

# Reconstrução de curvas por meio de características robustas extraídas de imagens

André Luís Mendes Fakhoury

[andrefakhoury@usp.br](mailto:andrefakhoury@usp.br)

Orientador: João do Espírito Santo Batista Neto

Vinculado ao Projeto Temático FAPESP: “Mapeamento de características robustas entre diferentes domínios e espaços  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ ”

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC  
Universidade de São Paulo - USP

21 de outubro de 2021

# Sumário

Contextualização

Métodos e procedimentos

Pré-processamento

Curvatura

Reconstrução



Resultados

Conclusão

Referências

# Sumário

Contextualização

Métodos e procedimentos

Pré-processamento

Curvatura

Reconstrução

Resultados

Conclusão

Referências



# Contextualização

- **Mapeamento** de características robustas entre espaços bidimensionais e tridimensionais;
- Simplificação através da **redução** da quantidade de informações.
- **Características robustas:** características de uma superfície que se mantém quando esta se deforma [4].

# Sumário

Contextualização

Métodos e procedimentos

Pré-processamento

Curvatura

Reconstrução



Resultados

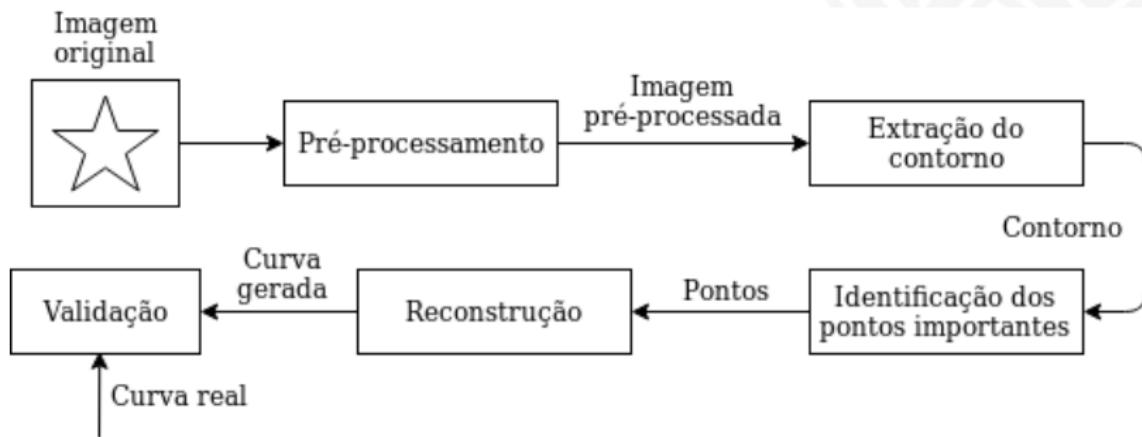
Conclusão

Referências

# Métodos e Procedimentos

## Visão geral

Figura: Diagrama de bloco das etapas de desenvolvimento



# Pré-processamento

## Objetivos:

- Suavizar a imagem
- Remover ruídos

## Técnicas utilizadas:

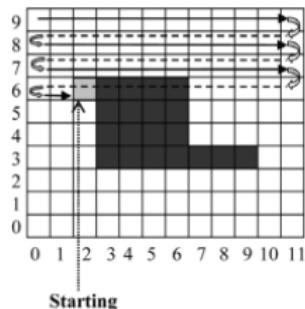
- Filtro gaussiano ou Perona-Malik
- Binarização por Otsu
- Operadores morfológicos (erosão e dilatação)

# Pré-processamento

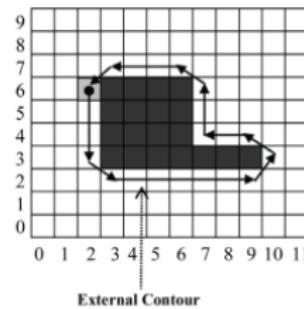
## Extração do contorno:

- Acompanha a borda do objeto, e verifica se seus vizinhos também pertencem ao objeto.

