопряженному виду: $k(x)=\sigma(x)\rho(x)=(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}.$

Видно, что при $\alpha>0$ уравнение гипергеометрического типа будет иметь особую точку x = a

при $\beta>0$ : $x=b$

Если выполнены оба ограничения, то это уравнение будет обладать двумя особыми точками.
В рассматриваемом случае задача на собственные значения будет иметь вид:

$$\frac{d}{dx}(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}\frac{dy}{dx}+\lambda(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}y=0,\quad a<x<b,$$
$$|y(a)|<+\infty,\quad |y(b)|<+\infty.$$

Эта задача имеет решения только в виде полиномов при $\lambda=-n\tau'(x)-\dfrac{n(n-1)}{2}\sigma''(x).$

Следовательно, поставленная задача имеет решение в виде:

$$y_n(x)=p_n(x),\quad \lambda_n=n(n-1)-An,\quad n=0,1,2,\ldots$$

оператор задачи будет самосопряженным на всех без исключения собственных функциях, поэтому они ортогональны: $\displaystyle\int_a^b p_n(x)p_m(x)(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}\,dx=0,\quad n\neq m.$

**Пример: типовое уравнение Лежандра** $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\lambda y=0$

Получается $\sigma(x)=1-x^2$, $\tau(x)=-2x$., найдем весовую функцию

$$\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}=-\frac{2x}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x},$$
$$\int\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}\,dx=\ln(1+x)+\ln(1-x),$$

$$\rho(x) = \frac{e^{\ln(1+x)+\ln(1-x)}}{1-x^2} = 1.$$

Коэффициент $k(x)$ будет иметь вид $\Rightarrow$ две особые точки x=+-1

$$k(x) = \sigma(x)\rho(x) = 1 - x^2.$$

А значит задача на собственные значения для уравнения Лежандра будет иметь вид:

$$\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1,$$
$$|y(-1)| < +\infty, \quad |y(1)| < +\infty.$$

Никаких решений кроме полиномов задача не имеет.

Собственные функции $y_n(x) = P_n(x)$ - **полиномы Лежандра**, они соответствуют собственным значениям: $\lambda = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = n(n-1) + 2n = n(n+1)$

т.е. ответ задачи на собственные значения для уравнения Лежандра имеет вид:

$$y_n(x) = P_n(x), \quad \lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

**Свойство ортогональности полиномов Лежандра**

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m$$

Для собственных функций рассматриваемой задачи имеет место следующая теорема разложимости: $\sqcup\ f(x) \in C^2(-1,1) \cap C^1[-1,1] \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$

который будет сходиться абсолютно и равномерно на отрезке [−1, 1].

формула Родрига для $P_n(x)$: $p_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\sigma^n(x)\rho(x)$, $C_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$

поэтому формула Родрига для полиномов Лежандра имеет вид:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}$$

Пользуясь формулой Родрига, нетрудно получить несколько первых полиномов Лежандра:

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 \cdot 0!}\frac{d^0\left(x^2-1\right)^0}{dx^0} = 1,$$
$$P_1(x) = \frac{1}{2 \cdot 1!}\frac{d\left(x^2-1\right)}{dx} = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\frac{d^2\left(x^2-1\right)^2}{dx^2} = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Из формулы Родрига следует **свойство четности полиномов Лежандра**, т.е. $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

Все полиномы Лежандра устроены так, что $P_n(1) = 1\ \forall n \Rightarrow P_n(-1) = (-1)^n$

Для рисования графиков полиномов Лежандра полезно помнить, что $|P_n(x)| \leqslant 1$ при $|x| \leqslant 1$

# Билет 29

8 июня 2022 г. 22:35

**Нормальная система полиномов, ортогональных на полупрямой. Полиномы Чебышева — Лагерра и их свойства.**

Уравнение гипергеометрического типа: $\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0$

где $x$ — переменная, $y(x)$ — неизвестная функция, $\sigma(x)$, $\tau(x)$ и $\lambda$ — коэффициенты уравнения, которые предполагаются известными. При этом $\sigma(x)$ — многочлен не выше второй степени по $x$, $\tau(x)$ — многочлен не выше первой степени по $x$, $\lambda$ — постоянная.

