

Primeira Lista de Exercícios de SMA354 - Cálculo II - 2018

Exercício 1 Em cada um dos itens abaixo, encontre uma primitiva e a integral indefinida da função f , onde:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = (x^2 - 9)^{\frac{2}{3}} x, \text{ para } |x| \geq 3 & b) f(x) = \frac{3 + e^{4x}}{e^{4x}}, \text{ para } x \in \mathbb{R} \\ c) f(x) = \frac{x + \ln(x)}{x}, \text{ para } x > 0 & d) f(x) = x (4 - x^2)^{\frac{1}{3}}, \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Exercício 2 Usando a técnica da substituição na integral indefinida, encontre as integrais indefinidas:

$$\begin{array}{llll} a) \int \frac{8x^2}{x^3 + 2} dx & b) \int x \sqrt{x - 4} dx & c) \int (2x + 3)^{11} dx & d) \int \frac{t^5 + 2t}{\sqrt{t^6 + 6t^2}} dt \\ e) \int \left(\frac{2z^2}{z^3 + 5} - \frac{3z}{z^2 - 10} \right) dz & f) \int [\sqrt{4t} + \cos(2t)] dt & g) \int \frac{\cos(t)}{-\sin^2(t)} dt & h) \int (2z^2 - 3)^5 z dz \end{array}$$

Exercício 3 Utilizando a técnica da integração por partes na integral indefinida, encontre as seguintes integrais indefinidas:

$$\begin{array}{llll} a) \int \ln(x) dx & b) \int x e^{3x} dx & c) \int x^2 \sin(3x) dx & d) \int e^x \cos(x) dx \\ e) \int e^x \sin(x) dx & f) \int \frac{\sin(2x)}{e^x} dx & g) \int \arctg(x) dx & h) \int \arcsen(x) dx \end{array}$$

Exercício 4 Encontre as seguintes integrais indefinidas:

$$\begin{array}{llll} a) \int x \arcsen(x^2) dx & b) \int \sqrt{3+x} (x+1)^2 dx & c) \int \left(t + \frac{1}{t} \right) \frac{t^2 - 1}{t^2} dt & d) \int \arccos(2x) dx \\ e) \int x^2 \sqrt{1+x} dx & f) \int \frac{\cos(x)}{5 + \sin^2(x)} dx & g) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx & h) \int x \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \\ i) \int \tg^2(x) \sec(x) dx & j) \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx & k) \int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} dx & l) \int \frac{\sin(x) \cos(x)}{\sqrt{\cos^2(x) - \sin^2(x)}} dx \\ m) \int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^3 \frac{1}{x^2} dx & n) \int \frac{y+3}{(3-y)^{\frac{2}{3}}} dy & o) \int \frac{\cos^3(3x)}{\sin^{\frac{1}{3}}(3x)} dx & p) \int \frac{e^x}{e^x + e} dx \end{array}$$

Exercício 5 Utilize as fórmulas

$$\begin{aligned} \sin(a) \sin(b) &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)], \\ \sin(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)], \\ \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)], \end{aligned}$$

para calcular as seguintes integrais indefinidas:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int \sin(5x) \cos(x) dx & \text{(b)} \int \cos(5x) \cos(6x) dx \\ \text{(c)} \int \sin(mx) \sin(nx) dx, \text{ para } m, n \in \mathbb{N} & \text{(d)} \int \cos(mx) \sin(nx) dx, \text{ para } m, n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Exercício 6

a) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em \mathbb{R} . Suponha que a equação geral da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função f no ponto $(1, 3)$, é dada por $y = x + 2$. Se a função $f'' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f''(x) = 6x$, para $x \in \mathbb{R}$, encontrar a expressão da função f .

b) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em \mathbb{R} . Suponhamos que a função $f'' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f''(x) = 2$, para $x \in \mathbb{R}$. Encontre a expressão da função f , sabendo-se que o ponto $(1, 3)$ é um do gráfico da função e que nesse ponto o coeficiente angular da reta tangente é -2 .

Exercício 7 Considere uma partícula movendo-se sobre uma reta. Se a aceleração da partícula é uma função do tempo t , em segundos, dada pela função $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $a(t) = 2t - 1$, para $t \geq 0$, e em $t = 1$ s, sua velocidade é 3 m/s e o espaço percorrido é 4 m, encontrar a expressão do espaço em função do tempo t .

Exercício 8 Uma equação do tipo

$$f(y) \frac{dy}{dx}(x) = g(x), \quad \text{para } x \in I,$$

onde as funções $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas e a função $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em I , denominada solução da equação, será dita equação diferencial ordinária de variáveis separáveis. Sabendo-se que qualquer solução desta equação pode ser obtida integrando-se ambos os lados da igualdade em relação a x , encontre uma solução $y = y(x)$ da equação $y^2 \frac{dy}{dx}(x) = \cos(x)$ para $x \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Exercício 9 Calcule as integrais indefinidas abaixo:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{x^2}{9+x^2} dx & \text{(b)} \int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x} dx & \text{(c)} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \\ \text{(d)} \int \frac{dx}{(1-9x^2)^{3/2}} & \text{(e)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx & \text{(f)} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}} \end{array}$$

