

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
1.1	Sistema . . . . .	5
1.1.1	Amplificatore lineare . . . . .	5
1.2	Sistema dinamico . . . . .	5
1.2.1	Circuito RC . . . . .	5
1.3	Variabili di un sistema . . . . .	6
1.4	Sistemi non lineari . . . . .	6
1.4.1	Massa-molla . . . . .	6
1.4.2	Vasca . . . . .	7
1.5	Linearizzazione . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Funzioni generalizzate</b>	<b>9</b>
2.1	Gradino . . . . .	9
2.2	Rampa . . . . .	9
2.3	Parabola . . . . .	9
2.4	Polinomio di grado $n$ . . . . .	10
2.5	Derivate e integrali delle funzioni generalizzate . . . . .	10
2.6	Impulso . . . . .	10
2.7	Doppietto . . . . .	10
2.8	Riepilogo . . . . .	11
2.9	Trasformazioni delle funzioni . . . . .	11
2.9.1	Traslazione . . . . .	11
2.9.2	Scalamiento . . . . .	11
2.9.3	Simmetrie . . . . .	11
2.10	Altre funzioni di interesse . . . . .	11
2.10.1	Rettangolo . . . . .	11
2.11	Esercizi . . . . .	11
2.11.1	Trasformazione composta di una funzione . . . . .	11
2.11.2	Derivata di una funzione definita a tratti . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Trasformata di Laplace</b>	<b>13</b>
3.1	Proprietá . . . . .	13
3.1.1	Linearitá . . . . .	13
3.1.2	Traslazione in $t$ . . . . .	14
3.1.3	Traslazione in $s$ . . . . .	14
3.1.4	Derivata in $t$ . . . . .	14
3.1.5	Derivata $n$ -esima in $t$ . . . . .	14
3.1.6	Integrale in $t$ . . . . .	15
3.1.7	Derivata in $s$ . . . . .	15
3.2	Trasformate di funzioni notevoli . . . . .	16
3.2.1	Impulso . . . . .	16
3.2.2	Doppietto . . . . .	16

3.2.3	Gradino	16
3.2.4	Rampa	16
3.2.5	Esponenziale	16
3.2.6	Polinomio e Esponenziale	16
3.2.7	Seno	17
3.2.8	Coseno	17
3.2.9	Seno e Coseno (2)	17
3.2.10	Polinomio e seno	18
3.2.11	Polinomio e coseno	19
3.2.12	Esponenziale e seno	19
3.2.13	Esponenziale e coseno	19
3.2.14	Polinomio grado 1, esponenziale e seno	19
3.2.15	Polinomio grado 2, esponenziale e seno	19
3.2.16	Polinomio grado 1, esponenziale e coseno	20
3.2.17	Polinomio grado 2, esponenziale e coseno	20
3.2.18	Trasformata del prodotto di convoluzione	20
3.2.19	Prodotto di convoluzione	20
<b>4</b>	<b>Anti-Trasformata di Laplace</b>	<b>21</b>
4.1	Esempi introduttivi	21
4.2	Funzioni razionali	22
4.2.1	Fattorizzazione di un polinomio	23
4.3	Funzione razionale strettamente propria	23
4.3.1	Esempio di residui complessi	24
4.3.2	Esempio di residui reali	24
4.4	Generalizzazione dei fratti semplici	24
4.4.1	Osservazioni	25
4.4.2	Esempio di poli complessi	25
4.4.3	Esempio di poli complessi 2	26
4.5	Funzione razionale propria	26
4.6	Andamento nel tempo dell'antitrasformata	27
4.7	Teorema del valore iniziale	29
4.7.1	Esempio: funzione razionale non strettamente propria	29
4.8	Teorema del valore finale	29
4.8.1	Esempio: non applicabile	29
4.8.2	Esempio: non applicabile	30
4.8.3	Esempio: applicabile	30
4.9	Esercizi	30
4.9.1	♣ Poli reali multipli, poli complessi semplici	30
4.9.2	♣ Poli reali multipli, poli complessi semplici	31
4.9.3	♣♣ Poli reali semplici, poli complessi multipli	32
<b>5</b>	<b>Sistemi lineari</b>	<b>34</b>
5.1	Applicazione dell'anti-trasformata di Laplace a equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti	34
5.1.1	Funzione di trasferimento	35
5.1.2	Risposta all'impulso	36
5.1.3	Esempio circuito RC	36
5.2	Sistemi	37
5.2.1	Sistema strettamente proprio $m < n$	37
5.2.2	Sistema semplicemente proprio $m = n$	38
5.2.3	Sistema improprio $m > n$	38
5.3	Stabilità dei sistemi realizzabili $m \leq n$	39
5.3.1	Stabilità della risposta libera	39

5.3.2	Stabilità della risposta forzata	40
5.3.3	Relazioni tra i due tipi di stabilità	41
5.4	Rappresentazione dei sistemi lineari	42
5.5	Risposte al gradino di sistemi di ordine 1 e 2	43
5.6	Sistemi di ordine 1	43
5.6.1	Risposta al gradino	44
5.7	Sistemi di ordine 2	44
5.7.1	Risposta al gradino	45
<b>6</b>	<b>Algebra dei blocchi</b>	<b>49</b>
6.1	Connessioni	49
6.2	Connessioni equivalenti	49
6.3	Algebra dei blocchi	50
6.4	Risposta forzata di sistemi interconnessi	50
6.4.1	Stabilità BIBO	51
6.5	Interconnessione di sistemi SISO	51
6.5.1	Serie	52
6.5.2	Parallelo	52
6.5.3	Retroazione (feedback)	52
6.6	Esercizio	54
6.7	Esercizio	55
<b>7</b>	<b>Equazione di stato</b>	<b>56</b>
7.1	Equazione di stato	56
7.2	Soluzione dell'equazione di stato	57
7.2.1	Come si calcola $e^{At}$	57
7.2.2	Polinomio caratteristico	58
7.2.3	Polinomio minimo	58
7.3	Trasformata della soluzione dell'equazione di stato	59
<b>8</b>	<b>Stabilità e punti di equilibrio</b>	<b>61</b>
8.1	Stabilità e punti di equilibrio	61
8.1.1	Definizione qualitativa	61
8.1.2	Definizione	62
8.1.3	Studio della stabilità dei punti di equilibrio per sistemi lineari	62
8.1.4	Stabilità di un sistema	63
8.1.5	Studio della stabilità attraverso $e^{At}$	64
8.1.6	Studio della stabilità attraverso il polinomio minimo	65
8.1.7	Linearizzazione dei sistemi non lineari	66
8.1.8	Studio della stabilità dei punti di equilibrio per sistemi non lineari	68
8.1.9	Modello preda predatore	69
<b>9</b>	<b>Raggiungibilità e controllabilità</b>	<b>71</b>
9.1	Raggiungibilità e controllabilità	71
9.1.1	Proprietà per i sistemi LTI a tempo continuo	71
9.1.2	Completa controllabilità	72
9.1.3	Teorema di Cayley-Hamilton	73
9.1.4	Teorema di Kalman di raggiungibilità	74
9.1.5	Corollari del teorema di Kalman	74
9.1.6	Cambio di base	75
9.1.7	Nota sul prodotto di matrici	78
9.1.8	Decomposizione canonica di raggiungibilità	78
9.1.9	Polinomio caratteristico di controllabilità	80

<b>10 Riepilogo</b>	<b>82</b>
10.1 Trasformata di Laplace . . . . .	83
10.1.1 Proprietà . . . . .	83
10.1.2 Trasformate notevoli . . . . .	84

# Chapter 1

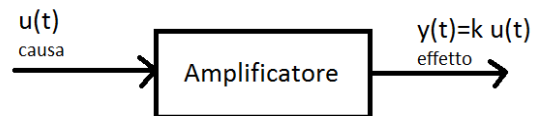
## Introduzione

### 1.1 Sistema

É un oggetto (fisico/astratto) in cui si riescono a individuare diverse quantità che variano nel tempo e tra le quali si può riconoscere una relazione causa-effetto.

#### 1.1.1 Amplificatore lineare

L'amplificatore ideale é un sistema in cui l'uscita (effetto)  $y(t)$  dipende linearmente dall'ingresso (causa)  $u(t)$ .



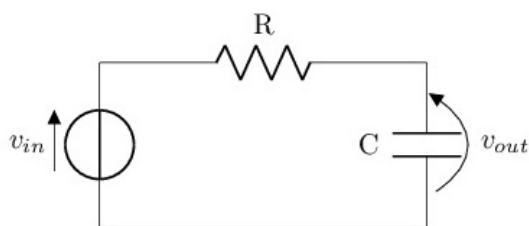
### 1.2 Sistema dinamico

É un sistema i cui effetti non dipendono unicamente dal valore istantaneo delle cause, ma possono dipendere dalla storia delle cause, dallo stato del sistema in un determinato momento, dalle condizioni iniziali.

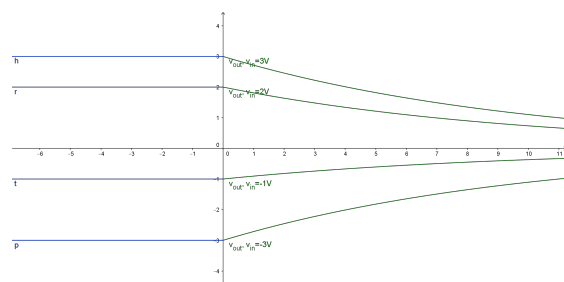
Il numero di condizioni iniziali determina l'ordine del sistema.

#### 1.2.1 Circuito RC

Consideriamo il circuito RC in figura 1.1a dove  $v_{in}$  é la causa e  $v_{out}$  é l'effetto.



(a) circuito RC



(b) grafico di  $v_{out}$

Supponiamo che:

$$\begin{cases} v_{in} \neq 0 & \text{se } t < 0 \\ v_{in} = 0 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Per  $t < 0$  la tensione sul condensatore é uguale alla tensione applicata dal generatore. Quando per  $t \geq 0$  il generatore viene spento ( $v_{in} = 0$ ), inizia il processo di scarica e la tensione del condensatore tende a zero.

Quindi la tensione sul condensatore non dipende istantaneamente dalla tensione applicata dal generatore (vedi per  $t > 0$ ), ma dipende anche dalle condizioni iniziali ( $v_{in}$  per  $t < 0$ ).

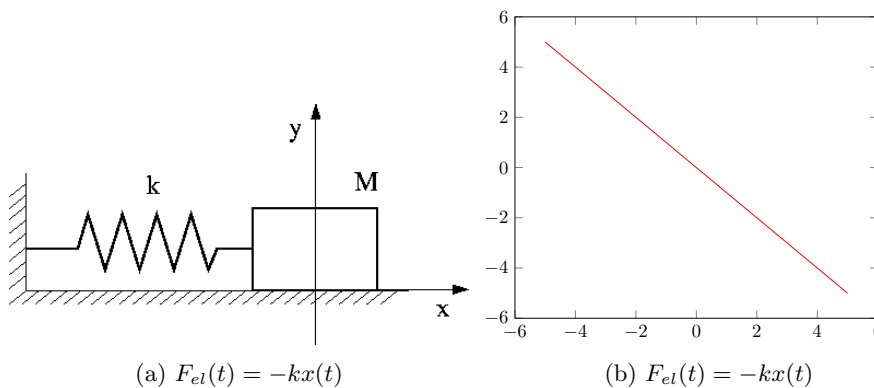
## 1.3 Variabili di un sistema

- ingressi regolabili
- ingressi non regolabili o disturbi
- parametri:  
non impongono cambiamenti al sistema ma ne modificano la configurazione.
- variabili interne o variabili di stato:  
sono variabili che vengono descritte dall'evoluzione del sistema secondo leggi definite.
- uscite

## 1.4 Sistemi non lineari

Finora abbiamo studiato esempi di sistemi lineari descritti da equazioni lineari. Nel mondo fisico però praticamente tutti i sistemi sono non lineari.

### 1.4.1 Massa-molla



É un modello che descrive la forza elastica, ma non completamente.

Infatti la molla ha una struttura fisica: anche se applichiamo una forza sempre maggiore, la molla raggiunge la sua lunghezza minima (completamente compressa). Quindi la forza elastica diventa una forza vincolare.

Questo modello matematico non considera i casi limite nei quali si perde la linearit .

Quindi i modelli matematici che descrivono le leggi fisiche attraverso i sistemi lineari sono solo approssimazioni per "piccole variazioni".

### 1.4.2 Vasca

$$\begin{cases} h(t) & \text{altezza colonna } H_2O \quad (h(t) > 0) \\ u(t) & \text{portata in ingresso} \\ l(t) & \text{portata in uscita} \\ E & \text{sezione foro uscita della vasca} \\ S & \text{sezione della vasca (costante su tutta l'altezza)} \end{cases}$$

$u(t)$  é l'ingresso che possiamo controllare attraverso un rubinetto.

$l(t)$  e  $h(t)$  sono entrambe possibili uscite, ma scegliamo  $y(t) \equiv h(t)$  perch é misurabile pi facilmente. Infatti non é detto che le uscite siano sempre misurabili.

Modelliamo il sistema:

$$Sh\dot{h}(t) = u(t) - l(t) \quad (1.1)$$

dove  $Sh\dot{h}(t)$  rappresenta la variazione di volume rispetto al tempo.

Inoltre non conosciamo  $l(t)$  e dobbiamo ricavarlo: facciamo il bilancio energetico di una particella d'acqua che scende dalla cima della vasca fino all'uscita inferiore.

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2} \cancel{m}v^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2$$

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

$$l(t) = E\sqrt{2gh(t)}$$

$$Sh\dot{h}(t) = u(t) - E\sqrt{2gh(t)}$$

$$\dot{h}(t) = -\frac{E}{S}\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{S}u(t) \quad (1.2)$$

Poich la derivata dell'uscita non é una combinazione lineare degli ingressi, questa é un'equazione differenziale non lineare.

Inoltre esistono dei vincoli fisici che in questa equazione non vengono considerati:  $\begin{cases} 0 \leq h(t) \leq h_{max} \\ 0 \leq u(t) \leq u_{max} \end{cases}$ .

Infatti anche se  $h(t)$  diventa maggiore dell'altezza massima della vasca, l'equazione del modello dice che la variazione di altezza cresce (se supponiamo il secondo membro di 1.2), mentre in realtà si dovrebbe annullare.

## 1.5 Linearizzazione

Consideriamo il sistema della vasca nel paragrafo precedente: fissiamo un'altezza  $\bar{h}$  e supponiamo che  $u(t) \equiv \bar{u} = e\sqrt{2g\bar{h}}$ . Ne segue che  $h(\bar{t}) = 0$ .

Questa situazione é detta condizione di equilibrio e  $(\bar{u}, \bar{h})$  é il punto di equilibrio.

Riscriviamo la equazione 1.2:

$$\dot{h}(t) = f(h(t), u(t)) =$$

Adesso calcoliamo l'approssimazione di Taylor fino al primo ordine intorno a  $(\bar{h}, \bar{u})$  :

$$= f(\bar{u}, \bar{h}) + \frac{\partial f(h, u)}{\partial h} \Big|_{(\bar{u}, \bar{h})} (h(t) - \bar{h}) + \frac{\partial f(h, u)}{\partial u} \Big|_{(\bar{u}, \bar{h})} (u(t) - \bar{u}) + \text{Resto}$$

poiché  $f(\bar{u}, \bar{h}) = 0$

$$\left. \frac{\partial f(h, u)}{\partial h} \right|_{(\bar{u}, \bar{h})} = -\frac{E}{2S} \sqrt{2g} \frac{1}{\sqrt{\bar{h}}} \Big|_{(\bar{u}, \bar{h})} = -\frac{E}{2S} \sqrt{\frac{2g}{\bar{h}}} = -\alpha \quad (\alpha > 0)$$

$$\left. \frac{\partial f(h, u)}{\partial u} \right|_{(\bar{u}, \bar{h})} = \frac{1}{S} = \beta \quad (\beta > 0)$$

Definiamo:

$\delta h(t) \doteq h(t) - \bar{h}$  la variazione di  $h$  rispetto al punto di equilibrio;

$\delta u(t) \doteq u(t) - \bar{u}$  la variazione di  $u$  rispetto al punto di equilibrio;

Se  $u(t)$  é vicino a  $\bar{u}$ , allora  $\delta u(t)$  può essere negativo purché  $u(t) > 0$ . Analogamente vale per  $h(t)$ .  
Calcoliamo la derivata assoluta rispetto al tempo della variazione di altezza:

$$\delta \dot{h}(t) = \frac{d}{dt}(h(t) - \bar{h}) = \frac{d}{dt}h(t) \doteq \dot{h}(t)$$

Abbiamo trovato che la derivata di  $h(t)$  e  $\delta h(t)$  sono uguali.

Quindi in conclusione si ottiene:

$$\delta \dot{h}(t) = -\alpha \delta h(t) + \beta \delta u(t) \tag{1.3}$$

É sensato modellare la vasca come un sistema lineare, ma solo se stiamo lavorando con piccole variazioni rispetto ad un punto di equilibrio.

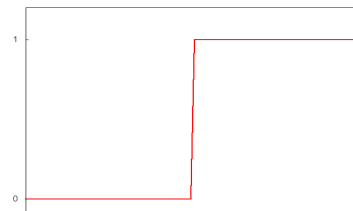


## Chapter 2

# Funzioni generalizzate

### 2.1 Gradino

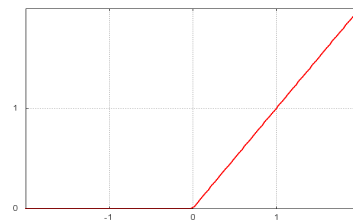
$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



Presenta una discontinuità in  $t = 0$ .

### 2.2 Rampa

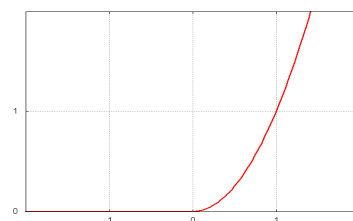
$$ramp(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$



In  $t = 0$  è continua, ma presenta una discontinuità di prima specie nella derivata.

### 2.3 Parabola

$$par(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & t \geq 0 \end{cases}$$



Risulta continua e con derivata continua anche in  $t = 0$ .

## 2.4 Polinomio di grado n

$$pol(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^n}{n} & t \geq 0 \end{cases}$$

## 2.5 Derivate e integrali delle funzioni generalizzate

$$\begin{aligned} ramp(t) &= \int_{-\infty}^t 1(\tau) d\tau & \frac{d}{dt} ramp(t) &= 1(t) \\ par(t) &= \int_{-\infty}^t ramp(\tau) d\tau & \frac{d}{dt} par(t) &= ramp(t) \end{aligned}$$

## 2.6 Impulso

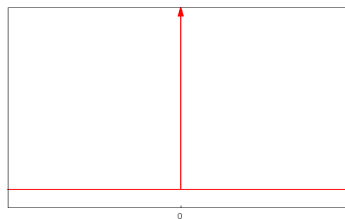
Introduco la funzione  $1_{\Delta}(t)$  definita come:

$$\int_{-\infty}^t \frac{d}{dt} 1_{\Delta}(t) d\tau = \begin{cases} 1 & t > \Delta \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Non consideriamo il caso in cui  $0 < t < \Delta$ .

Definisco  $\delta(t)$  la funzione  $\frac{d}{dt} 1_{\Delta}(t)$  quando  $\Delta \rightarrow 0$ . Valgono dunque le seguenti relazioni:

$$\int_{-t}^t \delta(\tau) d\tau = 1 \quad \forall t > 0, \quad \frac{d}{dt} 1(t) = \delta(t)$$



L'impulso é caratterizzato dal valore della sua area, determinato dal coefficiente della funzione.