Figura: Método *contour following* [2]



(a)



(b)

# Curvatura

## Curvatura contínua

Seja uma curva regular parametrizada por  $t \rightarrow (x(t), y(t))$ , em que  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções de classe  $C^2$ . Sua curvatura é dada por:

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

# Curvatura discreta

No caso discreto, precisa-se calcular a derivada discreta.

Utilização de **métodos espectrais de Fourier [1]** e **filtro gaussiano** para suavizar e reduzir erros.

# Curvatura discreta

Seja  $u_j$  uma aproximação discreta da função  $u(x)$ , com  $n$  pontos de amostra  $x_j \in h, 2h, \dots, ih, \dots, 2\pi - h, 2\pi$ , onde  $h = 2\pi/n$ . Pode-se aplicar a transformada rápida de Fourier (FFT) em  $u_j$ , tal que  $FFT(u_j) \equiv \hat{u}_k$ , em que  $k \in \frac{-n}{2} + 1, \dots, \frac{n}{2}$ . Sabe-se que:

$$FFT\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) \equiv ik\hat{u}_k$$

Assim, para obter o valor da derivada, basta calcular a transformada rápida inversa IFFT.

# Reconstrução

## Definições

**Modelagem geométrica:** conjunto de técnicas e algoritmos utilizados para modelar determinadas formas matemáticas, sujeitas a condições particulares de forma e suavidade.

Uma forma possível de se modelar é com a utilização do **operador discreto de Laplace-Beltrami** [5].

# Coordenadas diferenciais

Seja uma malha triangular  $\mathcal{M} = (V, E, F)$ . Cada vértice  $\mathbf{v}_i \in V$  possui uma representação cartesiana dada por  $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i, z_i)$ .

**Coordenadas diferenciais** (ou  $\delta$ -coordenadas) de  $\mathbf{v}_i$  são definidas como a diferença entre a coordenada cartesiana e o centro de massa de seus vizinhos imediatos na malha:

$$\delta_i = (\delta_i^{(x)}, \delta_i^{(y)}, \delta_i^{(z)}) = \mathbf{v}_i - \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} \mathbf{v}_j, \quad (1)$$

em que  $N(i) = \{j | (i, j) \in E\}$  e  $d_i = |N(i)|$ .

# Coordenadas diferenciais

Transformação para  $\delta$ -coordenadas

Seja  $A$  a matriz de adjacências da malha:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e  $D$  a matriz diagonal tal que

$$D_{ii} = d_i = |N(i)| = \text{número de vértices adjacentes a } i$$

A matriz  $L$  de transformação de coordenadas cartesianas para as coordenadas diferenciais é:

$$L = I - D^{-1}A. \tag{2}$$

# Coordenadas diferenciais

Transformação para  $\delta$ -coordenadas

É mais comum utilizar a versão simétrica de  $L$ ,  $L_s$ , tal que:

$$L_s = DL = D - A$$

e cada célula pode ser calculada por:

$$(L_s)_{ij} = \begin{cases} d_i & i = j \\ -1 & (i, j) \in E \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3)$$

# Coordenadas diferenciais

Transformação para  $\delta$ -coordenadas

Temos:

$$L_s \mathbf{x} = \delta^{(x)}$$

$$L_s \mathbf{y} = \delta^{(y)}$$

$$L_s \mathbf{z} = \delta^{(z)}$$

e  $L_s$  é denominado **Laplaciano topológico** da malha  $\mathcal{M}$ .

# Coordenadas diferenciais

## Discretização de Laplace-Beltrami

Se considerar  $\mathcal{M}$  uma aproximação linear por partes de uma superfície suave,

$$\delta_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)$$

é uma discretização de

$$\frac{1}{|\gamma|} \int_{v \in \gamma} (v_i - v) dl(v)$$

em que  $\gamma$  é uma curva de uma superfície fechada simples em volta de  $v_i$  e  $|\gamma|$  é o comprimento de  $\gamma$ .

