

# Modelagem com o operador discreto de Laplace-Beltrami

André Luís Mendes Fakhoury

[andrefakhoury@usp.br](mailto:andrefakhoury@usp.br)

Orientador: João do Espírito Santo Batista Neto

Vinculado ao projeto: “Mapeamento de características robustas entre diferentes domínios e espaços  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ ”

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC  
Universidade de São Paulo - USP

10 de dezembro de 2020

# Sumário

Modelagem geométrica

Definições

Utilidades

Curvatura discreta

Referências



# Sumário

[Modelagem geométrica](#)

[Definições](#)

[Utilidades](#)

[Curvatura discreta](#)

[Referências](#)



# Modelagem geométrica

## Introdução

**Modelagem geométrica:** conjunto de técnicas e algoritmos utilizados para modelar determinadas formas matemáticas, sujeitas a condições particulares de forma e suavidade.

Uma forma possível de se modelar é com a utilização do **operador discreto de Laplace-Beltrami**.

# Modelagem geométrica

## Operador discreto de Laplace-Beltrami

Dois principais métodos de se realizar [5]:

- baseados em malha (*mesh-based*)
- baseados em ponto (*point-based*)



# Modelagem geométrica

## Operador discreto de Laplace-Beltrami

Dois principais métodos de se realizar [5]:

- **baseados em malha (mesh-based)**
- baseados em ponto (*point-based*)



# Sumário



Modelagem geométrica

Definições

Utilidades

Curvatura discreta

Referências

# Definições

Artigo referenciado:

**O. Sorkine**, *Differential representations for mesh processing*, Computer Graphics Forum, (2006) [9].

# Coordenadas diferenciais

Seja uma malha triangular  $\mathcal{M} = (V, E, F)$ . Cada vértice  $v_i \in V$  possui uma representação cartesiana dada por  $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ .

**Coordenadas diferenciais** (ou  $\delta$ -coordenadas) de  $v_i$  são definidas como a diferença entre a coordenada cartesiana e o centro de massa de seus vizinhos imediatos na malha:

$$\delta_i = (\delta_i^{(x)}, \delta_i^{(y)}, \delta_i^{(z)}) = v_i - \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} v_j, \quad (1)$$

em que  $N(i) = \{j | (i, j) \in E\}$  e  $d_i = |N(i)|$ .

# Coordenadas diferenciais

Transformação para  $\delta$ -coordenadas

Seja  $A$  a matriz de adjacências da malha:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e  $D$  a matriz diagonal tal que

$$D_{ii} = d_i = |N(i)| = \text{número de vértices adjacentes a } i$$

A matriz  $L$  de transformação de coordenadas cartesianas para as coordenadas diferenciais é:

$$L = I - D^{-1}A. \tag{2}$$

# Coordenadas diferenciais

Transformação para  $\delta$ -coordenadas

É mais comum utilizar a versão simétrica de  $L$ ,  $L_s$ , tal que:

$$L_s = DL = D - A$$

e cada célula pode ser calculada por:

$$(L_s)_{ij} = \begin{cases} d_i & i = j \\ -1 & (i, j) \in E \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3)$$

# Coordenadas diferenciais

Transformação para  $\delta$ -coordenadas

Temos:

$$L_s \mathbf{x} = \delta^{(x)}$$

$$L_s \mathbf{y} = \delta^{(y)}$$

$$L_s \mathbf{z} = \delta^{(z)}$$

e  $L_s$  é denominado **Laplaciano topológico** da malha  $\mathcal{M}$ .

# Coordenadas diferenciais

## Discretização de Laplace-Beltrami

Se considerar  $\mathcal{M}$  uma aproximação linear por partes de uma superfície suave,

$$\delta_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} (v_i - v_j)$$

é uma discretização de

$$\frac{1}{|\gamma|} \int_{v \in \gamma} (v_i - v) dI(v)$$

em que  $\gamma$  é uma curva de uma superfície fechada simples em volta de  $v_i$  e  $|\gamma|$  é o comprimento de  $\gamma$ .

