CG - Lista de Exercícios 2

André L. Mendes Fakhoury

2021

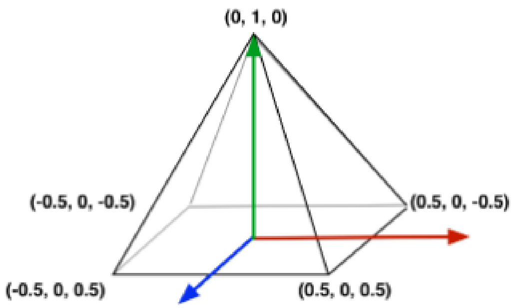
Nascimento: Dia $D = 17$, Mês $M = 4$

1 As matrizes Model, View e Projection utilizam transformações geométricas 3D para compor as coordenadas de mundo, visão e clip. Esse processo também é chamado de pipeline do Viewing 3D. Escreva, com suas palavras, a função de cada etapa do pipeline.

Originalmente, os objetos estão em seu espaço original, denominado espaço local (por exemplo, podemos fixar a localização de cada objeto para ficar centrado na origem). Então é aplicada a matriz Model, para realizar as transformações (escala, translação, rotação, ...) para o denominado espaço Mundo. A partir disso, é aplicada a matriz View para delimitar o que o observador enxerga da cena, e depois disso é aplicada a matriz Projection, para dar as noções de projeção. Como utiliza-se as coordenadas homogêneas, a posição final de cada vértice dos objetos é descrita como:

$$P' = \text{Projection} \cdot \text{View} \cdot \text{Model} \cdot P$$

Para a resolução dos exercícios 2, 3, 4 e 5 considere a seguinte pirâmide, em seu espaço de coordenadas local.



---

2 Apresente a matriz Model para transladar a pirâmide '-M' no eixo z, ou seja, para posicionar a pirâmide mais ao "fundo" no espaço de mundo. Apresente as coordenadas da pirâmide no espaço de mundo.

A matriz translação é a seguinte:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como iremos transladar apenas -4 no eixo-z, temos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando em cada vértice da imagem:

$$V_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -4.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -4.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_4' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ -4.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_5' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ -4.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E estes $V_i', i \in \{1,2,3,4,5\}$, são as coordenadas no espaço mundo.

3 Apresente uma matriz View, com parâmetros definidos por você, e as coordenadas da pirâmide no espaço de Visão.

Uma possível matriz View pode ser definida com os seguintes parâmetros:

camera_pos = P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 5)
camera_target = $\vec{T}$ = (0, 0, 0)
camera_up = $\vec{V}$ = (0, 1, 0)

Com estes parâmetros, temos os vetores u, v e n para definir a matriz de rotação, e a posição da câmera para a matriz de translação.

$$\vec{n} = \frac{P_0 - \vec{T}}{||P_0 - \vec{T}||} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{V} \times \vec{n}}{||\vec{V} \times \vec{n}||} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{u} = (0, 1, 0)$$

Estas duas matrizes multiplicadas irão formar a matriz View:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z & -u \cdot P_0 \\ v_x & v_y & v_z & -v \cdot P_0 \\ n_x & n_y & n_z & -n \cdot P_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{View}}$$

Que, aplicada aos parâmetros acima definidos, é:

$$\text{View} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Após multiplicar a matriz View por cada ponto da pirâmide, temos:

$$V_1' = \text{View} \cdot V_1 = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ -5.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

$$V_2' = \text{View} \cdot V_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.0 \\ -5.5 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

$$V_3' = \text{View} \cdot V_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.0 \\ -4.5 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

$$V_4' = \text{View} \cdot V_4 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.0 \\ -4.5 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

$$V_5' = \text{View} \cdot V_5 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.0 \\ -5.5 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

E estes pontos V_i', para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, são os vértices da pirâmide original no espaço de visão, com os parâmetros acima definidos - no caso, considere que a matriz Model seja a matriz identidade.

4 Apresente uma matriz de Projeção Perspective (Projection), com parâmetros definidos por você, e as coordenadas da pirâmide no espaço de Clip.

