CG - Lista de Exercícios 1

André L. Mendes Fakhoury

2021

Nascimento: Dia 17, Mês 4

1 O que são e por qual motivo utilizar coordenadas homogêneas para especificar transformações geométricas em CG?

Coordenadas homogêneas são um sistema de coordenadas utilizadas em geometria projetiva. Nela, os pontos N-dimensionais são representados como (N+1)-dimensionais - por exemplo, um ponto no $\mathbb{R}^2$ é representado por três dimensões (X, Y, h), em que h é denominado parâmetro homogêneo e $x = X/h, y = Y/h$ (normalmente, em CG, utiliza-se $h = 1$). São utilizadas em CG pois as transformações geométricas podem ser representadas com mais facilidades, e um conjunto de transformações pode ser visto como multiplicações de matrizes.

2 Apresente a matriz que representa uma transformação consistindo de uma translação seguida de uma rotação

Fazendo uma translação $2D$ de t_x, t_y e rotação de ângulo θ, temos que a matriz de transformação M:

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rotação}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{translação}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \cdot t_x - \sin\theta \cdot t_y \\ \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \cdot t_x + \cos\theta \cdot t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Apresenta a matriz que representa uma transformação consistindo de uma translação $t_x = M$ e $t_y = D$, seguida de uma escala uniforme $s = 2$

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{escala}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{translação}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Verifique se $R(M+D)$ irá obter a mesma matriz de transformação do que $R(M) * R(D)$

Calculando inicialmente $R(M + D) = R(21)$

$$\begin{pmatrix} \cos(21) & -\sin(21) & 0 \\ \sin(21) & \cos(21) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

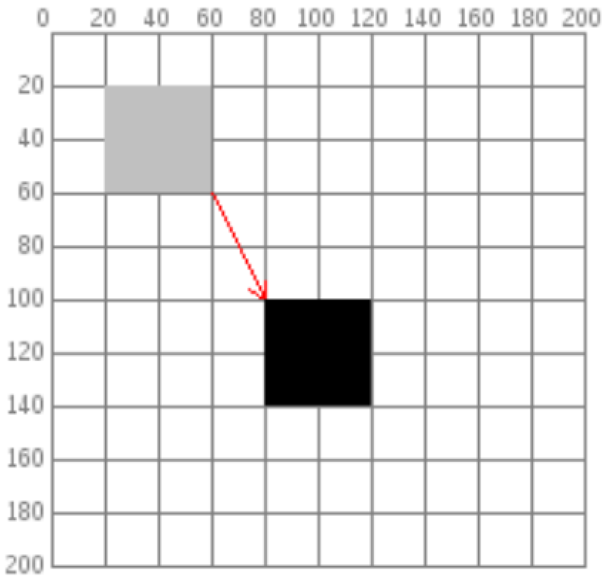
Agora a multiplicação $R(4) * R(17)$:

$$\begin{pmatrix} \cos(4) & -\sin(4) & 0 \\ \sin(4) & \cos(4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(17) & -\sin(17) & 0 \\ \sin(17) & \cos(17) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(4)\cos(17) - \sin(4)\sin(17) & -\cos(4)\sin(17) - \sin(4)\cos(17) & 0 \\ \sin(4)\cos(17) + \cos(4)\sin(17) & \cos(4)\cos(17) - \sin(4)\sin(17) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, como $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$, vemos que as duas matrizes são equivalentes.

5 Forneça a matriz de transformação que realiza a transformação abaixo (a seta indica o objeto inicial e o final após a transformação). Em seguida, apresente as coordenadas do objeto para uma escala uniforme $s = M$.



A figura indica uma translação de $t_x = 60, t_y = 80$. Pode ser indicada pela matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 80 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

As coordenadas do objeto podem ser representadas pelo quadrado $ABCD = (A = (80,100), B = (120,100), C = (120,140), D = (80,140))$. As coordenadas do objeto após uma escala uniforme $s = 4$ serão:

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 360 \\ 400 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480 \\ 400 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ 140 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480 \\ 560 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 140 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 360 \\ 560 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, as novas coordenadas do quadrado são $A'B'C'D' = (A' = (360, 400), B' = (480, 400), C' = (480, 560), D' = (360, 560))$.