$\sigma(x)$ есть полином первой степени.

Самый общий вид такого полинома (после масштабирования) будет $\sigma(x) = x - a,\ a \in \mathbb{R}$

В дальнейшем считаем, что $x > a,\ \tau(x) = Ax + B$

Посчитаем весовую функцию: $\dfrac{\tau(x)}{\sigma(x)} = \dfrac{Ax+B}{x-a} = A + \dfrac{\beta}{x-a}$, где $\beta = aA + B$

$$\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}\,dx = Ax + \beta\ln(x-a) \Rightarrow \rho(x) = \frac{1}{x-a}e^{Ax+\beta\ln(x-a)} = (x-a)^{\beta-1}e^{Ax}$$

Найдем теперь коэффициент k(x), необходимый для записи уравнения в самосопряженном виде:

$k(x) = \sigma(x)\rho(x) = (x-a)^{\beta}e^{Ax}$ если $\beta > 0$: $k(a) = 0$ - единственная особая точка, т.к. гипергеометрического типа

Однако, если выполняется ограничение A < 0, то $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 0 \Rightarrow x = +\infty$ - особая точка

Типовая задача на собственные значения для уравнения гипергеометрического типа ставится на интервале между особыми точками. Поэтому мы получаем задачу на полупрямой:

$$\frac{d}{dx}(x-a)^{\beta}e^{Ax}\frac{dy}{dx} + \lambda(x-a)^{\beta-1}e^{Ax}y = 0, \quad a < x < +\infty,$$
$$|y(a)| < +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}|y(x)| \leqslant Cx^N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots$$

Эта задача имеет решения лишь в виде полиномов, соответствующих выбору $\lambda = -n\tau'(x) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x)$

т.к. $\sigma''(x) = 0 \Rightarrow$ собственные функции полиномы $y_n(x) = p_n(x),\ \lambda_n = -A\cdot n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

Оператор рассматриваемой задачи будет самосопряженным на всех собственных функциях, т.е. полиномах, поэтому собственные функции попарно ортогональны с весом ρ(x) на полупрямой:

$$\int_a^{+\infty} p_n(x)p_m(x)(x-a)^{\beta-1}e^{Ax}\,dx = 0, \quad n \neq m$$

Рассмотрим в качестве примера уравнение: $xy''(x) + (1+\alpha-x)y'(x) + \lambda y(x) = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$

здесь: $\sigma(x) = x,\ \tau(x) = 1+\alpha-x$: $\dfrac{\tau(x)}{\sigma(x)} = -1 + \dfrac{1+\alpha}{x}$, $\displaystyle\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}\,dx = -x + (1+\alpha)\ln x \Rightarrow \rho(x) = \frac{1}{x}e^{-x+(1+\alpha)\ln x} = x^{\alpha}e^{-x}$.

Найдем коэффициент: $k(x) = x^{1+\alpha}e^{-x}$

Таким образом, рассматриваемое уравнение имеет конечную особую точку x = 0 (при условии α > −1) и бесконечно удаленную особую точку x = +∞.

Типовая задача на собственные значения:

$$\frac{d}{dx}x^{1+\alpha}e^{-x}\frac{dy}{dx} + \lambda x^{\alpha}e^{-x}y = 0, \quad 0 < x < +\infty,$$
$$|y(0)| < +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}|y(x)| \leqslant Cx^N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots$$

Решения этой задачи $y_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$ называются **полиномами Чебышёва — Лагерра** или **обобщенными полиномами Лагерра**

Собственные функции отвечают собственным значениям $\lambda_n = n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

В важнейшем частном случае $\alpha = 0$ используется обозначение $L_n(x)$, эти полиномы называют полиномами Лагерра.

**Свойство ортогональности полиномов Чебышёва — Лагерра**

$$\int_0^{+\infty} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x}\, dx = 0, \quad n \neq m$$

Теорема разложимости: Пусть $f(x) \in C^2(0,+\infty) \cap C^1[0,+\infty)$ Пусть, кроме того,

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 x^\alpha e^{-x}\, dx < +\infty \text{ или } \lim_{x\to+\infty} |f(x)| \leqslant Cx^N, \; N = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда эту функцию можно разложить в ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n^{(\alpha)}(x)$

который будет сходиться абсолютно и равномерно на отрезке [0, R] с любым R > 0.