L'impulso torna utile quando bisogna effettuare il **campionamento** di una funzione, cioè determinare il valore della funzione nel punto in cui viene applicato l'impulso.

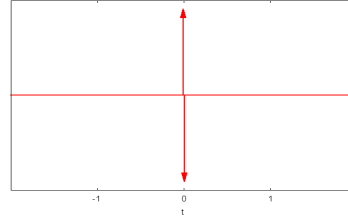
$$\begin{aligned} f(t) \delta(t) &= f(0) \delta(t) \\ f(t) \delta(t - T) &= f(T) \delta(t - T) \end{aligned}$$

## 2.7 Doppietto

Derivando ulteriormente  $\frac{d}{dt} 1_{\Delta}(t)$  in un intorno  $I(0)$  e in  $I(\Delta)$  si ottengono due impulsi unitari: il primo centrato nell'origine, mentre il secondo centrato in  $\Delta$  e negativo.

Per  $\Delta \rightarrow 0$  si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = \dot{\delta}(t)$$



## 2.8 Riepilogo

$$par(t) \xLeftrightarrow[\int_{-\infty}^t]{\frac{d}{dt}} ramp(t) \xLeftrightarrow[\int_{-\infty}^t]{\frac{d}{dt}} 1(t) \xLeftrightarrow[\int_{-\infty}^t]{\frac{d}{dt}} \delta(t) \xLeftrightarrow[\int_{-\infty}^t]{\frac{d}{dt}} \dot{\delta}(t)$$

## 2.9 Trasformazioni delle funzioni

### 2.9.1 Traslazione

$$f(x) = f(x - t)$$

- $t > 0$ : ritardo, la funzione è traslata verso dx di  $t$
- $t < 0$ : anticipo, la funzione è traslata verso sx di  $t$

### 2.9.2 Scalamento

$$f(x) = f(x \cdot t)$$

- $0 < t < 1$ : la funzione si estende di un fattore  $t$
- $t > 1$ : la funzione viene compressa di un fattore  $t$

### 2.9.3 Simmetrie

- $f(x) = f(-x)$ : simmetrica rispetto l'asse delle  $y$
- $f(x) = -f(x)$ : simmetrica rispetto l'asse delle  $x$

## 2.10 Altre funzioni di interesse

### 2.10.1 Rettangolo

$$R_{t_1, t_2}(t) = 1(t - t_1) - 1(t - t_2)$$

## 2.11 Esercizi

### 2.11.1 Trasformazione composta di una funzione

### 2.11.2 Derivata di una funzione definita a tratti

Dividiamo il grafico in sezioni e per ognuna scriviamo la funzione 'finestrata' (cio moltiplicata per un rettangolo di base pari alla larghezza della sezione):

$$f(t) = 2tR_{0,1}(t) + 2R_{1,3}(t) + (t - 4)R_{3,\infty}(t)$$

Riscriviamo i rettangoli attraverso i gradini:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t [1(t) - 1(t-1)] + 2 [1(t-1) - 1(t-3)] + (t-4) [1(t-3) - 0] = \\ &= 2t 1(t) - 2(t-1) 1(t-1) + (t-6) 1(t-3) \end{aligned}$$

1. si riconducono le funzioni a funzioni generalizzate e si deriva:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \text{ramp}(t) & - \text{ramp}(t-1) & + (t-3) 1(t-3) & - 3 1(t-3) \\ f'(t) &= 2 1(t) & - 2 1(t-1) & + 1(t-3) & - 3 \delta(t-3) \end{aligned} \quad (2.1)$$

2. si usano le derivate del prodotto:

$$f'(t) = (2 1(t) + 2t \delta(t)) - 2 1(t-1) - 2(t-1) \delta(t-1) + 1(t-3) + (t-6) \delta(t-3)$$

Attraverso il campionamento si ha che:

- $t \delta(t) = 0$ : campionamento in zero della retta passante per l'origine
- $(t-1) \delta(t-1) = 0$ : analogo al punto precedente
- $(t-6) \delta(t-3) = -3 \delta(t-3)$ : la retta  $y = t-6$  calcolata in  $t = 3$  vale -3.

Dopo queste semplificazioni si ottiene l'espressione [2.1](#).

## Chapter 3

# Trasformata di Laplace

Operazione che consente di associare in modo biunivoco ad una funzione  $f(t) : [0^-, +\infty]$  un'altra funzione  $F(s)$  a valori complessi  $s = \sigma + j\omega$   $\sigma = \Re(s), \omega = \Im(s)$ .

Se l'integrale  $\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$  esiste (calcolabile finito), allora  $f(t)$  Laplace-trasformabile:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Si definisce **ascissa di convergenza** per la trasformata di Laplace di una funzione  $f(t)$  la quantità:

$$\bar{\sigma} \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma} = \inf \{\Re(s) : \exists F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}\}$$

In parole povere si prendono tutti i numeri complessi per cui esiste la trasformata di Laplace. Quindi  $\bar{\sigma}$  l'estremo inferiore di questo insieme (non é detto che sia anche il minimo).

**Teorema 1** Se la trasformata di Laplace esiste per qualche  $s = \bar{s}$ , allora essa esiste anche  $\forall s$  tale che  $\Re(s) > \Re(\bar{s})$ .

In pratica l'ascissa di convergenza definisce il limite a destra del quale la trasformata esiste sempre.

**Teorema 2** La trasformata di Laplace é "analitica"  $\forall s : \Re(s) > \bar{\sigma}$ . Analitica significa che é continua e derivabile  $n$  volte.

## 3.1 Proprietá

### 3.1.1 Linearitá

$$\begin{aligned} f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s) & f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F_2(s) \\ \Rightarrow f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))e^{-st}dt = \\ &= \alpha \int_{0^-}^{+\infty} f_1(t)e^{-st}dt + \beta \int_{0^-}^{+\infty} f_2(t)e^{-st}dt = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \end{aligned}$$

### 3.1.2 Traslazione in t

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \Rightarrow f(t-T) 1(t-T) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-sT} F(s)$$

Chiamiamo  $\bar{f}(t) = f(t-T) 1(t-T)$ . Con il gradino non consideriamo tutto ciò che accade prima di  $T$ , altrimenti la trasformata sarebbe stata diversa e avrebbe incluso anche il tratto  $(0^-, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\bar{f}(t)\} &= \int_{0^-}^{+\infty} \bar{f}(t) e^{-st} dt = \\ &= \int_{0^-}^{T^-} \bar{f}(t) e^{-st} dt + \int_{T^-}^{+\infty} \bar{f}(t) e^{-st} dt = \\ &= 0 + \int_{T^-}^{+\infty} f(t-T) 1 e^{-st} dt = \quad \text{il gradino vale 1 in } (T^-, +\infty) \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} f(\tau) e^{-s(\tau+T)} d\tau = \quad \text{ho cambiato variabile } \tau = t - T \\ &= e^{-sT} \int_{0^-}^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-sT} F(s) \end{aligned}$$

### 3.1.3 Traslazione in s

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \Rightarrow e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s-a)$$

Chiamo  $\tilde{f}(t) = e^{at} f(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\tilde{f}(t)\} &= \int_{0^-}^{+\infty} \tilde{f}(t) e^{-st} dt = \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s-a) \end{aligned}$$

### 3.1.4 Derivata in t

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \Rightarrow \dot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0^-)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} &= \int_{0^-}^{+\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt \\ \text{Integro per parti ricordando che } \int f(x)' g(x) dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g(x)' dx \\ &= [f(t)e^{-st}]_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} f(t)(-s)e^{-st} dt = \\ &= 0 - f(0^-) + s \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

### 3.1.5 Derivata n-esima in t

$$\begin{aligned} g(t) = \dot{f}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) = sF(s) - f(0^-) \\ \dot{g}(t) = \ddot{f}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} sG(s) - g(0^-) = \quad \text{per la proprietà della derivata in t} \\ &= s[sF(s) - f(0^-)] - \dot{f}(0^-) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\ddot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$$

Per  $n = 3$ :

$$\frac{d^3}{dt^3} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf^{(1)}(0^-) - f^{(2)}(0^-)$$

Per  $n$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) - \dots - sf^{(n-2)}(0^-) - f^{(n-1)}(0^-) = \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0^-) \end{aligned}$$

### 3.1.6 Integrale in t

Ipotesi:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \\ \dot{g}(t) &= f(t) \\ g(0) &= 0 \end{aligned}$$

Per la proprietà della derivata in t:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\dot{g}(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0^-) = \\ &= sG(s) - 0 \\ &\Rightarrow G(s) = \frac{1}{s} F(s) \end{aligned}$$

Concludiamo che:

$$\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} F(s)$$

### 3.1.7 Derivata in s

Dalla definizione ho che:

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt =$$

Uso la regola di derivazione sotto segno di integrale

$$\begin{aligned} &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t) \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t) (-t) e^{-st} dt = \\ &= - \int_{0^-}^{+\infty} t f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che:

$$\begin{aligned} t f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} - \frac{d}{ds} F(s) \\ t^n f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \end{aligned}$$

## 3.2 Trasformate di funzioni notevoli

### 3.2.1 Impulso

Dalla definizione:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) \cdot 1dt = 1$$

### 3.2.2 Doppietto

Per la proprietà della derivata in t (3.1.4):

$$\begin{aligned}\dot{\delta}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s \mathcal{L}\{\delta(t)\} - \delta(0^-) = s \\ \delta^{(n)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^n \quad \text{se tutte le condizioni iniziali sono nulle}\end{aligned}$$

### 3.2.3 Gradino

Calcoliamo con due metodi differenti:

1. Utilizziamo la definizione:

$$\int_{0^-}^{+\infty} 1(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_{0^-}^{+\infty} = -\frac{1}{s}(-1) = \frac{1}{s}$$

2. È l'integrale del gradino, quindi possiamo utilizzare la proprietà (3.1.6):

$$1(t) = \int_{0^-}^t \delta(\tau)d\tau$$

$$\text{Allora: } 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \frac{1}{s}$$

### 3.2.4 Rampa

È l'integrale del gradino, quindi utilizziamo la proprietà (3.1.6):

$$t \cdot 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

Generalizziamo per il grado n:

$$t^n 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} n! \frac{1}{s^{n+1}}$$

### 3.2.5 Esponenziale

Trasformando un esponenziale si ottiene un ritardo:

$$e^{\sigma t} 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - \sigma}$$

### 3.2.6 Polinomio e Esponenziale

Partiamo dal grado 1:

$$t e^{\sigma t} 1(t) = t f(t)$$



Per la proprietà 7:

$$t f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1) \frac{d}{ds} F(s)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f(t) = e^{\sigma t} 1(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s - \sigma} \\ \Rightarrow t e^{\sigma t} 1(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} (-1) \frac{d}{ds} \frac{1}{s - \sigma} = (-1) \frac{-1}{(s - \sigma)^2} = \frac{1}{(s - \sigma)^2} \end{aligned}$$

Generalizziamo al grado n:

$$\text{chiamo } f(t) = t^n 1(t)$$

Quindi per la presenza dell'esponenziale sto effettuando una traslazione in s:

$$e^{\sigma t} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - \sigma) = n! \frac{1}{(s - \sigma)^{n+1}}$$

### 3.2.7 Seno

Scriviamo il seno attraverso la rappresentazione di Eulero dei numeri complessi:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \sin(wt) 1(t) \} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{jw t} - e^{-jw t}}{2j} 1(t) \right\} = \\ &= \frac{1}{2j} [\mathcal{L} \{ e^{jw t} 1(t) \} - \mathcal{L} \{ e^{-jw t} 1(t) \}] = && \text{per linearit } \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s - jw} - \frac{1}{s - (-jw)} \right] = && \text{traslazione in s} \\ &= \frac{1}{2j} \frac{s + jw - s + jw}{s^2 + w^2} = \frac{w}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$

### 3.2.8 Coseno

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \cos(wt) 1(t) \} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{jw t} + e^{-jw t}}{2} 1(t) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{L} \{ e^{jw t} 1(t) \} + \mathcal{L} \{ e^{-jw t} 1(t) \}] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s + jw} + \frac{1}{s - jw} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{s - jw + s + jw}{s^2 + w^2} \right] = \frac{s}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$

### 3.2.9 Seno e Coseno (2)

Gli stessi risultati possono essere ottenuti sfruttando la propriet  (3.1.4) di derivazione in t.

Ad esempio partiamo dal seno:

$$\sin(wt) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} w \cos(wt) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} -w^2 \sin(wt)$$

Conosciamo la trasformata della funzione seno:

$$\mathcal{L}\{\sin(wt)\} = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

Calcoliamo la trasformata della sua derivata:

$$\begin{aligned} w \cos(wt) &= \frac{d}{dt} \sin(wt) \Rightarrow \mathcal{L}\{w \cos(wt)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \sin(wt)\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \sin(wt)\right\} &= s \frac{w}{s^2 + w^2} - \sin(w \cdot 0^-) = \frac{sw}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$

Poiché la trasformata di Laplace é lineare (3.1.1) otteniamo la stessa trasformata del coseno calcolata in precedenza.

$$\Rightarrow \frac{1}{w} \cdot \mathcal{L}\{w \cos(wt)\} = \frac{sw}{s^2 + w^2} \cdot \frac{1}{w} = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

Calcoliamo la trasformata della derivata seconda del seno:

$$\begin{aligned} -w^2 \sin(wt) &= \frac{d}{dt} w \cos(wt) \Rightarrow \mathcal{L}\{-w^2 \sin(wt)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} w \cos(wt)\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} w \cos(wt)\right\} &= s \frac{sw}{s^2 + w^2} - w \cos(w \cdot 0^-) = \frac{s^2 w}{s^2 + w^2} - w = \frac{-w^3}{s^2 + w^2} \\ \Rightarrow \left(-\frac{1}{w^2}\right) \cdot \mathcal{L}\{-w^2 \sin(wt)\} &= \left[\frac{-w^3}{s^2 + w^2}\right] \cdot \left(-\frac{1}{w^2}\right) = \frac{w}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$

Analogamente partendo dal coseno:

$$\cos(wt) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} -w \sin(wt) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} -w^2 \cos(wt)$$

Calcoliamo la trasformata della sua derivata:

$$\begin{aligned} -w \sin(wt) &= \frac{d}{dt} \cos(wt) \Rightarrow \mathcal{L}\{-w \sin(wt)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \cos(wt)\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \cos(wt)\right\} &= s \frac{s}{s^2 + w^2} - \cos(w \cdot 0^-) = \frac{s^2}{s^2 + w^2} - 1 \\ \Rightarrow -\frac{1}{w} \cdot \mathcal{L}\{-w \sin(wt)\} &= \left[\frac{s^2}{s^2 + w^2} - 1\right] \cdot \left(-\frac{1}{w}\right) = \left[\frac{s^2 - s^2 - w^2}{s^2 + w^2}\right] \cdot \left(-\frac{1}{w}\right) = \frac{w}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$

Calcoliamo la trasformata della derivata seconda del coseno:

$$\begin{aligned} -w^2 \cos(wt) &= \frac{d}{dt} [-w \sin(wt)] \Rightarrow \mathcal{L}\{-w^2 \cos(wt)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} [-w \sin(wt)]\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} [-w \sin(wt)]\right\} &= s \left[\frac{s^2}{s^2 + w^2} - 1\right] - [-w \sin(w \cdot 0^-)] = s \left[\frac{s^2}{s^2 + w^2} - 1\right] \\ \Rightarrow \left(-\frac{1}{w^2}\right) \cdot \mathcal{L}\{-w^2 \cos(wt)\} &= s \left[\frac{s^2}{s^2 + w^2} - 1\right] \left[-\frac{1}{w^2}\right] = \left[\frac{s^2 - s^2 - w^2}{s^2 + w^2}\right] \left[-\frac{s}{w^2}\right] = \frac{s}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$

### 3.2.10 Polinomio e seno

Vogliamo calcolare la trasformata di:

$$t \cdot \sin(wt) \cdot 1(t)$$

Chiamo:

$$f(t) = \sin(wt)1(t)$$

Allora posso applicare la proprietà (3.1.7) della derivata in s:

$$tf(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds} \left( \frac{w}{s^2 + w^2} \right) = \frac{2ws}{(s^2 + w^2)^2}$$

### 3.2.11 Polinomio e coseno

Vogliamo calcolare la trasformata di:

$$t \cdot \cos(wt) \cdot 1(t)$$

Chiamo:

$$f(t) = \cos(wt)1(t)$$

Allora posso applicare la proprietà (3.1.7) della derivata in s:

$$tf(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^2 + w^2} \right) = -\frac{s^2 + w^2 - s(2s)}{(s^2 + w^2)^2} = \frac{s^2 - w^2}{(s^2 + w^2)^2}$$

### 3.2.12 Esponenziale e seno

Grazie alla proprietà (3.1.3) di traslazione in s:

$$e^{\sigma t} \sin(wt)1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left. \frac{w}{\bar{s}^2 + w^2} \right|_{\bar{s}=s-\sigma} = \frac{w}{(s-\sigma)^2 + w^2}$$

### 3.2.13 Esponenziale e coseno

Grazie alla proprietà (3.1.3) di traslazione in s:

$$e^{\sigma t} \cos(wt)1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left. \frac{\bar{s}}{\bar{s}^2 + w^2} \right|_{\bar{s}=s-\sigma} = \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + w^2}$$

### 3.2.14 Polinomio grado 1, esponenziale e seno

Utilizziamo la proprietà della derivata in s (3.1.7):

$$\mathcal{L} \{ t e^{\sigma t} \sin(wt)1(t) \} = tf(t) = -\frac{d}{ds} \left( \frac{w}{(s-\sigma)^2 + w^2} \right) = - \left[ -\frac{w \cdot 2(s-\sigma)}{[(s-\sigma)^2 + w^2]^2} \right] = \frac{2w(s-\sigma)}{[(s-\sigma)^2 + w^2]^2}$$

### 3.2.15 Polinomio grado 2, esponenziale e seno

1. utilizziamo la proprietà di derivazione in s:

$$t^2 e^{\sigma t} \sin(wt)1(t) = t f(t)$$

Ma questo metodo comporta il calcolo della derivata della trasformata trovata nel paragrafo precedente e potrebbe essere un po' complicato.

2. utilizziamo la proprietà della traslazione in s (3.1.3):

$$t^2 e^{\sigma t} \sin(wt)1(t) = e^{\sigma t} f(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ f(t) \} &= \mathcal{L} \{ t^2 \sin(wt)1(t) \} = \mathcal{L} \{ t \cdot (t \sin(wt)1(t)) \} = \\ &= -\frac{d}{ds} \left( \frac{2ws}{(s^2 + w^2)^2} \right) = -\frac{2w(s^2 + w^2)^2 - 2ws \cdot 2(s^2 + w^2) \cdot 2s}{(s^2 + w^2)^4} = \\ &= -2w \frac{s^2 + w^2 - 4s^2}{(s^2 + w^2)^3} = 2w \frac{3s^2 - w^2}{[s^2 + w^2]^3} \\ &\Rightarrow \mathcal{L} \{ e^{\sigma t} f(t) \} = 2w \frac{3(s-\sigma)^2 - w^2}{[(s-\sigma)^2 + w^2]^3} \end{aligned}$$

### 3.2.16 Polinomio grado 1, esponenziale e coseno

Utilizziamo la proprietà della derivata in s (3.1.7):

$$\mathcal{L}\{t e^{\sigma t} \cos(wt)1(t)\} = t f(t) = -\frac{d}{ds} \left( \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + w^2} \right) = -\frac{(s - \sigma)^2 + w^2 - 2(s - \sigma)(s - \sigma)}{[(s - \sigma)^2 + w^2]^2} = \frac{(s - \sigma)^2 - w^2}{[(s - \sigma)^2 + w^2]^2}$$

### 3.2.17 Polinomio grado 2, esponenziale e coseno

1. utilizziamo la proprietà di derivazione in s (3.1.7):

$$t^2 e^{\sigma t} \cos(wt)1(t) = t f(t)$$

Ma questo metodo comporta il calcolo della derivata della trasformata trovata nel paragrafo precedente e potrebbe essere un po' complicato.

