Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

Физический факультет

Практическое задание 1

по дисциплине «Основы математического моделирования»

Выполнил студент 3 курса 323 группы

Андреев Глеб

Москва – 2021

Андреев

Вариант 1

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\Delta u \quad , \quad 0<x<10, 0<y<5, t>0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=10} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=5} = 0 \\ u|_{t=0} = \sin \pi x \cos 2\pi y \end{cases}$$

Решение будем искать в виде

$$u = \sum_{n=0} \sum_{m=0} T(t) V(x,y)$$

Разделяя переменные

$$\begin{cases} \Delta V + \lambda V = 0 \\ V|_{x=0} = V|_{x=10} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial V}{\partial y}\Big|_{y=5} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T'(t) + 4\lambda T(t) = 0 \\ T(0) = \sin \pi x \cos 2\pi y \end{cases}$$

$$V = X(x) Y(y)$$

$$\begin{cases} X'' + \vartheta X = 0 \\ X(0) = X(10) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y'' + \mu Y = 0 \\ Y'|_{y=5} = Y'|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

$$Y = \cos \sqrt{\mu_m} y$$

$$X = \sin \sqrt{\vartheta_n} x$$

$$\vartheta_n = \left(\frac{\pi n}{10}\right)^2 \qquad \mu_m = \left(\frac{m\pi}{5}\right)^2$$

$$\lambda_{nm} = \vartheta_n + \mu_m \qquad V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{10} B_m \cos \frac{\pi m}{5} y$$

$$T' + \lambda_{nm} 4 T = 0$$

$$T_{nm} = e^{-4\lambda_{nm} t}$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-4\lambda_{nm} t} A_n \sin \pi \frac{xn}{10} \, B_n \cancel{\sin} \cos \pi \frac{ym}{5}$$

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_n B_n \sin \pi \frac{xn}{10} \cos \pi \frac{ym}{5} = \sin \pi x \cos 2\pi y$$

$A_n = 0$ при $n \neq 10$ $\quad A_{10} = 1$

$B_m = 0$ при $m \neq 10$ $\quad B_{10} = 1$

$$\lambda = \pi^2 + 4\pi^2 = 5\pi^2$$

$$u = e^{-20\pi^2 t} \sin \pi x \cos 2\pi y$$

Схема Писмена–Рэкфорда

Введём разностную сетку

$x_n = n h_x$, $n = 0, 1 \ldots N$, $h_x N = 10$ $\qquad \gamma_1 = \frac{\tau}{h_x^2}$

$y_m = m h_y$, $m = 0, 1 \ldots M$, $h_y M = 5$ $\qquad \gamma_2 = \frac{\tau}{h_y^2}$

$t_j = j\tau$, $j = 0, 1 \ldots J$, $J\tau = T$

Введём разностные операторы

$$4 \Delta u = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u$$

$$\Lambda_1 \vartheta = 4 \cdot \frac{\vartheta_{n+1,m} - 2\vartheta_{n,m} + \vartheta_{n-1,m}}{h_x^2}$$

$$\Lambda_2 \vartheta = 4 \cdot \frac{\vartheta_{n,m+1} - 2\vartheta_{n,m} + \vartheta_{n,m-1}}{h_y^2}$$

Введём полуцелые слои

В схеме переменных направлений переход со слоя на слой осуществляется через промежуточный слой

$$\begin{cases} \dfrac{v^{j+\frac{1}{2}} - v^j}{\tau/2} = \Lambda_2 v^j + \Lambda_1 v^{j+0,5} & (1) \\ \dfrac{v^{j+1} - v^{j+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \Lambda_2 v^{j+1} + \Lambda_1 v^{j+0,5} & (2) \end{cases}$$

первое ур-е явное по y и неявное по x, второе — наоборот.

