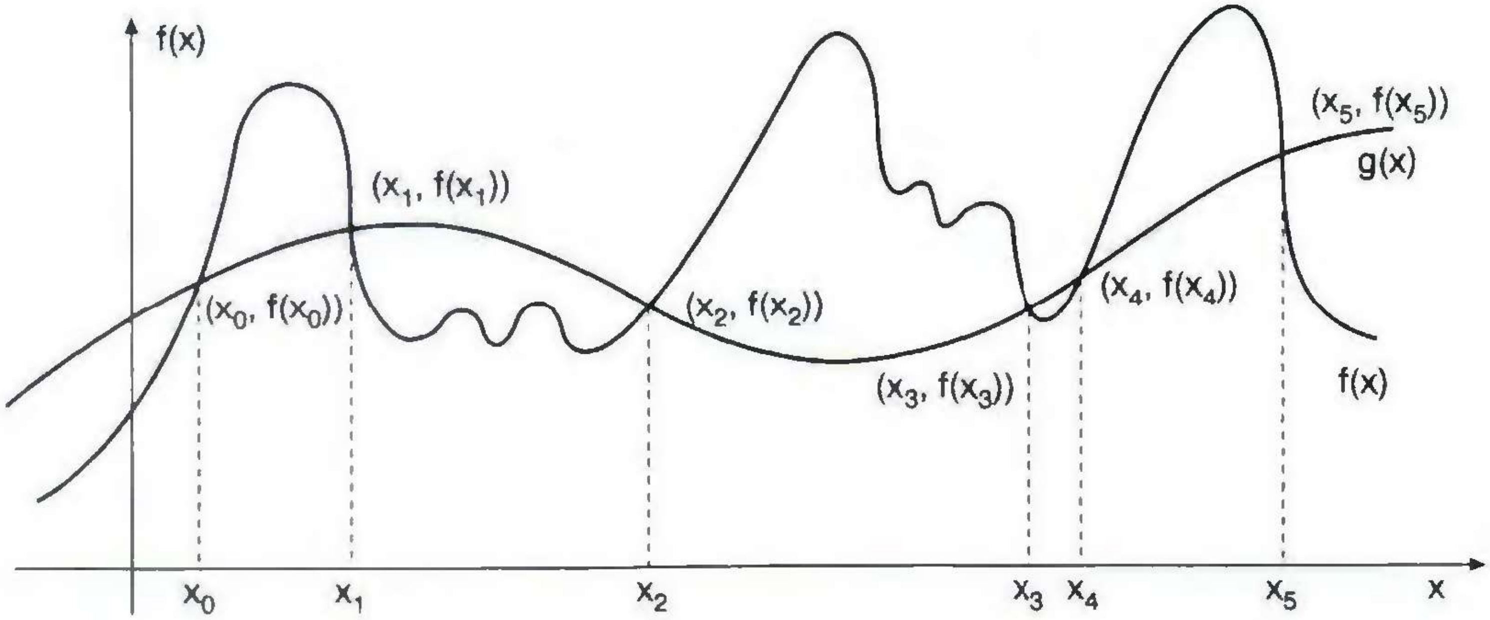
INTERPOLAÇÃO

- **INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL**
- **Seja interpolar a função f(x) que passa em n+1 pontos**
- $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ **, por um polinômio** $P_n(x)$ **, de grau**
- **menor ou igual a n:** $P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$
- $$\begin{cases} f(x_0) = P_n(x_0) \\ f(x_1) = P_n(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) = P_n(x_n) \end{cases}$$

INTERPOLAÇÃO

- **Graficamente:**



INTERPOLAÇÃO

- **ou seja**

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

INTERPOLAÇÃO

- **com n+1 equações e n+1 variáveis**
- **A matriz doe coeficientes é:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

