

Projeto - Um Enigma das Galáxias

André Luís Mendes Fakhoury - 4482145 - andrefakhoury@usp.br

Débora Buzon da Silva - 10851687 - debora.buzon@usp.br

Gustavo Vinícius Vieira Silva Soares - 10734428 - gsoares@usp.br

Thiago Preischadt Pinheiro - 10723801 - thiagop@usp.br

SME0110 - PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Profas. Franklina Toledo e Marina Andretta

1 Modelagem

Queremos modelar o problema clássico do caixeiro viajante, em que cada vértice do grafo são galáxias. Deseja-se, portanto, encontrar alguma rota que visite todas as galáxias exatamente uma vez, e retorne à galáxia inicial, minimizando-se a distância total percorrida no trajeto. As galáxias são representadas por pontos no \mathbb{R}^2 .

São constantes do problema:

n = número de galáxias

x_i = coordenada x da galáxia i

y_i = coordenada y da galáxia i

d_{ij} = distância euclidiana entre as galáxias i e j

$i, j \in \{1, \dots, n\}$

São conhecidas as localizações das galáxias como pontos (x, y) no plano cartesiano, e a distância euclidiana entre dois pontos é definida como:

$$d(i, j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

1.1 Descrição das variáveis

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{caso a aresta } (i, j) \text{ faz parte da rota} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1.2 Função objetivo

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} p_{ij}$$

Queremos minimizar a soma das distâncias, considerando apenas as arestas escolhidas para serem percorridas.

1.3 Restrições

$$\begin{aligned} p_{ii} &= 0 & i &= 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n p_{ij} &= 1 & i &= 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n p_{ji} &= 1 & i &= 1, \dots, n \\ \sum_{i,j \in S} p_{ij} &\leq |S| - 1 & S &\subseteq \{2, \dots, n\}, |S| \geq 2 \\ p_{ij} &\in \{0, 1\} & i, j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Estas restrições garantem os seguintes itens:

- Uma galáxia não pode ir para ela mesma
- Cada galáxia é visitada por outra apenas uma vez
- Cada galáxia visita outra apenas uma vez
- Há apenas um ciclo, que contém todos os nós
- A variável p_{ij} é binária

2 Toy Problem

2.1 Exemplo

A figura 1 exemplifica um problema com 5 galáxias, descritas como $P1, P2, P3, P4, P5$.

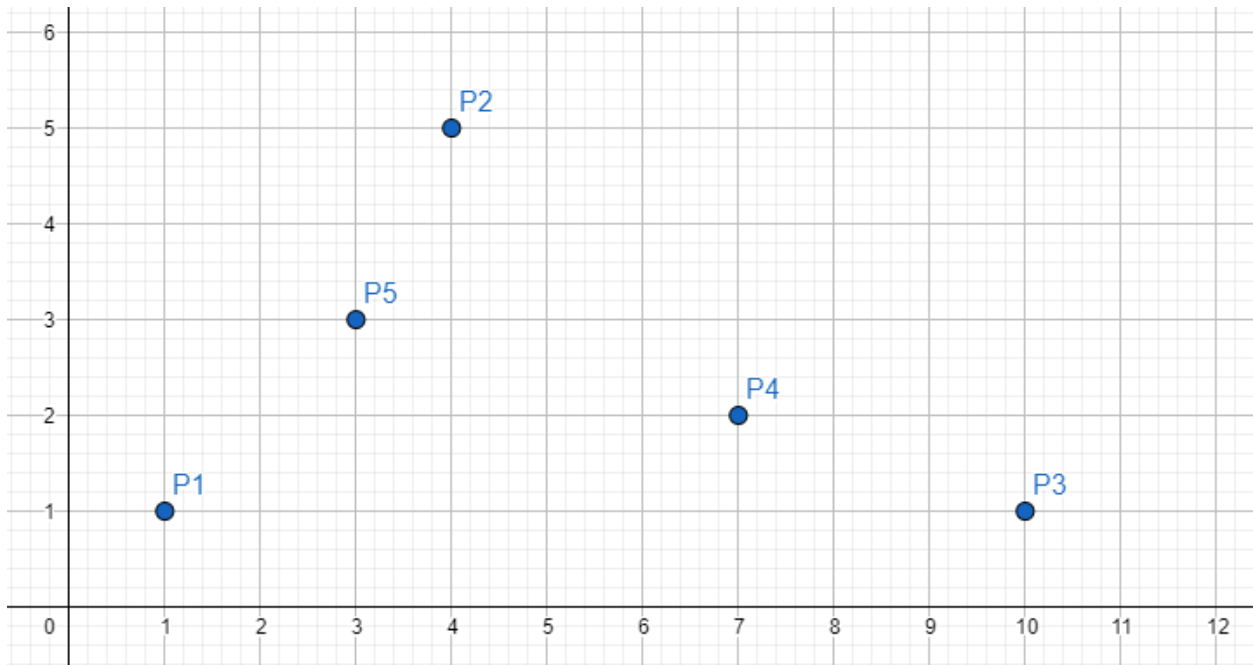


Figura 1: Exemplo de problema

Dele, conseguimos retirar os seguintes dados (por simplicidade, mostrando apenas uma casa decimal):

