USP/ICMC/SMA 27/08/2018

Lista 2 de Exercícios - SMA354 Cáculo II

Exercício 1 *Use decomposição em frações parciais para calcular as seguintes integrais indefinidas:*

(a) $\displaystyle\int \frac{16\,x+69}{x^2-x-12}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{3\,x^2-10\,x-60}{x^3+x^2-12\,x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{-3\,x^3+x^2+2\,x+3}{x^4+x^3}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{3\,x^2-5\,x+4}{x^3-x^2+x-1}dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2\,(x+1)^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^3+4\,x^2+6\,x+1}{x^3+x^2+x-3}\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-9}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^4-x^2}dx$

Exercício 2 *Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo-$x$da região do plano-x,y delimitada pelos gráficos das funções $f(x)=x^2$ e $g(x)=\sqrt{x}$.*

Exercício 3 *Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando-se a região*

$$A := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1 \text{ e } x^2\le y\le 1\right\},$$

em torno do eixo-y.

Exercício 4 *As seções transversais de um certo sólido, por planos perpendiculares ao eixo-x, são círculos, cujos diâmetros estão compreendidos entre as curvas no plano-x,y definidas pelas equações $y=x^2$ e $y=8-x^2$. Encontre seu volume.*

Exercício 5 *Para $a>0$ fixado, temos que a base de um certo sólido é o círculo*

$$C \doteq \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le a^2\right\}.$$

Cada seção plana do sólido por planos perpendiculares ao eixo-x é um quadrado com um lado sobre a base do sólido. Calcule o seu volume. Faça o mesmo quando a base desde sólido é o círculo

$$C \doteq \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y+2)^2\le a^2\right\}.$$

Exercício 6 *A base de um certo sólido é a região do plano-x,y delimitada pelo eixo-x, pela curva dada por $y=\operatorname{sen}(x)$ e pelas retas $x=0$ e $x=\pi/2$. Cada seção plana do sólido perpendicular ao eixo-x é um triângulo equilátero com um lado na base do sólido. Encontre o volume do sólido.*

Exercício 7 *Em cada um dos itens abaixo, esboce a região delimitada pelas curvas dadas. Além disso, usando o método das cascas cilíndricas, determine o volume do sólido gerado pela rotação desta região em torno do eixo indicado.*

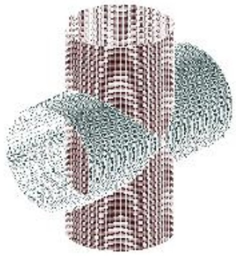
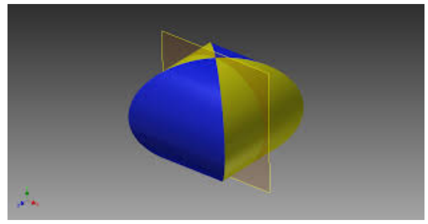
(a) $y=\sqrt{x}\,,x=4\,,y=0$ *e o eixo-y* *(b)* $y=x^2\,,y^2=8\,x$ *e o eixo-y*

(c) $y^3=x\,,y=3,\ x=0$ *e o eixo-x* *(d)* $x^2=4\,y\,,y=4\,,$ *e o eixo-x*

(e) $y=\sqrt{x+4}\,,y=0\,,x=0$ *e o eixo-x* *(f)* $16y=x^2\,,y^2=2\,x$ *e o eixo-y.*

Exercício 8 *Considere uma engrenagem formada por dois cilindros metálicos perpendiculares, ambos de base circular de raio r >0 (figura acima à esquerda). Calcule o volume da parte interna comum aos cilindros (sólido da figura à direita).*

Exercício 9 *A base de um sólido é um triângulo retângulo isósceles cujos lados iguais têm comprimento $a>0$. Além disso, as seções transversais perpendiculares à altura relativa à hipotenusa do triângulo são semicírculos. Determine o volume deste sólido.*

Exercício 10 *Seja R a região do plan-x, y delimitada pela parábola de equação $x = y^2$ e pela reta $x = 9$. Para cada um dos itens abaixo, determine o volume do sólido que tem a região R como base, sabendo-se que a secção relativa ao eixo-x é*
(a) *um quadrado.*
(b) *um retângulo de altura igual a 2.*
(c) *um semicírculo.*
(d) *um quarto de círculo.*
(e) *um triângulo equilátero.*
(f) *um triângulo, cuja altura é igual a 1/4 do comprimento da sua base.*
(g) *um trapézio com base inferior no plano-x, y, cuja base superior tem comprimento igual à metade do comprimento da sua base inferior e o comprimento da altura é igual a 1/4 da sua base inferior.*
(h) *um paralelogramo, com base no plano-x, y e cuja altura é igual a duas vezes o comprimento de sua base.*
(i) *Se a área de tal seção transversal for dada pela expressão abaixo, qual é o volume? Tente fazer um esboço.*

$$A(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x dy.$$

Exercício 11 *Decida quais das integrais impróprias abaixo são convergentes e quais são divergentes:*

