Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

Физический факультет

Практическое задание 1

по дисциплине «Основы математического моделирования»

Выполнил студент 3 курса 323 группы

Андреев Глеб

Москва - 2021

Андреев

Используя схему бегущего счёта и итерационные методы, решить задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x \leq 1, \ t > 0 \\ u(x,0) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(x-2) + 2 \\ u(0,t) = (2 - \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} 2)e^{-t} \end{cases}$$

В т. $(0;0)$ $u = -\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} 2 + 2$ гран. и нач. усл. согласованы

Ур-е характеристик

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}$$

$du = 0 \Rightarrow u = u^* = const$

$dx = u\,dt$

$x - x_0 = u^*(t - t_0)$

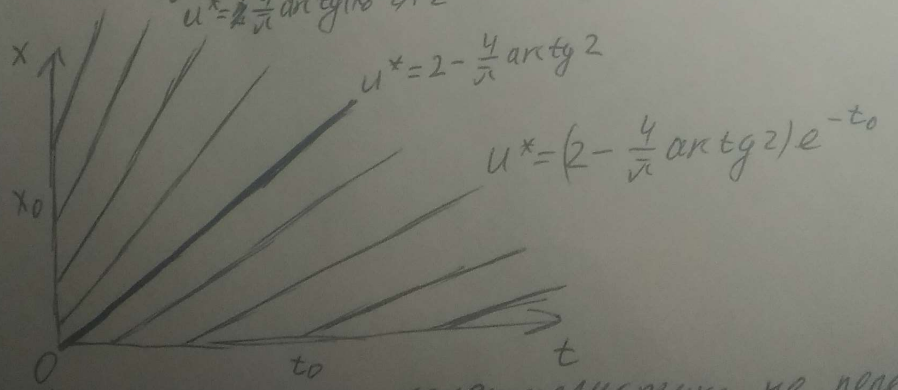
при $x_0 = 0$

$u^* = (2 - \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} 2)e^{-t_0}$

$x = (2 - \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} 2)e^{-t_0}(t - t_0)$

при $t_0 = 0$

$x - x_0 = (\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(x_0 - 2) + 2)\,t$



В обл. $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$ характеристики не пересекаются

Численное решение

Введем равномерную сетку

$\omega^h = \{x_n = hn,\ n=0,1\ldots\}$ $\quad h=\frac{1}{N},\ n=\overline{0,N-1}$

$\omega^\tau = \{t_m = \tau m,\ m=0,1\ldots\}$ $\quad \tau=\frac{1}{M},\ m=\overline{0,M-1}$

$\omega^{h\tau} = \omega^h \times \omega^\tau$

Приведём исходное ур-е к див. виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0$$

введём сеточную ф-цию $y_n^m = u(x_n, t_m)$

Разностная схема имеет вид:

$$\frac{y_{n+1}^{m+1} - y_{n+1}^{m} + y_n^{m+1} - y_n^m}{2\tau} + \frac{y_{n+1}^{2\,m+1} - y_n^{2\,m+1} + y_{n+1}^{2\,m} - y_n^{2\,m}}{4h} = 0$$

Н.у. и Г.у.

$$\begin{cases} y_n^0 = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(x_n - 2) + 2 \\ y_0^m = \left(2 - \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} 2\right) e^{-t_m} \end{cases}$$

Исследование аппроксимации

Говорят, что разностный оператор L_h с точностью аппроксимирует дифф. оператор L с точностью порядка k, если

$$\| L u_n^m - L_h u_n^m \| \leq C(h^k + \tau^k), \quad u_n^m = u(x_n, t_m)$$

$$L_h u_n^m = \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_{n+1}^{m} + u_n^{m+1} - u_n^m}{2\tau} + \frac{u_{n+1}^{2\,m+1} - u_n^{2\,m+1} + u_{n+1}^{2\,m} - u_n^{2\,m}}{4h}$$