# Coordenadas diferenciais

## Discretização de Laplace-Beltrami

Sabe-se que:

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow 0} \frac{1}{|\gamma|} \int_{v \in \gamma} (v_i - v) dl(v) = -H(v_i) n_i$$

em que  $H(v_i)$  é a curvatura média de  $v_i$  e  $n_i$  é a normal à superfície.

Intuitivamente, as  $\delta$ -coordenadas **encapsulam a forma local da superfície**.

# Reconstrução de $v_i$

## A partir das $\delta$ -coordenadas

$$L_s \mathbf{x} = \delta^{(x)}$$

- $\delta$ -coordenadas são invariantes à translação;
- $L$  e  $L_s$  são singulares;
- $\mathbf{x} = L_s^{-1} \delta^{(x)}$  é **indefinido**.
- **Solução:** adicionar restrições de quem se conhece a localização.

# Reconstrução de $v_i$

## A partir das $\delta$ -coordenadas

$$L_s \mathbf{x} = \delta^{(x)}$$

- $\text{rank}(L) = n - k$ , em que  $k$  é o número de componentes;
- Fixar vértices  $C = \{1, 2, \dots, m\}$ , em que sabe-se  $\{v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, v_{C_m}\}$ ;
- Ou seja, adicionar restrições  $v_j = c_j$ ,  $j \in C$ ;
- Tornando o sistema *full-rank*.

# Reconstrução de $v_i$

## A partir das $\delta$ -coordenadas

Fixar vértices  $C = \{1, \dots, m\}$  em que sabe-se  $\{v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, v_{C_m}\}$ :

$$\left( \frac{\mathcal{L}}{I_{m \times m}|0} \right) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta^{(x)} \\ c_{1:m} \end{pmatrix}$$

# Reconstrução de $v_i$

## A partir das $\delta$ -coordenadas

Inicialmente, tem-se:

$$\begin{matrix} L_s \\ \times \end{matrix} = \begin{matrix} \delta(x) \end{matrix}$$

# Reconstrução de $v_i$

## A partir das $\delta$ -coordenadas

Fixar vértices  $C = \{1, \dots, m\}$  em que sabe-se  $\{v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, v_{C_m}\}$ :

$$\begin{matrix} L_s \\ I_c \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} \delta(x) \\ v_C \end{matrix}$$

# Reconstrução de $v_i$

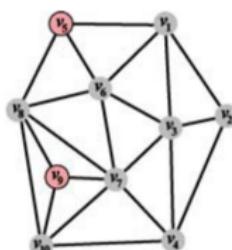
## A partir das $\delta$ -coordenadas

Fixar vértices  $C = \{1, \dots, m\}$  em que sabe-se  $\{v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, v_{C_m}\}$ :

$$\tilde{L} \quad x = \begin{matrix} \delta(x) \\ v_C \end{matrix}$$

# Reconstrução de $v_i$

A partir das  $\delta$ -coordenadas



The mesh

4	-1	-1	-1	-1
-1	3	-1	-1	
-1	-1	5	-1	-1
-1	-1	4		-1
			3	-1
-1	-1		4	-1
		-1	-1	-1
-1	-1		6	-1
		-1	-1	-1
			-1	3
			-1	-1

The symmetric Laplacian  $L_s$

4	-1	-1		-1
-1	3	-1	-1	
-1	-1	5	-1	-1
-1	-1	4		-1
			3	-1
-1	-1		4	-1
		-1	-1	-1
-1	-1		6	-1
		-1	-1	-1
			-1	3
			-1	-1

Invertible Laplacian

4	-1	-1	-1	-1
-1	3	-1	-1	
-1	-1	5	-1	-1
-1	-1	4		-1
			3	-1
-1	-1		4	-1
		-1	-1	-1
-1	-1		6	-1
		-1	-1	-1
			-1	3
			-1	-1

2-anchor  $\tilde{L}$

Figura: Exemplo da matriz  $\tilde{L}$  [9]

