Zusammenfassung
Wahrscheinlichkeit und Statistik

Autor:
André Gasser, gassera@student.ethz.ch

Datum:
Januar 2013

1 Kombinatorik

1.1 Permutation

n unterschiedlichen Kugeln:

$$P(n) = n!$$

n unterschiedliche Kugeln mit $n_1, n_2, ..., n_k$ gleichen Kugeln:

$$P(n, n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Bemerkungen:

- Ermitteln der Anzahl Anordnungen.

1.2 Kombination

Mit Zurücklegen:

$$C_w(n,k) = \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Ohne Zurücklegen:

$$C(n,k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bemerkungen:

- Reihenfolge spielt keine Rolle.

1.3 Variation

Mit Zurücklegen:

$$V_w(n,k) = n^k$$

Ohne Zurücklegen:

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Bemerkungen:

- Reihenfolge ist wesentlich.

2 Wahrscheinlichkeit

2.1 Allgemeine Rechenregeln

$$\begin{aligned} P\left[A^C\right] &= 1 - P[A] \\ P\left[\Omega\right] &= P[A] + P\left[A^C\right] = 1 \\ P[\emptyset] &= 0 \\ P\left[B^C|A\right] &= 1 - P[B|A] \\ A \subseteq B &\Rightarrow P[A] \leq P[B] \end{aligned}$$

2.2 DeMorgan'sche Gesetze

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

2.3 Additionssatz

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A oder B eintritt.

Allgemein:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

A,B disjunkt:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

Bemerkungen:

- Wenn die Ereignisse nicht offensichtlich disjunkt sind, die **erste Formel verwenden**!

2.4 Multiplikationssatz

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass die Ereignisse A und B eintreten.

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B|A]$$

Bemerkungen

- $P[A, B] = P[A \cap B]$.

2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von B gegeben A entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn man schon weiss, dass A eingetreten ist. Es gilt:

$$P[B|A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}$$

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B|A] = P[B] \cdot P[A|B]$$

Bemerkungen:

- Die **Pfadregel**, nach der Wahrscheinlichkeiten in einem **Wahrscheinlichkeitsbaum** multipliziert werden, um die Wahrscheinlichkeit eines Blattes zu erhalten, entspricht einer Verkettung bedingter Wahrscheinlichkeiten.

2.5.1 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P[B] = \sum_{i=1}^{n} P[A_i] \cdot P[B|A_i]$$

2.5.2 Satz von Bayes

Zur Berechnung einer bestimmten Zwischenstation A_k in einem Ereignisbaum, wobei mehrere Ereignisse A_i zu Ereignis B führen.

$$P[A_k|B] = \frac{P[A_k] \cdot P[B|A_k]}{\sum\limits_{i=1}^{n} P[A_i] \cdot P[B|A_i]}$$

2.6 Eigenschaften von Ereignissen

2.6.1 Unabhängigkeit

Wenn zwischen zwei Ereignissen A und B kein kausaler Zusammenhang besteht (d.h. es gibt keine gemeinsamen Ursachen oder Ausschliessungen), dann sind sie *unabhängig* voneinander. In diesem Fall gilt:

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$$

3 Zufallsvariablen

3.1 Diskrete Zufallsvariablen

3.1.1 Gewichtsfunktion

Die Summe aller Gewichte ist immer 1 und die Werte immer im Intervall [0,1]:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x) = 1$$

3.1.2 Verteilungsfunktion

3.2 Stetige Zufallsvariablen

3.2.1 Dichtefunktion

Die Fläche unter der Dichtefunktion ist immer 1 und die Werte immer im Intervall [0,1]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Bemerkungen

- Durch Integrieren der Dichtefunktion erhält man die Verteilungsfunktion.

3.2.2 Verteilungsfunktion

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

Bemerkungen

- Durch Ableiten der Verteilungsfunktion erhält man die Dichtefunktion.

3.3 Gemeinsame Verteilungen

Gemeinsame Verteilungsfunktion: Die gemeinsame Verteilungsfunktion von n Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ ist die Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$,

$$F(t_1, ..., t_n) := P[X_1 \leq t_1, ..., X_n \leq t_n]$$

Gemeinsame Gewichtsfunktion: Falls $X_1, ..., X_n$ *diskrete* Zufallsvariablen sind, ist ihre gemeinsame Gewichtsfunktion $p : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ definiert durch

$$p(x_1, ..., x_n) := P[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n]$$

Gemeinsame Dichte: Seien $X_1, ..., X_n$ *stetige* Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion $F(t_1, ..., t_n)$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ heisst *gemeinsame Dichte* von $X_1, ..., X_n$, falls für alle $t_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$F(t_1, ..., t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} ... \int_{-\infty}^{t_n} f(x_1, ..., x_n)\ dx_n...dx_1$$

3.3.1 Randverteilungen

Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F_{XY}, dann ist die Randverteilung $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ von X definiert durch

$$F_X = P[X \leq x] = P[X \leq x, Y \leq \infty] = \lim_{y\to\infty} F_{XY}(x, y)$$

Für zwei *diskrete* Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Gewichtsfunktion $f_{XY}(x, y)$ ist die Gewichtsfunktion der Randverteilung von X gegeben durch

$$f_X = P[X = x] = \sum_j P[X = x, Y = y_j] = \sum_j f_{XY}(x, y_j)$$

Für zwei *stetige* Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Dichte $f_{XY}(x, y)$ ist die Dichtefunktion der Randverteilung (Randdichte) von X gegeben durch

$$f_X(x) = \int_{\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\ dy$$

3.3.2 Bedingte Verteilung

Bedingte Gewichtsfunktion: Seien X und Y *diskrete* Zufallsvariablen mit gemeinsamer Gewichtsfunktion $f_{XY}(x, y)$, dann ist die bedingte Gewichtsfunktion $f_{X|Y}(x|y)$ von X gegeben Y definiert durch

$$f_{X|Y}(x|y) = P[X = x|Y = y] = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Bedingte Dichte: Für zwei *stetige* Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Dichte $f_{XY}(x, y)$ ist die bedingte Dichte $f_{X|Y}$ von X gegeben Y definiert durch

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

3.4 Funktionen diskreter Zufallsvariablen

3.4.1 Summe von Zufallsvariablen

...