Разложим ф-цию u в ряд Тейлора до 3-его порядка в окр. т. $(x_n + \frac{h}{2}; t_m + \frac{\tau}{2})$

$$u_{n+1}^{m+1}=u_{n+0,5}^{m+0,5}+\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)u_{n+0,5}^{m+0,5}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2u_{n+0,5}^{m+0,5}+$$
$$+\frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3u_{n+0,5}^{m+0,5}+\bar{\bar{o}}(h+\tau)^3$$

$$u_{n+1}^{m}=u_{n+0,5}^{m+0,5}+\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)u_{n+0,5}^{m+0,5}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2u_{n+0,5}^{m+0,5}+$$
$$+\frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3u_{n+0,5}^{m+0,5}+\bar{\bar{o}}(h+\tau)^3$$

$$u_{n}^{m+1}=u_{n+0,5}^{m+0,5}+\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)u_{n+0,5}^{m+0,5}+\frac{1}{2}\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2u_{n+0,5}^{m+0,5}+$$
$$+\frac{1}{6}\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3u_{n+0,5}^{m+0,5}+\bar{\bar{o}}(h+\tau)^3$$

$$u_{n}^{m}=u_{n+0,5}^{m+0,5}+\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)u_{n+0,5}^{m+0,5}+\frac{1}{2}\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2u_{n+0,5}^{m+0,5}+$$
$$+\frac{1}{6}\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3u_{n+0,5}^{m+0,5}+\bar{\bar{o}}(h+\tau)^3$$

$$u_{n+1}^{2\,m+1}=u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+$$
$$+\frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\bar{\bar{o}}(h+\tau)^3$$

$$u_{n+1}^{2\,m}=u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+$$
$$+\frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\bar{\bar{o}}(h+\tau)^3$$

$$u_{n}^{2\,m+1}=u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\frac{1}{2}\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+$$
$$+\frac{1}{6}\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\bar{\bar{o}}(h+\tau)^3$$

$$u_{m}^{2\,m}=u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\frac{1}{2}\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+$$
$$+\frac{1}{6}\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\bar{\bar{o}}(h+\tau)^3$$

$$L_h u_n^m=\frac{2\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)u_{n+0,5}^{m+0,5}-2\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)u_{n+0,5}^{m+0,5}}{2\tau}+$$
$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3u_{n+0,5}^{m+0,5}-\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3u_{n+0,5}^{m+0,5}}{2\tau}+$$
$$+\frac{2\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\cancel{\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}}\right)u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+2\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\cancel{\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}}\right)u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}}{4h}+$$
$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}}{4h}+\bar{\bar{o}}(h+\tau)^2=$$

$$= \frac{2\tau \frac{\partial}{\partial t} u_{n+0,5}^{m+0,5} + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 + 3\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right) + \cancel{3\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2} + \left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3\right] u_{n+0,5}^{m+0,5}}{2\tau} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{3}\left[-\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 + 3\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right) - \cancel{3\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2} + \left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3\right] u_{n+0,5}^{m+0,5}}{2\tau} +$$

$$+ \frac{2h\frac{\partial}{\partial x} u_{n+0,5}^{2\,m+0,5} + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 + 3\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right) + 3\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \cancel{\left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3}\right] u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}}{4h} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 - 3\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right) + 3\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \cancel{\left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3}\right] u_{n+0,5}^{2\,m+0,5}}{4h} \cancel{= \bar{o}(h+\tau)^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} u_{n+0,5}^{m+0,5} + u_{n+0,5}^{m+0,5}\frac{\partial}{\partial x} u_{n+0,5}^{m+0,5} + \frac{\tau^2}{24}\frac{\partial^3}{\partial t^3} u_{n+0,5}^{m+0,5} + \frac{h^2}{8}\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} u_{n+0,5}^{m+0,5} +$$

$$+ \frac{1}{6h}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 u_{n+0,5}^{2\,m+0,5} + \frac{1}{2h}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u_{n+0,5}^{2\,m+0,5} + \bar{o}(h+\tau)^2 =$$

$$= L u_{n+0,5}^{m+0,5} + \frac{\tau^2}{24}\frac{\partial^3}{\partial t^3} u_{n+0,5}^{m+0,5} + \frac{h^2}{8}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t} u_{n+0,5}^{m+0,5} + \frac{h^2}{24}\left(3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + \frac{\tau^2}{8}\left(2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2u\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}\right) + \bar{o}(h+\tau)^2$$

$\|L u_n^m - L_h u_n^m\| \leq \tau^2 C_1 + h^2 C_2$ => схема имеет второй порядок аппроксимации

Исследование устойчивости

Используя принцип замороженных коэффиц., зафикс. коэф. перед $\frac{\partial u}{\partial x}$. Разностная схема примет вид

$$\frac{y_{n+1}^{m+1} - y_{n+1}^{m} + y_n^{m+1} - y_n^m}{2\tau} + C\,\frac{y_{n+1}^{m+1} - y_n^{m+1} + y_{n+1}^{m} - y_n^m}{4h} = \varepsilon_n^m \quad | \cdot 2\tau$$