- **é uma matriz de Vandermonde , logo**

$$\det(A) \neq 0$$

INTERPOLAÇÃO

- **O polinômio** $P_n(x)$ **é obtido por resolução do sistema linear, forma de Lagrange e forma de Newton.**
- **1) Resolução do sistema linear**
- **Seja interpolar a função f(x) definida por**
-

x	−1	0	2
f(x)	4	1	−1

INTERPOLAÇÃO

- **como temos três pontos, vamos usar um polinômio de grau 2:**
- $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
- **Assim, temos:**

$$P_2(x_0) = f(x_0) = f(-1) = 4 \Leftrightarrow a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 = 4$$

$$P_2(x_1) = f(x_1) = f(0) = 1 \Leftrightarrow a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = 1$$

$$P_2(x_2) = f(x_2) = f(2) = -1 \Leftrightarrow a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = -1$$

INTERPOLAÇÃO

- ou

$$P_2(x_0) = f(x_0) = f(-1) = 4 \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 4$$
$$P_2(x_1) = f(x_1) = f(0) = 1 \Leftrightarrow a_0 = 1$$
$$P_2(x_2) = f(x_2) = f(2) = -1 \Leftrightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1$$

INTERPOLAÇÃO

- **Resolvendo o sistema**

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = -\,{}^{7}\!/_{3}$$
$$a_2 = {}^{2}\!/_{3}$$

- **O polinômio interpolador é:**

$$P_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

INTERPOLAÇÃO

- 2) F**orma polinômial de Lagrange**
- **Para a forma de Lagrange o polinômio interpolador é:**

$$P_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \cdots + y_n L_n(x_i) = y_i$$

- **onde**

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n)$$

$$L_0, L_1, \ldots \; , L_n$$

- **são os polinômios de Lagrange**

INTERPOLAÇÃO

- **Os polinômios de Lagrange é dado pela fórmula**

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{K+1})\ldots\ldots(x_k-x_n)}$$

- **Os polinômios de Lagrange satisfaz a seguinte propriedade:**

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq i \\ 1 \text{ se } k = i \end{cases}$$

INTERPOLAÇÃO

- **Para dois pontos** x_0 e x_1 **, os polinômios Lagramnge são**
-

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

INTERPOLAÇÃO

- **Os valores de** L_0 e L_1 **nos pontos** x_0 e x_1 **são**
-

$$L_0(x_0) = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} = 1$$

$$L_0(x_1) = \frac{x_1 - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{0}{x_0 - x_1} = 0$$

$$L_1(x_0) = \frac{x_0 - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{0}{x_1 - x_0} = 0$$

$$L_1(x_1) = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = 1$$

INTERPOLAÇÃO

- **Para três pontos** $x_0\ , x_1 \text{ e } x_2$ **, os polinômios de Lagrange são:**
-

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

INTERPOLAÇÃO

- **Para quatro pontos** $x_0, x_1, x_2 \text{ e } x_3$ **, os polinômios de Lagrange são:**
-

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_3 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

INTERPOLAÇÃO

- **Exemplo 1: interpolar a função f(x) passando pelos pontos**

$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$

- **Solução: como temos dois pontos o polinômio interpolador é de grau 1:**

$$y_0 = f(x_0)$$
$$y_1 = f(x_1)$$

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$P_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(x_1 - x)y_0 + (x - x_0)y_1}{(x_1 - x_0)}$$

INTERPOLAÇÃO

- **Exemplo 2: seja a função f(x) definida pela tabela:**

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

- **Solução:**

- **Como temo três pontos o polinômio interpolador é de grau 2:**

INTERPOLAÇÃO

- **Assim, temos:**

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \frac{x^2 + x}{6}$$

$$P_2(x) = 4\left(\frac{x^2 - 2x}{3}\right) + 1\left(\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2 + x}{6}\right) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

INTERPOLAÇÃO

- **3) FORMA POLINÔMIAL DE NEWTON**
- **A forma de Newton do polinômio interpolador** $P_n(x)$ **é**
-

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1) \bullet \cdots \bullet (x - x_{n-1})$$

- **onde**

$$d_0, d_1, \ldots, d_n$$

INTERPOLAÇÃO

- **são os operadores de diferenças divididas e são definidos por**

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

INTERPOLAÇÃO

- **em tabela temos:**

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		.	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	.	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	.	.	$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$
		$f[x_3, x_4]$	.	.	.	
x_4	$f[x_4]$	.	.	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
.	.	.	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
.	.	$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