3.4.2 Produkte von Zufallsvariablen

...

3.5 Funktionen stetiger Zufallsvariablen

$$\begin{aligned}
Y = aX + b &= F_Y(t) = P[Y \leq t] = P[aX + b \leq t] \\
&= P[X \leq \tfrac{t-b}{a}] = F_X(\tfrac{t-b}{a}) \\
Y = X^2 &= F_Y(t) = P[Y \leq t] = P[X^2 \leq t] \\
&= P[-\sqrt{t} \leq t \leq \sqrt{t}] = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) \\
Y = \tfrac{1}{X} &= F_Y(t) = P[Y \leq t] = P[\tfrac{1}{X} \leq t] \\
&= P[X \geq \tfrac{1}{t}] = 1 - P[X \leq \tfrac{1}{t}] = 1 - F_X(\tfrac{1}{t})
\end{aligned}$$

3.6 Chebyshev-Ungleichung

Die Chebyshev-Ungleichung liefert eine Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten, auch wenn die genaue Verteilungsfunktion nicht bekannt ist. Es muss nur der Erwartungswert $E[X]$ und die Varianz $Var[X] < \infty$ einer Zufallsvariablen X bekannt sein, dann gilt für jedes $k > 0$:

$$P\left[|X - E[X]| \geq k\right] \leq \frac{Var[X]}{k^2}$$

3.7 Eigenschaften von Zufallsvariablen

3.7.1 Unabhängigkeit

Zwei Zufallsvariablen X und Y heissen unabhängig, wenn stets gilt

$$\begin{aligned} F(x,y) &= F_X(x) \cdot F_Y(y) \\ f(x,y) &= f_X(x) \cdot F_Y(y) \end{aligned}$$

wobei $F_X(x), F_X(y)$ die Verteilungsfunktionen und $f_X(x), f_Y(y)$ die Gewichts- bzw. Dichtefunktionen von X und Y sind.

3.7.2 Unkorreliert

Zwei Zufallsvariablen X und Y heissen *unkorreliert*, falls gilt $Cov(X,Y) = 0$.
Eine Menge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., X_n$ heissen *paarweise unkorreliert*, wenn alle Paare X_i, X_j mit $i \neq j$ unkorreliert sind.

3.8 Erwartungswert

Der Erwartungswert ist das langfristige Durchschnittsergebnis bei einem Zufallsexperiment mit vielen Wiederholungen.

Diskrete Verteilung:

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot f(x_i)$$

Stetige Verteilung:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

3.8.1 Additionssatz für Erwartungswerte

Der Erwartungswert einer aus n (diskreten oder stetigen) Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., X_n$ gebildeten Summe

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_n X_n$$

ist gleich der Summe der Erwartungswerte der einzelnen Zufallsvariablen:

$$E[Z] = a_1 E[X_1] + a_2 E[X_2] + ... + a_n E[X_n]$$

3.8.2 Multiplikationssatz für Erwartungswerte

Der Erwartungswert eines aus n *stochastisch unabhängigen* (diskreten oder stetigen) Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., X_n$ gebildeten Produkts

$$Z = X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n$$

ist gleich dem Produkt der Erwartungswerte der einzelnen Zufallsvariablen:

$$E[Z] = E[X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n] = E[X_1] \cdot E[X_2] \cdot ... \cdot E[X_n]$$

3.8.3 Formeln für 2. Moment

Dieses wird z.B. für die Momenten-Methode und zur Berechnung der Varianz benötigt.

Diskrete Verteilung:

$$E[X^2] = \sum_i x_i^2 \cdot f(x_i)$$

Stetige Verteilung:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx$$

3.8.4 Weitere Rechenregeln

$$\begin{aligned} E[a] &= a(\text{für a = const.}) \\ E[aX] &= a \cdot E[X](\text{für a = const.}) \\ E[aX+b] &= a \cdot E[X] + b \\ E[E[X]] &= E[X] \end{aligned}$$

3.9 Varianz

Die Varianz ist ein Streuungsmass, also ein Mass für die Abweichung einer Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert.

Diskrete Verteilung:

$$Var[X] = \sum_i (x_i - E[X])^2 \cdot f(x_i)$$

Stetige Verteilung:

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot f(x) dx$$

Vereinfachte Berechnung:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

3.9.1 Additionssatz für Varianzen

Die Varianz einer aus n *stochastisch unabhängigen* (diskreten oder stetigen) Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., X_n$ gebildeten Summe

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_n X_n$$

ist gleich der Summe der Varianzen der einzelnen Zufallsvariablen:

$$Var[Z] = a_1^2 Var[X_1] + a_2^2 Var[X_2] + ... + a_n^2 Var[X_n]$$

3.9.2 Weitere Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
Var[aX+b] &= a^2 \cdot Var[X] \\
Var[aX+bY] &= a^2 \cdot Var[X] + b^2 \cdot Var[Y] + \\
&\quad 2ab \cdot Cov[X,Y]
\end{aligned}
$$

3.10 Kovarianz

Die Kovarianz ist ein Mass für den Zusammenhang zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y bzw. der Streuung zwischen ihnen.

$$
\begin{aligned}
Cov[X,Y] &= E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\
Cov[X,Y] &= E[XY] - E[X] \cdot E[Y] \\
Cov[X,Y] &= \tfrac{1}{2} \cdot (Var[X+Y] - Var[X] - Var[Y]) \\
Cov[X,Y] &= Cov[Y,X] \\
Cov[X,X] &= Var[X] \\
Cov[aX+b,Y] &= a \cdot Cov[X,Y] \\
Cov[X+Y,Z] &= Cov[X,Z] + Cov[Y,Z] \\
\forall a \in \mathbb{R} : Cov[X,a] &= 0 \\
\forall b \in \mathbb{R} : Cov[X,bY] &= b \cdot Cov[X,Y]
\end{aligned}
$$

3.11 Standardabweichung

$$sd[X] = \sqrt{Var[X]}$$

4 Indikatorfunktion $\mathbb{1}$

Die Indikatorfunktion ist eine spezielle Zufallsvariable, welche angibt ob ein Ereignis A eingetreten ist.