A matriz de projeção Perspectiva normalizada pode ser escrita como:

$$\text{Projection} = \begin{pmatrix} \frac{\cot(\theta/2)}{\text{aspect}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cot(\theta/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_{near}+z_{far}}{z_{near}-z_{far}} & -\frac{2 \cdot z_{near} \cdot z_{far}}{z_{near}-z_{far}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando o *aspect* como 1, ângulo de referência θ como 45°, z_{near} como 1 e z_{far} como 10, temos:

$$\text{Projection} = \begin{pmatrix} \cot(22.5°) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cot(22.5°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{9} & \frac{20}{9} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.2 & 2.2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando nos vértices originais, temos:

$$V_1' = \text{Projection} \cdot V_1 = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 2.4 \\ 2.2 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$$V_2' = \text{Projection} \cdot V_2 = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.0 \\ 2.8 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$V_3' = \text{Projection} \cdot V_3 = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.0 \\ 1.6 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$V_4' = \text{Projection} \cdot V_4 = \begin{pmatrix} -1.2 \\ 0.0 \\ 1.6 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$V_5' = \text{Projection} \cdot V_5 = \begin{pmatrix} -1.2 \\ 0.0 \\ 2.8 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

E estes pontos V_i', para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, são os vértices da pirâmide original no espaço de Clip, ao aplicar a matriz de projeção perspectiva acima definida - no caso, considere que as matrizes Model e View sejam ambas matrizes Identidade.

5 Apresente uma matriz de Projeção Ortogonal (Projection), com parâmetros definidos por você, e as coordenadas da pirâmide no espaço de Clip.

A matriz de projeção Ortogonal pode ser escrita como:

$$\text{ProjOrt} = \begin{pmatrix} \frac{2}{xw_{max}-xw_{min}} & 0 & 0 & -\frac{xw_{max}+xw_{min}}{xw_{max}-xw_{min}} \\ 0 & \frac{2}{yw_{max}-yw_{min}} & 0 & -\frac{yw_{max}+yw_{min}}{yw_{max}-yw_{min}} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{z_{near}-z_{far}} & \frac{z_{near}+z_{far}}{z_{near}-z_{far}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos definir os valores de $xw_{max} = 10$, $xw_{min} = -5$, $yw_{max} = 10$, $yw_{min} = -5$, $z_{near} = -5$, $z_{far} = 10$. Com isso, temos a seguinte matriz:

$$\text{ProjOrt} = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & 0 & 0 & -\frac{5}{15} \\ 0 & \frac{2}{15} & 0 & -\frac{5}{15} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{-15} & \frac{5}{-15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.13 & 0 & 0 & -0.33 \\ 0 & 0.13 & 0 & -0.33 \\ 0 & 0 & 0.13 & -0.33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando esta matriz nos vértices da pirâmide, temos:

$$V_1' = \text{ProjOrt} \cdot V_1 = \begin{pmatrix} -0.33 \\ -0.20 \\ -0.33 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

$$V_2' = \text{ProjOrt} \cdot V_2 = \begin{pmatrix} -0.27 \\ -0.33 \\ -0.40 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

$$V_3' = \text{ProjOrt} \cdot V_3 = \begin{pmatrix} -0.27 \\ -0.33 \\ -0.27 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

$$V_4' = \text{ProjOrt} \cdot V_4 = \begin{pmatrix} -0.40 \\ -0.33 \\ -0.27 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

$$V_5' = \text{ProjOrt} \cdot V_5 = \begin{pmatrix} -0.40 \\ -0.33 \\ -0.40 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

E estes pontos V_i', para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, são os vértices da pirâmide original no espaço de Clip, ao aplicar a matriz de projeção ortogonal acima definida - no caso, considere que as matrizes Model e View sejam ambas matrizes Identidade.

6 Qual o objetivo dos parâmetros Near e Far na matriz de projeção?

Os parâmetros Near e Far delimitam a porção visível no mundo (frustum). O parâmetro Near delimitará o “near clipping plane”, ou seja, o plano de recorte inicial, e o Far delimita o “far clipping plane”, ou seja, o plano de recorte atrás. De maneira menos formal, o que estiver "atrás do Far" ou "na frente do near" não será exibido na tela.

7 Qual a relação do Frustum com o que será exibido na cena 3D?

O Frustum é a porção que será visível do mundo, ou seja, apenas os objetos que pertencerem a esta região serão projetados na cena 3D.

8 Explique, com suas palavras, o mapeamento 2D de uma imagem de textura para um objeto 3D (apresente pelo menos 3 tipos de mapeamento).

A partir de uma figura 2D representando a textura, é possível realizar um mapeamento para que esta envolva um objeto 3D - uma analogia com a vida real pode ser vista como um papel alumínio envolvendo uma laranja. Para cada pixel da figura, é necessário saber qual texel (ou conjunto de texels) que será lá visualizado. Para isso, existem alguns tipos de mapeamento que podem ser utilizados, como:

- Mapeamento planar: o mapeamento das coordenadas uv é feito de forma ortogonal a um plano (dessa forma, fixando um ponto no plano escolhido, todos os pixels que estiverem na direção do vetor normal partindo deste ponto possuirão a mesma textura aplicada). Por isso, é mais recomendável para objetos relativamente planos;
- Mapeamento cúbico: o mapeamento das coordenadas uv é feito de forma ortogonal - mas, em vez de 1 plano, com 6 planos de um cubo (um para cada "face");
- Mapeamento esférico: em que o mapeamento das coordenadas uv é realizado segundo coordenadas polares esféricas;
- Mapeamento cilíndrico: o mapeamento das coordenadas uv é realizado de acordo com coordenadas polares cilíndricas.