INTERPOLAÇÃO

- **Exemplo 1: seja a função f(x) definida por**

x	−1	0	1	2	3
f(x)	1	1	0	−1	−2

-

INTERPOLAÇÃO

- **Cuja tabela de diferenças divididas é**
-

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-1	1				
		0			
0	1		$-\frac{1}{2}$		
		-1		$\frac{1}{6}$	
1	0		0		$-\frac{1}{24}$
		-1		0	
2	-1		0		
		-1			
3	-2				

INTERPOLAÇÃO

- onde

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1 - 0}{1 + 1} = \frac{-1}{2}$$

INTERPOLAÇÃO

•

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-1 + 1}{2 - 0} = 0$$

.

.

.

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0 + 1/2}{2 + 1} = \frac{1}{6}$$

.

INTERPOLAÇÃO

- **A forma de Newton para um polinômio de grau menor ou igual a n**
- **que interpola f(x) em** $x_0, x_1, \ldots, x_n$ **é dado por**

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \bullet \cdots \bullet (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

- **o erro cometido é**

$$E_n = (x - x_0)(x - x_1) \bullet \cdots \bullet (x - x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]$$

INTERPOLAÇÃO

- **A forma de Newton para função** $f(x)$ **passando pelos pontos** x_0 e x_1
- **com** $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$
- **Solução :**
- $$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1]$$
- **onde**
- $$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- **A forma de Newton para interpolar a função** $f(x)$ **passando pelos pontos** x_0, x_1 e x_2 **com** $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$
- **Solução :**
- $$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$
- **onde** $$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
- $$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

INTERPOLAÇÃO

- **A forma de Newton para interpolar a função** $f(x)$ **passando pelos pontos**
- x_0, x_1, x_2 e x_3 **com** $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ e $(x_3, f(x_3))$
- **Solução :**
- $$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$
- $f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ $\quad f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ $\quad f[x_2, x_3] = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

INTERPOLAÇÃO

- **Continuação**

- $$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$ $$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

- $$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

INTERPOLAÇÃO

- **Exemplo 2: Usando a forma de Newton, o polinômio** $P_2(x)$ **, que interpola f(x) nos pontos dados abaixo**
-

x	−1	0	2
f(x)	4	1	−1

INTERPOLAÇÃO

- **Solução:**
- **O polinômio tem a seguinte forma:**

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2]$$

- **Diferenças divididas de ordem zero**

- $$f[x_0] = f(x_0) = 4$$
  $$f[x_1] = f(x_1) = 1$$
  $$f[x_2] = f(x_2) = -1$$

INTERPOLAÇÃO

- **Diferenças divididas de ordem um**

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1-4}{0-(-1)}=\frac{-3}{1}=-3$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-1-1}{2-0)}=\frac{-2}{2}=-1$$

- **Diferenças divididas de ordem dois**

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{-1-(-3)}{2-(-1)}=\frac{-1+3}{2+1}=\frac{2}{3}$$

INTERPOLAÇÃO

- **Em tabela:**

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
-1	4		
		-3	
0	1		$\frac{2}{3}$
		-1	
2	-1		

INTERPOLAÇÃO

- **substituindo, temos**

$$P_2(x) = 4 + (x+1)(-3) + (x+1)(x-0)\frac{2}{3}$$

$$P_2(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

INTERPOLAÇÃO

- **Exemplo 3: seja a função** $f(x) = \ln(x)$ **com valores**
- $(x_0 = 1, f(x_0) = 0), (x_1 = 4, f(x_1) = 1{,}386294), (x_2 = 6, f(x_2) = 1{,}791759), (x_3 = 5, f(x_3) = 1{,}609438)$
- **Faça uma estimativa de ln2 com um polinômio interpolador de Newton de terceiro grau**
- **Solução :**

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

INTERPOLAÇÃO

- **Cálculo das diferenças divididas**

$$f(x_0) = 0$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1,386294 - 0}{4 - 1} = 0,4620981$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1,791759 - 1,386294}{6 - 4} = 0,2027326$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{1,609438 - 1,791759}{5 - 6} = 0,1823216$$