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases} \tag{1}$$

5 Diskrete Verteilungen

5.1 Bernoulli-Verteilung

Verteilung eines Experiments mit zwei Ausgängen (Erfolg, Misserfolg) mit Erfolgsparameter p.

Notation:

$$X \sim Be(p)$$

Gewichtsfunktion:

$$f(x) = P[X=x] = p^x \cdot (1-p)^{1-x}$$

Erwartungswert:

$$E[X] = p$$

Varianz:

$$Var[X] = p(1-p)$$

Beispiel (Münzwurf): Ein fairer Münzwurf ist bernoulliverteilt mit Parameter $p = \frac{1}{2}$. Für einen Parameter $p \neq \frac{1}{2}$ wäre der Münzwurf unfair.

5.2 Binomial-Verteilung

Beschreibt die Anzahl der Erfolge in einer Serie von *gleichartigen* und *unabhängigen* Versuchen, die jeweils genau zwei mögliche Ergebnisse haben (”Erfolg” oder ”Misserfolg”). n ist die Anzahl der Versuche bzw. Wiederholungen, p ist die Wahrscheinlichkeit für einen Ërfolg”.

Notation:

$$X \sim Bin(n,p)$$

Gewichtsfunktion:

$$f(x) = P[X=x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Erwartungswert:

$$E[X] = np$$

Varianz:

$$Var[X] = np(1-p)$$

Bemerkungen:

- Die Binomialverteilung $Bin(n,p)$ darf für grosse n und kleine p näherungsweise durch die Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = np$ ersetzt werden (Faustregel: $np < 10$ und $n > 1500p$).

Beispiel: Geburtstagsproblem, Anzahl der Köpfe beim 10-maligen Münzwurf.

5.3 Geometrische Verteilung

Wartezeit auf ersten Erfolg bei einer Folge von 0-1-Experimenten mit Erfolgsparameter p. X ist die Nummer des ersten erfolgreichen Experiments.

Notation:

$$X \sim Geom(p)$$

Gewichtsfunktion:

$$f(x) = P[X=x] = p(1-p)^{x-1}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P[X \leq x] = 1 - (1-p)^x$$

Erwartungswert:

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

Varianz:

$$Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

Beispiel: Wartezeit auf Kopf bei wiederholtem Münzwurf

5.4 Poisson-Verteilung

Ereignet sich in einem Intervall (z.B. in einer gewissen Zeit, auf einer gewissen Fläche, in einem gewissen Volumen, usw.) ein völlig zufällig auftretendes Ereignis im Schnitt μ mal (Erwartungswert), dann ist die Zufallsgrösse, welche die Häufigkeit des Ereignisses in diesem Intervall angibt, poissonverteilt mit Parameter $\lambda = \mu$.

Notation:

$$X \sim P(\lambda), X \sim Pois(\lambda)$$

Gewichtsfunktion:

$$f(x) = P[X = x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P[X \leq x] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Erwartungswert:

$$E[X] = \lambda$$

Varianz:

$$Var[X] = \lambda$$

Bemerkungen

- Falls $Z = X + Y$ und $X \sim Pois(\lambda)$, $Y \sim Pois(\mu)$ dann gilt $Z \sim Pois(\lambda + \mu)$.

Beispiel: Anzahl eingehender Druckaufträge in $n = 3600$ Sekunden mit einer Jobwahrscheinlichkeit von $p = 1\%$ pro Sekunde, wenn pro Sekunde maximal ein Job eintreffen kann.

5.5 Negativbinomiale Verteilung

Wartezeit auf den r-ten Erfolg bei einer Folge von unabhängigen 0-1-Experimenten mit Erfolgsparameter p.
Notation:

$$X \sim NB(r, p)$$

Gewichtsfunktion:

$$f(x) = P[X = x] = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{i=r}^{x} \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}$$

Erwartungswert:

$$E[X] = \frac{r}{p}$$

Varianz:

$$Var[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Beispiel: Wartezeit auf dritten Kopf beim wiederholten Münzwurf

5.6 Hypergeometrische Verteilung

Urnenmodell für Ziehen ohne Zurücklegen. In einer Urne befinden sich n Gegenstände. Davon sind r Gegenstände vom Typ A und $n-r$ Gegenstände vom Typ B. Es werden m Gegenstände ohne Zurücklegen gezogen. X beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl k der Gegenstände vom Typ A in der Stichprobe.

Notation:

$$X \sim HypGeom(n, m, r)$$

Gewichtsfunktion:

$$f(x) = P[X = x] = \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{k=max(0,m-n)}^{x} \frac{\binom{r}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{r+n}{m}}$$

Erwartungswert:

$$E[X] = \frac{mr}{n}$$

Varianz:

$$Var[X] = \frac{mr}{n^2(n-1)}(n-r)(n-m)$$

Beispiel (Lotto): Anzahl Zahlen $n = 45$, richtige Zahlen $r = 6$, meine Zahlen $m = 6$. Die Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige ist

$$f(4) = \frac{\binom{6}{4}\binom{39}{2}}{\binom{35}{6}} \approx 0.00136$$

6 Stetige Verteilungen

6.1 Gleichverteilung

Alle Ereignisse zwischen a und b sind gleich wahrscheinlich.