# Coordenadas diferenciais

## Discretização de Laplace-Beltrami

Sabe-se que:

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow 0} \frac{1}{|\gamma|} \int_{v \in \gamma} (v_i - v) dl(v) = -H(v_i) n_i$$

em que  $H(v_i)$  é a curvatura média de  $v_i$  e  $n_i$  é a normal à superfície.

Intuitivamente, as  $\delta$ -coordenadas **encapsulam a forma local da superfície**.

# Vantagens das $\delta$ -coordenadas

- Representam detalhes locais
  - A direção aproxima o vetor normal;
  - A norma aproxima a curvatura média;
- Utilização de matrizes esparsas (economizam tempo/memória computacionalmente).

# Reconstrução de $v_i$

## A partir das $\delta$ -coordenadas

$$L_s \mathbf{x} = \delta^{(x)}$$

- $\delta$ -coordenadas são invariantes à translação;
- $L$  e  $L_s$  são singulares;
- $\mathbf{x} = L_s^{-1} \delta^{(x)}$  é **indefinido**.
- **Solução:** adicionar restrições de quem se conhece a localização.

# Reconstrução de $v_i$

## A partir das $\delta$ -coordenadas

$$L_s \mathbf{x} = \boldsymbol{\delta}^{(x)}$$

- $\text{rank}(L) = n - k$ , em que  $k$  é o número de componentes;
- Fixar vértices  $C = \{1, 2, \dots, m\}$ , em que sabe-se  $\{v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, v_{C_m}\}$ ;
- Ou seja, adicionar restrições  $v_j = c_j$ ,  $j \in C$ ;
- Tornando o sistema *full-rank*.

# Reconstrução de $v_i$

## A partir das $\delta$ -coordenadas

Fixar vértices  $C = \{1, \dots, m\}$  em que sabe-se  $\{v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, v_{C_m}\}$ :

$$\left( \frac{L}{I_{m \times m}|0} \right) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta^{(x)} \\ c_{1:m} \end{pmatrix}$$

E o mesmo para os outros vetores de coordenadas  $\mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$

# Reconstrução de $v_i$

## A partir das $\delta$ -coordenadas

Inicialmente, tem-se:

$$\begin{matrix} L_s \\ \times \end{matrix} = \begin{matrix} \delta(x) \end{matrix}$$

# Reconstrução de $v_i$

## A partir das $\delta$ -coordenadas

Fixar vértices  $C = \{1, \dots, m\}$  em que sabe-se  $\{v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, v_{C_m}\}$ :

$$\begin{matrix} L_s \\ I_c \end{matrix} \quad x \quad = \quad \begin{matrix} \delta(x) \\ v_C \end{matrix}$$

# Reconstrução de $v_i$

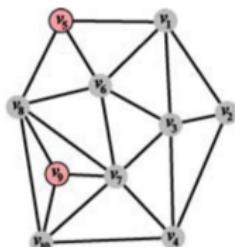
## A partir das $\delta$ -coordenadas

Fixar vértices  $C = \{1, \dots, m\}$  em que sabe-se  $\{v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, v_{C_m}\}$ :

$$\tilde{L} \quad x \quad = \quad \begin{matrix} \delta(x) \\ v_C \end{matrix}$$

# Reconstrução de $v_i$

## A partir das $\delta$ -coordenadas



The mesh

4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	3	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	5	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	4	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	3	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	4	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	6	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	6	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	3
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	4

The symmetric Laplacian  $L_s$ 

4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	3	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	5	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	4	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	3	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	4	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	6	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	6	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	3
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	4

Invertible Laplacian

4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	3	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	5	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	4	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	3	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	4	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	6	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	6	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	3
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	4

2-anchor  $\tilde{L}$ Figura: Exemplo da matriz  $\tilde{L}$  [5]

# Aplicações

## Representação eficiente de formas

Com apenas informações de conectividade da malha e alguns pontos fixados (denominados vértices âncora), é possível aproximar toda a geometria, a partir da resolução do sistema pelo método dos mínimos quadrados:

$$\left( \frac{L}{\omega I_{m \times m} |0} \right) \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega c_{1:m}^{(x)} \end{pmatrix} \quad (4)$$

em que  $c = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  são os pontos âncora escolhidos como amostra, e  $\omega > 0$  é o peso de cada restrição).