# Sumário

Modelagem geométrica

Definições

Utilidades

Curvatura discreta

Referências



# Utilidades

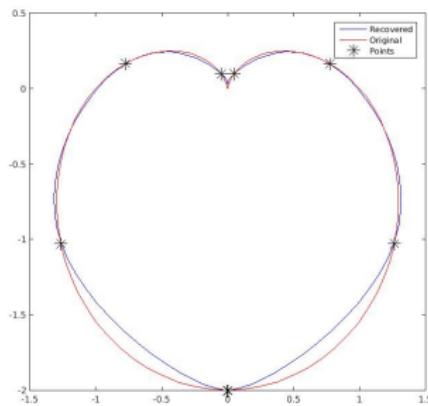
## Representação eficiente de formas

Se utilizada uma boa base para representação, é necessária apenas uma parcela da função de base para representar toda a geometria.

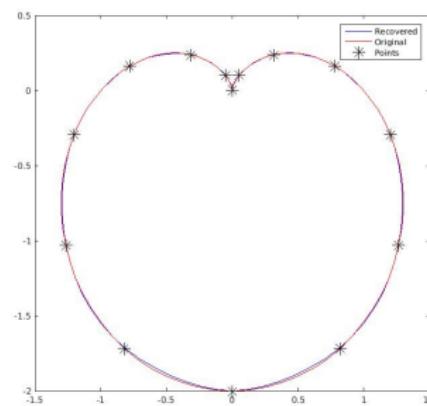
$$\tilde{L} \quad x = \begin{matrix} 0 \\ v_c \end{matrix}$$

# Utilidades

## Representação eficiente de formas



(a) 8 pontos

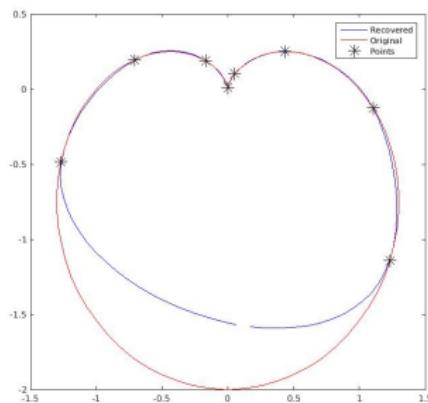


(b) 15 pontos

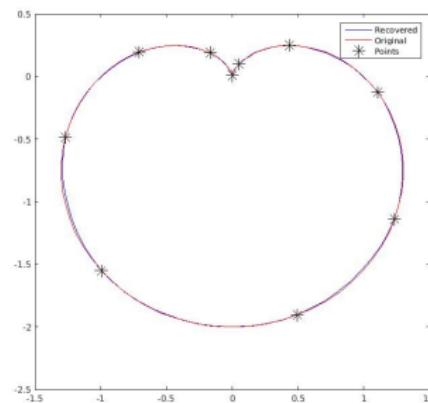
**Figura:** Reconstrução de cardioides utilizando pontos igualmente espaçados.

# Utilidades

## Representação eficiente de formas



(a) 8 pontos



(b) 10 pontos

**Figura:** Reconstrução de cardioides utilizando pontos com maior curvatura.

# Utilidades

## Edição de malha e interpolação

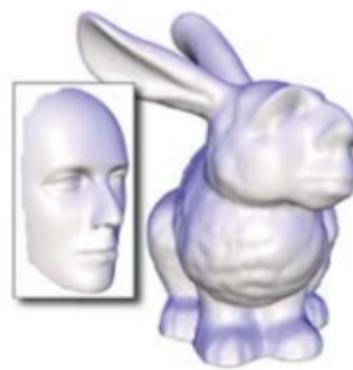


original



edited

(a) Edição de malhas



(b) Interpolação de malhas

Figura: Exemplos de edição e interpolação [9]

# Sumário

Modelagem geométrica

Definições

Utilidades

Curvatura discreta

Referências



# Curvatura

## Curvatura contínua

Seja uma curva regular parametrizada por  $t \rightarrow (x(t), y(t))$ , em que  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções de classe  $C^2$ . Sua curvatura é dada por:

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

# Curvatura discreta

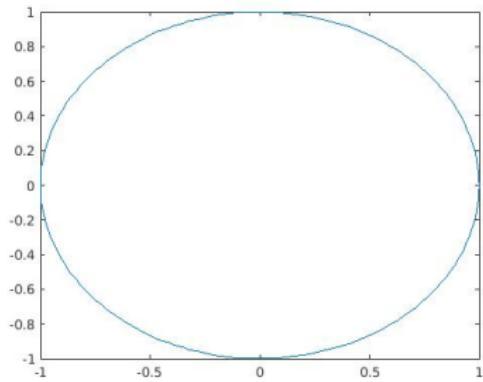
Curvatura contínua

No caso discreto, precisa-se calcular a derivada discreta.