2. utilizziamo la proprietà della traslazione in s (3.1.3):

$$t^2 e^{\sigma t} \cos(wt)1(t) = e^{\sigma t} f(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{t^2 \cos(wt)1(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot (t \cos(wt)1(t))\} = \\ &= -\frac{d}{ds} \left( \frac{s^2 - w^2}{(s^2 + w^2)^2} \right) = -\frac{2s(s^2 + w^2)^2 - (s^2 - w^2) \cdot 2 \cdot (s^2 + w^2) \cdot 2s}{(s^2 + w^2)^4} = \\ &= -\frac{2s}{(s^2 + w^2)^3} [s^2 + w^2 - 2s^2 + 2w^2] = \frac{2s^3 - 6w^2 s}{[s^2 + w^2]^3} \\ &\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{\sigma t} f(t)\} = \frac{2(s - \sigma)^3 - 6w^2(s - \sigma)}{[(s - \sigma)^2 + w^2]^3} \end{aligned}$$

### 3.2.18 Trasformata del prodotto di convoluzione

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad \text{se } f(t), g(t) \text{ nulle } \forall t \quad (3.1)$$

#### Significato

1. Supponiamo di fissare il tempo in un certo istante  $\bar{t}$
2. Ribaltiamo  $g(t)$  rispetto l'asse verticale e lo trasliamo in  $\bar{t}$
3. Calcoliamo l'integrale da 0 a  $\bar{t}$  di  $f(\bar{t})g(\bar{t} - \tau)$ , cioè l'area sottesa dal prodotto delle funzioni
4. Ripetiamo il procedimento per ogni  $\bar{t}$  e otteniamo una funzione che associa ad ogni istante di tempo il valore di quell'integrale

È facile dimostrare che vale la proprietà **commutativa** attraverso un cambio di variabili.

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau &= \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau \\ f(t) * g(t) &= g(t) * f(t) \end{aligned}$$

### 3.2.19 Prodotto di convoluzione

$$\begin{aligned} \text{Se } f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \quad g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) \\ \text{allora } f(t) * g(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)G(s) \end{aligned}$$

## Chapter 4

# Anti-Trasformata di Laplace

Nella paragrafo predente abbiamo definito l'operazione di Trasformata di Laplace:

$$f(t) \text{ definita in } [0^-; +\infty] \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Se vogliamo effettuare l'operazione inversa della trasformata:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \tilde{f}(t)$$

Ci aspettiamo che:

$$\tilde{f}(t) \equiv f(t) \quad \forall t \in [0^-; +\infty]$$

Data una funzione  $F(s)$   $s \in \mathbb{C}$  con caratteristiche tali da poter essere considerata una [trasformata di Laplace](#) (continuità, derivabilità per tutti gli ordini, ascissa di convergenza ...) di una funzione  $f(t)$ , allora vorremmo trovare  $f(t)$  almeno (solo) in  $[0^-; +\infty)$  (cioè trovare  $f(t) \cdot 1(t)$ ).

Senza dimostrare, la formula generale dell'anti-trasformata di Laplace é:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad \sigma > \bar{\sigma} \text{ ascissa di convergenza}$$

Questa formula non la useremo mai, ma cercheremo di calcolarle sfruttando le [proprietà](#) della trasformata.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \cdot 1(t)$$

É importante ricordarsi sempre di mettere  $1(t)$  nell'anti-trasformata perché non consideriamo cosa é successo prima di zero. Se non lo mettiamo facciamo un errore perché troviamo l'anti-trasformata di una funzione diversa.

### 4.1 Esempi introduttivi

1.  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \cdot 1(t)$
2.  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}1(t)$  [traslazione in s](#)
3.  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}1(t)$  [traslazione in s](#)

$$4. \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{1}{n!} t^n 1(t) \Big|_{n=1} = t \cdot 1(t) \quad \text{derivata n-esima in } t$$

In generale:

$$\frac{1}{s^m} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} \cdot 1(t)$$

$$5. \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)^m} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\bar{s}^m} \Big|_{\bar{s}=s-a} \right\} = \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{at} 1(t) \quad \text{traslazione in } s$$

$$6. \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s^2+4s+13} \right\} = ?$$

Completiamo i quadrati del denominatore:

$$s^2 + 4s + 13 = s^2 + 2 \cdot (2s) + 2^2 - 2^2 + 9 = (s+2)^2 + (3)^2$$

In generale se abbiamo un polinomio di secondo grado del tipo:

$$[s - (\sigma + jw)][s - (s - jw)] = [(s - \sigma) + jw][(s - \sigma) - jw] = (s - \sigma)^2 + w^2$$

Ha come radici  $\sigma \pm jw$

Quindi nel nostro caso  $\sigma = -2 \quad w = 3$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{(s+2)^2 + 9} \right\} = e^{-2t} \sin(3t) 1(t)$$

$$7. \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{12}{(s+2)^2+9} \right\} = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{(s+2)^2+9} \right\} = 4e^{-2t} \sin(3t) 1(t)$$

$$8. \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{(s+2)^2+9} \right\} = e^{-2t} \cos(3t) 1(t)$$

$$9. \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+5}{s^2+4s+13} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{(s+2)^2+9} + \frac{3}{(s+2)^2+9} \right\} = e^{-2t} [\cos(3t) + \sin(3t)] 1(t)$$

$$10. \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-4s} \frac{3}{(s+2)^2+9} \right\} = ?$$

$$\frac{3}{(s+2)^2+9} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-2t} \sin(3t) 1(t)$$

L'esponenziale in s comporta una [traslazione in t](#):

$$\begin{aligned} f(t-T) 1(t-T) &\xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-sT} F(s) \\ e^{-4s} \frac{3}{(s+2)^2+9} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-2(t-4)} \sin[3(t-4)] 1(t-4) \end{aligned}$$

Quindi otteniamo in generale:

$$F(s)e^{-sT} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t-T) 1(t-T)$$

## 4.2 Funzioni razionali

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{A(s)}{B(s)}$$

Supponiamo che  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$  cosí  $m$  e  $n$  sono effettivamente i gradi dei polinomi:

$$m = \deg \{B(s)\}, n = \deg \{A(s)\}$$

$$\begin{aligned} n \geq m &\Rightarrow F(s) \text{ propria} \\ n > m &\Rightarrow F(s) \text{ strettamente propria} \\ n = m &\Rightarrow F(s) \text{ semplicemente propria} \end{aligned}$$

### 4.2.1 Fattorizzazione di un polinomio

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m}{a_n} \frac{(s - z_1)^{m_1} \dots (s - z_h)^{m_h}}{(s - p_1)^{n_1} \dots (s - p_k)^{n_k}}$$

$z_1, z_2, \dots, z_h$	sono gli ZERI (le radici distinte di B(s))
$p_1, p_2, \dots, p_k$	sono i POLI (le radici distinte di A(s))
$m_1, m_2, \dots, m_h$	sono le molteplicità degli zeri $\Rightarrow \sum_{i=1}^h m_i = m$
$n_1, n_2, \dots, n_k$	sono le molteplicità dei poli $\Rightarrow \sum_{i=1}^k n_i = n$

### 4.3 Funzione razionale strettamente propria

$$\begin{aligned} F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} &= c_{1,1} \frac{1}{(s - p_1)} + c_{1,2} \frac{1}{(s - p_1)^2} + \dots + c_{1,n_1} \frac{1}{(s - p_1)^{n_1}} + \\ &+ c_{2,1} \frac{1}{(s - p_2)} + \dots + c_{2,n_2} \frac{1}{(s - p_2)^{n_2}} + \dots + \\ &+ c_{k,1} \frac{1}{(s - p_k)} + \dots + c_{k,n_k} \frac{1}{(s - p_k)^{n_k}} = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} c_{i,j} \frac{1}{(s - p_i)^j} \end{aligned}$$

$c_{i,j}$  dove  $i$  indica il polo, mentre  $j$  indica la molteplicità del polo. Ma come calcolare questi coefficienti?

- Concentriamoci sul polo  $p_l$  con molteplicità  $n_l$ . Quindi calcoliamo:

$$\begin{aligned} (s - p_l)^{n_l} F(s) &= (s - p_l)^{n_l} \cdot \left( \sum_{i \neq l} \sum_{j=1}^{n_i} c_{i,j} \frac{1}{(s - p_i)^j} \right) + c_{l,1}(s - p_l)^{n_l-1} + c_{l,2}(s - p_l)^{n_l-2} + \dots + \\ &+ c_{l,n_l-1}(s - p_l)^{n_l-(n_l-1)} + c_{l,n_l} \end{aligned}$$

Calcolando questa espressione in  $p_l$  tutti i termini si annullano tranne uno:

$$c_{l,n_l} = (s - p_l)^{n_l} \cdot F(s) \Big|_{s=p_l}$$

- Deriviamo l'espressione e calcoliamola in  $p_l$ :

$$c_{l,n_l-1} = \frac{d}{ds} (s - p_l)^{n_l} \cdot F(s) \Big|_{s=p_l}$$

...

- Continuando a derivare stando attenti ai coefficienti dovuti alla derivazione:

$$c_{l,q} = \frac{1}{(n_l - q)!} \frac{d^{n_l - q}}{ds^{n_l - q}} (s - p_l)^{n_l} \cdot F(s) \Big|_{s=p_l} \in \mathbb{C} \quad (4.1)$$

L'espressione 4.1 é detta **residuo q-esimo** del polo l-esimo, dove:

- $p_l$  é l'l-esimo polo
- $n_l$  é la molteplicitá dell'l-esimo polo
- $l$  é l'indice del residuo: varia tra 1 e  $n_l$

#### 4.3.1 Esempio di residui complessi

$$\frac{1}{s^2 + 4} = c_{1,1} \frac{1}{s - j2} + c_{2,1} \frac{1}{s + j2} \quad p_1 = 2j, \quad p_2 = -2j$$

Usiamo la formula 4.1 per il primo coefficiente dove  $n_l = 1$   $q = 1$ :

- $p_1 = 2j$ :

$$c_{1,1} = \frac{1}{(1-1)!} \cdot (s - 2j) \cdot \frac{1}{(s - 2j)(s + 2j)} \Big|_{s=2j} = \frac{1}{s + 2j} \Big|_{s=2j} = \frac{1}{4j}$$

- $p_2 = -2j$ :

$$c_{2,1} = \frac{1}{(1-1)!} \cdot (s + 2j) \cdot \frac{1}{(s - 2j)(s + 2j)} \Big|_{s=-2j} = \frac{1}{s - 2j} \Big|_{s=-2j} = \frac{1}{-4j}$$

#### 4.3.2 Esempio di residui reali

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2 - 1} \quad p_1 = -1 \ (n_1 = 1) \quad p_2 = 1 \ (n_2 = 1) \\ \frac{s}{s^2 - 1} = \frac{c_{1,1}}{s + 1} + \frac{c_{2,1}}{s - 1} = \frac{c_{1,1}(s - 1) + c_{2,1}(s + 1)}{s^2 - 1} = \frac{(c_{1,1} + c_{2,1})s + (c_{2,1} - c_{1,1})}{s^2 - 1} \\ \begin{cases} c_{1,1} + c_{2,1} = 1 \\ c_{1,1} = c_{2,1} \end{cases} \Rightarrow c_{1,1} = c_{2,1} = \frac{1}{2} \\ \frac{s}{s^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s - 1} \end{aligned}$$

### 4.4 Generalizzazione dei fratti semplici

In generale data una funzione razionale  $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  strettamente propria a coefficienti reali, dove le radici di  $A(s)$  sono:

- $p_1 \dots p_r$  poli reali distinti
- $n_1 \dots n_r$  molteplicitá dei poli reali
- $\bar{p}_1 \dots \bar{p}_c$  coppie coniugate di poli complessi
- $\bar{n}_1 \dots \bar{n}_c$  molteplicitá dei poli complessi
- $c_{i,l}, \bar{c}_{i,l}^{\sin}, \bar{c}_{i,l}^{\cos} \in \mathbb{R}$



$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{n_i} c_{i,l} \frac{1}{(s-p_i)^l} + \quad (4.2)$$

$$+ \sum_{i=1}^c \sum_{l=1}^{\bar{n}_i} \left[ \bar{c}_{i,l}^{\sin} \frac{\text{Polinomio}_{i,l}^{\sin}(s)}{[(s-\sigma_i)^2 + w_i^2]^l} + \bar{c}_{i,l}^{\cos} \frac{\text{Polinomio}_{i,l}^{\cos}(s)}{[(s-\sigma_i)^2 + w_i^2]^l} \right] \quad (4.3)$$

Bisogna notare che i poli complessi essendo coniugati sono *spariti* svolgendo qualche passaggio matematico.

Ad esempio in un polinomio di secondo grado con due radici complesse  $p_1 = \sigma + jw$  e  $p_2 = \sigma - jw$ :

$$\begin{aligned} (s-p_1)(s-p_2) &= [s-(\sigma+jw)][s-(\sigma-jw)] = \\ &= [(s-\sigma)-jw][(s-\sigma)+jw] = (s-\sigma)^2 + w^2 \end{aligned}$$

Quindi possiamo distinguere due gruppi:

- i fratti semplici a **poli reali** si antitrasformano essenzialmente con degli esponenziali. Se i poli hanno una molteplicità maggiore di uno, allora compariranno anche dei polinomi:

$$(2.4) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad c_{i,l} \frac{1}{(l-1)!} t^{l-1} e^{p_i t} 1(t)$$

- i fratti semplici a **poli complessi** invece si antitrasformano con seni e coseni:

$$(2.5) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad e^{\sigma t} \sin(wt) \cdot [A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + \dots] + e^{\sigma t} \cos(wt) \cdot [B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + \dots]$$

#### 4.4.1 Osservazioni

(IMPORTANTE) Se non esistono semplificazioni tra numeratore e denominatore (non esiste una radice comune tra i due), allora i residui relativi ai fratti semplici di grado massimo per ciascun polo sono diversi da zero.

#### 4.4.2 Esempio di poli complessi

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+10}{s^2+4s+13} \right\} = ?$$

Dobbiamo scomporre la funzione razionale in fratti semplici. In generale:

$$\frac{as+b}{(s-\sigma)^2+w^2} = A \frac{w}{(s-\sigma)^2+w^2} + B \frac{(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+w^2} = \frac{Aw + Bs - B\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2}$$

- Riscriviamo la funzione razionale come combinazione lineare di funzioni razionali in cui a numeratore abbiamo un polinomio di grado 0 e uno di grado 1. Con una combinazione lineare di un qualsiasi polinomio di grado 0 con un polinomio di grado 1, possiamo scrivere un qualsiasi polinomio di grado 1, come quello di partenza  $as+b$ .
- Attraverso il principio di uguaglianza fra polinomi (due polinomi sono uguali se i coefficienti omologhi sono uguali) confrontiamo il nuovo polinomio  $Aw + Bs - B\sigma$  con quello di partenza  $as+b$ .
- Quindi alla fine dobbiamo risolvere un sistema lineare di due equazioni in 2 incognite con un'unica soluzione perché ha rango massimo: 
$$\begin{cases} B &= a \\ Aw + B\sigma &= b \end{cases}$$

Quindi nel nostro esempio otteniamo:

$$\frac{3s+10}{s^2+4s+13} = A \frac{3}{(s+2)^2+9} + B \frac{s+2}{(s+2)^2+9} = \frac{3A + Bs + 2B}{(s+2)^2+9}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} B &= 3 \\ 3A + 2B &= 10 \end{cases} & \quad \begin{cases} B &= 3 \\ A &= \frac{4}{3} \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{4}{3} \frac{3}{(s+2)^2 + 9} + 3 \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} \\ \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{4}{3} e^{-2t} \sin(3t) 1(t) + 3 e^{-2t} \cos(3t) 1(t) \end{aligned}$$

#### 4.4.3 Esempio di poli complessi 2

Bisogna utilizzare la trasformata in  $s$  del polinomio + esponenziale + senoide:

$$\begin{aligned} \frac{\text{polinomio grado } \leq 3}{[(s-3)^2 + 4]^2} &= A \frac{2}{(s-3)^2 + 4} + B \frac{s-3}{(s-3)^2 + 4} + \\ &+ C \frac{4 \cdot (s-3)}{[(s-3)^2 + 4]^2} + D \frac{(s-3)^2 - 4}{[(s-3)^2 + 4]^2} \end{aligned}$$

Dopo aver risolto un sistema per trovare i quattro coefficienti, l'anti-trasformata é:

$$f(t) = e^{3t} [A \sin(2t) + B \cos(2t) + t C \sin(2t) + t D \cos(2t)]$$

### 4.5 Funzione razionale propria

Partiamo con un esempio di una funzione propria:  $\deg\{B(s)\} \geq \deg\{A(s)\}$

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^2 - 1}$$

Effettuiamo la divisione tra i due polinomi:

$$\begin{array}{r|l} s^2 & +1 \\ s^2 & -1 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} s^2 - 1 \\ 1 \end{array} \right.$$

Ci fermiamo nella divisione quando raggiungiamo l'ultimo termine con potenza positiva o nulla (come in questo caso). Se avessimo continuato, avremmo ottenuto termini con potenze negative.

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^2 - 1} = Q(s) + \frac{R(s)}{A(s)} = 1 + \frac{2}{s^2 - 1}$$

dove  $Q(s)$  é il polinomio *quoziente*,  $R(s)$  il polinomio resto. Al secondo membro abbiamo ottenuto una funzione razionale strettamente propria. Quindi applichiamo i fratti semplici:

$$\frac{2}{s^2 - 1} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} = \frac{A(s-1) + B(s+1)}{s^2 - 1} = \frac{(A+B)s + (B-A)}{s^2 - 1}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B-A=0 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

Quindi concludiamo l'esercizio:

$$F(s) = 1 - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \delta(t) + (-e^{-t} + e^t) \cdot 1(t)$$

In generale  $m \geq n$ ,  $m = \partial \deg \{B(s)\}$   $n = \partial \deg \{A(s)\}$ :

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = k_0 + k_1 s + k_2 s^2 + \cdots + k_{m-n} s^{m-n} + \frac{\tilde{B}(s)}{A(s)}$$

con  $\partial \deg \{\tilde{B}(s)\} < \partial \deg \{A(s)\}$  e quindi la frazione resto é risolubile con i fratti semplici.