В формуле Родрига для полиномов Чебышёва - Лагерра полагают $C_n = \frac{1}{n!}$, тогда $L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} x^{n+\alpha} e^{-x}$

Пользуясь формулой Родрига, найдем несколько первых полиномов Чебышёва — Лагерра

$$L_0^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{0!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^0}{dx^0} x^\alpha e^{-x} = 1,$$
$$L_1^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{1!} x^{-\alpha} e^x \frac{d}{dx} x^{1+\alpha} e^{-x} = 1 + \alpha - x,$$
$$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^2}{dx^2} x^{2+\alpha} e^{-x} =$$
$$= \frac{1}{2} x^{-\alpha} e^x \frac{d}{dx} \left( (2+\alpha) x^{1+\alpha} e^{-x} - x^{2+\alpha} e^{-x} \right) =$$
$$= \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha) - (2+\alpha)x + \frac{1}{2}x^2.$$

# Билет 30

8 июня 2022 г.  22:35

**Нормальная система полиномов, ортогональных на прямой. Полиномы Чебышева — Эрмита и их свойства.**

Уравнение гипергеометрического типа: $\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0$

где $x$ — переменная, $y(x)$ — неизвестная функция, $\sigma(x)$, $\tau(x)$ и $\lambda$ — коэффициенты уравнения, которые предполагаются известными. При этом $\sigma(x)$ — многочлен не выше второй степени по $x$, $\tau(x)$ — многочлен не выше первой степени по $x$, $\lambda$ — постоянная.

$\sigma(x)$ есть постоянная. Без ограничения общности можно взять $\sigma(x)=1$. Как и прежде, $\tau(x)=Ax+B$, тогда:

$$\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}\,dx = \frac{1}{2}Ax^2 + Bx, \quad \rho(x) = e^{\frac{1}{2}Ax^2+Bx} = k(x)$$

Конечных особых точек нет вообще, зато при условии A < 0: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x) = 0$, т.е. имеются две бесконечно удаленные особые точки.

Типовая задача на собственные значения: $$\frac{d}{dx}e^{\frac{1}{2}Ax^2+Bx}\frac{dy}{dx} + \lambda e^{\frac{1}{2}Ax^2+Bx}y = 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} |y(x)| \leqslant Cx^N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots$$

Эта задача имеет решения только в виде полиномов $y_n(x) = p_n(x)$ соответствующих $\lambda_n = -An$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
Оператор рассматриваемой задачи будет самосопряженным на всех собственных функциях, так что имеет место свойство ортогональности: $$\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x)p_m(x)e^{\frac{1}{2}Ax^2+Bx}\,dx = 0, \quad n \neq m$$

В качестве примера возьмем уравнение Эрмита: $y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0$ Здесь $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) = -2x$, тогда

$$\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}\,dx = -x^2, \quad \rho(x) = e^{-x^2} = k(x), \Rightarrow$$

Типовая задача на собственные значения

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}e^{-x^2}\dfrac{dy}{dx} + \lambda e^{-x^2}y = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} |y(x)| \leqslant Cx^N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Задача имеет решения при $\lambda_n=2n$, n = 0, 1, 2, . . . Собственные функции $y_n(x) = H_n(x)$ называются **полиномами Чебышёва-Эрмита** (у нас) или **полиномами Эрмита** (у них).

**Свойство ортогональности полиномов Чебышёва-Эрмита** $$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,dx = 0, \quad n \neq m.$$

Теорема разложимости:

Пусть $f(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2}\,dx < +\infty$ или $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x)| \leqslant Cx^N$, $N = 0, 1, 2, \ldots$, тогда эту функцию можно разложить в ряд: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x)$, который будет сходиться абсолютно и равномерно на любом отрезке действительной оси.

В формуле Родрига для полиномов Чебышёва — Эрмита выбирают $C_n=(-1)^n$, тогда $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$.