Н.У. $v^0_{n,m} = \sin \pi h_x n \cos \pi h_y m \cdot 2 \qquad n = \overline{0,N}\ ,\ m = \overline{0,M}$

Г.У. $v^j_{0,m} = v^j_{N,m} = 0 \qquad m = \overline{0,M}$

$$\frac{v^j_{n,1} - v^j_{n,0}}{h_y} = \frac{v^j_{n,M} - v^j_{n,M-1}}{h_y} \qquad n = \overline{0,N}$$

$$\begin{cases} 2\gamma_1 v^{j+0,5}_{n+1,m} - (1+4\gamma_1) v^{j+0,5}_{n,m} + 2\gamma_1 v^{j+0,5}_{n-1,m} = -F^{j+0,5}_{n,m} \\ 2\gamma_2 v^{j+1}_{n,m+1} - (1+4\gamma_2) v^{j+1}_{n,m} + 2\gamma_2 v^{j+0,5}_{n,m-1} = -F^{j+1}_{n,m} \end{cases}$$

$$F^{j+0,5}_{n,m} = 2\gamma_2 \left(v^j_{n,m+1} + v^j_{n,m-1} \right) + (1 - 4\gamma_2) v^j_{n,m}$$

$$F^{j+1}_{n,m} = 2\gamma_1 \left(v^{j+0,5}_{n+1,m} + v^{j+0,5}_{n-1,m} \right) + (1 - 4\gamma_1) v^{j+0,5}_{n,m}$$

$A_x = C_x = 2\gamma_1 \qquad A_y = C_y = 2\gamma_2$

$B_x = 1 + 4\gamma_1 \qquad B_y = 1 + 4\gamma_2$

Метод прогонки

Рассм. систему

$$\begin{cases} -c_0 y_0 + b_0 y_1 = -f_0 \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i - b_i y_{i+1} = -f_i & i = \overline{1, N-1} \\ a_N y_{N-1} - c_N y_N = -f_N \end{cases}$$

При $c \neq 0$ $\quad y_0 = \alpha_0 y_1 + \beta_0$ подстав. y_0 во вт. ур-е и так далее

Получаем

$$\begin{cases} y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, & i = \overline{0, N-1} \\ y_N = \beta_N \end{cases}$$

С помощью этой системы находим коэф.

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}$$

Затем по найденным коэф. найдём знач. ф-ции y_i

Устойчивость

Спектральный метод Неймана

$$\vartheta^j_{n,m} = \lambda^j_{q,p} e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)}$$

q, p – произв. числа $\alpha_q = q h_x$, $\beta_p = p h_y$

$$\lambda^{j+0,5} \Lambda_1 e^{i(\alpha n + \beta m)} = 4 \lambda^{j+0,5} e^{i(\alpha n + \beta m)} \frac{e^{-i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}}{h_x^2} = \cancel{-\lambda^{j+0,5}}$$

$$= -4 \lambda^{j+0,5} e^{i(\alpha n + \beta m)} \frac{4}{h_x^2} \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

аналогично

$$\lambda^j \Lambda_2 e^{i(\alpha n + \beta m)} = -4 \lambda^j e^{i(\alpha n + \beta m)} \frac{4}{h_y^2} \sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$(1): \lambda^{j+1/2} - \lambda^j = -4 \lambda^{j+1/2} \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2\frac{\alpha}{2} - 4 \lambda^j \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$\sqrt{\lambda_{p,q}} = \frac{1 - \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2\frac{\beta}{2}}{1 + \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2\frac{\alpha}{2}} \leq 1 \quad \forall \tau, h_x, h_y, p, q$$

Аналогично для второго ур-я системы

$$\sqrt{\lambda_{k,e}} = \frac{1 - \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2\frac{\nu}{2}}{1 - \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2\frac{\mu}{2}} \leq 1 \quad \forall \tau, h_x, h_y, k, e$$

Крит. Н. вып. для обоих ур-й сист.