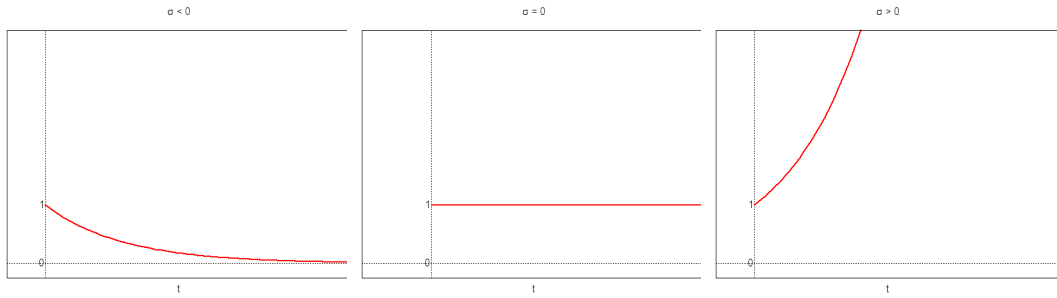
$$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \delta(t) + \frac{d}{dt} \delta(t) + \frac{d^2}{dt^2} \delta(t) + \cdots + \frac{d^{m-n}}{dt^{m-n}} \delta(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{B}(s)}{A(s)} \right\}$$

## 4.6 Andamento nel tempo dell'antitrasformata

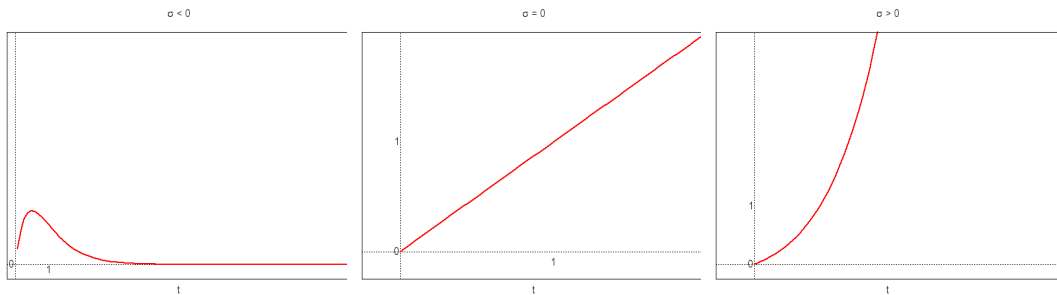
- $\Re \{p\} < 0 \Rightarrow$  l'antitrasformata tende a zero
- $\Re \{p\} = 0$  e molteplicitá = 1  $\Rightarrow$  non tende a zero, ma é limitata
- $\Re \{p\} > 0$  oppure  $\Re \{p\} = 0$  e molteplicitá  $> 1 \Rightarrow$  non é limitata e diverge a  $\pm \infty$

**Poli reali:**  $p = \sigma \in \mathbb{R}$

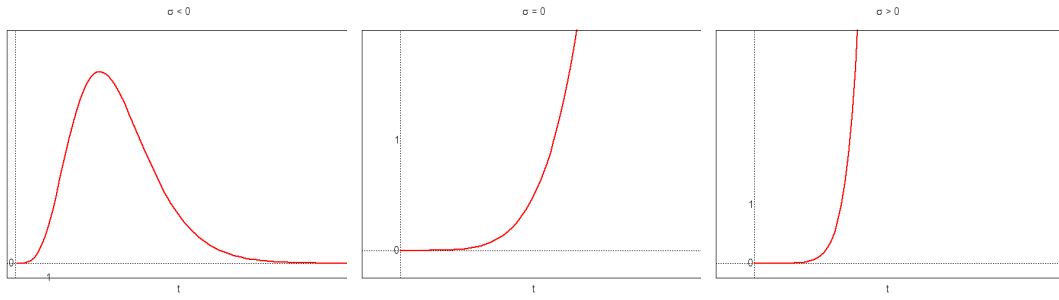
$$\frac{1}{s - \sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{\sigma t} 1(t)$$



$$\frac{1}{(s - \sigma)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t e^{\sigma t} 1(t)$$

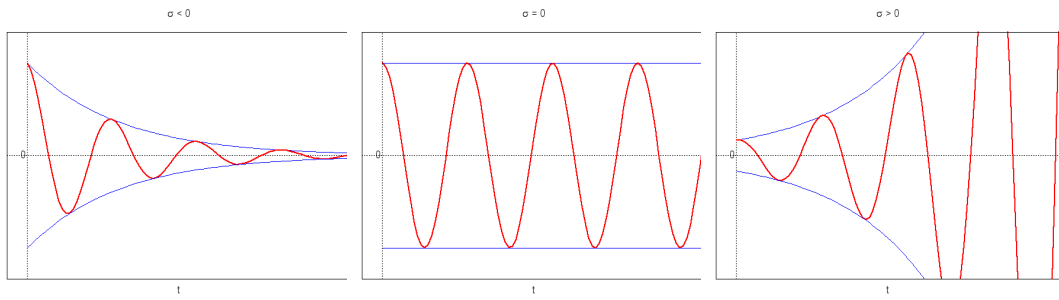


$$\frac{1}{(s - \sigma)^n} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\sigma t} 1(t)$$

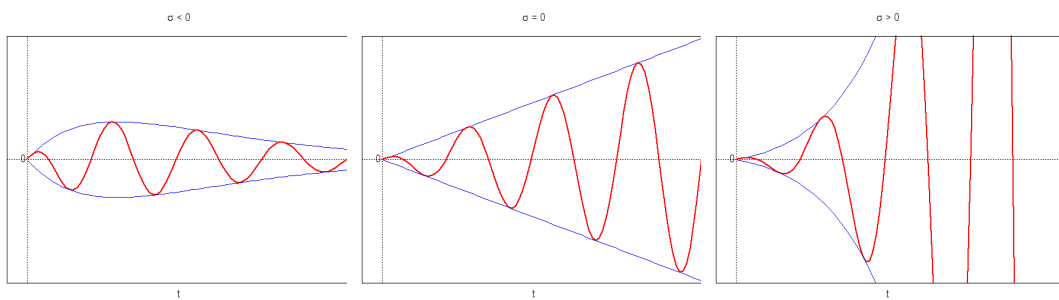


**Poli complessi:**  $p = \sigma \pm jw$   $w \neq 0$

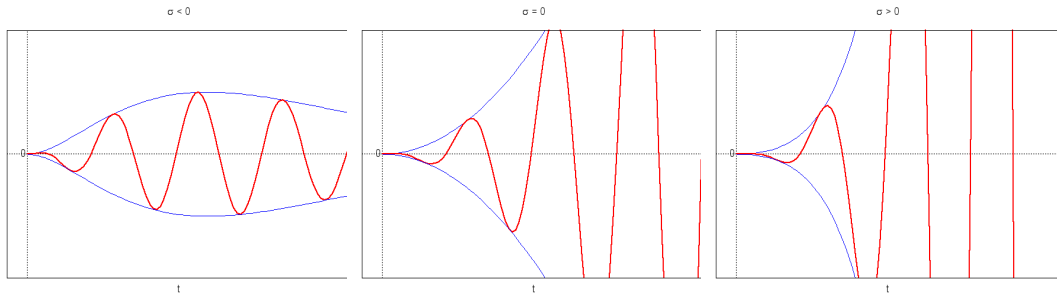
$$\frac{c}{s-p} + \frac{c^*}{s-p^*} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{\sigma t}(A \sin wt + B \cos wt) = De^{\sigma t} \cos(wt + \phi)$$



$$\frac{c}{(s-p)^2} + \frac{c^*}{(s-p^*)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} Dte^{\sigma t} \cos(wt + \phi)$$



$$\frac{c}{(s-p)^n} + \frac{c^*}{(s-p^*)^n} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} D \frac{1}{(n-1)!} t^n e^{\sigma t} \cos(wt + \phi)$$



## 4.7 Teorema del valore iniziale

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

Questo teorema non richiede particolari ipotesi, ma nel caso delle funzioni razionali non strettamente proprie ( $m \geq n$ ) bisogna applicarlo sul resto della divisione.

### 4.7.1 Esempio: funzione razionale non strettamente propria

$$F(s) = \frac{s+1}{s-1}$$

Se applicassimo direttamente il teorema, otterremmo un risultato sbagliato:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \frac{s+1}{s-1} = +\infty$$

In realtà dobbiamo prima calcolare il resto della divisione tra polinomi:

$$F(s) = \frac{s+1}{s-1} = \frac{s-1+1+1}{s-1} = \frac{s-1}{s-1} + \frac{2}{s-1} = 1 + \frac{2}{s-1}$$

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \frac{2}{s-1} = 2$$

## 4.8 Teorema del valore finale

Sia  $f(t)$  una funzione Laplace-trasformabile con trasformata  $F(s)$ .

$$f_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad \Rightarrow \quad f_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Nel caso di poli complessi, l'antitrasformata oscilla attorno a un valore e quindi il teorema non é applicabile perché il limite non esiste. Se però tutti i poli non hanno  $\Re\{p\} > 0$ , allora il teorema é interpretabile come "valore medio asintotico".

### 4.8.1 Esempio: non applicabile

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 4} \quad \text{i poli sono: } p = \pm 2j$$

$$f(t) = \sin(2t) \cdot 1(t)$$

Il teorema non é applicabile perché la funzione oscilla. Se comunque calcolassi quel limite ottengo:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s}{s^2 + 4} = 0$$

### 4.8.2 Esempio: non applicabile

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s - 1}$$

Non si può applicare il teorema perché uno dei due poli é positivo.

### 4.8.3 Esempio: applicabile

$$F(s) = \frac{1}{s + 1} \quad p = -1$$

$$f_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + 1} = 0$$

## 4.9 Esercizi

### 4.9.1 ♣ Poli reali multipli, poli complessi semplici

$$F(s) = \frac{s^3 + s^2 + 14s - 27}{s^4 - 4s^3 + 13s^2 - 36s + 36}$$

Per fattorizzare il denominatore cerchiamo le sue radici attraverso Ruffini. Con 2 il denominatore si annulla, quindi dividiamo il polinomio per  $s - 2$ :

$$\begin{array}{r|rrrrrr} s^4 & -4s^3 & +13s^2 & -36s & +36 & & s-2 \\ s^4 & -2s^3 & & & & & \\ \hline // & -2s^3 & +13s^2 & -36s & +36 & & \\ & -2s^3 & +4s^2 & & & & \\ \hline & // & 9s^2 & -36s & +36 & & \\ & & 9s^2 & -18s & & & \\ \hline & & // & -18s & +36 & & \end{array}$$

$$Den(s) = (s - 2)(s^3 - 2s^2 + 9s - 18) = (s - 2)[s^2(s - 2) + 9(s - 2)] = (s - 2)^2(s^2 + 9)$$

$$\begin{cases} p_1 = 2 \\ n_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} p_{2,3} = \pm 3j \\ n_{2,3} = 1 \end{cases}$$

$$F(s) = c_{11} \frac{1}{s - 2} + c_{12} \frac{1}{(s - 2)^2} + c_{21} \frac{1}{s - 3j} + c_{31} \frac{1}{s + 3j}$$

$c_{11}$  potrebbe essere nullo, mentre mi aspetto che  $c_{21} \neq 0$ , altrimenti non potrebbe esistere il fattore  $(s - 2)^2$  nel denominatore. per quanto riguarda i coefficienti dei poli complessi, uno dei due potrebbe essere nullo, ma non possono esserlo contemporaneamente per lo stesso motivo.

Per calcolare i residui dei poli reali usiamo la formula 4.1:

- $c_{11} \quad q = 1 \quad n_1 = 2$

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d}{ds} (s - 2)^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} \left( \frac{s^3 + s^2 + 14s - 27}{s^2 + 9} \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{(3s^2 + 2s + 14)(s^2 + 9) - (s^3 + s^2 + 14s - 27)2s}{s^2 + 9} = 2 \end{aligned}$$

- $c_{12} \quad q = 2 \quad n_1 = 2$

$$c_{12} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}} \frac{s^3 + s^2 + 14s - 27}{s^2 + 9} = 1$$

Per calcolare i residui dei poli complessi, la formula precedente conduce a calcoli complicati. È meglio ricavarli uguagliando i polinomi:

$$\begin{aligned}
 F(s) &= 2\frac{1}{s-2} + 2\frac{1}{(s-2)^2} + A\frac{3}{s^2+9} + B\frac{s}{s^2+9} \\
 &= \frac{2(s-2)(s^2+9) + (s^2+9) - 3A(s-2)^2 + Bs(s-2)^2}{(s-2)^2(s^2+9)} = \\
 &= \frac{2s^3 + 18s - 4s^2 - 36 + s^2 + 9 + 3As^2 - 12As + 12A + Bs^3 - 4Bs + 4Bs}{(s-2)^2(s^2+9)} = \\
 &= \frac{(B+2)s^3 + (3A-4B-3)s^2 + (4B-12A+18)s + (12A-27)}{(s-2)^2(s^2+9)}
 \end{aligned}$$

Abbiamo un sistema ridondante di 4 equazioni in 2 incognite:

$$\begin{cases} B+2=1 \\ 3A-4B-3=1 \\ 4B-12A+18=14 \\ 12A-27=-27 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ A=0 \end{cases}$$

Quindi si può facilmente ricavare l'anti-trasformata:

$$f(t) = (2e^{2t} + te^{2t} - \cos 3t) \cdot 1(t)$$

#### 4.9.2 ♣ Poli reali multipli, poli complessi semplici

$$F(s) = \frac{8s^3 + 33s^2 + 42s + 52}{s^5 + 6s^4 + 21s^3 + 26s^2}$$

Fattorizziamo il denominatore:

$$Den(s) = s^2(s^3 + 6s^2 + 21s + 26)$$

Usiamo il teorema di Ruffini per fattorizzare il polinomio di terzo grado:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 6 & 21 & 26 \\
 -2 & & -2 & -8 & -26 \\
 \hline
 & 1 & 4 & 13 & 0
 \end{array}$$

$$Den(s) = s^2(s+2)(s^2+4s+13)$$

Le soluzioni del polinomio di secondo grado si possono trovare:

- completamento dei quadrati

$$s^2 + 4s + 4 - 4 + 13 = (s+2)^2 + 9 \Rightarrow \sigma = -2 \quad w = 3$$

- formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = 2 \pm 3j \Rightarrow \sigma = -2 \quad w = 3$$

$$\begin{array}{lll}
 p_1 = 0 & p_2 = -2 & p_{3,4} = -2 \\
 n_1 = 2 & n_2 = 1 & n_{3,4} = 1
 \end{array}$$

$$F(s) = c_{11}\frac{1}{s} + c_{12}\frac{1}{s^2} + c_{21}\frac{1}{s+2} + A\frac{3}{[(s+2)^2+9]} + B\frac{s+2}{[(s+2)^2+9]}$$

Calcoliamo  $c_{11}$   $c_{12}$   $c_{21}$  con la formula dei residui:

- $c_{11}$  :  $p_1 = 0 \quad n_1 = 2 \quad q = 1$

$$c_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} s^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{8s^3 + 33s^2 + 42s + 52}{s^3 + 6s^2 + 21s + 26} =$$

quando  $s \rightarrow 0$  ci interessano solo i termini noti

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\dots + 42)(\dots + 26) - (\dots + 21)(\dots + 52)}{(\dots + 26)^2} = \frac{42 \cdot 26 - 21 \cdot 52}{26^2} = 0$$

- $c_{12}$  :  $p_1 = 0 \quad n_1 = 2 \quad q = 2$

$$c_{12} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\dots + 52}{\dots + 26} = 2$$

- $c_{21}$  :  $p_1 = -2 \quad n_1 = 1 \quad q = 1$

$$c_{21} = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)F(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{8s^3 + 33s^2 + 42s + 52}{s^4 + 4s^3 + 13s^2} = 1$$

Calcoliamo  $A$  e  $B$  attraverso il sistema:

$$\begin{aligned} F(s) &= 2\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+2} + A\frac{3}{(s+2)^2+9} + B\frac{s+2}{(s+2)^2+9} = \\ &= \frac{2(s+2)[s^2+4s+13] + s^2[s^2+4s+13] + 3As^2(s+2) + B(s+2)s^2(s+2)}{s^2(s+2)[(s+2)^2+9]} = \\ &= \frac{2s^3 + 8s^2 + 26s + 4s^2 + 16s + 52 + s^4 + 4s^3 + 13s^2 + 3As^3 + 6As^2 + Bs^4 + 4Bs^3 + 4Bs^2}{s^2(s+2)[(s+2)^2+9]} = \end{aligned}$$

poiché ho 2 incognite mi servono solo 2 equazioni: posso ignorare le altre

$$= \frac{(B+1)s^4 + (3A+4B+6)s^3 + \dots}{s^2(s+2)[(s+2)^2+9]}$$

$$\begin{cases} B+1=0 \\ 3A-4+6=8 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ A=2 \end{cases}$$

Quindi otteniamo:

$$f(t) = (2t + 1 \cdot e^{-2t} + 2e^{-2t} \sin 3t - 1 \cdot e^{-2t} \cos 3t) \cdot 1(t)$$

#### 4.9.3 ♣♣ Poli reali semplici, poli complessi multipli

$$F(s) = \frac{2s^4 - 6s^3 + 22s^2 - 18s + 16}{(s+1)[(s-1)^2+4]^2}$$

$$\begin{array}{ll} p_1 = -1 & p_{2,3} = 1 \pm 2j \\ n_1 = 1 & n_{2,3} = 2 \end{array}$$

$$F(s) = c_{11} \frac{1}{s+1} + A \frac{2}{[(s-1)^2+4]} + B \frac{s-1}{[(s-1)^2+4]} + C \frac{4(s-1)}{[(s-1)^2+4]^2} + D \frac{(s-1)^2-4}{[(s-1)^2+4]^2}$$

$A$  e  $B$  possono essere nulli,  $C$  e  $D$  non contemporaneamente:

$$c_{11} = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)F(s) = \frac{2+6+22+18+16}{64} = 1$$



Ancora dobbiamo trovare  $A, B, C, D$  quindi ci servono 4 equazioni. Per semplificare i calcoli:

$$\begin{aligned}
 R(s) &= F(s) - \frac{1}{s+1} = \frac{2s^4 - 6s^3 + 22s^2 - 18s + 16}{(s+1)[(s-1)+4]^2} - \frac{1}{s-1} = \\
 &= \frac{2s^4 - 6s^3 + 22s^2 - 18s + 16 - [(s-1)+4]^2}{(s+1)[(s-1)+4]^2} = \\
 &= \dots = \frac{s^4 - 2s^3 - 8s^2 + 2s - 9}{(s+1)[(s-1)+4]^2} = \frac{s^3 - 3s^2 + 11s - 9}{[(s-1)+4]^2} \\
 &\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{s^3 - 3s^2 + 11s - 9}{[(s-1)+4]^2}
 \end{aligned}$$

Adesso riscriviamo  $F(s)$  senza considerare il termine  $\frac{1}{s-1}$  perché tanto non lo considereremo:

$$\begin{aligned}
 &A \frac{2}{[(s-1)^2+4]} + B \frac{s-1}{[(s-1)^2+4]} + C \frac{4(s-1)}{[(s-1)^2+4]^2} + D \frac{(s-1)^2-4}{[(s-1)^2+4]^2} = \\
 &= \frac{[2A + B(s-1)][s^2 - 2s + 5] + 4C(s-1) + D[(s-1)^2 - 4]}{[(s-1)+4]^2} = \\
 &= \frac{Bs^3 + (2A + 3B + D)s^2 + (10A - 5B - 4C - 2D)s + (10A - 5B - 4C - 3D)}{[(s-1)+4]^2}
 \end{aligned}$$

Uguagliamo i polinomi e ricaviamo le incognite:

$$\begin{cases} B = 1 \\ 2A + 3 + D = -3 \\ -4A + 7 + 4C - 2D = 11 \\ 10A - 5 - 4C - 3D = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 1 \\ -2A = D + 6 \\ 6A - 5D = 0 \\ -2A + 2C - D = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 1 \\ -2A = D + 6 \\ 6A - 5D = 0 \\ D + 6 + 2C - D = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{15}{8} \\ B = 1 \\ C = -2 \\ D = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

Quindi otteniamo:

$$f(t) = [1 \cdot e^{-t} - \frac{15}{8}e^t \sin 2t + 1 \cdot \cos 2t - 2 \cdot te^t \sin 2t - \frac{9}{4}te^t \cos 2t] \cdot 1(t)$$

## Chapter 5

# Sistemi lineari

### 5.1 Applicazione dell'anti-trasformata di Laplace a equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Consideriamo una generica equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_mu^{(m)}(t) + \dots + b_0u(t) \quad (5.1)$$

Dobbiamo trovare la soluzione  $y(t)$  che soddisfi questa equazione dato l'ingresso  $u(t)$  e le eventuali condizioni al contorno.