9 Em texturas, explique a relação entre Pixels e Texels.

Podemos falar que os Pixels representam a unidade fundamental de espaço na tela, enquanto os Texels representam a unidade fundamental de espaço na textura. Em outras palavras, as texturas são representadas como um conjunto de texels, e as figuras que aparecem na tela são representadas por um conjunto de pixels. É possível realizar um mapeamento para que a textura seja representada por pixels na tela - e neste, cada texel pode ocupar vários pixels, e cada pixel pode ser ocupado por vários texels.

10 Na parametrização de texturas, explique a diferença entre os parâmetros REPEAT e CLAMP.

Ambos se referem ao padrão de repetição de uma determinada textura - ou seja, em um mesmo polígono será repetida a mesma textura. O "repeat" irá simplesmente repetir a textura várias vezes no polígono (como se vários quadros iguais fossem postos lado a lado), enquanto o "clamp" irá repetir o último texel, dando uma sensação de que "as pontas da textura foram esticadas".

11 Durante o mapeamento de pixels e texels, qual a diferença entre as técnicas LINEAR e NEAREST?

A técnica "Linear" irá escolher o texel a partir de uma aproximação da interpolação dos vizinhos (por exemplo, uma média entre eles). Já a técnica "Nearest" irá simplesmente escolher o texel mais próximo da coordenada de textura.

12 Considere uma textura quadrada de dimensão 2x2 (pixels), apresentada abaixo (xadrez). Considere um quadrado com coordenadas [(-1,-1),(1,1),(-1,1),(1,-1)]. Considere que a textura pode ser mapeada diretamente no quadrado.

Fig. Textura em formato xadrez (2x2 pixels)

12.1 Aplique uma escala uniforme com fator D (sua variável) no quadrado

Após a escala uniforme de fator $s = 17$, teremos as coordenadas:

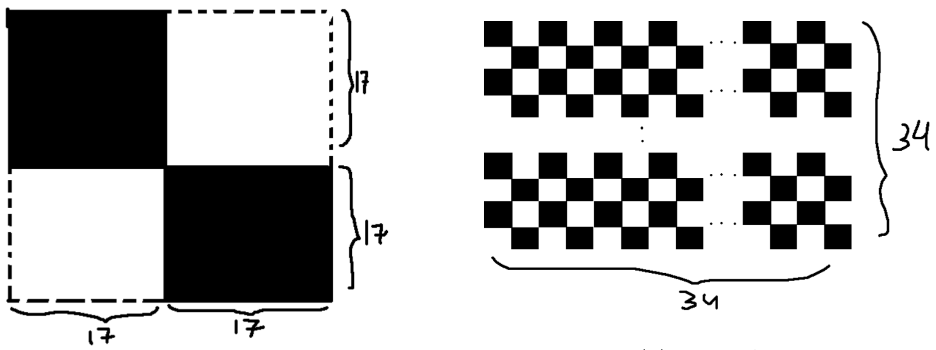
$$[(-17,-17),(17,17),(-17,17),(17,-17)]$$

12.2 Apresente a textura no quadrado (em nova escala) com o parâmetro CLAMP (apenas a ideia via um desenho)

A ideia da textura com o parâmetro “clamp” é de que as "bordas"da textura seja esticada até as bordas da imagem. Como a textura é um xadrez, o quadrado continuaria sendo um xadrez igual ao da figura, com 4 quadrados distintos, porém maior (de tamanho 34x34). Pode ser visto na figura 1a - o pontilhado da imagem foi feito apenas para representar as bordas do quadrado, e não existiria no resultado final.

12.3 Apresente a textura no quadrado (em nova escala) com o parâmetro REPEAT (apenas a ideia via um desenho)

Com o parâmetro “repeat”, o xadrez seria replicado várias vezes na imagem. Assim, o padrão se repetiria 17x17 vezes na figura, tendo um total de 34x34 quadrados na imagem, alternando entre preto e branco. Pode ser vista na figura 1b. Na figura, está com reticências ($\cdots$) pois a imagem ficaria muito grande.



(a) CLAMP

(b) REPEAT

Figura 1: Textura aplicada no quadrado dado. Fora de escala real.