$|\lambda_{p,q} \lambda_{k,e}| \leq 1 \Rightarrow$ уст. при переходе со слоя j на $j+1$

Аппроксимация

$$\Lambda_1 \upsilon = 4\frac{\upsilon_{n+1,m} - 2\upsilon_{n,m} + \upsilon_{n-1,m}}{h_x^2} = \frac{4}{h_x^2}\left(h_x^2 \upsilon''_{n,m} + \frac{h_x^4}{12}\upsilon^{(4)}_{n,m}\right) \sim O(h_x^2)$$

$$\Lambda_2 \upsilon = 4\frac{\upsilon_{n,m+1} - 2\upsilon_{n,m} + \upsilon_{n,m-1}}{h_y^2} = \frac{4}{h_y^2}\left(h_y^2 \upsilon''_{n,m} + \frac{h_y^4}{12}\upsilon^{(4)}_{n,m}\right) \sim O(h_y^2)$$

По времени

Запишем левые части ур-й

$$A_1 \upsilon^{k+0,5} - B_1 \upsilon^k = 0 \quad | \cdot B_2$$

$$A_2 \upsilon^{k+1} - B_2 \upsilon^{k+0,5} = 0 \quad | A_1 \quad +$$

$$A_{1,2} = E - 0,5\tau\Lambda_{1,2}$$

$$B_{1,2} = E + 0,5\tau$$

$$\Lambda_1\Lambda_2 \omega^{k+1} - B_2 B_1 \omega^k + (B_2 A_1 - A_1 B_2)\omega^{k+0,5} = 0$$

$$A_1 A_2 \omega^{k+1} - B_2 B_1 \omega^k = 0$$

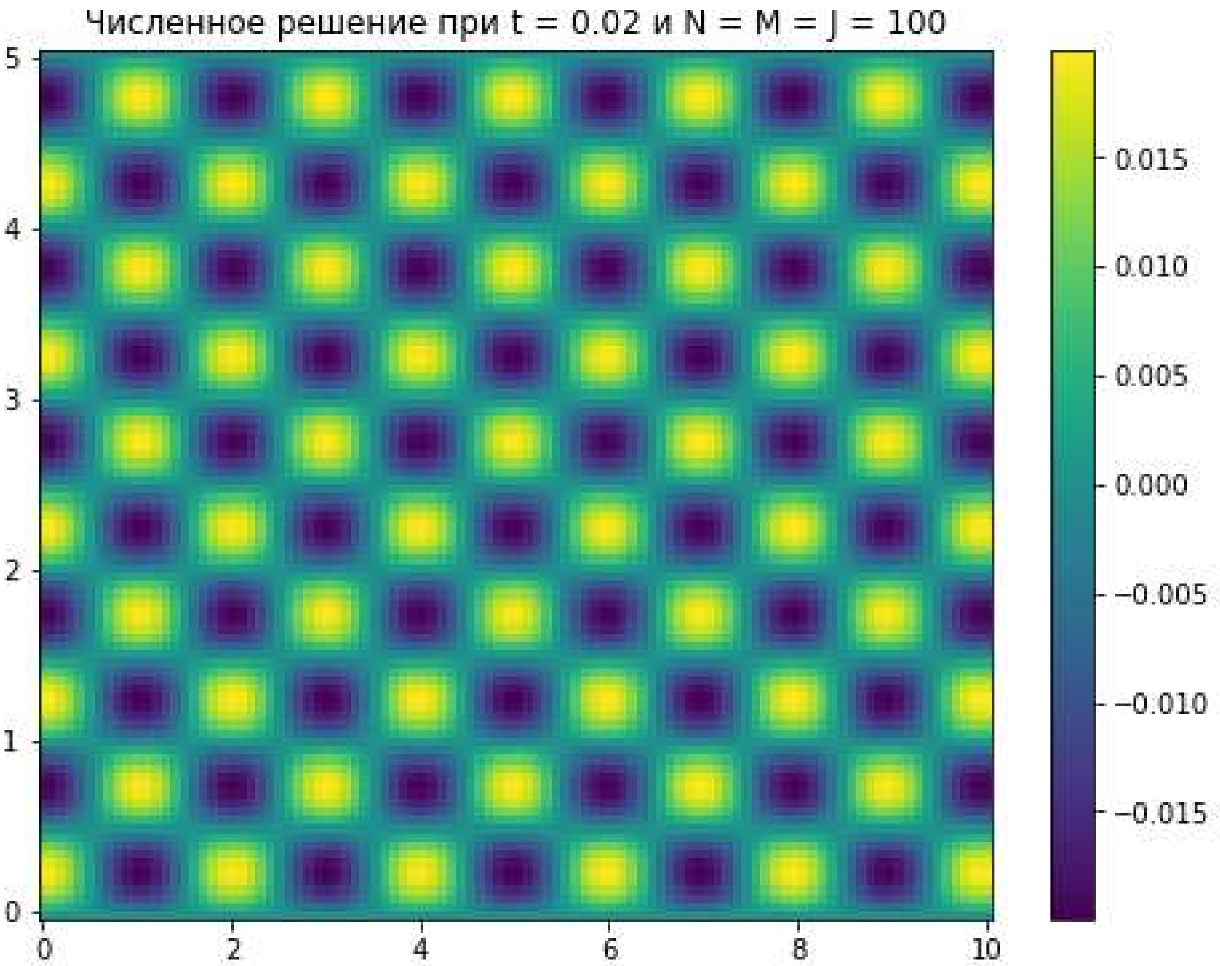
$$\frac{\omega^{k+1} - \omega^k}{\tau} = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2}(\omega^k + \omega^{k+0,5}) - \frac{1}{4}\tau\Lambda_1\Lambda_2(\omega^{k+1} - \omega^k)$$