Chiamiamo  $D$  l'operatore derivata rispetto al tempo:

$$D = \frac{d}{dt} \Rightarrow y^{(k)}(t) = D^k y(t)$$

$$A(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0$$

$$B(D) = b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0$$

Allora l'equazione 5.1 diventa:

$$A(D)y(t) = B(D)u(t)$$

Applichiamo la trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t)\} = \mathcal{L}\{b_mu^{(m)}(t) + \dots + b_0u(t)\}$$

Sfrutto la proprietà di linearità e applico la trasformata ad ogni singolo termine.

Inoltre chiamo  $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$  e  $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$ .

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^n Y(s) && - \left[ s^{n-1}y(0^-) + \dots + y^{(n-1)}(0^-) \right] \\ + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} a_{n-1}s^{n-1}Y(s) && - a_{n-1} \left[ s^{n-2}y(0^-) + \dots + y^{(n-2)}(0^-) \right] \\ &\dots && \\ + a_1y'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} a_1sY(s) && - a_1y(0^-) \\ + a_0y(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} a_0Y(s) = \\ = b_mu^{(m)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} b_ms^mU(s) && - b_m \left[ s^{m-1}u(0^-) + \dots + u^{(m-1)}(0^-) \right] \\ &\dots && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +b_1 y^{(1)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} b_1 s U(s) & -b_1 u(0^-) \\ +b_0 u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} b_0 U(s) \end{aligned}$$

I coefficienti di  $Y(s)$  costituiscono proprio il polinomio  $A$  calcolato in  $s$ , mentre i coefficienti di  $U(s)$  sono il polinomio  $B$  calcolato in  $s$ . Se raccolgo  $Y(s)$  e  $U(s)$ :

$$A(s)Y(s) - I_y(s) = B(s)U(s) - I_u(s)$$

dove:

- $I_y(s)$  é un polinomio in  $s$  con grado massimo pari a  $n - 1$  e coefficienti dipendenti dalle condizioni iniziali  $y(0^-) \dots y^{(n-1)}(0^-)$
- $I_u(s)$  é un polinomio in  $s$  con grado massimo pari a  $m - 1$  e coefficienti dipendenti dalle condizioni iniziali  $u(0^-) \dots u^{(m-1)}(0^-)$

la soluzione dell'equazione differenziale nel dominio di Laplace é:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) + \frac{I(s)}{A(s)} \quad \text{con } I(s) = I_y(s) - I_u(s) \quad (5.2)$$

Quindi per trovare la soluzione nel domini del tempo basta anti-trasfromare:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\}$$

Riassumendo, i dati che mi servono per calcolare  $Y(s)$  sono:

- l'ingresso:  $u(t) \quad t \in [0, +\infty)$
- le condizioni iniziali:  $y(0^-) \dots y^{(n-1)}(0^-) \quad u(0^-) \dots u^{(m-1)}(0^-)$

Apparentemente mi servono  $n + m$  condizioni iniziali.

Ma  $I(s)$  é un polinomio di grado massimo pari a  $\max(n, m) - 1$ , quindi costituito da  $\max(n, m)$  coefficienti (perché si esclude il coefficiente del termine di grado zero).

Ne segue che ci sono  $\max(n, m)$  condizioni iniziali. Il modo in cui i coefficienti di  $I(s)$  dipendano da queste ultime é fissato dall'equazione differenziale.

Il numero di coefficienti di  $I(s)$  determina i gradi di libertà di  $\frac{I(s)}{A(s)}$ .

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{A(s)} U(s) \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I(s)}{A(s)} \right\}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{A(s)} U(s) \right\} \quad \textbf{risposta forzata} \text{ (risposta a condizioni iniziali nulle)}$$

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I(s)}{A(s)} \right\} \quad \textbf{risposta libera} \text{ (risposta a ingresso nullo)}$$

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) + \frac{I(s)}{A(s)} = Y_f(s) + Y_l(s)$$

### 5.1.1 Funzione di trasferimento

$$T(s) = \frac{\bar{A}(s)}{\bar{B}(s)} = \frac{\bar{A}(s) P(s)}{\bar{B}(s) P(s)}$$

Se fattorizzando  $A(s)$  e  $B(s)$  troviamo dei fattori comuni  $P(s)$ , cioè:

$$A(s) = \bar{A}(s) P(s) \quad B(s) = \bar{B}(s) P(s)$$

$\bar{A}(s)$  e  $\bar{B}(s)$  sono detti coprime perchè non hanno alcuno fattore in comune.

Quindi  $T(s)$  é funzione di trasferimento **se e solo se** corrisponde al rapporto tra  $B(s)$  e  $A(s)$  dopo aver cancellato tutti i fattori comuni.

### 5.1.2 Risposta all'impulso

- le condizioni iniziali sono nulle ( $\Leftrightarrow I(s) = 0$ ) e quindi anche  $Y_l(s) = 0$
- $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= T(s)U(s) = T(s) \\ y_f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{T(s)\} = h(t) \quad \text{risposta forzata all'impulso} \end{aligned}$$

Quindi otteniamo anche:

$$Y_f(s) = T(s)U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}} y_f(t) = h(t) * u(t)$$

### 5.1.3 Esempio circuito RC

L'equazione del circuito é:

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t)$$

Introduciamo l'operatore derivata:

$$\begin{aligned} (D + \frac{1}{RC})y(t) &= \frac{1}{RC}u(t) \\ A(D) &= D + \frac{1}{RC} & B(D) &= \frac{1}{RC} \\ A(s) &= s + \frac{1}{RC} & B(s) &= \frac{1}{RC} \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento é:

$$T(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Trasformiamo l'equazione differenziale per ricavare  $I(s)$ :

$$\begin{aligned} sY(s) - y(0^-) + \frac{1}{RC}Y(s) &= \frac{1}{RC}U(s) \\ Y(s) \underbrace{\left(s + \frac{1}{RC}\right)}_{A(s)} - \underbrace{y(0^-)}_{I_y(s)} &= \underbrace{\frac{1}{RC}}_{B(s)} U(s) - \underbrace{0}_{I_u(s)} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo trovato che:

- $I_y(s)$  é un polinomio di primo grado perché  $y(t)$  compare derivato nell'equazione differenziale ( $n = 1$ ).
- $I_u(s)$  é un polinomio di grado zero perché  $u(t)$  non é derivato ( $m = 1$ ).

Calcoliamo la risposta libera e la risposta forzata del sistema:

- $u(t) = 1(t)$  e condizioni iniziali nulle

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = Y_f(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})} \\ y(t) &= y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})}\right\} \end{aligned}$$

Si può calcolare attraverso i fratti semplici:

$$\frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})} = A \frac{1}{s} + B \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{(A+B)s + \frac{A}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$y_f(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \cdot 1(t)$$

- $u(t) = 0$  e condizioni iniziali non nulle

$$Y_l(s) = \frac{I(s)}{A(s)} = \frac{y_0}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$y_l(t) = y_0 e^{-\frac{t}{RC}} \cdot 1(t)$$

Poiché il sistema é lineare si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti: somma di cause corrisponde una somma di effetti. Quindi se l'ingresso e le condizioni iniziali non sono nulle, in uscita si avrà la somma dell'uscita forzata e di quella libera:

$$Y(s) = Y_f(s) + Y_l(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} U(s) + \frac{y_0}{s + \frac{1}{RC}}$$

Inoltre é possibile applicare il teorema del valore finale perché i poli sono a  $\Re = 0$  e  $\Re < 0$

$$y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sy_0 + \frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC}} = 1$$

## 5.2 Sistemi

D'ora in poi supponiamo che  $S$  sia un sistema descritto dall'equazione 5.1:

$$A(D)y(t) = B(D)u(t) \quad \begin{cases} m = \deg\{B(D)\} \\ n = \deg\{A(D)\} \end{cases}$$

### 5.2.1 Sistema strettamente proprio $m < n$

**Funzione di trasferimento e risposta all'impulso**

$$T(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\bar{B}(s)P(s)}{\bar{A}(s)P(s)} \quad \bar{m} = \deg\{B(s)\} < \bar{n} = \deg\{A(s)\}$$

Allora abbiamo che:

- $T(s)$  é una funzione razionale strettamente propria
- $h(t)$  non contiene impulsi nell'origine. Quindi se sollecitiamo il sistema con un impulso, in uscita non avremo un impulso, ma una risposta più "smooth".

**Risposta libera**

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I(s)}{A(s)} \right\} \quad \begin{cases} \deg\{I(s)\} \leq \max(n, m) - 1 = n - 1 \\ \deg\{A(s)\} = n \end{cases}$$

Anche la risposta libera non contiene impulsi, perché é l'antitrasformata di una funzione razionale strettamente propria.<sup>5</sup>

### 5.2.2 Sistema semplicemente proprio $m = n$

Risposta all'impulso

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{T(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\bar{B}(s)}{\bar{A}(s)} \right\} =$$

faccio la divisione tra i polinomi di quella funzione propria:

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ h_0 + \frac{\bar{B}'(s)}{\bar{A}(s)} \right\} =$$

Dalla divisione, proprio perché si trattava di una funzione razionale propria, abbiamo ottenuto un quoziente  $h_0$  e un resto  $\frac{\bar{B}'(s)}{\bar{A}(s)}$ , che è strettamente proprio.

$$= h_0 \delta(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\bar{B}'(s)}{\bar{A}(s)} \right\}$$

Abbiamo ottenuto  $h_0 \delta(t)$  che è un impulso nell'origine.

Infatti da come si nota nella risposta forzata, a un impulso in ingresso corrisponde un impulso in uscita, perché c'è una dipendenza istantanea tra ingresso e uscita:

$$Y_f(s) = \underbrace{h_0 U(s)}_{\substack{\text{componente istantanea} \\ \text{che amplifica l'ingresso}}} + \frac{\bar{B}'(s)}{\bar{A}(s)} U(s)$$

Risposta libera

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I(s)}{\bar{A}(s)} \right\} \quad \begin{cases} \deg \{I(s)\} \leq \max(n, m) - 1 = n - 1 \\ \deg \{\bar{A}(s)\} = n \end{cases}$$

Non contiene nessun impulso perché è l'antitrasformata di una funzione razionale strettamente propria. Non avrebbe senso infatti che un sistema con ingresso nullo, restituisca improvvisamente un impulso in uscita.

### 5.2.3 Sistema improprio $m > n$

Risposta all'impulso

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{T(s)\} =$$

facciamo la divisione tra i polinomi

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ h_{m-n} s^{m-n} + \dots + h_1 s + \frac{\bar{B}'(s)}{\bar{A}(s)} \right\} =$$

$h_{m-n} s^{m-n} \neq 0$  perché la divisione deve restituire sicuramente un quoziente.

$\frac{\bar{B}'(s)}{\bar{A}(s)}$  è strettamente propria, quindi la sua antitrasformata non contiene impulsi.

$$= h_{m-n} \delta^{(m-n)}(t) + \dots + h_1 \delta^{(1)}(t) + h_0 \delta(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\bar{B}'(s)}{\bar{A}(s)} \right\}$$

Se in ingresso ho un impulso, in uscita ottengo impulsi di ordine superiore a 0. Quindi se un impulso è fisicamente irrealizzabile (un'energia infinita concentrata in un intervallo di tempo infinitesimo), a maggior ragione gli impulsi di ordine superiore.

## Risposta libera

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I(s)}{A(s)} \right\} \quad \begin{cases} \deg \{I(s)\} \leq \max(n, m) - 1 = m - 1 \geq n \\ \deg \{A(s)\} = n \end{cases}$$

L'antitrasformata di una funzione razionale impropria può contenere impulsi o impulsi di ordine superiore nell'origine  $t = 0$  (come si vede facendo la divisione tra numeratore e denominatore).

Significa che il sistema, non sollecitato da nessun ingresso e sotto certe condizioni iniziali, produce in uscita un impulso nell'origine.

Un sistema improprio quindi **non é realizzabile** perché non é causale, in quanto l'uscita dipende dai valori futuri. Esempi di sistemi non causali sono:

- anticipatore  $y(t) = u(t + t_0)$   
l'uscita dipende dai valori dell'ingresso che ancora non sono applicati.
- derivatore  $y(t) = \frac{du(t)}{dt}$   
per poter fare la derivata dell'ingresso, oltre il limite sinistro  $u(0^-)$  (la condizione iniziale), bisogna conoscere anche il limite destro. Se i due limiti non coincidono, si ha una discontinuità di tipo salto e quindi derivando si ottiene un impulso.

## 5.3 Stabilità dei sistemi realizzabili $m \leq n$

Dato un sistema descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del tipo 5.1, si distinguono due tipi di stabilità:

- stabilità della  $y_l(t)$
- stabilità della  $y_f(t)$

### 5.3.1 Stabilità della risposta libera

#### Definizione

Un sistema si dice **semplicemente stabile** nella risposta libera **se e solo se** qualsiasi condizione iniziale finita,  $y_l(t)$  é stabile, cioè limitata  $\forall t \geq 0$  (non diverge mai).

Se inoltre  $y_l(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , allora il sistema si dice **asintoticamente stabile**.

#### Condizioni

- Sistema asintoticamente stabile nella risposta libera se e solo se le radici di  $A(s)$  sono  $\Re < 0$  con qualsiasi molteplicità
- Sistema semplicemente stabile nella risposta libera se e solo se le radici di  $A(s)$  sono  $\Re < 0$  con qualsiasi molteplicità o  $\Re = 0$  con molteplicità 1.
- se si trova una radice di  $A(s)$  con  $\Re > 0$  con qualsiasi molteplicità o  $\Re = 0$  con molteplicità  $> 1$ , allora il sistema é instabile nella risposta libera.

#### Esempi

La stabilità nella risposta libera si può trovare facilmente con la regola di Cartesio, se  $A(s)$  é un polinomio.

- $A(s) = s^2 + s + 1$   
Ho 2 permanenze quindi per la regola di Cartesio, ho 2 radici a parte reale negativa.  
 $\Rightarrow$  sistema asintoticamente instabile nella  $y_l(t)$ .

- $A(s) = s^2 - s + 1$   
Ho due variazioni di segno, quindi ho due radici a  $\Re > 0 \Rightarrow$  sistema instabile in  $y_l(t)$ .
- $A(s) = s^3 + s^2 + s = s(s^2 + s + 1)$   
sistema semplicemente stabile nella risposta libera, perché ho due radici a  $\Re < 0$  (due permanenze) e una radice in zero con molteplicità 1.
- $A(s) = s^4 + s^3 + s^2 = s^2(s^2 + s + 1)$   
Ho una radice a  $\Re = 0$  e molteplicità 2, due radici a  $\Re < 0$  (due permanenze)  $\Rightarrow$  il sistema è instabile nella risposta libera. Significa che avendo ingressi nulli e condizioni iniziali nulle, abbiamo un'uscita infinita  $\Rightarrow$  probabilmente fisicamente non esiste.

### 5.3.2 Stabilità della risposta forzata

È detta anche stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output: ingresso limitato  $\Rightarrow$  uscita limitata). In questo caso non c'è distinzione tra stabilità semplice e asintotica, ma la stabilità BIBO ci può essere o non essere.

#### Definizione

Un sistema SISO (Single Input Single Output) è detto stabile nella risposta forzata se a qualsiasi ingresso limitato corrisponde una  $y_f(t)$  limitata.

#### Condizioni

Un sistema è stabile BIBO se e solo se  $\nexists$  poli di  $T(s)$  (radici del denominatore di  $T(s)$ ) a  $\Re > 0$ .

#### Cenni dimostrazione

Facciamo vedere con contro-esempi che se non rispettiamo le condizioni, il sistema non è stabile BIBO. Cioè troviamo degli ingressi limitati che fanno divergere l'uscita.

$\exists$  poli di  $T(s)$  a  $\Re > 0$ . Supponiamo:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \quad \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = 1 \end{cases}$$

Poiché c'è un polo a  $\Re > 0$ , allora deve esistere sicuramente almeno un ingresso limitato che produca un'uscita illimitata.

$$\bullet \quad u(t) = 1(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y_f(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \cdot \frac{1}{s} = A \frac{1}{s+1} + B \frac{1}{s-1} + C \frac{1}{s}$$

dove  $A, B, C \neq 0$  perché i poli hanno molteplicità 1.

$$y_f(t) = (Ae^{-t} + \underbrace{Be^t}_{\text{diverge}} + 1) \cdot 1(t)$$

- prendiamo come ingresso una funzione razionale strettamente propria, che quindi non contiene impulsi.

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-1}{(s+2)^2} \right\} \quad s_1 = -2m_1 = 2 \rightarrow \text{ha antitrasformata limitata}$$

$$Y_f(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \frac{s-1}{(s+2)^2} \quad \Rightarrow \quad y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \right\}$$



Questo dimostra che non ci devono essere poli a  $\Re > 0$  per la stabilità:

$\exists$  poli di  $T(s)$  a  $\Re = 0$  con molteplicità 1.

Poiché c'è un polo a  $\Re = 0$  con molteplicità 1, deve esistere almeno un ingresso limitato per cui l'uscita forzata è illimitata.

•

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + s} = \frac{1}{s(s+1)} \quad \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -1 \end{cases}$$

Prendo come  $U(s)$  una funzione strettamente propria (altrimenti avrei impulsi nell'origine che non sono limitati), limitata in  $t$  e che aumenti la molteplicità del polo a  $\Re = 0$  con molteplicità 1. Per esempio  $U(s) = \frac{1}{s}$ .

$$Y_f(s) = \frac{1}{s(s+1)} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s+1)} \right\} = A \frac{1}{s} + B \frac{1}{s^2} + C \frac{1}{s+1} = (A + \underbrace{Bt}_{\text{diverge}} + Ce^{-t}) \cdot 1(t)$$

dove  $B$  e  $C$  sono sicuramente  $\neq 0$ .

•

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 4} \quad \begin{cases} s_1 = 2j \\ s_2 = -2j \end{cases}$$

Con questa funzione di trasferimento, il sistema è un oscillatore ideale con frequenza naturale di 2Hz. Modelliamo un ingresso oscillatorio:

$$u(t) = \sin wt \quad U(s) = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

$$Y_f(s) = \frac{1}{s^2 + 4} \frac{w}{s^2 + w^2} = A \frac{2}{s^2 + 4} + B \frac{s}{s^2 + 4} + C \frac{s}{s^2 + w^2} + D \frac{w}{s^2 + w^2}$$

–  $w \neq 2$ :

abbiamo 4 radici reali distinte con  $\Re = 0$  e molt. = 1  $\Rightarrow$  l'uscita è limitata.

–  $w = 2$ :

abbiamo 2 radici a parte reale nulla con molteplicità 2. L'uscita diverge.