$$n = 5$$

$$x = [1.0, 3.0, 4.0, 7.0, 10.0]$$

$$y = [1.0, 3.0, 5.0, 2.0, 1.0]$$

$$d = \begin{bmatrix} 0.0 & 5.0 & 9.0 & 6.1 & 2.8 \\ 5.0 & 0.0 & 7.2 & 4.2 & 2.2 \\ 9.0 & 7.2 & 0.0 & 3.2 & 7.3 \\ 6.1 & 4.2 & 3.2 & 0.0 & 4.1 \\ 2.8 & 2.2 & 7.3 & 4.1 & 0.0 \end{bmatrix}$$

E estes dados são então utilizados na modelagem descrita anteriormente.

2.2 Solução

Uma possível solução pode ser encontrada na figura 2. Nela, a ordem encontrada de visita é $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, e o valor da função objetivo (distância total percorrida) é, aproximadamente, 21.4.

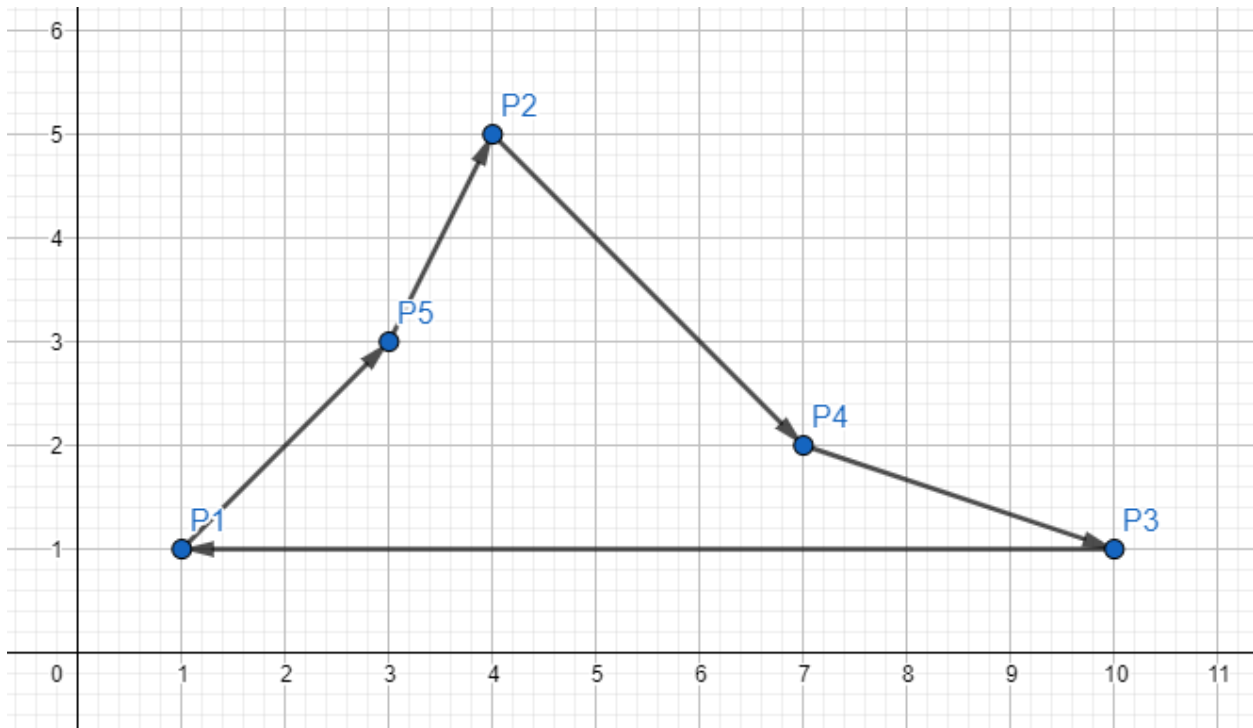


Figura 2: Solução

Como no exemplo as arestas são bidirecionais, o programa para encontrar o melhor caminho também pode encontrar o caminho reverso (no caso, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$).

3 Implementação

O projeto foi implementado em *Python*, utilizando-se a biblioteca *OR-Tools*. No arquivo fonte *src.py* está a documentação do código desenvolvido.

Referências

- [1] S. Carlson. Algorithm of the gods, 1997.
- [2] F. Toledo. *Aula 6 Modelagem Var. Inteiras*. 2020.
- [3] U. Waterloo. National traveling salesman problems, 2020.