Exercício 10 Use integração por partes para obter a seguinte fórmula de redução

$$\int x^n \sin(x) dx = -x^n \cos(x) + n \int x^{n-1} \cos(x) dx,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 11 Verifique que

$$\int [\ln(x)]^n dx = x [\ln(x)]^n - n \int [\ln(x)]^{n-1} dx$$

e calcule $\int [\ln(x)]^5 dx$, para $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 12 Encontrar o valor das integrais definidas:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int_{-3}^2 |x+1| dx & \text{b)} \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & \text{c)} \int_7^{12} dx & \text{d)} \int_1^0 t^2 \left(t^{\frac{1}{3}} - \sqrt{t}\right) dt \\ \text{e)} \int_3^2 \frac{x^2-1}{x-1} dx & \text{f)} \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx & \text{g)} \int_0^1 \frac{1}{(1-v^2)^2} dv & \text{h)} \int_0^1 x^2 e^x dx \\ \text{i)} \int_1^2 \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx & \text{j)} \int_0^1 \sin(x) e^{[\cos(x)+1]} dx & \text{k)} \int_1^2 x 2^x dx & \text{l)} \int_0^1 x(2x+3)^{99} dx \end{array}$$

Exercício 13 Em cada um dos itens abaixo, encontrar a expressão da função $f' : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \int_0^x (t^2 + 1)^{10} dt & b) f(x) = \int_x^0 \sqrt{u^2 + 4} u du & c) f(x) = \int_{-1}^x t \operatorname{sen}(t) dt \\ d) f(x) = \int_0^{x^3} \cos^{\frac{1}{3}}(t) dt & e) f(x) = \int_{\operatorname{sen}(x)}^{\cos(x)} \sqrt{t^2 + 1} dt & f) f(x) = \int_0^{4x} \operatorname{sen}^{10}(t) dt \end{array}$$

Exercício 14 Seja $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.

1. Mostre que se f é uma função par, então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

2. Mostre que se f é uma função ímpar, então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Exercício 15 Estude a paridade das funções que aparecem no integrando das integrais definidas abaixo e depois calcule-as:

$$\begin{array}{lll} (a) \int_{-1}^1 (x^2 + 4) dx & (b) \int_{-17\pi/4}^{17\pi/4} [\operatorname{sen}(x^3) - x^7 \cos(x)] dx & (c) \int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx \\ (d) \int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx & (e) \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x^3 - x)} dx & \end{array}$$

Exercício 16 Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função w -periódica e integrável em qualquer intervalo limitado da reta, mostre que

$$\int_0^w f(x) dx = \int_a^{a+w} f(x) dx$$

para cada $a \in \mathbb{R}$ e para um real w fixados.

Exercício 17 Verifique que para todo natural $n > 1$, temos $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n(t) dt = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}(t) dt$.

Exercício 18 Suponha que a função $f : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[-2, 0]$ e que $\int_{-2}^0 f(x) dx = 3$.

Calcule $\int_0^2 f(x-2) dx$.

Exercício 19 Em cada um dos itens abaixo, calcule o valor médio das funções f e determine $c \in \mathbb{R}$, tal que $f(c)$ = valor médio da função f no intervalo $[a, b]$:

- a) $f(x) = 3x$ e $[a, b] = [1, 2]$.
- b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $[a, b] = [-\pi, \pi]$.
- c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $[a, b] = [0, \pi]$.
- d) $f(x) = x^2 - 2x$ e $[a, b] = [0, 2]$.

Exercício 20 Encontrar a área da região limitada do plano xy , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das seguintes funções e retas abaixo:

- a) $f(x) = x^2$, para $x \in \mathbb{R}, x = 2, x = 4$ e $y = 0$
- b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$, para $x \in [-2, 2], x = 0, x = 2$ e $y = 0$
- c) $f(x) = |\sin(x)|$, $x = -2\pi, x = 2\pi$ e $y = 0$
- d) $f(x) = \sin(x)$, para $x \in \mathbb{R}, x = -2\pi, x = 2\pi$ e $y = 0$
- e) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{10-x^2}}$, para $x \in [-\sqrt{10}, \sqrt{10}], x = 2$ e $y = 0$

Exercício 21 Encontrar a área da região limitada do plano xy , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das curvas abaixo:

- a) $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$
- b) $y = \cos(x), y = \cos^2(x), x = 0$ e $x = \pi$

Exercício 22 Calcule a área da região limitada abaixo do gráfico da função f (e acima do eixo x), nos seguintes casos:

- (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x \in [0, 1], \\ 2-x & \text{para } x \in [1, 2] \end{cases}$
- (b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{para } x \in [0, 1], \\ -(x-1)(x-4) & \text{para } x \in [1, 4] \end{cases}$

Exercício 23 Desenhe o subconjunto A , do plano xy , e calcule sua área nos seguintes casos:

- (a) A é o subconjunto limitado do plano xy , delimitado pelas retas $x = 1, x = 3$, pelo eixo x e pelo gráfico de $y = x^3$.
- (b) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1, x = 4, y = 0$ e pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$.
- (c) A é o subconjunto limitado do plano xy , formado por todos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que $0 \leq y \leq 9 - x^2$.
- (d) A é o subconjunto limitado do plano xy , formado por todos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que $1 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq \frac{x}{1+x^2}$.

Exercício 24 Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ o ponto máximo da função $f(x) = x^2 e^{-x}$, para $x \in \mathbb{R}$. Calcule a área do conjunto limitado $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq x_0 \text{ e } 0 \leq y \leq x^2 e^{-x}\}$.

Exercício 25 Consideremos uma partícula que se desloca sobre o eixo x com equação $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a, b]$. Qual é uma primitiva de v ?

(a) A diferença $x(b) - x(a)$ é o deslocamento da partícula entre os instantes $t = a$ e $t = b$. Como o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser utilizado para calcular o deslocamento de uma partícula?

Definamos o espaço percorrido pela partícula entre os instantes $t = a$ e $t = b$ por $\int_a^b |v(t)| dt$.

(b) Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = -t^2 + t$, para $t \geq 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$.

(c) Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2t - 3$, para $t \geq 0$. Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$. Descreva o movimento realizado pela partícula entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$.