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= A \frac{2}{s^2 + 4} + B \frac{s}{s^2 + 4} + C \frac{4s}{(s^2 + w^2)^2} + D \frac{s^2 - 4}{(s^2 + w^2)^2} = \\ &= (A \sin 2t + B \cos 2t + Ct \sin 2t + Dt \cos 2t) \cdot 1(t) \end{aligned}$$

Questo viene detto fenomeno di **risonanza**: se mettiamo come ingresso una funzione oscillatoria con frequenza la frequenza di risonanza del sistema, allora l'uscita forzata diverge.

### 5.3.3 Relazioni tra i due tipi di stabilità

Stabilità asintotica  $y_l(t)$  (cioè le radici di  $A(s)$  sono a  $\Re < 0$ )  $\Rightarrow$  stabilità BIBO.

Per dualità:

Sistema non BIBO (ci sono poli di  $T(s)$  a  $\Re \geq 0$ )  $\Rightarrow$  non stabilità asintotica  $y_l$ .

## 5.4 Rappresentazione dei sistemi lineari

Un sistema SISO pu essere rappresentato in due modi:

1. con un'equazione lineare a coefficienti costanti (vedi 5.1).
2. con la funzione di trasferimento  $T(s) = \frac{\bar{B}(s)P(s)}{\bar{A}(s)P(s)}$ .

Dall'equazione differenziale si ottiene univocamente una funzione di trasferimento.

Il passaggio inverso non é univoco perché possiamo introdurre un polinomio  $P(s)$  arbitrario.

### Esempio

$$T(s) = \frac{1}{s+1} \quad \begin{matrix} \bar{B}(s) = 1 \\ \bar{A}(s) = s+1 \end{matrix}$$

Ma se considero i polinomi  $A(s)$  e  $B(s)$  prima della semplificazione dei fattori comuni:

$$\begin{matrix} B(s) = 1 \cdot P(s) \\ A(s) = (s+1)P(s) \end{matrix} \quad \forall P(s)$$

- $P(s) = s$

$$\begin{matrix} B(s) = s \\ A(s) = s^2 + s \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \dot{u}(t)$$

- $P(s) = s-1$

$$\begin{matrix} B(s) = s-1 \\ A(s) = s^2 - 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}(t) - y(t) = \dot{u}(t) - u(t)$$

- $P(s) = 1$  scelta *standard*

$$\begin{matrix} B(s) = 1 \\ A(s) = s+1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

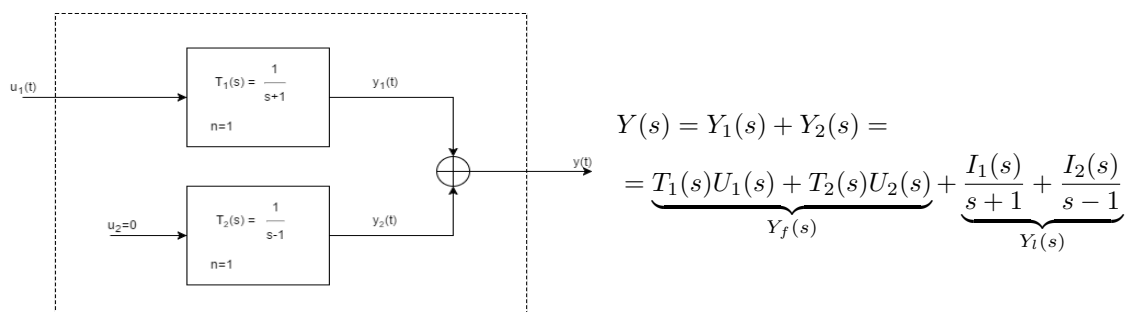
- $P(s) = 3$  basta dividere per la costante e si ottiene l'equazione differenziale cercata

$$\begin{matrix} B(s) = 3 \\ A(s) = 3s+3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad 3\dot{y}(t) + 3y(t) = 3u(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Quindi la rappresentazione di un sistema con l'equazione differenziale é piú completa perché univoca, mentre l'altra introduce arbitrarietà. Il passaggio da  $T(s)$  a equazione differenziale é univoco se e solo se é anche specificato l'ordine  $n = \bar{n}$  ( $\bar{n} = \deg \{\bar{A}(s)\}$ ) del sistema.

É prassi comune descrivere sistemi dinamici attraverso la funzione di trasferimento  $T(s)$ . (é lecito se non ci sono parti nascoste). Se non é scontato che non esistano parti nascoste, allora  $T(s)$  dá informazioni solo riguardo la risposta forzata, ma nulla della risposta libera. É pericoloso se la parte nascosta non é stabile.

**Esempio** supponiamo di avere il seguente sistema di cui ci danno la funzione di trasferimento  $T(s) = \frac{1}{s+1}$ , mentre il sistema 2 é nascosto:



Poiché  $U_2(s) = 0 \Rightarrow Y(s) = Y_f(s) = T_1(s)U_1(s)$ :

- La risposta forzata é stabile per qualunque ingresso, perché l'unico polo é a  $\Re < 0$ .
- La risposta libera ha un polo  $s = 1$  ( $\Re > 0$ ), quindi é instabile se le condizioni iniziali non sono nulle  $I_2(s) \neq 0$ .

In conclusione la funzione di trasferimento fornita non ci dá alcuna informazione sulla parte nascosta.

## 5.5 Risposte al gradino di sistemi di ordine 1 e 2

- studiamo questa categoria perché sono approssimazioni diffuse di sistemi reali.
- spesso cercheremo di ricondurci (attraverso controlli) a sistemi di questo tipo, perché li sappiamo rappresentare molto bene e interpretare facilmente.

Studiamo solo la risposta forzata, perché se questa diverge, allora anche la risposta libera divergerà. (se non é stabile BIBO, allora non é neppure stabile nella  $y_l$ ).

## 5.6 Sistemi di ordine 1

La funzione di trasferimento di un sistema del 1 ordine strettamente proprio é:

$$T(s) = \frac{b_0}{s + a_0}$$

Se il sistema fosse semplicemente proprio, possiamo ricondurci al caso strettamente proprio. Dividiamo numeratore con denominatore:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(s) &= \frac{\tilde{a}_1 s + \tilde{b}_0}{s + \tilde{a}_0} = \tilde{b}_1 + \frac{\tilde{b}_0 - \tilde{b}_1 \tilde{a}_0}{s + \tilde{a}_0} \\ Y_f(s) &= \underbrace{\tilde{b}_1 U(s)}_{\substack{\text{copia amplificata} \\ \text{dell'ingresso}}} + \tilde{T}'(s)U(s) \end{aligned}$$

Troviamo la funzione resto  $\tilde{T}'(s)$  che é strettamente propria. Quindi possiamo concentrarci solo sul caso di sistema strettamente proprio.

La radice del denominatore é  $s_1 = -a_0$ :

- $a_0 \leq 0 \Rightarrow$  instabile BIBO.  
In particolare se  $a_0 < 0$ , la risposta forzata avrà andamento esponenziale nel tempo.  
Se  $a_0 = 0$ , la risposta forzata evolve come una retta.  
In entrambi i casi diverge.

- $a_0 > 0 \Rightarrow$  stabile BIBO.

Concentriamoci solo sul caso della risposta stabile.

$$T(s) = \frac{b_0}{s + a_0} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{1 + \frac{1}{a_0}s} = \frac{k}{1 + s\tau} \quad \begin{array}{ll} k = \frac{b_0}{a_0} & \text{guadagno statico} \\ \tau = \frac{1}{a_0} & \text{costante di tempo} \end{array}$$

### 5.6.1 Risposta al gradino

Supponiamo che l'ingresso sia un gradino  $u(t) = 1(t)$ . Calcoliamo la  $y_f(t)$ :

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y_f(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{b_0}{s + a_0}\right\} = \dots = \frac{b_0}{s(s + a_0)} = A \frac{1}{s} + B \frac{1}{s + a_0} = \\ A &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{b_0}{s(s + a_0)} = \frac{b_0}{a_0} = k \\ B &= \lim_{s \rightarrow -a_0} (s + a_0) \frac{b_0}{s(s + a_0)} = -\frac{b_0}{a_0} = -k \\ &= \dots = y_f(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t) \end{aligned}$$

Studiamo la risposta forzata:

- valore iniziale:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y_f(t) = 0 \Rightarrow y_f(0^+) = 0$$

- valore iniziale della derivata, usiamo il teorema del valore iniziale:

$$\dot{y}_f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \mathcal{L}^{-1}\{\dot{y}_f(t)\} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s b_0}{s + a_0} = b_0 = \frac{k}{\tau}$$

oppure

$$\dot{y}_f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{k}{\tau}$$

$\tau$  può essere interpretata come il tempo che impiegherebbe  $y_f(t)$  ad arrivare al suo valore di regime se continuasse con pendenza come in  $t = 0^+$ .

- valore di regime, con il teorema del valore finale:

$$y_f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_0}{s + a_0} = \frac{b_0}{a_0} = k$$

oppure

$$y_f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t) = k$$

### Tempo di assestamento

$$T_a = \inf \{\bar{t} : |y_f(t) - y_f(\infty)| \leq 0.05 \cdot y_f(\infty) \quad \forall t > \bar{t}\}$$

In questa categoria di sistemi si può verificare facilmente che:  $T_a \cong 3\tau$ .

## 5.7 Sistemi di ordine 2

$$T(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$a_0 > 0$  é condizione necessaria per avere:

- stabilità asintotica e BIBO. Infatti:
  - se  $a_0 = 0$  avrei almeno una radice in zero.
  - se  $a_0 < 0$  avrei sicuramente una variazione di segno (v. regola di Cartesio) e quindi una radice a  $\Re > 0$ .
- poli complessi coniugati.

Riscriviamo la funzione di trasferimento raccogliendo  $a_0$  a numeratore e a denominatore:

$$T(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{1 + \frac{a_1}{a_0}s + \frac{s^2}{a_0}} = \frac{k}{1 + 2\frac{\xi}{w_0}s + \frac{1}{w_0^2}s^2} \quad \begin{cases} k = \frac{b_0}{a_0} & \text{guadagno statico} \\ w_0 = \sqrt{a_0} & \text{pulsazione naturale} \\ \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} & \text{coefficiente di smorzamento} \end{cases}$$

I poli del denominatore sono:

$$p_{1,2} = w_0(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$$

Studiamo i poli per  $\xi \geq 0$ :

- $\xi = 0$   $p_{1,2} = \pm w_0\sqrt{-1} = \pm jw_0$  radici puramente immaginarie
- $0 < \xi < 1$  due radici complesse coniugate con  $\Re = -w_0\xi$  e  $\Im = \pm w_0\sqrt{1 - \xi^2}$

$$|p_{1,2}| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2} = \sqrt{w_0^2\xi^2 + w_0^2(1 - \xi^2)} = \sqrt{w_0^2} = w_0$$

cioè le radici si trovano su una semi circonferenza (solo parte sinistra) centrata nell'origine e di raggio  $w_0$ .

- $\xi = 1$   $p_{1,2} = -w_0$   $molt = 2$  due radici reali coincidenti
- $\xi > 1$  otteniamo due radici reali

Studiamo i poli per  $\xi < 0$ :

- troviamo una situazione simmetrica in cui le radici hanno tutte  $\Re > 0$ .

Quindi ricaviamo che  $\xi > 0$  è **condizione necessaria e sufficiente** per la stabilità BIBO.

### 5.7.1 Risposta al gradino

Analizziamo la risposta forzata del sistema al variare di  $\xi$ :

♠  $\xi < 0$

La risposta forzata diverge.

♠  $\xi = 0$

$$Y_f(s) = \frac{k w_0^2}{s(s^2 + w_0^2)} = \frac{A}{s} + B \frac{w_0}{s^2 + w_0^2} + C \frac{s}{s^2 + w_0^2}$$

$$A = k \quad B = 0 \quad C = -k$$

In uscita otteniamo una cosinusoide non smorzata:

$$y_f(t) = k(1 - \cos(w_0 t)) \cdot 1(t)$$

♠  $0 < \xi < 1$

$$y_f(t) = k \left[ 1 - \frac{e^{-w_0 \xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( w_0 \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] \cdot 1(t)$$

Applichiamo il teorema del valore iniziale:

$$y_f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} = \lim_{s \rightarrow \infty} s Y_f(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k}{1 + 2 \frac{\xi}{w_0} s + \frac{1}{w_0^2} s} = 0$$

$$\dot{y}_f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s [s Y_f(s) - y_f(0^+)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k s}{1 + 2 \frac{\xi}{w_0} s + \frac{1}{w_0^2} s} = 0$$

cioè parte con pendenza nulla dall'origine.

Vediamo come dipende la risposta forzata dai coefficienti  $\xi$  e  $w_0$ :

- $w_0$  fissato:  
se  $\xi$  è piccolo le oscillazioni si smorzano lentamente.
- $\xi$  fissato:  
se  $w_0$  è grande, la frequenza aumenta e il grafico risulta più schiacciato verso l'asse y.

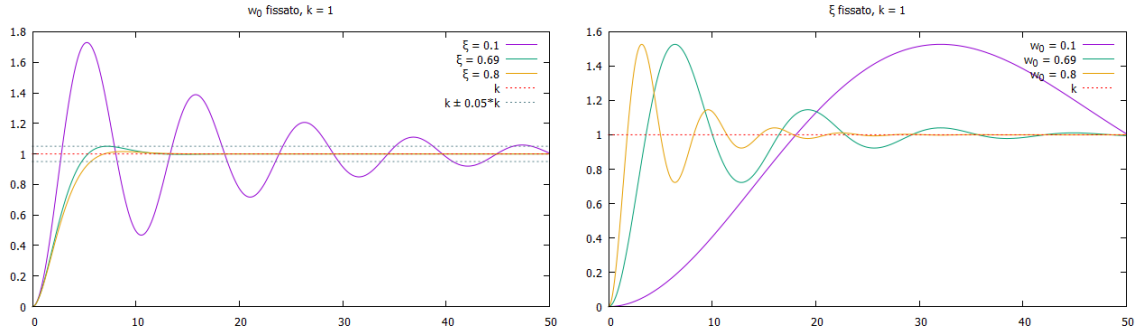
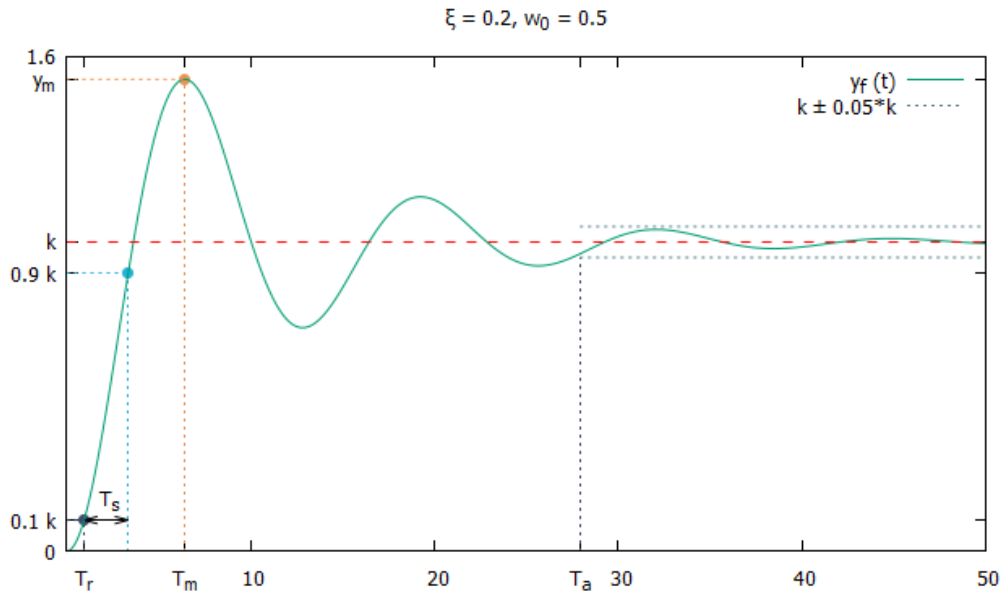


Figure 5.2: Grafici della risposta forzata nel tempo, al variare dei suoi parametri

## Parametri

- $y_m - k$  sovra-elongazione massima.
- $S_m = \frac{y_m - k}{k} = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$  sovra-elongazione massima relativa.  
Si può ricavare che se  $\xi > 0.69$ , la curva entra nel 5% del valore di regime e non ne esce più.
- $T_r$  tempo di ritardo:  
tempo che impiega la curva ad arrivare al 10% del valore di regime.
- $T_s$  tempo di salita:  
tempo che impiega la curva per passare dal 10% al 90% del valore di regime.
- $T_m = \frac{\pi}{w_0 \sqrt{1-\xi^2}}$  tempo di sovra-elongazione massima.
- $T_a$  tempo di assestamento.  
Se  $\xi \leq 0.69$  allora  $T_a \cong \frac{3}{w_0 \xi}$ .  
Se volessi un sistema di ordine 2 con  $T_a \leq \bar{t}$ , dovrei imporre  $\underbrace{-w_0 \xi}_{\Re\{p_{1,2}\}} \leq -\frac{3}{\bar{t}}$ .



♠  $\xi \geq 1$

I poli sono entrambi reali e negativi:

$$T(s) = \frac{k}{1 + 2\frac{\xi}{w_0}s + \frac{1}{w_0^2}s^2} = \frac{k}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1} \quad p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$$

- $\xi = 1 \Rightarrow \tau_1 = \tau_2$  otteniamo 2 poli coincidenti:  $p = -\frac{1}{\tau}$   $m = 2$

$$Y_f(s) = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} + C\frac{1}{(s + \frac{1}{\tau})^2}$$

$$y_f(t) = \left[ A + Be^{-\frac{t}{\tau}} + Cte^{-\frac{t}{\tau}} \right] \cdot 1(t)$$

- $\xi > 1$

$$Y_f(s) = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s + \frac{1}{\tau_1}} + C\frac{1}{s + \frac{1}{\tau_2}}$$

$$y_f(t) = \left[ A + Be^{-\frac{t}{\tau_1}} + Ce^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] \cdot 1(t)$$

Nel complesso il sistema si comporta quasi come un sistema del 1 ordine.

Osservazioni:

- non esistono sovra elongazioni: la derivata é nulla solo nell'origine
- $T_a$  dipende fortemente dal polo più "lento" (quello con  $\tau$  più grande):

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} \ll 1 \Rightarrow T_a \cong 3\tau_2$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = 0.2 \Rightarrow T_a \cong 3.22\tau_2$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = 0.5 \Rightarrow T_a \cong 3.68\tau_2$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = 1 \Rightarrow T_a \cong 4.75\tau_2$$

Spesso si usa il valore *conservativo*:  $T_a < 5\tau_2$

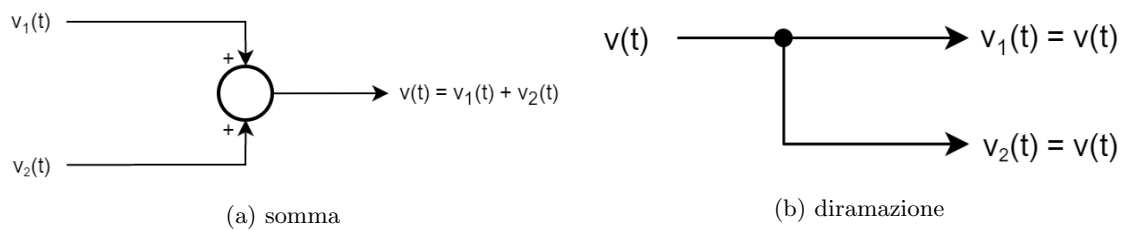


# Chapter 6

## Algebra dei blocchi

### 6.1 Connessioni

Le possibili connessioni tra i sistemi sono:



### 6.2 Connessioni equivalenti

Sono utili **solo** per trovare la funzione di trasferimento totale di un sistema nell'algebra dei blocchi. Non possono essere usate per studiare complessivamente un sistema, perché non tengono conto delle condizioni iniziali e quindi delle risposte libere dei sistemi.