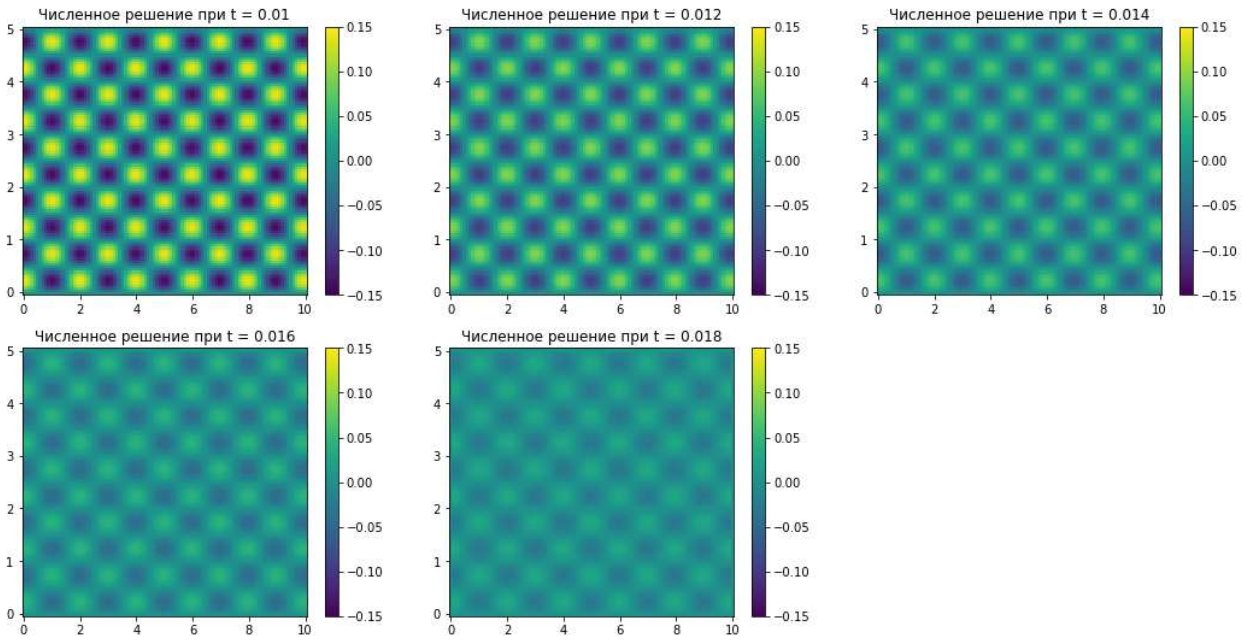
$$\frac{1}{4}\tau\Lambda_1\Lambda_2(\omega^{k+1} - \omega^k) = \frac{1}{4}\tau\Lambda_1\Lambda_2(\omega^k + \tau(\omega^n)' + \ldots - \upsilon^k) =$$