Notation:

$$X \sim U(a, b)$$

Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$$

Erwartungswert:

$$E[X] = \frac{b+a}{2}$$

Varianz:

$$Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

6.2 Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist ein Modell für Wartezeiten und Lebensdauern. Beispielanwendungen sind die Berechnung der Lebensdauer von Bauteilen und Zugverspätungen.

Notation:

$$X \sim Exp(\lambda)$$

Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Erwartungswert:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Varianz:

$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Bemerkungen:

- Sind $X_1 \sim Exp(\lambda_1), ..., X_n \sim Exp(\lambda_n)$ *stochastisch unabhängig*, so ist $\min(X_1, ..., X_n) \sim Exp(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$.
- Die Summe von n exponentialverteilten Zufallsvariablen mit *gleichem Parameter* λ ist gammaverteilt mit $\Gamma(n, \lambda)$.
- Erwartungswert und Standardabweichung sind gleich ($E[X] = sd[X]$).

Beispiel (Lebensdauer:) Die Exponentialverteilung ist eine typische Lebensdauerverteilung. So ist z.B. die Lebensdauer von elektronischen Bauteilen häufig annähernd exponentialverteilt.

6.3 Normalverteilung

Die besondere Bedeutung der Normalverteilung beruht unter anderem auf dem zentralen Grenzwertsatz, der besagt, dass eine Summe von n unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlicher Varianz im Grenzwert $n \to \infty$ normalverteilt ist.

Notation:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P[X \leq x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Erwartungswert:

$$E[X] = \mu$$

Varianz:

$$Var[X] = \sigma^2$$

Transformation einer normalverteilten Zufallsvariable X in eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Beispiel: Gewicht von Kürbissen, Streuung von Messungen um den Mittelwert, Gewichte oder Grössen von Individuen in einer großen Bevölkerung.

6.4 Standardnormalverteilung

Notation:

$$X \sim N(0, 1)$$

Dichtefunktion:

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(u) = P[X \leq u] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Erwartungswert:

$$E[X] = 0$$

Varianz:

$$Var[X] = 1$$

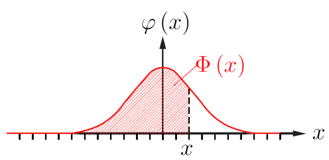
Bemerkungen:

- Die Standardnormalverteilung entspricht einer Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

6.4.1 Tabelle ablesen

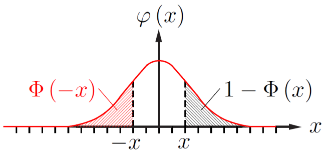
$\Phi(x)$ bedeutet, dass man zu einem Wert x die Wahrscheinlichkeit in der Tabelle auslesen will. $\Phi^{-1}(x)$ bedeutet, dass für eine Wahrscheinlichkeit der Tabellenwert ermittelt werden soll.

Positive Werte: $\Phi(x)$



Bsp: $\Phi(1.25) = 0.8944$

Negative Werte: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



Bsp: $\Phi(-1.25) = 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944$

Für nicht tabellierte Werte:

$$\Phi^{-1}(0.03) = -\Phi^{-1}(0.97) = -1.88$$

Regeln zum Auslesen der Werte:

- Ist ein gesuchter Wert c nicht tabelliert, so wird derjenige Wert a oder b genommen, der näher bei c liegt.
- Sind zwei Werte a und b gleich weit vom gesuchten Wert c entfernt, so wird der Mittelwert von a und b verwendet.

6.5 Pareto-Verteilung

Die Pareto-Verteilung, ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einem rechtsseitigen unendlichen Intervall $[x_0, \infty)$. Eine stetige Zufallsvariable X heisst pareto-verteilt $Par(\alpha, x_0)$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $x_0 > 0$, mit folgenden Eigenschaften:

Notation:

$$X \sim Par(\alpha, x_0)$$

Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x_0}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x; x_0, \alpha) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^{-\alpha} & x \geq x_0, \alpha > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erwartungswert:

$$E[X] = \begin{cases} x_0 \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Varianz:

$$Var[X] = \begin{cases} x_0^2 \left(\dfrac{\alpha}{\alpha-2} - \dfrac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}\right) & \\ = x_0^2 \dfrac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} & \alpha > 2 \\ \infty & \alpha \leq 2 \end{cases}$$

Standardabweichung:

$$sd[X] = \frac{x_0}{\alpha - 1}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 2}} \text{ für } \alpha > 2$$

Beispiel: Die Verteilung wurde zunächst zur Beschreibung der Einkommensverteilung Italiens verwendet. Paretoverteilungen finden sich charakteristischerweise dann, wenn sich zufällige, positive Werte über mehrere Größenordnungen erstrecken und durch das Einwirken vieler unabhängiger Faktoren zustande kommen.

7 Grenzwertsätze

In vielen Situationen taucht die Summe von *vielen gleichartigen Zufallsvariablen* auf. Wir möchten wissen, wie sich diese Summe etwa verhält, und untersuchen deshalb ihre Asymptotik, wenn die Anzahl der Summanden gegen unendlich geht.
Für die folgenden Sätze definieren wir einige Grössen:
$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ und $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

7.1 Schwaches Gesetz der grossen Zahlen

Seien $X_1, X_2, ..., X_n$ *unabhängige* oder *paarweise unkorrelierte* Zufallsvariablen mit gleichem Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und gleicher Varianz $Var[X_i] = \sigma^2$. Sei $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left[|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon\right] = 0$$

Bemerkungen:

- Für hinreichend grosse n konvergiert der Mittelwert $\overline{X}_n$ gegen den Erwartungswert μ.
- Der Satz funktioniert nicht, falls der Erwartungswert oder die Varianz nicht definiert sind.