Несколько первых полиномов Чебышёва — Эрмита

$$H_0(x) = (-1)^0 e^{x^2}\frac{d^0}{dx^0}e^{-x^2} = 1,$$
$$H_1(x) = (-1)e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2} = 2x,$$
$$H_2(x) = (-1)^2 e^{x^2}\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2} = e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(-2xe^{-x^2}\right) = -2 + 4x^2.$$

# Билет 31

8 июня 2022 г. 22:35

**Присоединенные функции Лежандра и их свойства.**

**уравнение Лежандра:** $\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0$

В простейшем случае уже рассматривали, когда m=0.
В общем случае m есть произвольный комплексный параметр. Особые точки прежние, x = ±1, как легко видеть из записи уравнения Лежандра в самосопряженном виде. Поэтому естественная постановка задачи на собственные значения для уравнения Лежандра имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0, \quad -1<x<1,$$
$$|y(-1)|<+\infty, \quad |y(1)|<+\infty.$$

Решения уравнения Лежандра, ограниченные в особых точках x = ±1, существуют лишь при целых значениях параметра m. Он входит в уравнение квадратично, поэтому без ограничения общности можно считать m > 0 (разумеется, если нас интересуют лишь ограниченные решения). Ну а поскольку случай m = 0 мы уже рассмотрели, в рамках этого вопроса будем считать m > 0
Уравнение Лежандра в случае m > 0 **не относится к гипергеометрическому типу.**

Уравнение гипергеометрического типа: $\sigma(x)y''(x)+\tau(x)y'(x)+\lambda y(x)=0$

Однако заменой $y(x)=f(x)\vartheta(x)$ можно добиться того, чтобы новая неизвестная функция $\vartheta(x)$ была решением уравнения гипергеометрического типа.

Для этого, нужно потребовать, чтобы функция f(x) была ограничена в обеих особых точках уравнения Лежандра. Тогда можно получить, что $f(x)=(1-x^2)^{m/2}$
Найдем уравнение, которому будет подчиняться функция $\vartheta(x)$
Для этого подставим $y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\vartheta(x)$ в уравнение Лежандра

Преобразуем сначала дифференциальный оператор
Вычислим производную от произведения: $\frac{dy}{dx}=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{dv}{dx}-mx\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}v.$

Вычисляем дифференциальный оператор целиком:

$$\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}+1}\frac{dv}{dx}-mx\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}v\right)=$$
$$=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}+1}\frac{d^2v}{dx^2}-(m+2)x\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{dv}{dx}-mx\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{dv}{dx}-$$
$$-m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}v+m^2x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}v.$$

Подставляем все найденное в уравнение Лежандра:

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}+1}\frac{d^2v}{dx^2}-(m+2)x\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{dv}{dx}-mx\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{dv}{dx}-$$
$$-m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}v+m^2x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}v+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}v=0.$$

Поделив все на $\left(1-x^2\right)^{m/2}$, находим уравнение для функции $v(x)$

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2v}{dx^2}-2(m+1)x\frac{dv}{dx}+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}-m+\frac{m^2x^2}{1-x^2}\right)v=0,$$

или, после очевидного упрощения

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2v}{dx^2}-2(m+1)x\frac{dv}{dx}+\left(\lambda-m^2-m\right)v=0.$$

Для функции v(x) получилось уравнение гипергеометрического типа. Множитель $1-x^2$ перед второй производной показывает то, что это уравнение как-то связано с уравнением Лежандра. уравнение для производной порядка m от полиномов Лежандра:

$$\sigma(x)u_m''(x) + \tau_m(x)u_m'(x) + \mu_m u_m(x) = 0.$$

В случае полиномов Лежандра $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tau(x) = -2x$, тогда

$$\tau_m(x) = m\sigma'(x) + \tau(x) = -2mx - 2x = -2(m+1)x,$$

$$\mu_m = \lambda + m\tau'(x) + \frac{m(m-1)}{2}\sigma''(x) = \lambda - 2m - m(m-1) = \lambda - m^2 - m.$$

А значит $v_n(x) = \frac{d^m}{dx^m}(P_n(x))$, $P_n(x)$ - полином Лежандра n-ой степени, $\lambda_n = n(n+1)$