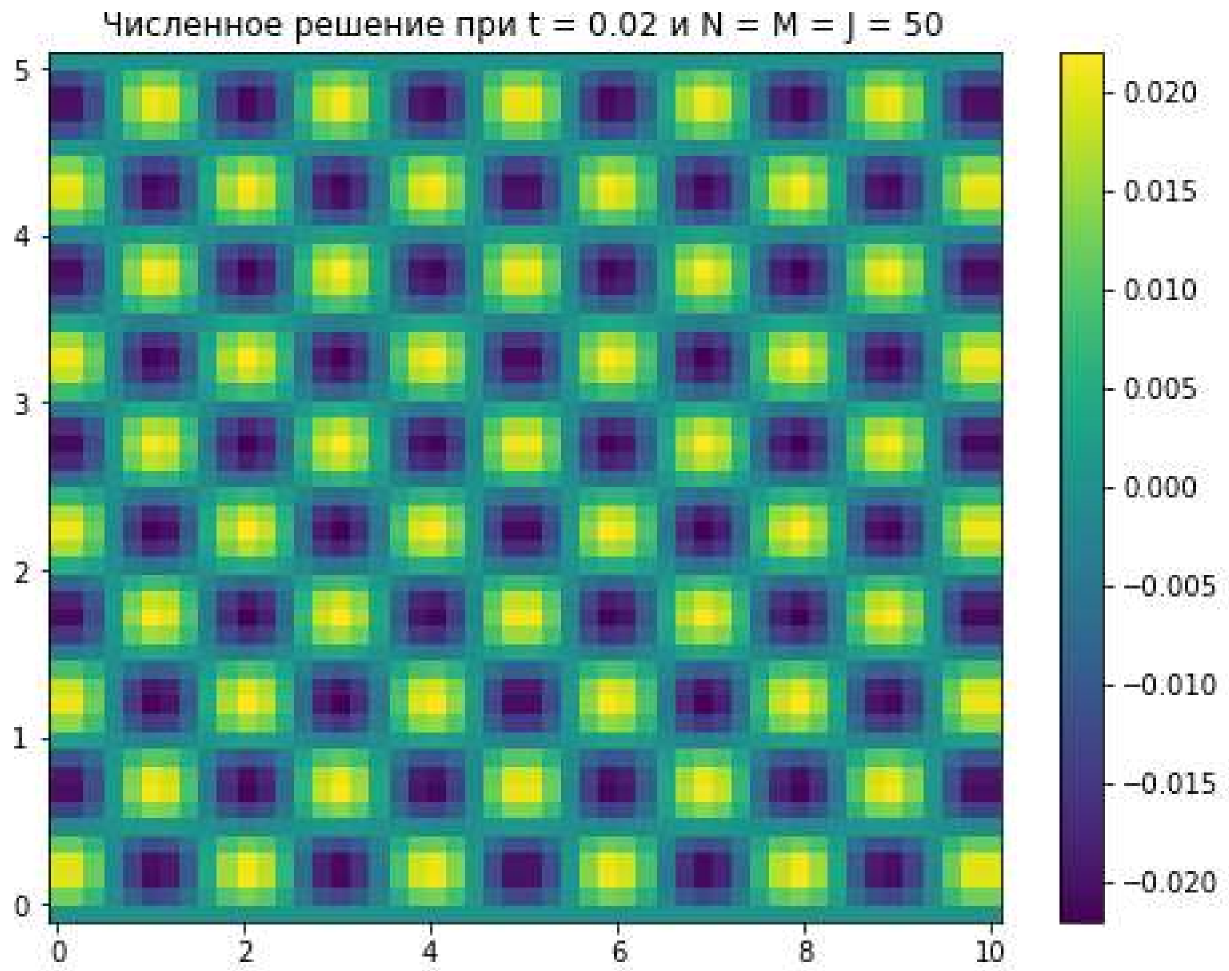
$$= \frac{1}{4}\Lambda_1\Lambda_2(\omega^n)'\tau^2 \sim O(\tau^2)$$