7.2 Starkes Gesetz der grossen Zahlen

Seien $X_1, ..., X_n$ *unabhängige* Zufallsvariablen mit *gleicher Verteilung* (i.i.d) und Erwartungswert $E[X_i] = \mu$. Sei $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann gilt:

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu\right] = 1$$

Bemerkungen:

- Für hinreichend grosse n konvergiert der Mittelwert $\overline{X}_n$ gegen den Erwartungswert μ.

7.3 Zentraler Grenzwertsatz

$X_1, X_2, X_3, ..., X_n, ...$ seien *stochastisch unabhängige* Zufallsvariablen, die alle der *gleichen* Verteilungsfunktion mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 genügen. Dann konvergiert die Verteilungsfunktion $F_Z(u)$ der standardisierten Zufallsvariablen

$$Z_n = \frac{(X_1 + X_2 + ... + X_n) - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

im Grenzfall $n \to \infty$ gegen die Verteilungsfunktion $\Phi(t)$ der Standardnormalverteilung:

$$\lim_{n\to\infty} F_Z(u) = \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Bemerkungen:

- Für ein hinreichend grosses n ist $Z_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ annähernd *normalverteilt* mit Erwartungswert $E[Z_n] = n\mu$ und Varianz $Var[Z_n] = n\sigma^2$.

8 Statistik

8.1 Schätzer

Schätzer sind Funktionen von Zufallsvariablen und somit selbst wieder Zufallsvariablen. Sie verfügen deshalb über einen Erwartungswert und eine Varianz.

8.1.1 Erwartungstreuer Schätzer

Ein Schätzer T ist *erwartungstreu* wenn der Erwartungswert des Schätzers gleich dem zu schätzenden Parameter ϑ ist:

$$E_\vartheta[T] = \vartheta$$

8.1.2 Konsistenter Schätzer

Ein Folge von Schätzern $T^{(n)}$ ist *konsistent* wenn diese mit zunehmendem Stichprobenumfang n gegen den gesuchten Parameter ϑ konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} P_\vartheta \left[|T^{(n)} - \vartheta| > \epsilon\right] = 0 \text{ (für jedes } \epsilon > 0)$$

8.1.3 Momenten-Methode

Sei $X_1, X_2, ..., X_n$ eine Stichprobe vom Umfang n mit gegebener Verteilung t. Die Parameter von t seien unbekannt. Mit der Momenten-Methode können diese geschätzt werden. Der Momentenschätzer ist i.d.R. nicht erwartungstreu.

Vorgehen:

1. 1. Moment berechnen:
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
2. 2. Moment berechnen:
$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2$$
3. Nimm die Formel für den Erwartungswert der geg. Verteilung t und setze sie gleich $\overline{x}$
4. Nimm die Formel für die Varianz der geg. Verteilung t und setze sie gleich s^2
5. Löse das Gleichungssystem auf. Du erhälst die gesuchten Parameter.

8.1.4 Maximum-Likelihood-Methode

Methode zur systematischen Gewinnung von Schätzfunktionen.

Vorgehen:

1. Likelihood-Funktion aufstellen:
$$L(x_1, ..., x_n, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \vartheta)$$
2. Log-Likelihood-Funktion aufstellen (logarithmieren von L):
$$\log L(x_1, ..., x_n, \vartheta)$$
3. $\log L$ mit Hilfe elementarer Logarithmenregeln möglichst vereinfachen
4. $\log L$ nach jedem unbekannten Parameter partiell ableiten
5. Partielle Ableitungen = 0 setzen
6. Gleichungssystem nach Parametern auflösen

8.2 Tests

8.2.1 Wichtige Begriffe

- **Einseitiger Test:** Einen einseitigen Test führt man durch, wenn man wissen will, ob sich ein Wert vergrössert oder verkleinert hat.
- **Zweiseitiger Test:** Einen zweiseitigen Test führt man durch, wenn man lediglich wissen will, ob sich ein Wert verändert hat.
- **Nullhypothese H_0:** Die zu prüfende Annahme.
- **Alternativhypothese** H_A: Alternative Annahme, falls H_0 verworfen werden muss.
- **Signifikanzniveau** α: Ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese verworfen werden muss (auch Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art).
- **Teststatistik T:** Test- oder Prüfwert.
- **P-Wert:** Das kleinste Niveau, auf dem der Test die Nullhypothese noch verwirft.
- **Fehler 1. Art:** H_0 wird verworfen, obwohl sie richtig wäre.
- **Fehler 2. Art:** H_0 wird beibehalten, obwohl H_A stimmt.

8.2.2 Allgemeines Vorgehen

1. Wahl des Modells
2. Formulieren der Nullhypothese H_0
3. Formulieren der Alternativhypothese H_A
4. Teststatistik T aufstellen
5. Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese
6. Bestimmen des Verwerfungsbereichs
7. Konkreter Wert für Teststatistik T berechnen
8. Testentscheidung: H_0 beibehalten oder verwerfen?

8.2.3 z-Test

Der z-Test ist ein Test für den Erwartungswert bei *bekannter* Varianz σ^2. Es seien also $X_1, X_2, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ *i.i.d.*. Wir wollen die Nullhypothese $\mu = \mu_0$ testen.