ε_n^m – некоторые возмущения

$$y_{n+1}^{m+1}\left(1 + \frac{C\tau}{h}\right) + y_n^{m+1}\left(1 - \frac{C\tau}{h}\right) = y_{n+1}^m\left(1 - \frac{C\tau}{h}\right) + y_n^m\left(1 + \frac{C\tau}{h}\right) + 2\tau\varepsilon_n^m$$

$$\|y^{m+1}\|\left(1 + \cancel{\frac{C\tau}{h}}\right) + \|y^{m+1}\|\left(1 - \cancel{\frac{C\tau}{h}}\right) \leq \|y^m\|\left(1 - \cancel{\frac{C\tau}{h}}\right) + \|y^m\|\left(1 + \cancel{\frac{C\tau}{h}}\right) + 2\tau\|\varepsilon_n^m\|$$

$$\|y^{m+1}\| \leq \|y^m\| + \tau\|\varepsilon^m\|$$

$$\begin{cases} y_n^0 = \varphi_n \\ y_0^m = \psi_m \end{cases} \quad \text{н.у. и г.у.}$$

$\|y^m\| \leq \|\varphi\| + \tau m\|\varepsilon\|$

$\tau n\|\varepsilon\| \leq T\|\varepsilon\|$ T – длина отр. по вр.

$\|y\| \leq \|\varphi\| + T\|\varepsilon\| \Rightarrow$ схема устойчива

Алгоритм расчёта

Задачу будем решать при помощи схемы бегущего счёта. Найдём значение сеточной ф-ции y_{n+1}^{m+1}, зная решение в точках $y_{n+1}^{m}, y_{n}^{m+1}, y_{n}^{m}$. (значения в т. y_1^0, y_0^1, y_0^0 известны из начальных и граничных условий)

$$f(y_{n+1}^{m+1}) = \frac{1}{4h} y_{n+1}^{m+1} + \frac{1}{2\tau} y_{n+1}^{m+1} + \frac{y_n^{m+1} - y_n^{m} - y_{n+1}^{m}}{2\tau} +$$

$$+ \frac{y_{n+1}^{2m} - y_n^{2m} - y_n^{2m+1}}{4h} = 0$$

Пусть известно нек. прибл. $y_{n+1}^{m+1(s)}$ к корню y_{n+1}^{m+1}

Тогда $f(y_{n+1}^{m+1(s)} + \Delta y_{n+1}^{m+1(s)}) = 0$ расклад. в ряд

$$f'(y_{n+1}^{m+1(s)})\,\Delta y_{n+1}^{m+1(s)} = -f(y_{n+1}^{m+1(s)})$$

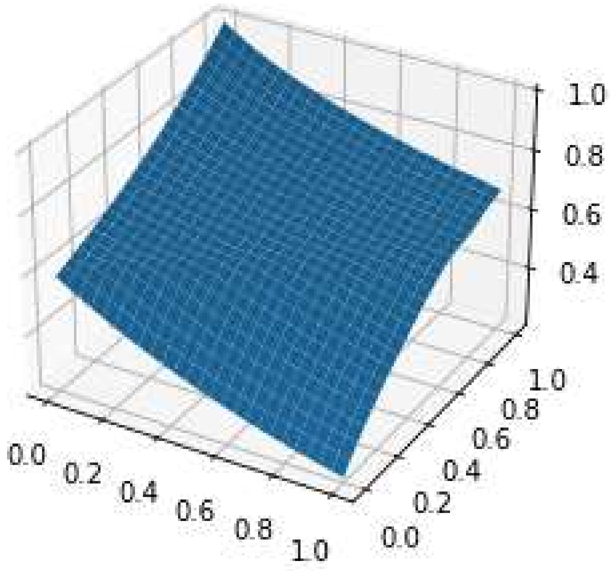
$$y_{n+1}^{m+1(s+1)} = y_{n+1}^{m+1(s)} - \frac{f(y_{n+1}^{m+1})}{f'(y_{n+1}^{m+1(s)})}$$