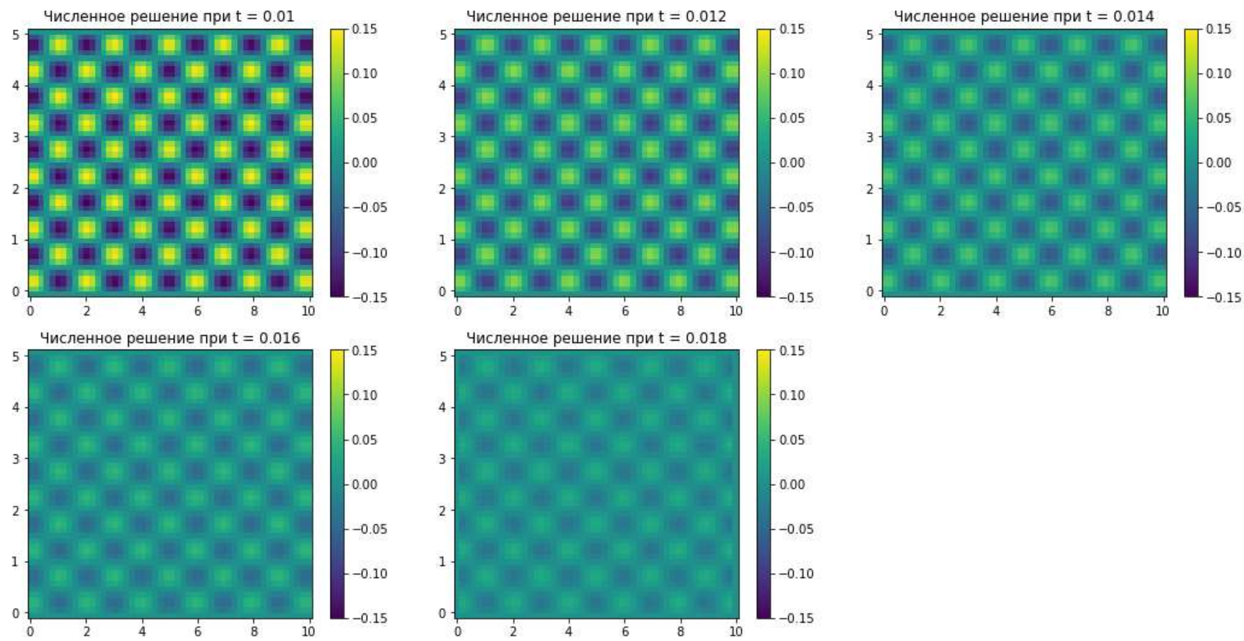
Т.О. невязка $\sim O(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2) \Rightarrow$ порядок 2