Nullhypothese und Alternativhypothese:

a) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_A : \mu \neq \mu_0$ (zweiseitig)

b) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_A : \mu > \mu_0$ (einseitig)

c) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_A : \mu < \mu_0$ (einseitig)

Teststatistik:

Mittelwert $\overline{X}$: $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$
Teststatistik T: $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Verwerfungsbereich:

a) $|T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = c$
$(P_{\vartheta_0}[|T|] > \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}] = \alpha)$
Verwerfungsbereich $K = (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$

b) $T > \Phi^{-1}(1-\alpha) = c$
Verwerfungsbereich $K = (c, \infty)$

c) $T < t_\alpha = -t_{1-\alpha} = -\Phi^{-1}(1-\alpha) = c$
Verwerfungsbereich $K = (-\infty, -c)$

8.2.4 t-Test

Der t-Test ist ein Test für den Erwartungswert bei *unbekannter Varianz* σ^2. Es seien also $X_1, X_2, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$*i.i.d.*. Wir wollen die Nullhypothese $\mu = \mu_0$ testen.

Nullhypothese und Alternativhypothese:

a) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_A : \mu \neq \mu_0$ (zweiseitig)

b) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_A : \mu > \mu_0$ (einseitig)

c) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_A : \mu < \mu_0$ (einseitig)

Teststatistik:

Mittelwert $\overline{X}$: $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$
Schätzfunktion für S^2: $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$
Teststatistik T: $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Die Teststatistik T ist **t-verteilt** mit $n-1$ **Freiheitsgraden**.

Verwerfungsbereich:

a) $|T| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = c$
Verwerfungsbereich $K = (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$

b) $T > t_{n-1,1-\alpha} = c$
Verwerfungsbereich $K = (c, \infty)$

c) $T < -t_{n-1,1-\alpha} = -c$
Verwerfungsbereich $K = (-\infty, -c)$

8.2.5 Likelihood-Quotienten-Test

Der Likelihood-Quotienten-Test kann man verwenden, um eine geeignete Teststatistik T zu erhalten.

Vorgehen:

1. Verallgemeinerter Likelihood-Quotient aufstellen:
$$R(x_1, x_2, ..., x_n; \vartheta_0, \vartheta_A) := \frac{L(x_1, x_2, ..., x_n; \vartheta_0)}{L(x_1, x_2, ..., x_n; \vartheta_A)}$$
2. Formel vereinfachen. Im Exponent muss eine Summenformel stehen.
3. Überlegen, welcher Wert grösser ist, ϑ_0 oder ϑ_A?

Ist dieser Quotient klein, sind die Beobachtungen für die Alternativhypothese deutlich wahrscheinlicher als für die Nullhypothese. Der Verwerfungsbereich $K := [0, c)$ wird so gewählt, dass der Test das gewünschte Signifikanzniveau einhält.

8.2.6 Ungepaarter Zweistichproben-z-Test

Seien $X_1, X_2, ..., X_n \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_1, Y_2, ..., Y_n \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$ zwei Stichproben mit $m = n$ oder $m \neq n$. Die Erwartungswerte μ_X und μ_Y seien unbekannt, die Varianz σ^2 sei *bekannt*. Der Test kann wie ein normaler z-Test durchgeführt werden, als Teststatistik T wird jedoch folgende Formel verwendet:

$$T = \frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0,1)$$

8.2.7 Ungepaarter Zweichstichproben-t-Test

Seien $X_1, X_2, ..., X_n \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_1, Y_2, ..., Y_n \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$ zwei Stichproben mit $m = n$ oder $m \neq n$. Die Erwartungswerte μ_X und μ_Y seien unbekannt, die Varianz σ^2 sei ebenfalls *unbekannt*. Der Test kann wie ein normaler t-Test durchgeführt werden, als Teststatistik T wird jedoch folgende Formel verwendet:

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$$
$$S_Y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} \left(Y_j - \overline{Y}_m\right)^2$$
$$S^2 = \frac{1}{m+n-2} \left((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2\right)$$
$$T = \frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

8.2.8 Gepaarter Zweistichproben-Test

In diesem Fall können die beiden Stichproben $X_1, X_2, ..., X_n$ *i.i.d* $\sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *i.i.d* $\sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ durch Definition einer neuen Zufallsvariable $Z = X_i - Y_i$ auf eine Stichprobe vereinfacht werden. Der Test kann dann wie ein normaler z-Test oder t-Test durchgeführt werden, wobei $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ *i.i.d* $\sim N(\mu_X - \mu_Y, 2\sigma^2)$ gilt.

8.3 Konfidenzbereiche

Ein Konfidenzbereich gibt ein Intervall an, in dem sich ein gesuchter Parameter mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit befindet.

Standardabweichung σ bekannt

$$C(X_1,...,X_n) = \left[\overline{X}_n - \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Standardabweichung σ nicht bekannt

$$C(X_1,...,X_n) = \left[\overline{X}_n - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

9 Differentialrechnung

9.1 Faktorregel

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$$

9.2 Summenregel

Bei einer endlichen Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$y = f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x) \Rightarrow y' = f_1'(x)+f_2'(x)+...+f_n'(x)$$

9.3 Produktregel

Die Ableitung einer in Produktform $y = u(x) \cdot v(x)$ darstellbaren Funktion erhält man nach folgender Produktregel:

$$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = u'v + uv'$$

9.4 Quotientenregel

Die Ableitung einer Funktion, die als Quotient zweier Funktionen $u(x)$ und $v(x)$in der Form $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ darstellbar ist, erhält man nach der Quotientenregel:

$$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

9.5 Kettenregel

Die Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion $y = F(u(x)) = f(x)$ erhält man als Produkt aus äusserer und innerer Ableitung:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

9.6 Partielle Differentiation

Summanden, die keine Variable beinhalten nach der abgeleitet wird, fallen WEG!