# Aplicações

## Representação eficiente de formas

Graficamente, para facilitar a visualização, este sistema matricial também pode ser visto deste jeito:

$$\begin{matrix} \tilde{L} & X & = & 0 \\ & & & \\ & & & v_c \end{matrix}$$

# Aplicações

## Representação eficiente de formas

Em vez de  $\delta^{(x)}$  do lado direito, informa-se 0 nas coordenadas em que não sabe a localização.

Estas localizações serão calculadas por informações das malhas, descritas na matriz  $\tilde{L}$ .

Por isso, é importante que se tenha conhecimento de informações de conectividade da malha em análise.

# Sumário

Contextualização

Métodos e procedimentos

Pré-processamento

Curvatura

Reconstrução



Resultados

Conclusão

Referências

# Resultados

- Imagens de folhas do repositório ImageCLEF (2011) [3];
- Curvas em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ ;
- Malhas poligonais.

# Resultados

## Cálculo do erro (distância euclidiana):

Para cada vértice  $i$ , o erro dos pontos obtidos  $\mathbf{v}'$  em relação aos pontos originais  $\mathbf{v}$  é:

$$E_i(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \sqrt{(\mathbf{v}_i^{(x)} - \mathbf{v}'_i^{(x)})^2 + (\mathbf{v}_i^{(y)} - \mathbf{v}'_i^{(y)})^2}$$

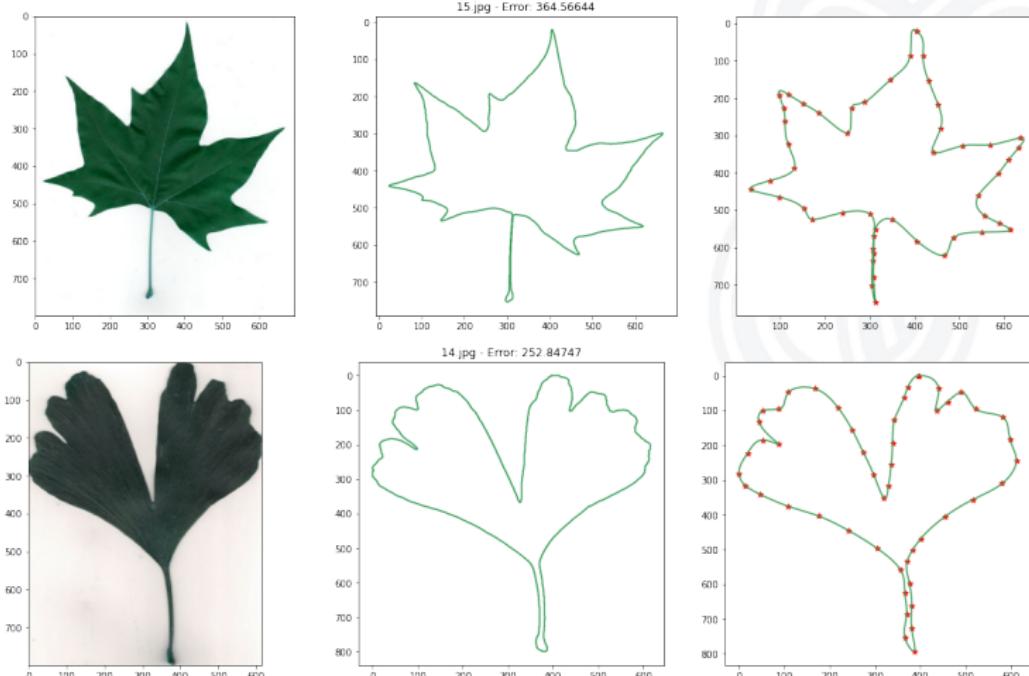
e o erro total da reconstrução é calculado como a soma do erro para cada ponto:

$$E(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \sum_{i=1}^{|V|} E_i(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$$