Процесс останав. по достижении точности

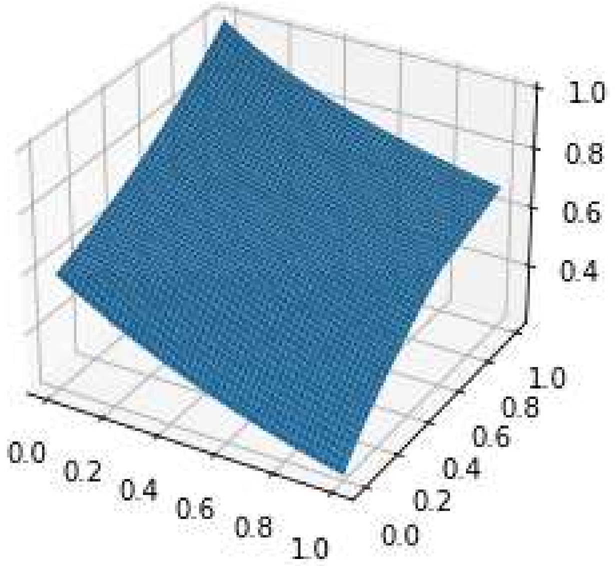
$$|\Delta y_{n+1}^{m+1(s)}| < \varepsilon$$

Далее был произведен расчет на 4 различных сетках с количеством шагов (N=25, M=25), (N=50, M=50), (N=100, M=100), (N=200, M=200)

Решение при N=25, M=25



Решение при N=200, M=200



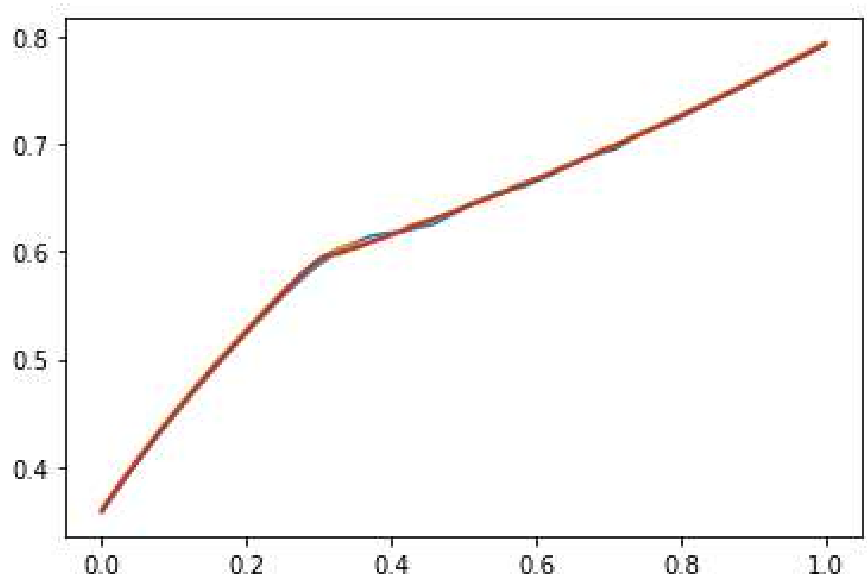
Также были проверено выполнение начального и граничного условий на последней сетке. Они выполняются.

Разность значений начального и граничного условий с значением функции на границах области:

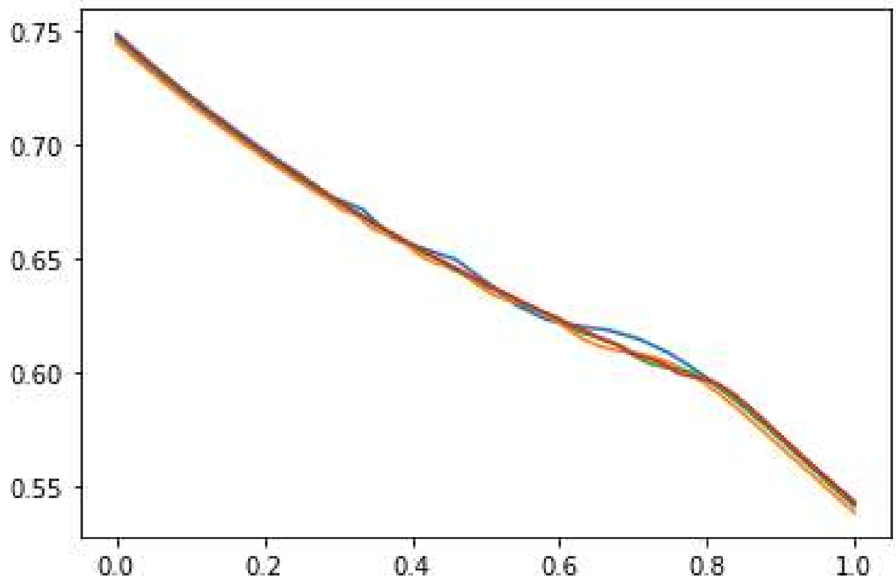
```
[0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
[0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
```