(a)	$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$	(b)	$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$	(c)	$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	(d)	$\int_0^\infty e^{2x}dx$
(e)	$\int_0^\infty e^{-2x}$	(f)	$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$	(g)	$\int_1^\infty \frac{1}{s^2+x^2}dx,\ s>0$	(h)	$\int_{-1}^\infty e^{-sx}dx,\ s>0$
(i)	$\int_0^\infty te^{-st}dt,\ s>0$	(j)	$\int_0^\infty e^{-st}\cos t dt,\ s>0$	(k)	$\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$	(l)	$\int_1^\infty \ln x dx$
(m)	$\int_{-\infty}^0 e^{st} sent dt,\ s>0$	(n)	$\int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{1+x^2}dx$	(o)	$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\ln\lvert x\rvert}{x}dx$	(p)	$\int_1^\infty \ln^2 x\, dx.$

Exercício 12 *Verifique para quais valores de α a integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge e para quais diverge.*

Exercício 13 *Determine todos os números naturais n para os quais a integral imprópria $\int_1^\infty x^n \ln x dx$ é convergente.*

Exercício 14 *Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$ definimos $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx$. Identifique quais integrais abaixo convergem e quais divergem.*

$$(a) \int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx \quad (b) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad (c) \int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}dx \quad (d) \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx.$$

Exercício 15 *Se f é contínua em $(x_0, b]$ então* $\displaystyle\int_{x_0}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to x_0^+}\int_a^b f(x)dx$. *De modo análogo, se f é contínua em $[a, x_0)$ então* $\displaystyle\int_a^{x_0} f(x)dx = \lim_{b\to x_0^-}\int_a^b f(x)dx$. *No caso do limite existir dizemos que a integral converge. Com estas definições verifique se as integrais abaixo convergem ou não:*

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ $\quad(b)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ $\quad(c)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad(d)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$ $\quad(f)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2}$.

Exercício 16 *Teste a convergência das integrais abaixo:*

(a) $\displaystyle\int_3^{\infty} e^{-2x}dx$ $\quad(b)$ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^3}$ $\quad(c)$ $\displaystyle\int_8^{\infty} x^{-4/3}dx$ $\quad(d)$ $\displaystyle\int_0^{\infty} senx\ dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}sen\frac{1}{x}dx$ $\quad(f)$ $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{xlnx}$ $\quad(g)$ $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(lnx)^2}dx$ $\quad(h)$ $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x}cosx\ dx$

(i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$ $\quad(j)$ $\displaystyle\int_0^{\infty} |x|cos\,x^2dx$ $\quad(k)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}cosx\,dx$ $\quad(l)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^3}dx$

(m) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4-x^2}dx$ $\quad(n)$ $\displaystyle\int_0^e \ln x dx$ $\quad(o)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+4x+1}{x^4-3x+2}dx$ $\quad(p)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx$

(q) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{2x^2-18}dx$ $\quad(r)$ $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{sen}(x+1)dx$ $\quad(s)$ $\displaystyle\int_0^{\infty} 4x^3e^{-x^4}dx$ $\quad(t)$ $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{cosx}{\sqrt{senx}}dx$

Exercício 17 *Seja $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua, com derivada contínua. Suponha que existam constantes a, $k > 0$ tais que*

$$|f(t)| \le ke^{at}, \text{ para todo } t \in [0,\infty[.$$

Considere a função $L(f)\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$L(f)(s) := \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt, \text{ para todo } t \in [0,\infty[.$$

$L(f)$ *é denominada* transformada de Laplace de f.

(a) *Mostre que a função $L(f)$ está bem definida, isto é, a integral imprópria é convergente para cada $s > a$.*

(b) *Mostre que $L(f')(s) = sL(f)(s) - f(0)$, para $s > 0$.*
Sugestão: use integração por partes.

(c) *Ache a transformada de Laplace das seguintes funções:*
(i) $f(t) := 1$, *para* $t \in \mathbb{R}$.
(ii) $f(t) := t$, *para* $t \in \mathbb{R}$.
(iii) $f(t) := sen(t)$ *para* $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 18 *Sejam dados um número real $s > 0$ e um natural $n \neq 0$. Mostre que*

$$\int_0^{\infty} t^ne^{-st}\ dt = \frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-st}\ dt.$$

Conclua que $\displaystyle\int_0^{\infty} t^ne^{-st}\ dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$. *Esta é a transformada de Laplace da função $f(t) = t^n$.*

Exercício 19 *Use o critério da comparação ou comparação por limite para decidir se as integrais abaixo convergem ou divergem:*

$(a)\quad \int_1^{\infty} \frac{cos^2 x}{1+x^2}dx \qquad (b)\quad \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \qquad (c)\quad \int_{-\infty}^{-2} \frac{1+cosx}{\sqrt{|x|^3}}dx \qquad (d)\quad \int_0^1 \frac{e^{-x^2}-0.05}{x^2}dx$

$(e)\quad \int_1^{\infty} \frac{x}{1+3x-x^7+x^{10}}dx \quad (f)\quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^4+3e^{-x}}dx \quad (g)\quad \int_2^{\infty} \frac{x^3-3x-1}{\sqrt{|x|^7}}dx \quad (h)\quad \int_0^{\infty} \frac{xe^{-x^2}}{cos\,x+2}dx.$