UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Física

Software Design Document: Canhão de Newton Simulado

Disciplina: FIS616 - Introdução à Computação em Física
Professor: Walber Brito

André Fabiano Silva Rios - 2023424725

Belo Horizonte
Setembro de 2023

1 Objetivo

No terceiro livro da obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematic*, Isaac Newton em *The system of the world* propõe um experimento mental, na qual, caso um projetil for lançado com uma velocidade inicial suficiente na horizontal, do alto de uma montanha, o mesmo poderá entrar em órbita, cair após um determinado momento em uma espécie de lançamento horizontal, ou então até mesmo escapar da órbita terrestre e ir rumo ao espaço.

Ademais, pode se dizer que realizar este experimento seja impossível, dadas as circunstâncias necessárias para realizá-lo. Porém, unindo computação à física, é possível verificar este experimento com uma razoável precisão caso seja levado em consideração os parâmetros relacionados à resistência do ar.

Portanto, este projeto visa criar uma simulação utilizando a biblioteca *Vpython*, com um certo grau de realidade do ponto de vista físico, já que o projétil, além da força gravitacional, será submetido a uma força de resistência do ar, que varia em função da densidade do ar, que por sua vez varia em função de sua altura em relação ao nível do mar. Sendo assim, com o auxílio da computação, a ideia de Newton pode ser verificada, mesmo que de modo simulado.

2 Metodologia teórica

2.1 Leis de Newton

Na mesma obra citada na seção 1, Isaac Newton enuncia as três das mais famosas leis da mecânica clássica. Sendo que no enunciado de sua segunda lei, ele propõe que a força ($\overrightarrow{F}_{res}$) é igual à razão de uma variação infinitesimal do momento linear (p) do objeto analisado, por um intervalo de tempo (t) também infinitesimal. Ou seja:

$$\overrightarrow{F}_{res} = \frac{\Delta \overrightarrow{p}}{\Delta t} \tag{1}$$

Porém, extrapolando os limites do infinitesimal, pode-se definir as variações envolvidas não sendo necessariamente infinitesimais, mas sendo pequenas o suficiente para não haver uma dissipação de erro e a simulação acabar tomando um rumo falho.

Sendo assim, a partir deste ponto, todas as variações infinitesimais envolvendo as grandezas físicas, serão aproximadas para uma variação um pouco maior, como proposto no método de Euler para aproximações envolvendo equações diferenciais de segunda ordem.

Logo a segunda lei pode ser reescrita como:

$$\Delta \overrightarrow{p} = \overrightarrow{F}_{res} \Delta t \tag{2}$$

$$\overrightarrow{p}_f = \overrightarrow{p}_i + \overrightarrow{F}_{res} \Delta t \tag{3}$$

Em que o momento linear (p) é o produto da massa do projétil (m_p) com o vetor de sua velocidade (v), ou seja:

$$\overrightarrow{p} = m_p \overrightarrow{v} \tag{4}$$

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{p}}{m_p} \tag{5}$$

Porém, sabe-se também que a velocidade pode ser descrita como a variação da posição (r) em um determinado intervalo de tempo, como descreve a equação abaixo:

$$\overrightarrow{v} = \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} \tag{6}$$

$$\overrightarrow{r}_f = \overrightarrow{r}_i + \overrightarrow{v} \Delta t \tag{7}$$

Aplicando o resultado encontrado na equação 5 no resultado encontrado visto na equação 7, obtém-se a seguinte equação:

$$\overrightarrow{r}_f = \overrightarrow{r}_i + \frac{p_f}{m_p} \Delta t \tag{8}$$

Unindo todos os resultados encontrados em uma única equação, a posição do projétil pode ser descrito como:

$$\overrightarrow{r}_f = \overrightarrow{r}_i + \frac{\overrightarrow{p}_i + \overrightarrow{F}_{res}\Delta t}{m_p}\Delta t \tag{9}$$

2.2 Forças envolvidas

Entretanto, da equação 9, ainda é necessário conhecer as força envolvidas no processo. Portanto, ao ser lançado, o projétil sofre influência de apenas duas forças, sendo ela uma força de arrasto (F_{ar}) devido à resistência do ar, e outra força gravitacional, devido à influência da Terra. Ou seja, a força resultante é descrita por:

$$\overrightarrow{F}_{res} = \overrightarrow{F}_{ar} + \overrightarrow{F}g \tag{10}$$

Por sua vez, a força gravitacional é descrita de forma simples pela lei da gravitação de Newton, dependendo variavelmente apenas da altura (h) em que o objeto se encontra com relação ao nível do mar. Ademais, a força também depende de parâmetros constantes como a constante gravitacional (G), da massa da Terra (m_T), da massa do projétil e do raio terrestre (R_T). Além disso, esta força é um vetor, que aponta sempre na direção radial da Terra, sempre puxando o projétil no sentido do núcleo terrestre. Matematicamente, a força gravitacional pode ser descrita como sendo proporcional ao inverso da distância ao quadrado com relação ao núcleo terrestre, ou seja:

$$\overrightarrow{F}_g = -\frac{G.m_T.m_p}{(R_t + h)^2}\widehat{h} \tag{11}$$

Ademais, para a força de arrasto, uma boa aproximação para o modelo real, é considerar que a mesma acontece sempre no sentido oposto ao movimento, sempre na mesma direção, dependendo da densidade do ar (ρ), de uma constante definida como coeficiente de arrasto (C) que depende do formato do objeto (para o projétil considerado, a princípio o coeficiente de arrasto será o de uma esfera). Além disso, a força de arrasto também depende da área da seção transversal do projétil (área de um círculo cujo raio (r_p) é o mesmo do projétil), e por fim, depende principalmente do módulo da velocidade ao quadrado.