INTERPOLAÇÃO

- **Cálculo da diferenças divididas**

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{0,2027326-0,4620981}{6-1}=-0,05187311$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}=\frac{0,1823216-0,2027326}{5-4}=-0,02041100$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}=\frac{-0,0204110-(-0,05187311)}{5-1}=0,007865529$$

INTERPOLAÇÃO

- **Continuação**

$$P_3(x) = 0 + 0{,}4620981(x-1) - 0{,}05187311(x-1)(x-4) + 0{,}007865529(x-1)(x-4)(x-6)$$

- $$P_3(2) = \ln(2) = 0{,}6287686$$
-

INTERPOLAÇÃO

- **Exemplo 4: Calcule** $e^{3,1}$ **usando um polinômio de interpolação sobre três pontos:**
-

x	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
e^x	11.02	13.46	16.44	20.08	24.53	29.96	36.59	44.70

INTERPOLAÇÃO

- **Solução:** $3,1 \in [3,0; 3,2]$
- **o terceiro ponto pode ser 2,8 ou 3,4**
- **Para 2,8 ,temos:**
-

$$x_0 = 2,8$$
$$x_1 = 3,0$$
$$x_2 = 3,2$$
$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

INTERPOLAÇÃO

- **Continuação**

$$f(x_0) = f(2,8) = 16,44$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{20,08 - 16,44}{3,0 - 2,8} = 18,20$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{24,53 - 20,08}{3,2 - 3,0} = 22,25$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{22,25 - 18,20}{3,2 - 2,8} = 10,125$$

INTERPOLAÇÃO

- **Continuação**

$$P_2(x) = 16,44 + 18,20(x - 2,8) + 10,125(x - 2,8)(x - 3)$$

$$P_2(3,1) = 16,44 + 18,20(3,1 - 2,8) + 10,125(3,1 - 2,8)(3,1 - 3)$$

$$P_2(3,1) = 22,2038$$

INTERPOLAÇÃO

- **Para 3,4 , temos:**

$$x_0 = 3,0$$
$$x_1 = 3,2$$
$$x_2 = 3,4$$
$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

INTERPOLAÇÃO

- **Continuação**

$$f(x_0) = f(3,0) = 20,08$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{24,53 - 20,08}{3,2 - 3,0} = 22,25$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{29,96 - 24,53}{3,4 - 3,2} = 27,15$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{27,15 - 22,25}{3,4 - 3,0} = 12,25$$

INTERPOLAÇÃO

- **Continuação**

$$P_2(x) = 20,08 + 22,25(x - 3,0) + 12,25(x - 3,0)(x - 3,2)$$

$$P_2(3,1) = 20,08 + 22,25(3,1 - 3,0) + 12,25(3,1 - 3,0)(3,1 - 3,2)$$

$$P_2(3,1) = 22,1825$$

INTERPOLAÇÃO

- **Exemplo 5: Calcule** $\sqrt{115}$ **, usando a forma de Newton, sabendo que** $\sqrt{100} = 10, \sqrt{121} = 11$ e $\sqrt{144} = 12$
- **Solução :**

$$(x_0 = 100, \sqrt{x_0} = \sqrt{100} = 10)$$
$$(x_1 = 121, \sqrt{x_1} = \sqrt{121} = 11)$$
$$(x_2 = 144, \sqrt{x_2} = \sqrt{144} = 12)$$

- **Como temos três pontos, então**

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

INTERPOLAÇÃO

- **Continuação**

$$f(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{100} = 10$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{11 - 10}{121 - 100} = 0,0476$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{12 - 11}{144 - 121} = 0,0435$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{0,0435 - 0,0476}{144 - 100} = -0,0000931$$

INTERPOLAÇÃO

- **Continuação**

$$P_2(x) = 10 + 0,0476(x - 100) - 0,0000931(x - 100)(x - 121)$$

$$P_2(115) = 10 + 0,0476(115 - 100) - 0,0000931(115 - 100)(115 - 121)$$

$$P_2(115) = 10,7224$$