6 Abaixo é apresentada a matriz resultante de quatro transformações. Aplique esta transformação em triângulo ABC (A=(0, 0), B = (1, 0), C = (0, 1)) e mostre o resultado (novos vértices e o desenho. Em seguida, faça uma translação $t_x = M/10$ e $t_y = M/10$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Translation by } (3,-2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Rotation through } 53^\circ.13} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Scaling by } 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Shearing by } 0.5} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando a transformação em cada vértice do triângulo, temos:

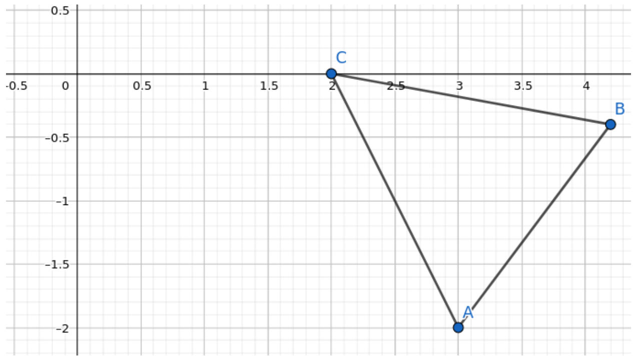
$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.2 \\ -0.4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o novo triângulo tem vértices $(A' = (3, -2), B' = (4.2, -0.4), C' = (2, 0))$:
Fazendo uma translação $t_x = 0.4, t_y = 0.4$, temos:

$$A'' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ -1.6 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$B'' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4.2 \\ -0.4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C'' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 0.4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, os novos vértices serão $(A'' = (3.4, -1.6), B'' = (4.6, 0), C'' = (2.4, 0.4))$.

7 Mostre que a ordem das transformações pode modificar a matriz de transformação resultante (problema da comutatividade). OBS: É suficiente fornecer um exemplo.

Um possível exemplo não comutativo é a transformação de translação em conjunto com escala (escala constante $s_x = s_y = s$). Seja M_1 a matriz resultante de uma escala seguida de translação e M_2 a matriz resultante de uma translação seguida de escala:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 & t_x \\ 0 & s & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 & s \cdot t_x \\ 0 & s & s \cdot t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $M_1 \neq M_2$, as transformações não são comutativas.

8 As transformações de rotação e escala são comutativas entre si?

Seja M_1 a matriz resultante de uma escala seguida de rotação e M_2 a matriz resultante de uma rotação seguida de escala:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot s_x & -\sin\theta \cdot s_y & 0 \\ \sin\theta \cdot s_x & \cos\theta \cdot s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot s_x & -\sin\theta \cdot s_x & 0 \\ \sin\theta \cdot s_y & \cos\theta \cdot s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $M_1 \neq M_2$, não são comutativas. Porém, caso a escala seja uniforme $s_x = s_y$, as transformações são comutativas, pois a matriz de transformação resultante será a mesma.

9 As transformações de translação e escala são comutativas entre si? E entre translação e rotação?

Já foi demonstrado no exercício 7 que as transformações de translação e escala não são comutativas entre si: seja M_1 a matriz resultante de uma escala seguida de translação e M_2 a matriz resultante de uma translação seguida de escala:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 & t_x \\ 0 & s & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 & s \cdot t_x \\ 0 & s & s \cdot t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vemos que $M_1 \neq M_2$, portanto não são comutativas.

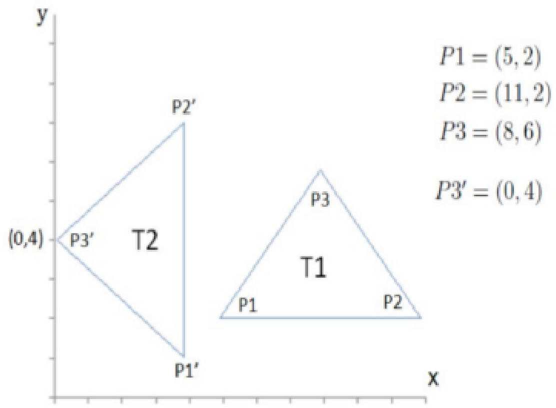
Verifiquemos agora as transformações de translação e rotação: seja M_1 a matriz transformação de rotação seguida de translação e M_2 a matriz transformação de translação seguida de rotação:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \cdot t_x - \sin\theta \cdot t_y \\ \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \cdot t_x + \cos\theta \cdot t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $M_1 \neq M_2$, temos que a transformação de translação e rotação não são comutativas entre si.