Do ponto de vista matemático, a equação é descrita como:

$$\overrightarrow{F}_{ar} = -\rho C A|\overrightarrow{v}|^2\widehat{v} \tag{12}$$

Entretanto, é sabido que a densidade do ar nem sempre é constante, podendo variar com a altitude, pressão e até mesmo temperatura. Portanto, para este projeto, cujo fim é acadêmico, será considerado uma variação da densidade do ar em função da altura. Porém, de acordo com o modelo atmosférico padrão, a variação da densidade do ar é diferente para cada camada atmosférica, embora todas as equações dependam da temperatura média da camada situada (T), da constante universal dos gases ideais (R), do gradiente térmico específico da camada (λ) e do valor da gravidade no nível do mar (g).

Para a troposfera (0 a 11000m), a densidade do ar em função da altura é descrita como:

$$\rho_{tr} = \rho_0\left(\frac{T_0 + \lambda_{tr}.h}{T_0}\right)^{-(\frac{g}{R.\lambda_{tr}}+1)} \tag{13}$$

Para a baixa estratosfera (11000 a 25000m), a densidade do ar em função da altura pode ser evidenciada de modo matemático como:

$$\rho_{be} = \rho_{11000}.e^{\frac{-g(h-11000)}{R.T_{11000}}} \tag{14}$$

Por fim, na alta estratosfera (25000 a 47000m), a densidade do ar varia em função da altura da seguinte forma:

$$\rho_{ae} = \rho_{25000}\left[\frac{T_{25000} + \lambda_{ae}(h - 25000)}{T_{25000}}\right]^{-(\frac{g}{R.\lambda_{ae}}-1)} \tag{15}$$

Ademais, para qualquer altura acima de 47000m, a densidade do ar será considerada igual a zero.

Por fim, reunindo todas as informações coletadas sobre o coeficiente de arrasto, levando em consideração que a força gerada pela resistência do ar é um vetor cuja direção é a mesma do vetor velocidade, porém com sentido oposto, obtém-se:

$$\vec{F}_{ar} = \frac{\rho_{(h)}.\pi.r_p^2.C.|\vec{v}|^2}{2}\hat{v} \tag{16}$$

Contudo, a equação que define o vetor da força resultante, com sua respectiva direção e sentido de cada força envolvendo seus parâmetros, pode ser vista como:

$$\vec{F}_{res} = -\frac{G.m_T.m_p}{(R_t+h)^2}\hat{h} - \frac{\rho_{(h)}.\pi.r^2.C.|\vec{v}|^2}{2}\hat{v} \tag{17}$$

3 Flowchart

A princípio, a simulação criada a partir da biblioteca *Vpython* deverá contar com uma interação dinâmica com o usuário, ou seja, permitindo-o alterar parâmetros principais do projétil antes de cada lançamento, como sua velocidade de lançamento e altura, juntamente com o angulo variando entre 0.º e 90.º, recriando de modo simplificado a física envolvida no lançamento de foguetes.

Definidos os parâmetros de entrada, uma vez lançado, será possível acompanhar em tempo real a posição do projétil em sua respectiva órbita, podendo acompanhar, a cada instante, sua altura e velocidade, podendo pausar a reprodução do código sem restrições, para coleta de dados.

Para atualizar a posição do projétil, será utilizado um loop, que a cada ciclo decorrido, calculará sua posição a partir da equação 9, e ao fim do mesmo adicionará um pequeno instante de tempo com relação ao último tempo calculado pelo código. Sendo assim, a posição do projétil será atualizada com uma determinada frequência, na qual o intervalo de tempo entre cada cálculo deverá ser o menor possível, para não haver dissipação de erro por estar utilizando uma aproximação proposta pelo método de Euler.

Além disso, caso o projétil entre em órbita, será mostrado como saída, o período de cada órbita e sua excentricidade. Além de informar quais foram as configurações iniciais escolhidas para que o projétil pudesse entrar em órbita.

Cada etapa detalhada até aqui representa apenas as ideias principais envolvendo a proposta do projeto, entretanto poderá haver mudanças para a versão final, se adequando a um melhor entendimento e visualização da simulação.

4 Milestones

Visando a apresentação e entrega do projeto no dia 07/12, a Tabela 4 abaixo define a previsão de realização das principais etapas do projeto. É importante destacar que as datas apresentadas podem não representar com fidelidade o que irá acontecer no decorrer da criação do projeto, podendo surgir imprevistos e dificuldades durante a realização do mesmo.

Datas	Atividades previstas
21/09 a 21/10	Esquematização do projeto, definir e resolver toda a física/matemática envolvida e criação do esqueleto do código
21/10 a 21/11	Etapa de programação, implementação de todas as ideias e por fim a realização de testes
21/11 a 07/12	Correções, pequenas melhorias e preparação para a apresentação

Tabela 1: Previsão para a realização das etapas do projeto.

5 Referencias bibliográficas

- https://pt.wikipedia.org/wiki/Atmosfera_padro_internacional
- https://archive.org/details/newtonspmathema00newtrich/page/n517/mode/2up
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Principia_Mathematica
- https://www1.grc.nasa.gov/beginners-guide-to-aeronautics/drag-equation-2/
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Coeficiente_de_resist%C3%AAncia_aerodin%C3%A2mica
- https://x-engineer.org/aerodynamic-drag/