9.7 Wichtige elementare Ableitungen

$$\begin{array}{lll}
f(x) = c & \rightarrow & f'(x) = 0 \\
f(x) = x^n & \rightarrow & f'(x) = n \cdot x^{n-1} \\
f(x) = \sqrt{x} & \rightarrow & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f(x) = e^x & \rightarrow & f'(x) = e^x \\
f(x) = a^x & \rightarrow & f'(x) = (\ln a) \cdot a^x \\
f(x) = \ln x & \rightarrow & f'(x) = \frac{1}{x} \\
f(x) = \log_a x & \rightarrow & f'(x) = \frac{1}{(\ln a) \cdot x}
\end{array}$$

10 Integralrechnung

10.1 Faktorregel

Ein konstanter Faktor darf vor das Integral gezogen werden:

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$$

10.2 Summenregel

Eine endliche Summe von Funktionen darf giedweise integriert werden:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x))\, dx =$$

$$\int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_1(x)dx + ... + \int_a^b f_1(x)dx$$

10.3 Vertauschungsregel

Vertauschen der beiden Integrationsgrenzen bewirk einen Vorzeichenwechsel des Integrals:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

10.4 Gleiche Integrationsgrenzen

Fallen die Integrationsgrenzen zusammen ($a = b$), so ist der Integralwert gleich Null:

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

10.5 Partielle Integration

$$\int f(x)dx = \int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx$$

Vorgehen:

1. Integrand in $u(x)$ und $v'(x)$ zerlegen.
2. $u(x)$ ableiten, $v'(x)$ integrieren.
3. Formel aufschreiben und lösen.

10.6 Wichtige Stammintegrale

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \int e^x dx = e^x + C$

10.7 Weitere Integrale

$$\begin{array}{rcll}
\int a\ dx & = & ax & \\
\int x^a\ dx & = & \frac{1}{a+1}x^{a+1}, & a \neq -1 \\
\int (ax+b)^c\ dx & = & \frac{1}{a(c+1)}(ax+b)^{c+1}, & c \neq -1 \\
\int \frac{1}{x}\ dx & = & \log|x|, & x \neq 0 \\
\int \frac{1}{ax+b}\ dx & = & \frac{1}{a}\log|ax+b| & \\
\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx & = & \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} & \\
\int e^{ax}\ dx & = & \frac{1}{a}e^{ax} & \\
\int xe^{ax}\ dx & = & \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) & \\
\int x^2e^{ax}\ dx & = & e^{ax}\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right) & \\
\int \log|x|\ dx & = & x(\log|x|-1) & \\
\int \log_a|x|\ dx & = & x(\log_a|x|-\log_a e) & \\
\int x^a\log x\ dx & = & \frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\log x-\frac{1}{a+1}\right), & a \neq -1, x > 0 \\
\int \frac{1}{x}\log x\ dx & = & \frac{1}{2}\log^2 x, & x > 0
\end{array}$$

11 Verschiedenes

Binomialkoeffizient
Der Binomialkoeffizient

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$$

gibt für $n, k \in \mathbb{N}$ an, **wie viele Möglichkeiten es gibt,** k **Objekte aus** n **Objekten auszuwählen**. Damit gibt der Binomialkoeffizient an, wie viele k-elementige Teilmengen aus einer n-elementigen Menge gebildet werden können (gesprochen: "k aus n" oder "k tief n").

Für $k = 0$ ist der Binomialkoeffizient 1:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) = 1$$

Für $k = 1$ ist der Binomialkoeffizient n:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) = n$$

Für $k > n$ ist der Binomialkoeffizient stets 0.

Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = (x-1)!$$

Diverse Summenformeln

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} = e$$

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda - 1$$

$$\sum_{i=0}^n i = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^\infty a\cdot p^i = \sum_{i=1}^\infty a\cdot p^{i-1} = \frac{a}{1-p}$$

Mitternachtsformel
Formel zum Auflösen von allgemeinen quadratischen Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Produkteformeln

$$\prod_{k=m}^n a\cdot x_i = a^{n-m+1}\cdot\prod_{k=m}^n x_i$$

Logarithmenregeln

$$\begin{array}{rcl}
\log(uv) & = & \log(u)+\log(v) \\
\log\left(\frac{u}{v}\right) & = & \log(u)-\log(v) \\
\log_b(r) & = & \frac{\log_a(r)}{\log_a(b)} \\
\log_a(u^k) & = & k\cdot\log_a(u) \\
\log_a(\sqrt[n]{u}) & = & \log_a(u^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\cdot\log_a(u) \\
\log_a(a^b) & = & b \\
\log 1 & = & 0 \\
\log_a(a) & = & 1 \\
\ln e & = & 1
\end{array}$$

12 Beispiele

12.1 t-Test

Ein Waschmittelhersteller bringt 5kg-Packungen in den Umlauf. Die Konsumentenschutzorganisation kauft 25 Packungen. Es ergibt sich ein Mittel von $\overline{X} = 4.9kg$ und eine empirische Stichprobenvarianz $S^2 = 0.1kg^2$. Die einzelnen Gewichte seine durch unabhängige $N(\mu, \sigma^2)$ Zufallsvariablen beschrieben.

1. Wie lauten die Hypothesen H_0 und H_A?
2. Wie ist $(\overline{X}-5)/(S/5))$ verteilt unter H_0?
3. Führen Sie den t-Test auf dem 5
4. Berechnen Sie das 95%-Vertrauensintervall für den in 3. beschriebenen Test.

Lösung:

1. $H_0: \mu = 5, H_1: \mu < 5$
2. Verteilung: $\sim t_{5^2-1} = t_{24}$

3. $T_1 = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = -1.581$. Wir ermitteln das t-Quantil für $n-1 = 24$ Freiheitsgrade und $t^{-1}(\alpha) = t^{-1}(0.05) = t^{-1}(0.95) = 1.711$. Somit erhalten wir eine kritische Grenze von $c = -1.711$. Weil $T_1 = -1.581 > c$ ist, wird die Nullhypothese nicht verworfen.