10 Forneça a sequência de transformações que leva o triângulo T1 ao triângulo T2 e dê a matriz resultante.



Uma possível sequência de transformações que pode ser aplicada é a translação $t_x = -4, t_y = -6$ seguida de uma rotação em 90°. Outra possibilidade (com um passo a mais) seria realizar anteriormente uma translação do objeto para a origem, para posterior rotação e translação para a posição descrita por $T2$.

$$M = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° & 0 & 0 \\ \sin 90° & \cos 90° & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11 Seja um quadrado de lado $L = 5$, inicialmente posicionado em $x = M$ e $y = D$. Calcule e apresente a matriz de transformação que faça o quadrado rotacionar 45 graus em relação ao seu próprio centro. Apresente os vértices iniciais e finais do quadrado.

O quadrado está posicionado com os vértices $ABCD = (A = (17,4), B = (22,4), C = (22,9), D = (17,9))$.

Para o quadrado rotacionar em torno do seu próprio centro, deve-se aplicar inicialmente uma translação para a origem, realizar a rotação e então realizar a translação de volta para a posição original. Como a origem deve receber o centro do quadrado, realiza-se as operações com relação ao ponto de referência $t_x = 19.5, t_y = 6.5$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x - t_x \cdot \cos\theta + t_y \cdot \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y - t_y \cdot \cos\theta - t_x \cdot \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, como $t_x = 19.5, t_y = 6.5, \theta = 45°$:

$$M = \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 & 10.308 \\ 0.707 & 0.707 & -11.885 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando em cada vértice, temos:

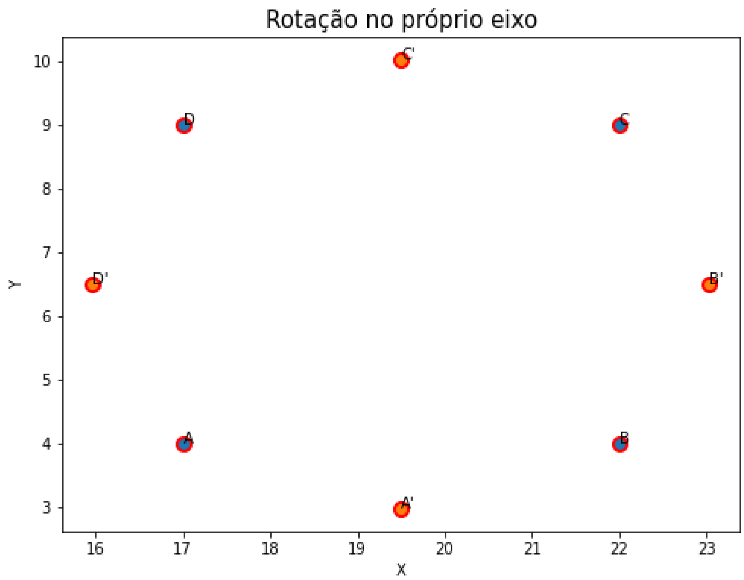
$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 10.308 \\ 0.707 & 0.707 & -11.885 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.5 \\ 2.964 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 10.308 \\ 0.707 & 0.707 & -11.885 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 22 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.036 \\ 6.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 10.308 \\ 0.707 & 0.707 & -11.885 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 22 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.5 \\ 10.036 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 10.308 \\ 0.707 & 0.707 & -11.885 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.964 \\ 6.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Com isso, temos os vértices iniciais $ABCD = (A = (17,4), B = (22,4), C = (22,9), D = (17,9))$ e os vértices finais $A'B'C'D' = (A' = (19.5, 2.964), B' = (23.036, 6.5), C' = (19.5, 10.036), D' = (15.964, 6.5))$. A rotação pode ser vista na seguinte figura:



12 Dado um vértice/ponto posicionado em $x = D$ e $y = M$, apresente as matrizes de transformação para (1) espelhar esse vértice em relação ao eixo X e (2) espelhar esse vértice em relação ao eixo Y.

Seja M_1 a matriz transformação para espelhar em relação ao eixo X e M_2 a matriz transformação para espelhar em relação ao eixo Y:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ou seja, $x' = x$ e $y' = -y$. Como $(x, y) = (17, 4)$, temos que $(x', y') = (17, -4)$.

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ou seja, $x' = -x$ e $y' = y$. Como $(x, y) = (17, 4)$, temos que $(x', y') = (-17, 4)$.