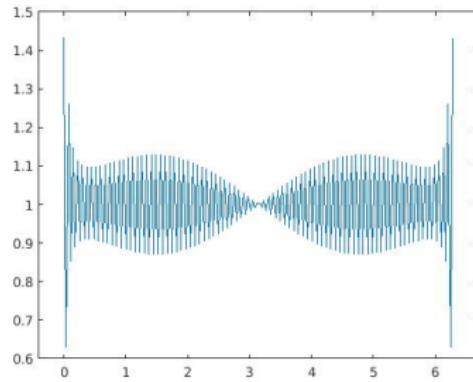
Utilização de **filtro gaussiano** para suavizar e reduzir erros.

# Curvatura discreta

## Curvatura contínua



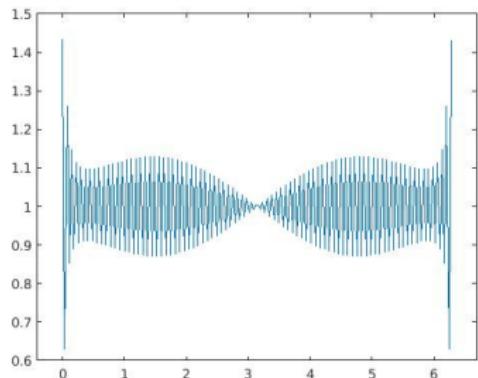
(a) Curva original



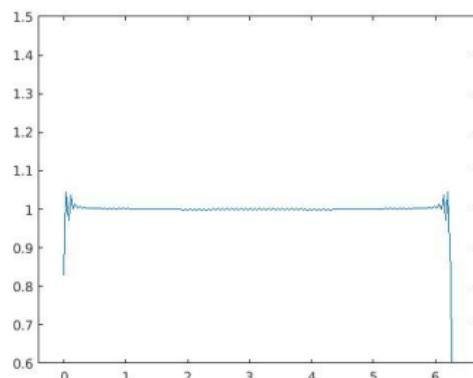
(b) Curvatura obtida

# Curvatura discreta

Convolução para filtrar ruídos



(a) Curvatura calculada



(b) Curvatura com convolução (média dos 4 vizinhos mais próximos)

# Sumário

Modelagem geométrica

Definições

Utilidades

Curvatura discreta

Referências



# Referência Bibliográfica I

-  M. AGOSTON, *Computer graphics and geometric modeling*, Springer-Verlag, London, 2005.
-  H. HAGEN AND D. ROLLER, *Geometric Modeling: Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
-  C. M. HOFFMANN, *Geometric and Solid Modeling: An Introduction*, Morgan Kaufmann Publishers, 1989.
-  M. MÄNTYLÄ, *An introduction to solid modeling*, Computer Science Press, 1988.
-  F. PETRONETTO, A. PAIVA, E. S. HELOU, D. E. STEWART, AND L. G. NONATO, *Mesh-free discrete laplace–beltrami operator*, Computer Graphics Forum, 32 (2013), pp. 214–226.

# Referência Bibliográfica II

-  U. PINKALL AND K. POLTHIER, *Computing discrete minimal surfaces and their conjugates*, Experimental Mathematics, 2 (1996).
-  F. A. RODRIGUES, *Análise morfológica de imagens*.
-  I. P. SOARES, *Movimento de malhas e remalhamento de malhas superficiais*, PhD thesis, ICMC-USP, São Carlos, 2007.
-  O. SORKINE, *Differential representations for mesh processing*, Computer Graphics Forum, 25 (2006), pp. 789–807.