Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное баджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика»

Отчёт

по технологической практике за 5 семестр 2020-2021 учебного года

Студент	ФН1-51 (Группа)	______________ (Подпись, дата)	**В.А. Янкина** (И.О.Фамилия)
Руководитель практики ст. преп. кафедры ФН1		______________ (Подпись, дата)	**О.В. Кравченко** (И.О.Фамилия)

Москва, 2020г.

Текст задачи

Решить сингулярную двуточечную краевую задачу методом конечных разностей

$$\varepsilon y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) + f(x) = 0, \quad x \in [0,\, 1],$$

со смешанными граничными условиями

$$\begin{aligned} -\alpha_1 y'(0) + \alpha_2 y(0) &= \gamma_1, \\ \beta_1 y'(1) + \beta_2 y(1) &= \gamma_2, \end{aligned}$$

при различных значениях параметра

$$\varepsilon = 1,\ 0.1,\ 0.01,\ 0.001.$$

$$p(x) = \sqrt{x - x^2}, \qquad q(x) = \sqrt[3]{\sin^2(x) + \cos(x)}, \qquad f(x) = x^3 - x^2 + \sqrt{x}.$$

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0,\ \gamma_1 = 4,\ \gamma_2 = 7.$$

Метод конечных разностей

Дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y(x)+f(x)=0,\qquad x\in[a,b] \tag{1}$$

со смешанными граничными условиями

$$\begin{cases}-\alpha_1y'(a)+\alpha_2y(a)=\gamma_1,\\ \beta_1y'(b)+\beta_2y(b)=\gamma_2.\end{cases} \tag{2}$$

Введёт равномерную сетку

$$a\leqslant x_0<x_1<...<x_n\leqslant b$$

с шагом разбиения h: $h=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,...,n$ и обозначим $y(x_i)=y_i$, $p(x_i)=p_i$, $q(x_i)=q_i$, $f(x_i)=f_i$.

Заменим в дифференциальном уравнении (1) первые производные конечными разностями. На концах отрезка

$$y'(x_0)=\frac{y_1-y_0}{h},\qquad y'(x_n)=\frac{y_n-y_{n-1}}{h},$$

а в промежуточных точках

$$\frac{dy}{dx}\approx\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}.$$

Конечные разности для второй производной имеют вид

$$\frac{d^2y}{dx^2}\approx\frac{\Delta(\Delta y)}{\Delta(\Delta x)}=\frac{(y_{i+1}-y_i)-(y_i-y_{i-1})}{h^2}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}.$$

Тогда вместо дифференциального уравнения (1) с граничными условиями (2) имеем систему

$$\begin{cases}-\alpha_1\dfrac{y_1-y_0}{h}+\alpha_2y_0=\gamma_1,\\ \varepsilon\dfrac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}+p_i\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=-f_i,\qquad i=1,...,n-1,\\ \beta_1\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}+\beta_2y_n=\gamma_2.\end{cases}$$

В полученной системе $n+1$ неизвестных и столько же уравнений.

Умножив первое и последнее уравнения системы на h, а остальные — на h^2, перепишем в матричной форме $\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{F}$, где

$$\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2h & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \varepsilon-\dfrac{p_1h}{2} & q_1h^2-2\varepsilon & \varepsilon+\dfrac{p_1h}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon-\dfrac{p_2h}{2} & q_2h^2-2\varepsilon & \varepsilon+\dfrac{p_2h}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon-\dfrac{p_{n-1}h}{2} & q_{n-1}h^2-2\varepsilon & \varepsilon+\dfrac{p_{n-1}h}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 & \beta_1+\beta_2h\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{Y}$ — вектор переменных размерности $n+1$, а $\boldsymbol{F}$ — вектор свободных членов $F(1)=\gamma_1 h$, $F(i)=-f_{i-1}h^2$, $i=2,3,...,n$, $F(n+1)=\gamma_2 h$

Таким образом, решение сингулярной двуточечной краевой задачи (1),(2) сводится к решению СЛАУ, например, методом прогонки.

Листинг программы

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def grid(a, b, n):
    x = np.linspace(a, b, n)
    p = x[1:-1] - x[1:-1] ** 2
    q = (np.sin(x[1:-1]) ** 2 + np.cos(x[1:-1])) ** (1 / 3)
    f = x[1:-1] ** 3 - x[1:-1] ** 2 + np.sqrt(x[1:-1])
    return x, p, q, f

def progonka(w, f):
    def direct(a, b, c, f, n):
        p = np.zeros(n)
        q = np.zeros(n)
        p[0] = -b[0] / a[0]
        q[0] = f[0] / a[0]
        for i in range(1, n - 1):
            p[i] = -b[i] / (a[i] + c[i] * p[i - 1])
            q[i] = (f[i] - c[i] * q[i - 1]) / (a[i] + c[i] * p[i - 1])
        q[-1] = (f[-1] - c[-1] * q[n - 2]) / (a[-1] + c[-1] * p[n - 2])
        return p, q
    def reverse(p, q, n):
        x = np.zeros((n, 1))
        x[-1] = q[-1]
        for i in range(n - 2, -1, -1):
            x[i] = p[i] * x[i + 1] + q[i]
        return x
    a = np.diag(w)
    b = np.hstack((np.diag(w, 1), 0))
    c = np.hstack((0, np.diag(w, -1)))
    alpha, beta = direct(a, b, c, f, len(w))
    x = reverse(alpha, beta, len(w))
    return x