значит при дифференцировании этого уравнения никаких новых ограниченных решений (кроме производных от все тех же полиномов) появиться не может.
Итак, ограниченными решениями будут: $v_n(x) = \dfrac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad \lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда решения исходной задачи на собственные значения имеют вид:

$$y_n(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad \lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Но эта запись некорректна, т.к. если n<m, то производная порядка m, а полином порядка n, а значит равна нулю, тривиальные решения, нас они не интересуют, значит берём индексы не с нуля, а с m, следовательно ответ будет таким:

$$y_n(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad \lambda_n = n(n+1), \quad n = m, m+1, m+2, \ldots$$

Полученные нами собственные функции: $P_n^{(m)}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m P_n(x)}{dx^m}$

называются **присоединенными функциями Лежандра**

При m = 0 эти функции вырождаются в обычные полиномы Лежандра, так что далее мы обсуждаем лишь случай m > 0.

Согласно теореме о нулях полиномов, присоединенные функции Лежандра имеют n − m простых нулей во внутренних точках интервала (−1, 1). Первый множитель добавляет еще два (возможно, кратных) нуля в точках x = ±1

В случае чётных m присоединённая функция Лежандра - полином степени n.
В случае нечётных m присоединённая функция Лежандра полиномом уже не является, т.к. содержит множитель $\sqrt{1-x^2}$, т.е. иррациональную функцию

Оператор данной задачи на собственные значения будет самосопряженным на всех без исключения собственных функциях, поэтому можно гарантировать, что присоединенные функции Лежандра ортогональны с единичным весом на отрезке [−1, 1]:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x)\, dx = 0, \quad k \neq n.$$

Теорема разложимости: Пусть $f(x) \in C^2(-1,1)$ и $f(\pm 1) = 0$. $\Rightarrow f(x) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} C_n P_n^{(m)}(x)$
по собственным функциям решенной нами задачи (т.е. по присоединенным функциям Лежандра), причем этот ряд будет сходиться абсолютно и равномерно на отрезке [−1, 1].

Здесь использовано более сильное условие на функцию f(x) по сравнению с граничными условиями задачи, т.к. присоединенные функции Лежандра обращаются в нуль при x = ±1, по-другому не удастся добиться равномерной сходимости ряда на всем отрезке [−1, 1].

# Билет 32

8 июня 2022 г. 22:37

**Уравнение Лапласа в сферических координатах. Сферические и шаровые функции. Фундаментальные сферические функции.**

**Сферические (и шаровые) функции** — это функции, зависящие более чем от одной переменной. Их проще всего ввести, решая задачу для уравнения Лапласа в области со сферическими границами методом разделения переменных.

Пример:
Требуется найти стационарную температуру в шаровом слое, заключенном между концентрическими сферами радиусов r1 и r2. Будем считать, что распределение температуры на этих сферах известно. Тогда постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}r^2\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \\ r_1 < r < r_2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(r_1,\theta,\varphi) = f_1(\theta,\varphi), \quad u(r_2,\theta,\varphi) = f_2(\theta,\varphi), \\ u(r,\theta,\varphi) = u(r,\theta,\varphi+2\pi), \quad |u(r,0,\varphi)| < +\infty, \quad |u(r,\pi,\varphi)| < +\infty. \end{cases}$$

Решение поставленной задачи будем искать методом Фурье:

Сначала найдем все возможные частные решения уравнения Лапласа в виде: $u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$.

После подстановки этого произведения в уравнение Лапласа умножим результат на $r^2$ и поделим на $R(r)Y(\theta,\varphi)$. Тогда дифференциальное уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr} + \frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = 0.$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr} = -\left(\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right) = \lambda$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ Y(\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi+2\pi), \quad |Y(0,\varphi)| < +\infty, \quad |Y(\pi,\varphi)| < +\infty. \end{cases}$$

**Собственные функции этой задачи на собственные значения как раз и называются сферическими функциями**. Так что выписанную нами постановку задачи можно трактовать как **определение сферических функций**.

Пространственно двумерную задачу на собственные значения мы снова будем решать методом Фурье.