4. ???

12.2 P-Wert berechnen

Für einen t-Test oder einen z-Test kann der P-Wert wie folgt berechnet werden:

P-Wert bei zweiseitigem Test:
Beispiel mit $c = 3.43$ als Grenze des Verwerfungsbereichs:

$$\begin{aligned} P_{H_0}[|T| > 3.43] &= 2 \cdot P_{H_0}[T > 3.43] \\ &= 2 \cdot (1 - P_{H_0}[T \leq 3.43] \\ &= 2 \cdot (1 - \Phi(3.43)) \\ &= 2 \cdot (1 - 0.999698) \\ &\approx 0.0006 \end{aligned}$$

P-Wert bei einseitigem Test (rechts):
Beispiel mit $c = 3.43$ als Grenze des Verwerfungsbereichs:

$$\begin{aligned} P_{H_0}[T > 3.43] &= (1 - P_{H_0}[T \leq 3.43] \\ &= (1 - \Phi(3.43)) \\ &= (1 - 0.999698) \\ &\approx 0.0003 \end{aligned}$$

P-Wert bei einseitigem Test (links):
Beispiel mit $c = 3.43$ als Grenze des Verwerfungsbereichs:

$$\begin{aligned} P_{H_0}[T < 3.43] &= \Phi(3.43) \\ &\approx 0.999698) \end{aligned}$$

12.3 Likelihood-Quotienten-Test (Neyman-Pearson-Lemma

Du erhältst den Auftrag, die Anzahl Ausfälle eines Systems zu überprüfen. Nach Angaben des Herstellers sollen erwartungsgemäss 0.5 Ausfälle/h eintreten. Gehe davon aus, dass die Anzahl Ausfälle poisson-verteilt mit unbekanntem Parameter λ ist und dass die einzelnen Ausfälle unabhängig voneinander sind. Die Analyse nach 6 Betriebsstunden hat nun folgendes Ergebnis gebracht:

Betriebsstunde i	1	2	3	4	5	6
Anz. Ausfälle X_i	1	0	1	1	2	1

Aufgrund der hohen Anzahl Ausfälle haben wir den Verdacht, dass λ grösser als die vom Hersteller angegebenen Anzahl Ausfälle ist. Prüfe anhand eines einseitigen Tests auf dem Niveau 2.5%, ob tatsächlich $\lambda = 0.5$ Ausfälle/h angenommen werden kann. Gib

1. das Modell,
2. die Nullhypothese,
3. die Alternativhypothese,
4. die Teststatistik,
5. die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese,
6. den Verwerfungsbereich,
7. den beobachteten Wert der Teststatistik, sowie
8. den Testentscheid

an.

Lösung:

1. **Modell:** Unter P_λ sind die X_i, $i.i.d. \sim Pois(\lambda)$, $i = 1, ..., 6$, λ unbekannt.
2. **Nullhypothese:** $H_0: \ \lambda = \lambda_0 = 0.5$
3. **Alternativhypothese:** $H_A: \ \lambda = \lambda_A > \lambda_0$
4. **Teststatistik:** $T = \sum_{i=1}^{6} X_i$, denn

$$R(x_1, ..., x_6; \lambda_0, \lambda_A) = \frac{L(x_1, x_2, ..., x_6; \lambda_0)}{L(x_1, x_2, ..., x_6; \lambda_A)} =$$

$$\frac{e^{-6\lambda_0} \prod_{i=1}^{6} \frac{\lambda_0^{x_i}}{x_i!}}{e^{-6\lambda_A} \prod_{i=1}^{6} \frac{\lambda_A^{x_i}}{x_i!}} = e^{-6(\lambda_0 - \lambda_A)} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_A}\right)^{\sum_{i=1}^{6} x_i}$$

Da $\lambda_0 < \lambda_A$ wird $R(x_1, ..., x_6; \lambda_0, \lambda_A)$ klein, genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{6} x_i$ gross ist. Statt des komplizierten Quotienten wählen wir als Teststatistik also

$$T = \sum_{i=1}^{6} X_i$$

5. **Verteilung der Teststatistik unter H_0:** $T \sim Pois(6\lambda_0) = Pois(3)$
6. **Verwerfungsbereich:** Der kritische Bereich "Quotient klein" hat die äquivalente Form "Summe gross", also ist der Verwerfungsbereich von der Form $K = [k, \infty)$. Um das Signifikanzniveau einzuhalten, muss gelten $P_{\lambda_0}[T \geq k] \leq 2.5\% \Leftrightarrow P_{\lambda_0}[T < k] \geq 97.5\%$:

k	$P_{\lambda_0}[T = k]$	$P_{\lambda_0}[T \leq k]$
0	0.050	0.050
1	0.149	0.199
2	0.224	0.423
3	0.224	0.647
4	0.168	0.815
5	0.101	0.916
6	0.050	0.966
7	0.022	0.988

Deshalb haben wir als Verwerfungsbereich $= [8, \infty)$.

7. **Beobachteter Wert der Teststatistik:** $t = 6$
8. **Testentscheid:** Da 6 nicht im Verwerfungsbereich liegt, wird die Nullhypothese **nicht** verworfen.

12.4 Erwartungstreuer Schätzer

Wir prüfen, ob der Schätzer $T = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ erwartungstreu ist.

$$E[T] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

Der Schätzer T ist erwartungstreu.

12.5 Verteilung der Summe zweier normalerverteilter ZV

Seien $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Wie ist $Z = 1 + aX + bY$ verteilt?

Lösung:

$$\begin{aligned} Z &\sim N(1 + aE[X] + bE[Y], a^2Var[X] + b^2Var[Y]) \\ &\sim N(1 + a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2) \end{aligned}$$