a = 0
b = 1
n = 15
eps = [1, 0.1, 0.01, 0.001]
a1 = 1
a2 = 0
b1 = 1
b2 = 0
g1 = 4
g2 = 7

for i in range(len(eps)):
    fig, ax = plt.subplots()
    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('y')
    ax.grid()
    h = (b - a) / n
    x, p, q, f = grid(a, b, n)
    d1 = np.hstack((eps[i] - p * h / 2, -b1))
    d2 = np.hstack((a2 * h +a1, q * (h ** 2) - 2 * eps[i], b2 * h + b1))
    d3 = np.hstack((-a1, eps[i] + p * h / 2))
    W = np.diag(d1, k=-1) + np.diag(d2, k=0) + np.diag(d3, k=1)
```

```
    F = np.hstack((g1 * h, -f * (h ** 2), g2 * h))
    Y = progonka(W, F)
    n *= 2

    ax.plot(x, Y, '-o', color='blue', label='$\\epsilon=$' + str(eps[i]))
    ax.legend(loc='lower right')
    fig.savefig(str(i), dpi=300)
```

Результаты

На рис. 1 представлены решения сингулярной двуточечной краевой задачи, найденные с помощью метода конечных разностей. Заметим, что с изменением параметра ε меняется и поведение функции $y(x)$.

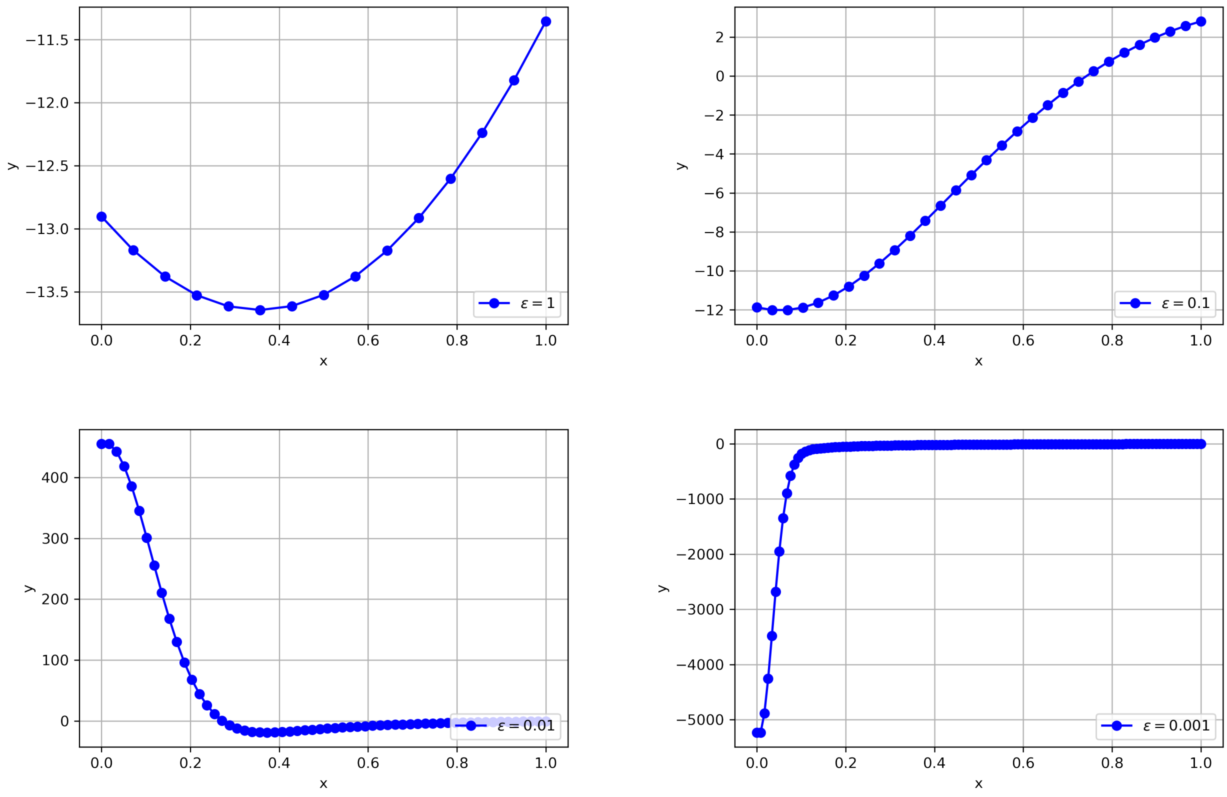

Рис. 1. Решения задачи (1), (2) для разных ε

Список литературы

[1] Блюмин А.Г., Федотов А.А., Храпов П.В. Численные методы вычисления интегралов и решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Численные методы». — М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. — 74 с.

[2] Самарский А.А. Введение в численные методы. СПб.: Издательство «Лань», 2005. — 288 с.

[3] Костомаров Д.П., Фаворский А.П. Вводные лекции по численным методам. М.: Университетская книга, Логос, 2006. 184 с.