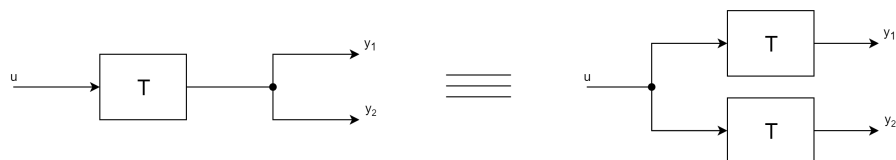


Figure 6.2: Spostamento diramazione a monte di un blocco

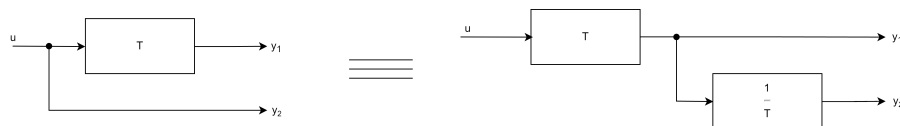


Figure 6.3: Spostamento diramazione a valle di un blocco

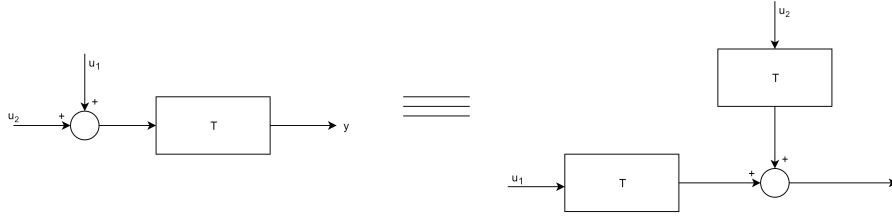


Figure 6.4: Spostamento nodo sommatore a valle di un blocco

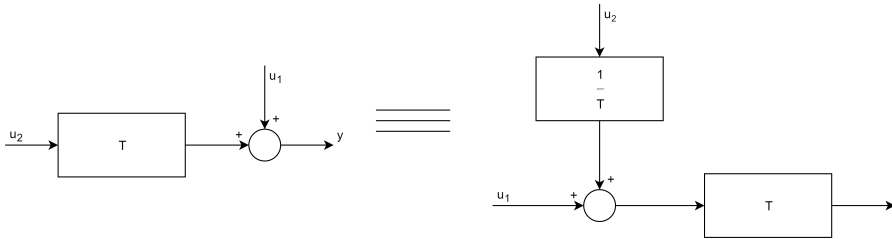


Figure 6.5: Spostamento nodo sommatore a monte di un blocco

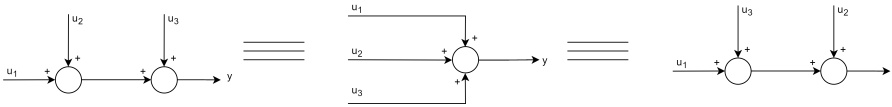


Figure 6.6: Accumulo e scambio di nodi sommatori

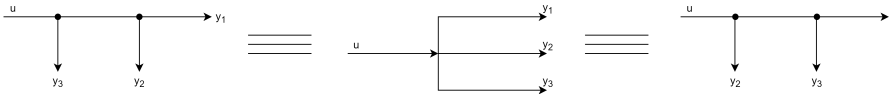


Figure 6.7: Accumulo e scambio di nodi di diramazione

## 6.3 Algebra dei blocchi

L'algebra dei blocchi permette di calcolare la funzione di trasferimento  $T(s)$  totale di un sistema costituito dall'interconnessione di più sistemi.

Solitamente la risposta forzata di un generico sistema MIMO é:  $\underline{y} = T\underline{u}$ .

L'algebra dei blocchi consiste nel considerare tutte le variabili in gioco ( $\underline{y}, T, \underline{u}$ ) come scalari e operare su di essi come se fossero quantità scalari. Grazie a passaggi algebrici classici, quindi si può ottenere facilmente la funzione di trasferimento totale.

## 6.4 Risposta forzata di sistemi interconnessi

La connessione tra più sistemi produce un nuovo sistema caratterizzato da:

- ingressi:  $\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n_u}(t) \end{bmatrix}$
- uscite:  $\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n_y}(t) \end{bmatrix}$
- $T_{ij}(s) = T_{y_i u_j}(s)$  funzione di trasferimento tra l'ingresso  $u_j$  e l'uscita  $y_i$

Quindi un sistema MIMO non sarà caratterizzato da una sola funzione di trasferimento, ma da una **matrice di trasferimento**:

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n_u} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & : \\ : & : & \ddots & : \\ T_{n_y1} & T_{n_y2} & \cdots & T_{n_y n_u} \end{bmatrix}$$

Questa matrice ha:

- tante colonne quante gli ingressi.
- tante righe quante le uscite.

Quindi la risposta forzata del sistema si ottiene moltiplicando la matrice di trasferimento con il vettore colonna degli ingressi:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n_y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n_u} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & : \\ : & : & \ddots & : \\ T_{n_y1} & T_{n_y2} & \cdots & T_{n_y n_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n_u}(t) \end{bmatrix}$$

### 6.4.1 Stabilità BIBO

#### Definizione

Un sistema è stabile BIBO **se e solo se** qualsiasi ingresso limitato, allora l'uscita forzata  $y_f(t)$  è limitata.

$y_f(t)$  è un vettore che ha come elementi  $y_{f,1}(t), y_{f,2}(t), \dots, y_{f,n_y}(t)$ , quindi affinché sia stabile, tutte le componenti devono essere limitate.

#### Condizioni

Nessuno elemento della matrice di trasferimento  $T(s)$ , deve avere poli (radici del denominatore) a  $\Re \geq 0$ .

#### Esempio

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{\frac{s}{(s+1)^2}} \end{bmatrix}$$

Non è stabile BIBO perché la componente  $T_{12}(s)$  ha un polo a  $\Re = 0$ . Infatti se poniamo un ingresso limitato:  $\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1(t) \end{bmatrix}$  otteniamo un'uscita illimitata:

$$Y_f(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{\frac{s}{(s+1)^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

- $\frac{1}{s^2}$  nel tempo corrisponde a una rampa (illimitata);
- $\frac{1}{s(s+1)^2}$  nel tempo corrisponde a un gradino e a un esponenziale decrescente (limitata).

## 6.5 Interconnessione di sistemi SISO

Dati due sistemi:

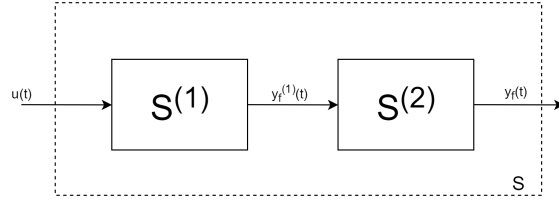
- $S^{(1)}: Y_f^{(1)}(s) = T^{(1)}(s)U^{(1)}(s)$
- $S^{(2)}: Y_f^{(2)}(s) = T^{(2)}(s)U^{(2)}(s)$

### 6.5.1 Serie

$$Y_f(s) = T^{(2)}(s)U^{(2)}(s) = T^{(2)}(s)T^{(1)}(s)U(s)$$

La funzione di trasferimento del sistema complessivo é:

$$T(s) = T^{(2)}(s)T^{(1)}(s)$$



(NB: l'ordine di questo prodotto vale anche per i sistemi MIMO che sono descritti con matrici)

### 6.5.2 Parallelo

$$Y_f(s) = T^{(1)}(s)U^{(1)}(s) + T^{(2)}(s)U^{(2)}(s) = [T^{(1)}(s) + T^{(2)}(s)]$$

$$T(s) = T^{(1)}(s) + T^{(2)}(s)$$

### 6.5.3 Retroazione (feedback)

$$y = T^{(1)}(s)e = T^{(1)}(s)(u - v) = T^{(1)}(s)[u - T^{(2)}(s)y] = T^{(1)}(s)u - T^{(1)}(s)T^{(2)}(s)y$$

$$[1 + T^{(1)}(s)T^{(2)}(s)] y = T^{(1)}(s)u$$

$$\begin{cases} T^{(1)}(s) & \text{funzione di trasferimento in catena diretta} \\ T^{(2)}(s) & \text{funzione di trasferimento in catena inversa} \end{cases}$$

In generale sia che  $v$  venga sottratto o sommato:

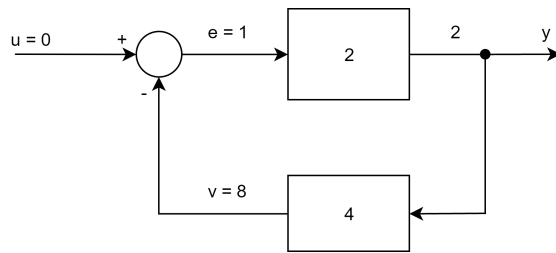
$$T(s) = \frac{T^{(1)}(s)}{1 \pm T^{(1)}(s)T^{(2)}(s)}$$

### Loop algebrici

Se tutte le funzioni di trasferimento sono semplicemente proprie, allora si forma un **loop algebrico**, che rende irrealizzabile la retroazione.

**Esempio** Entrambe le funzioni di trasferimento sono amplificatori e  $u(t) = 0$ ,  $e(t) = 1$ . Sostituendo i valori e percorrendo la retroazione troveremo che  $e$  dovrebbe valere contemporaneamente 1 e  $-8$ .

Infatti  $y$  dipende istantaneamente da  $e$ ,  $v$  d. i. da  $y$ ,  $e$  d. i. da  $v$ , quindi otteniamo che  $e$  dipende istantaneamente da sé stessa, ovvero c'è un loop algebrico.



### Esempio

É possibile trovare  $k$  per avere un sistema stabile BIBO?

Notiamo subito che non ci sono loop algebrici perché non tutte le funzioni di trasferimento sono semplicemente proprie. Pertanto la funzione di trasferimento é:

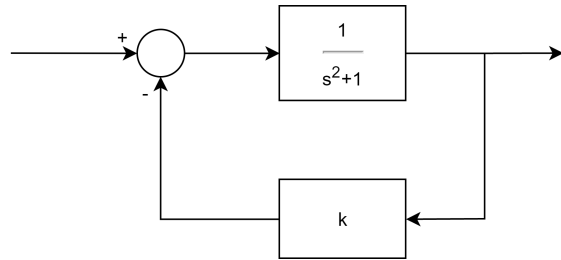
$$T(s) = \frac{\frac{1}{s^2+1}}{1 + \frac{k}{s^2+1}} = \frac{\frac{1}{s^2+1}}{\frac{s^2+1+k}{s^2+1}} = \frac{1}{s^2 + 1 + k}$$

$$s^2 = -(k+1)$$

Affinché il sistema sia stabile BIBO, non ci devono essere radici a  $\Re \geq 0$

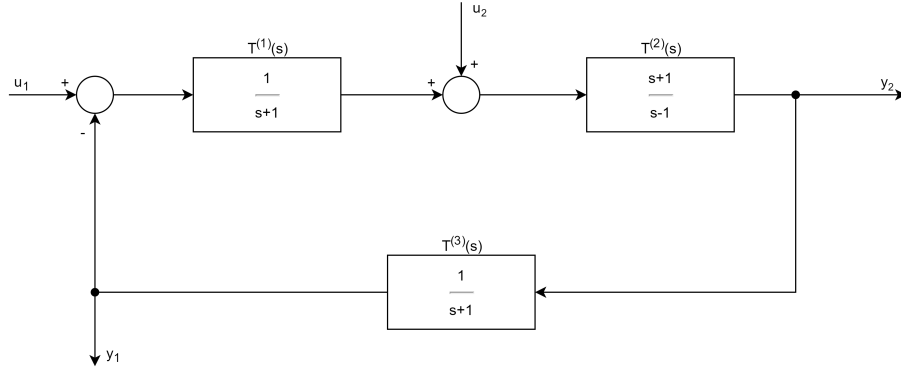
- $k < -1 \Rightarrow s_{1,2} = \pm \sqrt{-(k+1)}$
- $k > -1 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{k+1}$
- $k = -1 \Rightarrow s_{1,2} = 0$

Non esiste alcun  $k$  per cui il sistema sia stabile BIBO.



## 6.6 Esercizio

Calcolare tutte le possibili funzioni di trasferimento del sistema:



- $T_{y_1 u_1}(s)$ : poniamo  $u_2 = 0$ .

Serie tra  $T^{(1)}$  e  $T^{(2)}$ :

$$T_{serie} = T^{(1)}T^{(2)} = \frac{s+1}{s-1} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s-1}$$

Retroazione tra  $T_{serie}$  e  $T^{(3)}$ :

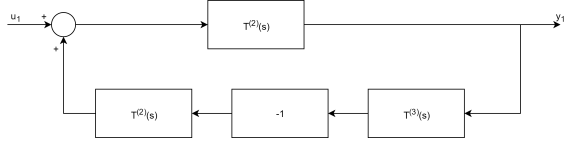
$$T_{y_1 u_1}(s) = \frac{T_{serie}}{1 + T_{serie}T^{(3)}} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1 + \frac{1}{(s+1)(s-1)}} = \frac{\frac{1}{s-1}}{\frac{s^2-1+1}{(s+1)(s-1)}} = \frac{s+1}{s^2}$$

Questa funzione di trasferimento é instabile BIBO perché c'è un polo a  $\Re = 0$ .

- $T_{y_1 u_2}(s)$ : poniamo  $u_1 = 0$ .

Calcoliamo la serie nella catena inversa di retroazione:

$$T_{serie}(s) = \frac{-1}{(s+1)^2}$$



Retroazione:

$$T_{y_1 u_2}(s) = \frac{\frac{s+1}{s-1}}{1 - \frac{s+1}{s-1} \frac{-1}{(s+1)^2}} = \frac{\frac{s+1}{s-1}}{1 + \frac{1}{(s+1)(s-1)}} = \frac{\frac{s+1}{s-1}}{\frac{s^2}{(s+1)(s-1)}} = \frac{(s+1)^2}{s^2}$$

Questa funzione di trasferimento é insta-

bile BIBO perché c'è un polo a  $\Re = 0$ . Abbiamo ottenuto una funzione di trasferimento semplicemente propria perché tra  $u_2$  e  $y_1$  in catena diretta c'è una dipendenza istantanea (dato dalla costante):

$$T^{(2)}(s) = \frac{s+1}{s-1} = 1 + \frac{2}{s-1}$$

- $T_{y_2 u_1}(s)$ :

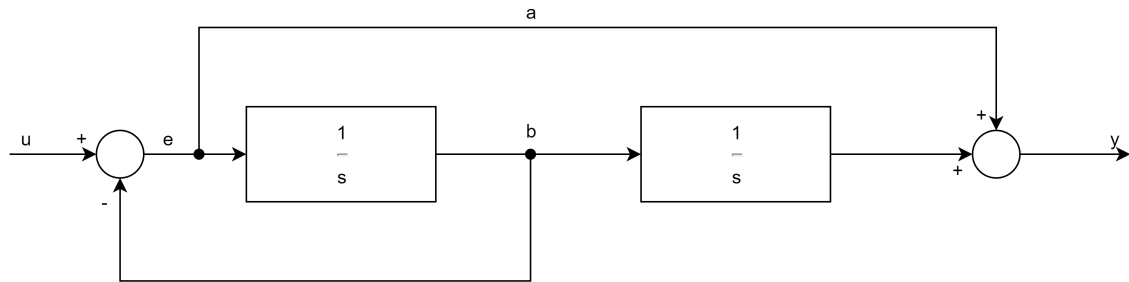
$$T_{y_2 u_1}(s) = \frac{\frac{s+1}{s-1} \frac{1}{s+1}}{1 + \frac{s^2}{(s+1)(s-1)}} = \frac{1}{s^2}$$

- $T_{y_2 u_2}(s)$ :

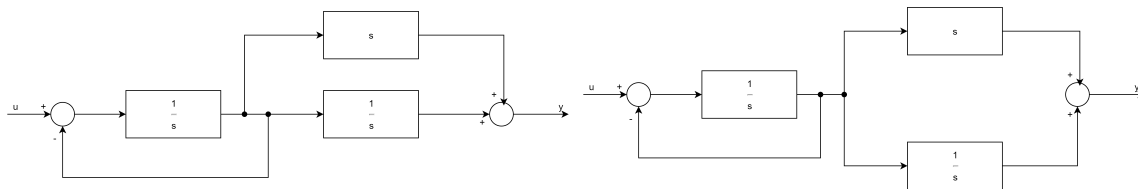
$$T_{y_2 u_2}(s) = \frac{\frac{1}{s-1}}{\frac{s^2}{(s+1)(s-1)}} = \frac{s+1}{s^2}$$

## 6.7 Esercizio

Calcolare la funzione di trasferimento del sistema:



Spostiamo il nodo  $e$  e otteniamo un nuovo sistema composto da una retroazione e da un parallelo. L'algebra dei blocchi permette di fare queste equivalenze solo per il calcolo della funzione di trasferimento complessiva e non per altri calcoli, perché stiamo introducendo nuovi blocchi, tra cui alcuni irrealizzabili (vedi il blocco di funzione di trasferimento  $s$ ).



$$T_{yu}(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} \left( s + \frac{1}{s} \right) = \frac{s^2 + 1}{s(s + 1)}$$

## Chapter 7

# Equazione di stato

### 7.1 Equazione di stato

Abbiamo visto che i sistemi MIMO possono essere rappresentati attraverso un sistema di equazioni differenziali o in forma matriciale.

L'equazione di stato é una rappresentazione dei sistemi dinamici (non necessariamente lineare) che mette in relazione ingressi e uscite sfruttando una quantità (interna al sistema) detta *stato del sistema*.

Lo stato  $\underline{x}(t)$  rappresenta una *foto istantanea* di  $S$  e deve descriverne completamente la situazione. Per determinare  $\underline{x}(t)$  per  $t \geq t_0$  saranno sufficienti  $\underline{x}(t_0^-)$  e  $\underline{u}(\tau)$  per  $\tau \geq t_0$ .

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n_y}(t) \end{bmatrix} & \underline{u}(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n_u}(t) \end{bmatrix} & \underline{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n_x}(t) \end{bmatrix} \\ n_y &= \dim(\underline{y}(t)) & n_u &= \dim(\underline{u}(t)) & n_x &= \dim(\underline{x}(t)) \end{aligned}$$

Le equazioni per descrivere il sistema in notazione matriciale saranno:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{aligned}$$

dove le dimensioni delle matrici sono:

$$A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} \quad B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u} \quad C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x} \quad D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$$

Si nota dalla seconda equazione che il vettore delle uscite dipende istantaneamente dalla stato ( $\underline{x}$ ) e dal controllo ( $\underline{u}$ ).

Dalla prima equazione invece vediamo che lo stato dipende dinamicamente dallo stato stesso e dal controllo.



