Serie 1

André Graubner, Leonard von Kleist, Lukas Walker

2018/09/27

1 Aufgabe 1a

Um die maximale Anzahl von Teilworten zu haben, muss das Wort jedes Zeichen genau einmal enthalten, da sonst mindestens das Teilwort welches nur aus dem doppelt vorkommenden Zeichen besteht doppelt verwendet wird. Es gilt:

Lemma 1 *Sei w_{max} ein Wort von Länge m und eine Permutation von m Zeichen aus Σ. Dann gilt:*

$$\left|\left\{x \mid x \textit{ ist Teilwort von } w_{max}\right\}\right| = \left(\sum_{i=1}^{m} i\right) + 1 = \frac{m^2+m}{2} + 1$$

Beweis: Jedes Teilwort (ausser λ) lässt sich als Tupel (a, b) eindeutig darstellen, wobei a die Startposition und b die Endposition des Teilwortes innerhalb von w_{max} bezeichnet. Hier muss gelten:

$$a, b \in \mathbb{N} \textit{ mit } 1 \leq a \leq b \leq m$$

Von solchen Tupeln gibt es $\frac{m^2+m}{2}$, doch wir haben λ noch nicht mitgezählt, das von solchen Tupeln nicht beachtet wird. Damit kommen wir auf die oben genannte Summe.

2 Aufgabe 1b

Die Gesamtzahl aller Wörter w mit $|x| = n$ ist 3^n. Von dieser Zahl müssen wir nun die Zahl der Wörter abziehen, die mindestens eines der Zeichen nicht enthalten. Für 2 Zeichen aus Σ kann ich mit diesen genau 2^n Wörter der Länge n bilden. Dabei gibt es 3 mögliche Kombinationen der Zeichen (siehe $\binom{3}{2}$). Wir zählen jedoch genau die Wörter doppelt, die aus genau einem Zeichen gebildet werden können. Wenn wir diese wieder abziehen erhalten wir:

$$\left\{x \mid x \text{ enthält } a,\, b \text{ und } c\right\} = 3^n - (3 \cdot 2^n) + 6$$

3 Aufgabe 2a

Wir verwenden für den Beweis eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Wenn $u = v = \lambda$, so gilt die Gleichheit trivialerweise.

$$(uv)^R = (\lambda\lambda)^R = \lambda^R = \lambda^R\lambda = \lambda^R\lambda^R = v^R u^R$$

Fall 2: Wenn $u = \lambda \neq v$, so gilt:

$$(uv)^R = (\lambda v)^R = v^R = v^R\lambda = v^R\lambda^R = v^R u^R$$

Fall 3: Wenn $v = \lambda \neq u$, so gilt:

$$(uv)^R = (u\lambda)^R = u^R = \lambda u^R = \lambda^R u^R = v^R u^R$$

Fall 4: Weder u noch v sind λ. Dann lassen sich u, v und uv folgendermassen eindeutig darstellen:

$$u = u_1 u_2 ... u_n \text{ und } v = v_1 v_2 ... v_m$$

Also gilt per Definition:

$$u^R = u_n u_{n-1} ... u_1 \text{ und } v^R = v_m v_{m-1} ... v_1$$

Daraus folgt:

$$(uv)^R = (u_1 u_2 ... u_n v_1 v_2 ... v_m)^R = v_m v_{m-1} ... v_1 u_n u_{n-1} ... u_1 = v^R u^R$$

Da dies die einzigen möglichen Fälle sind, gilt die Gleichheit für beliebige u und v. ■

4 Aufgabe 2b

Sei $L_1 = \Sigma^*$, $L_2 = L_\lambda$ und $L_3 = \{0\}$.

Es gilt:

$$L_1(L_2 \cap L_3) = L_1 L_\emptyset = L_\emptyset$$
$$L_1 L_2 \cap L_1 L_3 = \Sigma^* \cap (\Sigma^* - \{\lambda\}) = \Sigma^* - \{\lambda\}$$

Hierbei ist insbesondere $L_\emptyset$ endlich (leer) und $\Sigma^* - \{\lambda\}$ unendlich. ■

5 Aufgabe 3

(a): Sei $\Sigma = \{0\}$, $L_1 = \Sigma^{<k}$ und $L_2 = \{\lambda, 0\}$. Für jede mögliche Konkatenation in $L_1 L_2$ ist das Ergebnis bereits in L_1, ausser für $0^{k-1} \cdot 0 = 0^k$.

(b): Sei $\Sigma = \{0\}$, $L_1 = \Sigma^{<k}$ und $L_2 = \{\lambda, 0, 00, 000, 0000, 00000\}$. Wieder ist für jede mögliche Konkatenation in $L_1 L_2$ das Ergebnis bereits in L_1, ausser für $0^{k-1} \cdot x$ mit $x \in L_2 - \{\lambda\}$.

(c,d): Da eine Lösung für Teilaufgabe (d) auch eine Lösung für Teilaufgabe (c) ist, lösen wir beide auf einmal. Dafür abstrahieren wir das Problem zunächst: Da wir ein Alphabet mit einem Zeichen wählen sollen, ist es vollkommen egal, welches wir hier wählen. Der Einfachheit halber wählen wir jedoch $\Sigma = \{0\}$. Um nun für beliebige Sprachen L_1 und L_2 die Eigenschaft $|L_1 L_2| = |L_1| \cdot |L_2|$ zu haben muss gelten, dass jede Kombination von Elementen aus den Sprachen einzigartig ist. Wir können die Elemente aus L_1 und L_2 hierbei sinnvollerweise als natürliche Zahlen darstellen (wobei die Zahl n dem Wort 0^n entspricht). Das Problem ist nun lediglich, zwei Mengen A und B von natürlichen Zahlen zu finden, sodass die Summen von allen Paaren (a, b) einzigartig sind, weil die Konkatenation $0^n \cdot 0^m = 0^{n+m}$ ist.