будем искать всевозможные частные решения дифференциального уравнения в виде: $Y(\theta,\varphi) = \Omega(\theta)\Phi(\varphi)$

После подстановки этого произведения в дифференциальное уравнение умножим все на $\sin^2\theta$ и поделим на $\Omega(\theta)\Phi(\varphi)$:

$$\frac{\sin\theta}{\Omega}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Omega}{d\theta} + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \lambda\sin^2\theta = 0.$$

$$\frac{\sin\theta}{\Omega}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Omega}{d\theta} + \lambda\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \mu$$

получаем вспомогательную задачу на собственные значения:
$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ \Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases}$$

её решение:

простое

$$\begin{cases} \mu_0 = 0, \quad \Phi_0(\varphi) = C_0, \\ \mu_m = m^2, \quad m = 1,2,\ldots, \quad \Phi_m(\varphi) = C_{1m}\cos m\varphi + C_{2m}\sin m\varphi. \end{cases}$$

кратные, кратность 2

Выпишем теперь дифференциальное уравнение для второго множителя, т.е. для $\Omega(\theta)$:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Omega_m(\theta)}{d\theta} + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Omega_m(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

замена $x = \cos\theta$: $$\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)\frac{d\Omega_m(x)}{dx} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Omega_m(x) = 0, \quad -1 < x < 1,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

получилось уравнение Лежандра.

Уравнение Лежандра имеет ограниченные решения лишь при $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2\ldots$

решениями являются присоединенные функции Лежандра $P_n^{(m)}(x) = P_n^{(m)}(\cos\theta)$

$\forall\lambda_n$: $\Omega_m(\theta) = P_n^{(m)}(\cos\theta)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

решение исходной задачи на собственные значения, согласно методу Фурье, можно представить в виде ряда:

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\Omega_m(\theta)\Phi_m(\varphi) = C_0P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{\infty}(C_{1m}\cos m\varphi + C_{2m}\sin m\varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta)$$
$$\lambda_n = n(n+1), \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Однако это решение написано некорректно.

При m>n: $P_n^{(m)}(x) \equiv 0$, а значит надо изменить индексацию с m=0,1,…,$\infty$ до m=0,1,…,n, тогда ряд обрывается и решение принимает вид:

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n}\Omega_m(\theta)\Phi_m(\varphi) = C_0P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}(C_{1m}\cos m\varphi + C_{2m}\sin m\varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta)$$
$$\lambda_n = n(n+1), \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Такие функции называют **сферическими гармониками**

Можно видеть, что сферическая гармоника получилась составной. При каждом фиксированном n она состоит из 2n+1 ЛНЗ функций $P_n(\cos\theta)$, $P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi$, $P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos\varphi$, $m = 1, 2, \ldots, n$,

т.е. собственное значение $\lambda_n = n(n+1)$ имеет кратность 2n+1

Эти ЛНЗ функции тоже будут собственными функциями задачи, т.е. **сферическими функциями**.

Их будем называть **фундаментальными сферическими функциями**.

m входит в уравнение Лежандра квадратично, поэтому если выбрать m или -m уравнение не изменится. Можно формально тогда считать, что m может быть не только положительным, но и отрицательным, тогда

$$\Phi^{(m)}(\varphi) = \begin{cases} \cos|m|\varphi, & m \leq 0 \\ \sin m\varphi, & m > 0 \end{cases}$$

Учитывая введённые обозначения, можно дать определение фундаментальной сферической функции в виде: $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = P_n^{(|m|)}(\cos\theta)\Phi^{(m)}(\varphi), \quad -n \leqslant m \leqslant n.$

$$P_0^{(0)}(x) = P_0(x) = 1, \quad P_0^{(0)}(\cos\theta) = 1,$$
$$P_1^{(0)}(x) = P_1(x) = x, \quad P_1^{(0)}(\cos\theta) = \cos\theta,$$
$$P_2^{(0)}(x) = P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_2^{(0)}(\cos\theta) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2},$$
$$P_1^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2}\frac{dP_1(x)}{dx} = \sqrt{1-x^2}, \quad P_1^{(1)}(\cos\theta) = \sin\theta,$$
$$P_2^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2}\frac{dP_2(x)}{dx} = 3x\sqrt{1-x^2}, \quad P_2^{(1)}(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta,$$
$$P_2^{(2)}(x) = \left(1-x^2\right)\frac{d^2P_2(x)}{dx^2} = 3\left(1-x^2\right), \quad P_2^{(2)}(x) = 3\sin^2\theta.$$