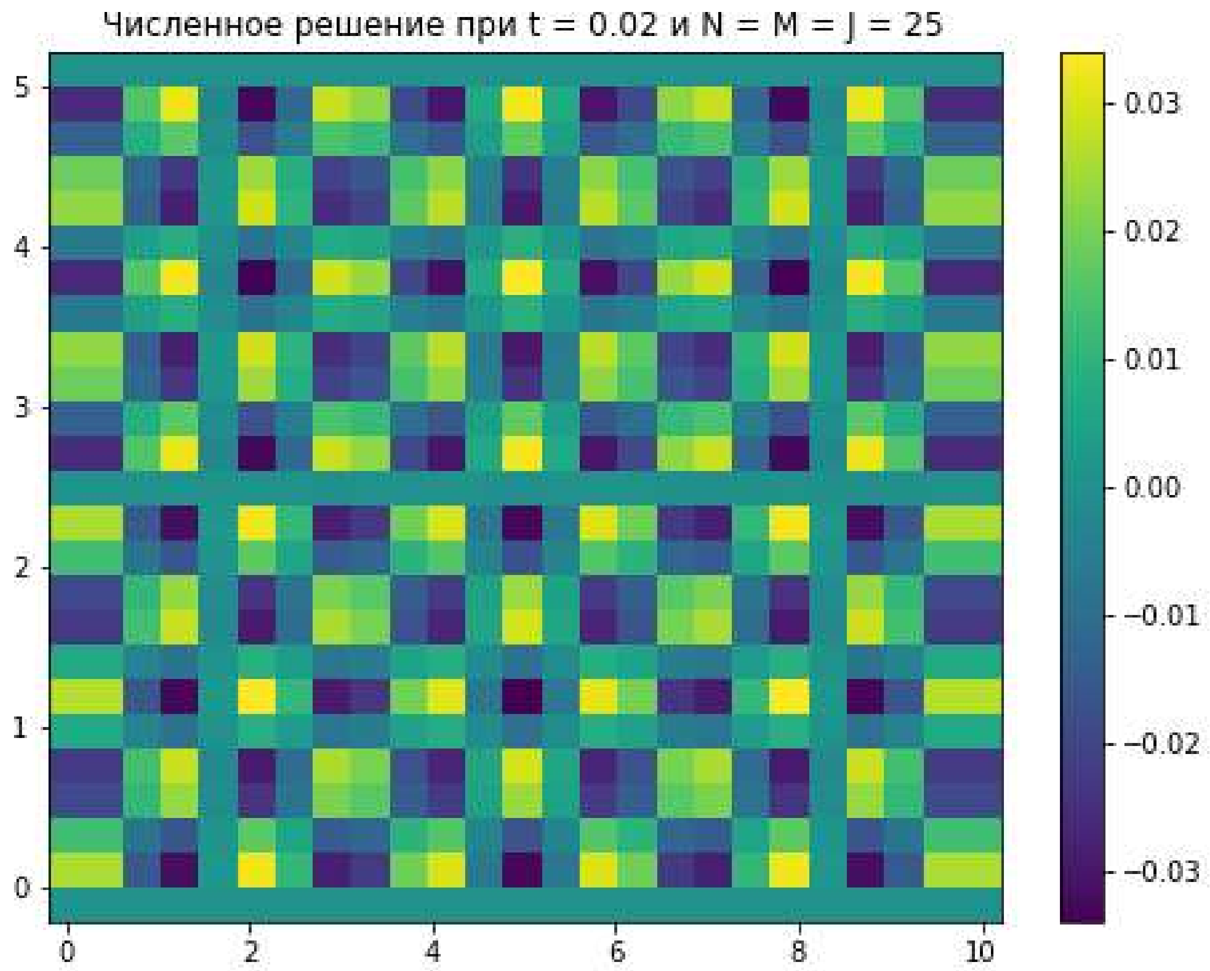
Далее был произведен расчет на трех различных сетках с количеством шагов (N=25, M=25, J=25), (N=50, M=50, J=50), (N=100, M=100, J=100)