Сходимость

u(x) при t=0.5



u(t) при x=0.5



Код программы

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt


N, M = 25, 25   #количество шагов по x,t

X, T = 1., 1.   #границы расчета

t0 = 0.5        #точки, в которых проверяется сходимость

x0 = 0.5

def solve(N,M,X,T):

   h = X/(N-1)    #шаг по  x,t

   tau = T/(M-1)

   eps=0.0001     #невязка


   u = np.zeros((N,M),dtype=float)  #сетка

   x = np.linspace(0,X,N)

   t = np.linspace(0,T,M)


   u[:,0] = 4/np.pi * np.arctan(x-2) + 2         #начальные и граничные условия

   u[0,:] = (2 - 4/np.pi * np.arctan(2))*np.exp(-t)


   def f(x11,x10,x01,x00):   #разностная схема

      return (x11-x10)/2/tau + (x10**2-x00**2)/4/h + (x01-x00)/2/tau + (x11**2-x01**2)/4/h


   def df(x11):

      return 1/2/tau + x11/2/h


   def step(x10,x01,x00):    #схема бегущего счета

      y1 = x00

      d = eps + 1

      while (d > eps):

         y0=y1

         y1 = y0 - f(y0,x10,x01,x00)/df(y0)
```

```
        d = abs(y1-y0)
      return y1

    for i in range(1,N):
      for j in range (1,M):
        u[i,j] = step(u[i,j-1],u[i-1,j],u[i-1,j-1])
    return u,x,t,h,tau

u1,x1,t1,h1,tau1 = solve(N,M,X,T)
u2,x2,t2,h2,tau2 = solve(2*N,2*M,X,T)
u3,x3,t3,h3,tau3 = solve(4*N,4*M,X,T)
u4,x4,t4,h4,tau4 = solve(8*N,8*M,X,T)

fig = plt.figure()          #график для N,M
ax = fig.gca(projection='3d')
T1, X1 = np.meshgrid(t1, x1)

#surf = ax.plot_surface(X1, T1, u1)
surf = ax.plot_surface(T1, X1, u1)

fig_ = plt.figure()        #график для 8N.8M
ax_ = fig_.gca(projection='3d')
T4, X4 = np.meshgrid(t4, x4)

surf_ = ax_.plot_surface(T4, X4, u4)

u1_2 = [u1[i,int(t0/tau1)] for i in range(0,N)]   #сходимость
u2_2 = [u2[i,int(t0/tau2)] for i in range(0,2*N)]
u3_2 = [u3[i,int(t0/tau3)] for i in range(0,4*N)]
u4_2 = [u4[i,int(t0/tau4)] for i in range(0,8*N)]
```

```
fig1 = plt.figure()
ax1 = fig1.gca()
ax2 = fig1.gca()
ax3 = fig1.gca()
ax4 = fig1.gca()

surf1 = ax1.plot(x1, u1_2)
surf2 = ax2.plot(x2, u2_2)
surf3 = ax3.plot(x3, u3_2)
surf4 = ax4.plot(x4, u4_2)
plt.show()

u1_0 = [u1[int(x0/h1),i] for i in range(0,M)]    # сходимость
u2_0 = [u2[int(x0/h2),i] for i in range(0,2*M)]
u3_0 = [u3[int(x0/h3),i] for i in range(0,4*M)]
u4_0 = [u4[int(x0/h4),i] for i in range(0,8*M)]



fig2 = plt.figure()
ax11 = fig2.gca()
ax21 = fig2.gca()
ax31 = fig2.gca()
ax41 = fig2.gca()

surf11 = ax11.plot(t1, u1_0)
surf21 = ax21.plot(t2, u2_0)
surf31 = ax31.plot(t3, u3_0)
surf41 = ax41.plot(t4, u4_0)
plt.show()



u4_b = (4/np.pi) * np.arctan(x4-2) + 2        #проверка ну и гу
```

```
u4_g = (2 - 4/np.pi * np.arctan(2))*np.exp(-t4)


print(u4[:,0] - u4_b)

print(u4[0,:] - u4_g)
```