Примеры фундаментальных сферических функций:

$$Y_0^{(0)}(\theta,\varphi) = 1,$$
$$Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\varphi, \quad Y_1^{(0)}(\theta,\varphi) = \cos\theta, \quad Y_1^{(1)}(\theta,\varphi) = \sin\theta\sin\varphi,$$
$$Y_2^{(-2)}(\theta,\varphi) = 3\sin^2\theta\cos 2\varphi, \quad Y_2^{(-1)}(\theta,\varphi) = 3\sin\theta\cos\theta\cos\varphi,$$
$$Y_2^{(0)}(\theta,\varphi) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2},$$
$$Y_2^{(1)}(\theta,\varphi) = 3\sin\theta\cos\theta\sin\varphi, \quad Y_2^{(2)}(\theta,\varphi) = 3\sin^2\theta\sin 2\varphi.$$

Установим ортогональность вычисленных функций

$$\left\langle Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \sin\theta \cdot Y_k^{(l)}(\theta,\varphi)\right\rangle = \int_S Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) Y_k^{(l)}(\theta,\varphi)\, dS,$$

где $S$ — единичная сфера, $dS = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) Y_k^{(l)}(\theta,\varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi^{(m)}(\varphi)\Phi^{(l)}(\varphi)\, d\varphi \int_0^{\pi} P_n^{(|m|)}(\cos\theta) P_k^{(|l|)}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Phi^{(m)}(\varphi)\Phi^{(l)}(\varphi)\, d\varphi \int_{-1}^{+1} P_n^{(|m|)}(x) P_k^{(|l|)}(x)\, dx.$$

Значение первого интеграла нам хорошо известно,

$$\int_0^{2\pi} \Phi^{(m)}(\varphi)\Phi^{(l)}(\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} 0, & l \neq m, \\ \pi, & l = m \neq 0, \\ 2\pi, & l = m = 0. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{(|m|)}(x) P_k^{(|m|)}(x)\, dx = 0,\ k \neq n,\ \Rightarrow \left\langle Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \sin\theta \cdot Y_k^{(l)}(\theta,\varphi)\right\rangle = 0, \quad \text{если} \quad l \neq m \quad \text{или} \quad k \neq n,$$

Из ортогональности фундаментальных сферических функций вытекает и свойство ортогональности сферических гармоник: $\langle Y_n(\theta,\varphi), \sin\theta \cdot Y_k(\theta,\varphi)\rangle = 0, \quad \text{если} \quad k \neq n.$

Теорема разложимости: Пусть f(θ, φ) определена всюду на единичной сфере и имеет на этой сфере непрерывные вторые производные. Тогда ее можно разложить в ряд:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{nm} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$

причем этот ряд будет сходиться абсолютно и равномерно на всей сфере.

Возвращаемся к радиальной части ур-я: $\dfrac{d}{dr} r^2 \dfrac{dR_n}{dr} - \overbrace{n(n+1)}^{=\lambda_n} R_n = 0, \quad r_1 < r < r_2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

При n = 0 это уравнение интегрируется непосредственно, при n > 0 это — обычное уравнение Эйлера, получаем:

$$R_n(r) = A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

решение исходной задачи:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_{nm} r^n + \frac{B_{nm}}{r^{n+1}}\right) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

Остается лишь найти коэффициенты выписанного ряда. Для этого мы используем граничные условия при r = r1 и r = r2. Технология получения коэффициентов — самая обычная, основанная на использовании свойства ортогональности собственных функций:

$$A_{nm} r_1^n + \frac{B_{nm}}{r_1^{n+1}} = \frac{\left\langle f_1(\theta,\varphi), \sin\theta \cdot Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right\rangle}{\left\| Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right\|^2},$$

$$A_{nm} r_2^n + \frac{B_{nm}}{r_2^{n+1}} = \frac{\left\langle f_2(\theta,\varphi), \sin\theta \cdot Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right\rangle}{\left\| Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right\|^2},$$

$\forall\, n, m$

В качестве частных решений уравнения Лапласа мы получили две функции, каждая из которых зависит от трех переменных:

$$r^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

**Эти функции называются шаровыми (первого и второго рода, соответственно). Шаровая функция первого рода будет гармонической всюду, а шаровая функция второго рода — всюду, кроме точки r = 0.**