# Resultados

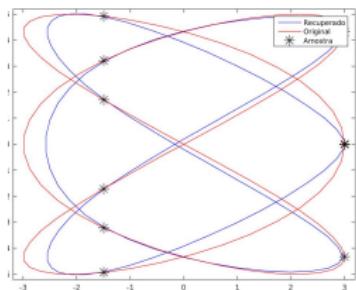
Imagens do banco de dados ImageCLEF (2011) [3]

Figura: Reconstrução em imagens de folhas.

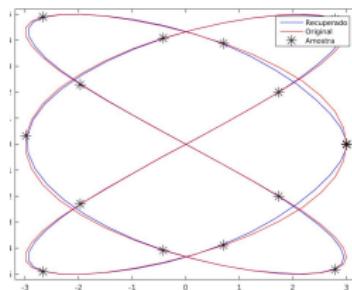


# Resultados

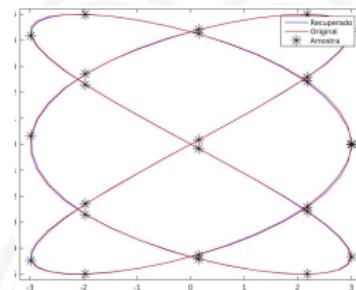
Curvas em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$



(a) 10 pontos



(b) 15 pontos



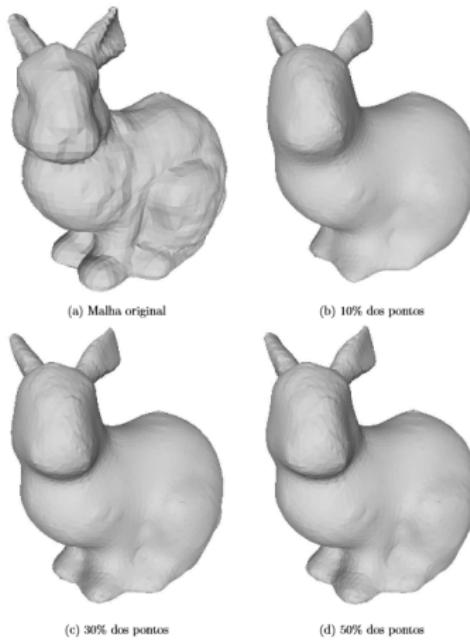
(c) 25 pontos

**Figura:** Representação da função paramétrica  $(x(t), y(t)) = (3\cos(3t), 5\sin(2t))$  utilizando alguns pontos igualmente espaçados como amostra.

# Resultados

## Malhas 3D

Figura: Representação da malha de um coelho



# Sumário

Contextualização

Métodos e procedimentos

Pré-processamento

Curvatura

Reconstrução

Resultados

Conclusão

Referências



# Conclusão

A utilização do **operador discreto de Laplace-Beltrami**:

- Permite boa reconstrução, se forem utilizados pontos âncora suficientes e escolhidos de maneira correta;
- Alguns detalhes da malha original podem se perder, pois não serão considerados pelo algoritmo.

# Sumário

Contextualização

Métodos e procedimentos

Pré-processamento

Curvatura

Reconstrução

Resultados

Conclusão

Referências



# Referência Bibliográfica I

-  C. BRETHERTON, *The fourier spectral method*, 2019.
-  L. DA FONTOURA COSTA AND R. M. C. JR, *Shape Classification and Analysis*, CRC Press, Boca Raton, 2 ed., 2009.
-  IMAGECLEF, 2011.
-  S. IZUMIYA, M. D. C. R. FUSTER, M. A. S. RUAS, AND F. TARI, *Differential Geometry From A Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific, Singapura, 2015.
-  O. SORKINE, *Differential representations for mesh processing*, Computer Graphics Forum, 25 (2006), pp. 789–807.