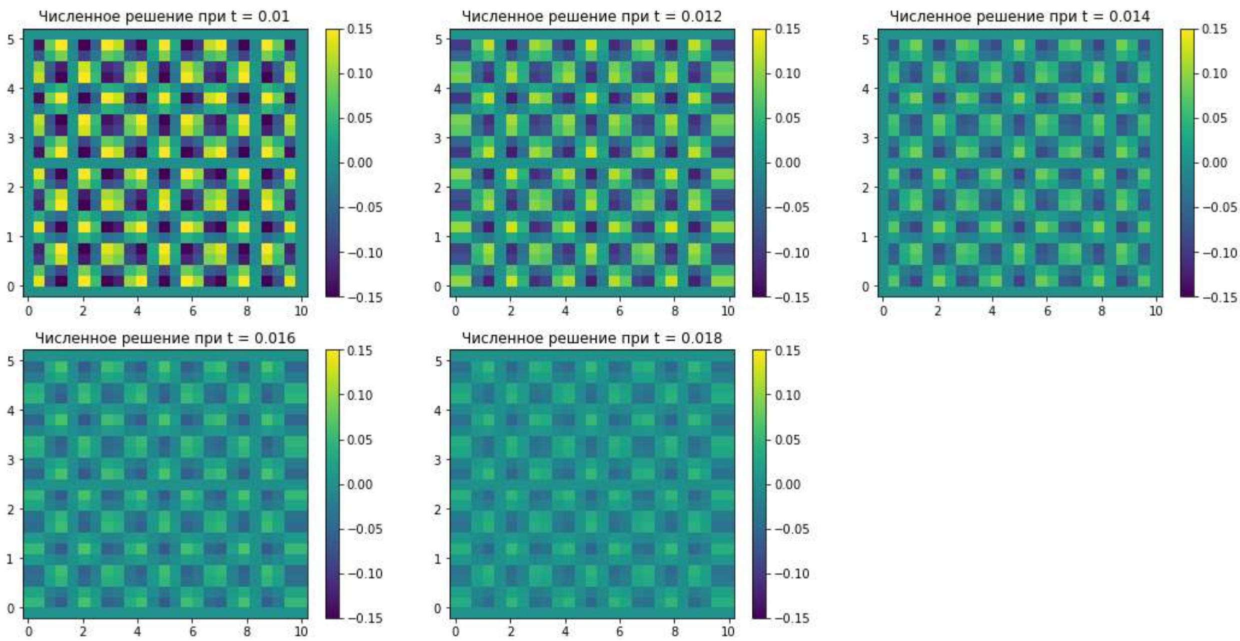





Численное решение при t = 0.02 и N = M = J = 50
0
1
2
3
4
5
0
2
4
6
8
10
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
−0.005
−0.010
−0.015
−0.020


Численное решение при t = 0.01
Численное решение при t = 0.012
Численное решение при t = 0.014
Численное решение при t = 0.016
Численное решение при t = 0.018
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
−0.15


Численное решение при t = 0.02 и N = M = J = 25
0 1 2 3 4 5
0 2 4 6 8 10
0.03 0.02 0.01 0.00 −0.01 −0.02 −0.03


Численное решение при t = 0.01
Численное решение при t = 0.012
Численное решение при t = 0.014
Численное решение при t = 0.016
Численное решение при t = 0.018
0.15 0.10 0.05 0.00 −0.05 −0.10 −0.15

Были проверены начальные и граничные условия, они выполняются.

```
 [0. 0. 0. ... 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. ... 0. 0. 0.]
 ...
 [0. 0. 0. ... 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. ... 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. ... 0. 0. 0.]]
[[0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
  0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
  0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
  0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
  0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
  0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
  0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
  0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
  0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
  0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
  0.]
```

Была рассчитана ошибка как сумма квадратов разности точного и численного решения во всех точках области.

Error (N=25) = 10.87505376146873

Error (N=50) = 4.578684234476994

Error (N=100) = 2.1492561391580187

Ошибка убывает с ростом числа шагов