Scrivendo esplicitamente le due equazioni otteniamo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n_x}x_{n_x}(t) & + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t) + \cdots + b_{1n_u}u_{n_u}(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n_x}(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n_x}x_{n_x}(t) & + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t) + \cdots + b_{1n_u}u_{n_u}(t) \\
&\vdots \\
y_1(t) &= c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \cdots + c_{1n_x}x_{n_x}(t) & + d_{11}u_1(t) + d_{12}u_2(t) + \cdots + d_{1n_u}u_{n_u}(t) \\
&\vdots \\
y_{n_y}(t) &= c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \cdots + c_{1n_x}x_{n_x}(t) & + d_{11}u_1(t) + d_{12}u_2(t) + \cdots + d_{1n_u}u_{n_u}(t)
\end{aligned}$$

## 7.2 Soluzione dell'equazione di stato

Significa trovare  $\underline{x}(t)$  e di conseguenza  $\underline{y}(t)$ , dati  $\underline{x}(t_0^-)$  e  $u(\tau)$  per  $\tau \in [0, t_0]$ .

Si dimostra che:

$$\underline{x}(t) = Ce^{At}\underline{x}(0^-) + C \int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau + D \underline{u}(t)$$

dove:

- $e^{At}\underline{x}(0^-)$  evoluzione libera dello stato.  
É l'uscita che dipende solo dalle  $n_x$  condizioni iniziali, pertanto si chiama vettore delle uscite libere.
- $\int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau$  integrale di convoluzione che rappresenta l'evoluzione forzata dello stato.

### 7.2.1 Come si calcola $e^{At}$

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Per effettuare questo calcolo distinguiamo vari casi:

- $A^k = 0$  per  $k \geq \bar{k}$  (matrice nil-potente di ordine  $\bar{k}$ ): usare la formula esplicitamente.

#### Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo trovato che A é una matrice nil-potente di ordine 2.

$$e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A é una matrice diagonale:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\lambda_{n_x}^k t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_{n_x} t} \end{bmatrix}$$

- Negli altri casi usiamo questa formula che verrà chiarita in seguito:

$$e^{At} = \mathcal{L} \{ (sI - A)^{-1} \}$$

### Esempio

Ripetiamo il calcolo dell'esercizio precedente con  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 1(t)$$

### 7.2.2 Polinomio caratteristico

Data una matrice quadrata  $A$ , il polinomio caratteristico é definito come:

$$\phi(s) = \det(sI - A)$$

Inoltre si può calcolare come il mcm di tutti i denominatori diversi da zero di tutti i determinanti diversi da zero di tutte le sottomatrici quadrate di  $(sI - A)^{-1}$ . Questo metodo può essere utile nel caso in cui ci venga fornita direttamente  $(sI - A)^{-1}$ .

### Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\phi(s) = \det \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = \det \left( \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} \right) = (s-1)(s-2)$$

Gli autovalori sono:  $s_1 = 1$   $s_2 = 2$  entrambi con molteplicità 1.

### Esempio

Usiamo il secondo metodo per calcolare il polinomio caratteristico data:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Il suo determinante é:  $\det(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2}$ .

Ci sono 5 sottomatrici: 4 sono i singoli elementi, il quinto é la matrice stessa:

$$\phi(s) = mcm(s, s, s^2) = s^2$$

### Proprietá

$\phi(s)$  é un polinomio annullante per  $A$  se  $\phi(A) = [0]$  (matrice nulla).

Il suo grado é:  $\deg \{ \phi(s) \} = n_x$ .

### Esempio

Consideriamo la matrice e il polinomio caratteristico dell'esempio precedente:

$$\phi(s) = (s-1)(s-2) = s^2 - 3s + 2$$

$$\phi(A) = A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 7.2.3 Polinomio minimo

Il polinomio minimo  $m(s)$  é il polinomio annullante, monico e di grado piú basso per  $A$ .

## Proprietá

$$m(s) \subseteq \cdot \phi(s)$$

$\subseteq \cdot$  significa che tutte le radici di  $\phi(s)$  sono anche radici di  $m(s)$ , eventualmente con molteplicitá minore.

$m(s)$  é calcolabile come il mcm di tutti i denominatori dei termini non nulli della matrice  $(sI - A)^{-1}$ . Il suo grado é:  $\deg \{m(s)\} \leq n_x$ .

### Esempio

Per fare l'inversa di una matrice diagonale, bisogna invertire i suoi elementi.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$
$$m(s) = mcm(s, s) = s$$

### Esempio

Per fare l'inversa di una matrice triangolare, gli elementi sulla diagonale si invertono, gli altri bisogna calcolarli.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$
$$m(s) = mcm(s, s^2, s) = s^2$$

### Esempio

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$m(s) = mcm \{s, s+1, s, s^2\} = s^2(s+1)$$

Ma questo risultato é impossibile perché  $\deg \{m(s)\} = 3$  mentre la matrice é  $2 \times 2$ . Questo significa che la matrice data non può derivare da un sistema lineare, quindi non ha senso svolgere ulteriori calcoli su essa.

## 7.3 Trasformata della soluzione dell'equazione di stato

Calcolo la trasformata di  $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t)$  con la proprietà della derivata:

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0^-) = A\underline{X}(s) + B\underline{U}(s)$$

$$s\underline{X}(s) - A\underline{X}(s) = \underline{x}(0^-) + B\underline{U}(s)$$

$$(sI - A)\underline{X}(s) = \underline{x}(0^-) + B\underline{U}(s)$$

$$\underline{X}(s) = (sI - A)^{-1}\underline{x}(0^-) + (sI - A)^{-1}B\underline{U}(s) \quad (7.1)$$

Analogamente la trasformata della seconda equazione  $\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t)$ :

$$\underline{Y}(s) = C(sI - A)^{-1}\underline{x}(0^-) + [C(sI - A)^{-1}B + D] \underline{U}(s) \quad (7.2)$$

Da quest'ultima ricaviamo la funzione di trasferimento:

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Le matrici associate alle varie risposte con i rispettivi polinomi caratteristici e minimi:

$$\begin{array}{lll}
X_l (n_x \times n_x) : (sI - A)^{-1} & \longrightarrow & m(s), \phi(s) \\
X_f (n_x \times n_u) : (sI - A)^{-1} B & \longrightarrow & m_c(s), \phi_c(s) \\
Y_l (n_y \times n_x) : C(sI - A)^{-1} & \longrightarrow & m_o(s), \phi_o(s) \\
Y_f (n_y \times n_u) : C(sI - A)^{-1} B & \longrightarrow & m_{co}(s), \phi_{co}(s)
\end{array}$$

Le ultime tre matrici sono combinazioni lineari della prima  $(sI - A)^{-1}$ , quindi al denominatore non potranno comparire ulteriori termini. Allora per i polinomi si ha:

$$\begin{array}{ccccc}
& \subseteq \phi_c(s) & & \subseteq m_c(s) & \\
\phi_{co}(s) & \subseteq \phi(s) & m_{co}(s) & \subseteq m(s) & \\
& \subseteq \phi_o(s) & & \subseteq m_o(s) &
\end{array}$$

### Esempio

Dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Calcolare  $x(t)$  e  $y(t)$  quando  $x(0^-) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  e  $u(t) = 1(t)$ . Calcoliamo le trasformate delle soluzioni:

$$\begin{aligned}
X(s) &= (sI - A)^{-1} x(0^-) + (sI - A)^{-1} B U(s) = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3} \\ 2\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 \\ 2 + t \end{bmatrix} 1(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) = (3 + 3t + \frac{1}{2}t^2) 1(t)$$

## Chapter 8

# Stabilità e punti di equilibrio

### 8.1 Stabilità e punti di equilibrio

Finora abbiamo parlato di stabilità mettendo in relazione ingresso e uscita. Adesso introduciamo un nuovo concetto di stabilità che mette in relazione stato e controllo.

#### 8.1.1 Definizione qualitativa

Si dice **punto di equilibrio** una configurazione in cui il sistema si trova e dopo una piccola perturbazione rimane in questa configurazione.

Consideriamo qualche esempio pratico per definire i possibili punti di equilibrio:

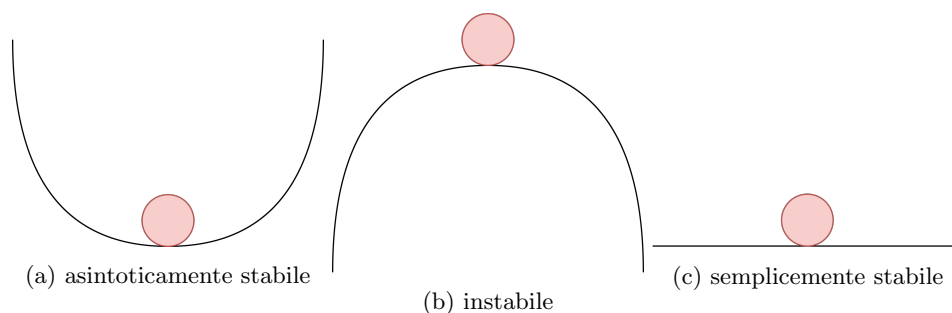


Figure 8.1

- **8.1a:** é un punto di equilibrio **asintoticamente stabile** perché se perturbo leggermente la posizione della pallina, essa torna subito nel suo punto di equilibrio. Inoltre é un p.e. **isolato** perché non ci sono altri p.e. nelle vicinanze;
- **8.1b:** é un punto di equilibrio **instabile** perché se muovo leggermente la pallina, essa si allontana indefinitamente dal p.e.;
- **8.1c:** é un punto di equilibrio **semplicemente stabile** perché se perturbo la posizione della pallina essa trova un nuovo punto di equilibrio. Inoltre é un p.e. **non isolato** perché nelle vicinanze ci sono altri p.e.

I punti di equilibrio non isolati non possono essere asintoticamente stabili perché il sistema può trovare un nuovo punto di equilibrio in un intorno del precedente.

### 8.1.2 Definizione

Consideriamo l'equazione di stato di un generico sistema non lineare:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \\ \underline{y}(t) &= \underline{g}(\underline{x}(t), \underline{u}(t))\end{aligned}$$

Una coppia stato-controllo  $\hat{P} = (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{u}}) \in \mathbb{R}$  é punto di equilibrio **se e solo se**  $\underline{f}(\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{u}}) = 0$  (cioé la derivata dello stato é nulla  $\dot{\underline{x}}(t) = 0$ ).

#### Esempio

Consideriamo il sistema non lineare della vasca di cui avevamo parlato nell'introduzione. La sua equazione di stato era:

$$\dot{h}(t) = -\frac{E}{S}\sqrt{2gh(t)} + \frac{1}{S}u(t)$$

I punti di equilibrio sono:

$$\begin{aligned}\forall(h, u) \text{ t.c. } -\frac{E}{S}\sqrt{2gh(t)} + \frac{u}{S} &= 0 \\ \Rightarrow \hat{u} &= E\sqrt{2g\hat{h}}\end{aligned}\tag{8.1}$$

Cerchiamo di capire la tipologia di questo punto di equilibrio e per questo fissiamo l'ingresso (l'acqua fornita dal rubinetto) al valore di equilibrio  $u(t) = \hat{u}$ :

- se aggiungiamo acqua dall'esterno superando il livello di equilibrio  $h(t) > \hat{h}$ , dalla condizione di punto di equilibrio 8.1 otteniamo che  $E\sqrt{2gh(t)} > \hat{u}$ . Allora dall'equazione di stato ricaviamo  $S\dot{h}(t) = \hat{u} - E\sqrt{2gh(t)} < 0$ , la derivata é negativa, cioé che il livello dell'acqua scende tornando subito al punto di equilibrio  $(\hat{u}, \hat{h})$ ;
- se togliamo dell'acqua dalla vasca  $h(t) < \hat{h}$ , allora  $\dot{h}(t) > 0$ , cioé il livello risale tornando al punto di equilibrio di partenza  $(\hat{u}, \hat{h})$ .

Deduciamo che si tratta di un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

### 8.1.3 Studio della stabilit  dei punti di equilibrio per sistemi lineari

In generale in un sistema non é detto che i punti di equilibrio siano tutti dello stesso tipo. Noi adesso consideriamo l'equazione di stato di un sistema lineare:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t)$$

non consideriamo la seconda equazione perché siamo interessati solo alla stabilit  dello stato.

Prendiamo un punto di equilibrio  $(\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{u}})$ , quindi per definizione  $A\hat{\underline{x}} + B\hat{\underline{u}} = 0$ . Definisco:

$$\delta\underline{x}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}} \quad \text{scostamento di } \underline{x} \text{ rispetto al particolare } \hat{\underline{x}}\tag{8.2}$$

$$\delta\underline{x}(t) = \frac{d}{dt}(\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}})\tag{8.3}$$

Consideriamo l'equazione di stato quando viene applicato  $\underline{u} = \hat{\underline{u}}$ :  $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\hat{\underline{u}}$  e calcolata nel punto di equilibrio:  $\dot{\hat{\underline{x}}} = A\hat{\underline{x}} + B\hat{\underline{u}}$  quindi sottraiamo membro a membro:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) - \dot{\hat{\underline{x}}} &= A(\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}) + B(\hat{\underline{u}} - \hat{\underline{u}}) \\ \frac{d}{dt}(\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}) &= A(\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}})\end{aligned}$$

In base alle definizioni 8.3 otteniamo:

$$\delta\dot{\underline{x}}(t) = A\delta\underline{x}(t)\tag{8.4}$$

cioé  $\delta \underline{x}(t)$  evolve con equazioni pari a quelle di  $\underline{x}(t)$  in assenza di controllo.

Per fare questi calcoli siamo partiti da un particolare punto di equilibrio, ma in 8.4 questa dipendenza si è persa perciò 8.4 vale  $\forall(\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{u}})$ . Quindi se abbiamo la stessa evoluzione di  $\delta x(t)$  per ogni p.e., questo significa che per i sistemi lineari tutti i punti di equilibrio sono dello stesso tipo. Si parla quindi di stabilità del sistema (riferendosi al tipo di stabilità comune a tutti i suoi p.e.). Allora per semplicità scelgo  $(0, 0)$  che è sempre punto di equilibrio.

In definitiva studiare la stabilità di tutti i punti di equilibrio corrisponde allo studiare la stabilità dell'evoluzione libero dello stato:

$$\underline{x}_l(t) = e^{At} \underline{x}(0^-) X_l(s) = (sI - A)^{-1} \underline{x}(0^-)$$

### 8.1.4 Stabilità di un sistema

Un sistema è stabile oppure instabile a seconda di come si comporta  $\vec{x}_l(t)$ .

Un sistema lineare tempo invariante è:

- **asintoticamente stabile**  $\Leftrightarrow \forall \underline{x}(0^-)$  tale che  $\underline{x}_l(t)$  non diverge e  $\underline{x}_l(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ ;
- **instabile**  $\Leftrightarrow \forall \underline{x}(0^-)$  tale che  $\underline{x}_l(t)$  diverge;
- **semplicemente stabile**  $\Leftrightarrow$  non è verificata nessuna delle condizioni precedenti, cioè

$$\begin{aligned} &\nexists \underline{x}(0^-) \text{ tale che } \underline{x}_l(t) \text{ diverga} \\ &\exists \underline{x}(0^-) \text{ tale che } \underline{x}_l(t) \text{ non tende a zero} \end{aligned}$$

**Esempio**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + Bu$$

Il termine  $Bu$  non è utile ai fini del calcolo della stabilità, ma lo mettiamo per completezza.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

L'evoluzione libera dello stato (la soluzione di queste equazioni differenziali) è:

$$x_l(t) = \begin{cases} x_{1l} = e^t x_1(0^-) \\ x_{2l} = e^{-t} x_2(0^-) \\ x_{3l} = x_3(0^-) \end{cases} = e^{At} \underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(0^-)$$

Adesso studiamo la stabilità del sistema dati alcuni stati iniziali:

1.

$$\underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_l(t) = \begin{bmatrix} 3e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo trovato uno stato iniziale  $\underline{x}(0^-)$  per cui l'evoluzione libera diverge. Quindi il base alla definizione precedente possiamo stabilire che il sistema è instabile.

2.

$$\underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_l(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

In questo caso lo stato rimane limitato ma non tende a zero.

3.

$$\underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_l(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

In questa particolare situazione, lo stato tende a zero.

### 8.1.5 Studio della stabilità attraverso $e^{At}$

- **asintoticamente stabile**  $\Leftrightarrow$  tutte le componenti di  $e^{At}$  sono segnali  $\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ ;
- **instabile**  $\Leftrightarrow$  esiste una componente di  $e^{At}$  che sia un segnale divergente;
- **semplicemente stabile**  $\Leftrightarrow$  non esistono componenti di  $e^{At}$  divergenti, ma esiste almeno una componente che sia un segnale semplicemente stabile (limitato ma che non tende a zero).

Poiché gli elementi di  $(sI - A)^{-1}$  sono le trasformate di Laplace dei corrispondenti elementi di  $e^{At}$ , il sistema é:

- **asintoticamente stabile**  $\Leftrightarrow$  tutte le radici di ogni denominatore degli elementi di  $(sI - A)^{-1}$  sono a  $\Re < 0$ ;
- **instabile**  $\Leftrightarrow$  esiste un elemento di  $(sI - A)^{-1}$ , il cui denominatore ha almeno una radice a  $\Re > 0$  oppure almeno una radice  $\Re = 0$  con molteplicitá  $> 1$ ;
- **semplicemente stabile**  $\Leftrightarrow$  non esistono radici di nessun denominatore a  $\Re > 0$  oppure esiste almeno una radice a  $\Re = 0$  e tutte hanno molteplicitá 1.

#### Esempio

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Il primo termini della matrice ha una radice a  $\Re > 0$  quindi il sistema é instabile.

#### Esempio

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qualunque stato iniziale é punto di equilibrio per il sistema, che quindi non possono essere isolati. Questo sistema allora non può essere asintoticamente stabile.

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{0t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Le radici del denominatore sono tutte a  $\Re = 0$  con molteplicitá 1. Allora il sistema é semplicemente stabile.

#### Esempio

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Il sistema é instabile perché esiste una radice con molteplicitá 2.



### 8.1.6 Studio della stabilità attraverso il polinomio minimo

Un sistema é:

- **asintoticamente stabile** se tutte le radici di  $m(s)$  hanno  $\Re < 0$ ;
- **instabile** se  $m(s)$  ha almeno una radice a  $\Re > 0$  oppure esiste almeno una radice a  $\Re = 0$  ma tutte con molteplicitá  $> 1$  in  $m(s)$ ;
- **semplicemente stabile** in tutte le altre situazioni: nessuna radice a  $\Re > 0$  e esiste almeno una radice a  $\Re = 0$  con molteplicitá  $= 1$  in  $m(s)$ .

**Esempio**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{bmatrix} x$$

Si tratta di una matrice triangolare a blocchi: gli autovalori sono l'unione degli autovalori delle sottomatrici.

$$\phi(s) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & s+1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{bmatrix} = (s-1)(s+1)(s^2+1)$$

Abbiamo 4 autovalori distinti: 1, -1, j, -j. Il sistema é instabile a causa di 1 perché ha  $\Re > 0$ .

**Esempio**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 7 & 9 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix} x$$

Si tratta di una matrice a blocchi. Inoltre il "blocco"  $2 \times 2$  é triangolare quindi gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale. Gli autovalori della matrice sono: -1, -1, 0, 0.

$$\phi(s) = (s+1)^2 s^2$$

In questo caso il polinomio caratteristico mi dice solo che il sistema non é asintoticamente stabile perché é presente una radice a  $\Re = 0$  con molteplicitá 2. Allora studio  $(sI - A)^{-1}$ .

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & * & * & * \\ 0 & s+1 & * & * \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{bmatrix}^{-1}$$

Con \* indichiamo i valori restanti della matrice che per ora non ci servono.

I primi due blocchi  $1 \times 1$  della matrice si invertono e otteniamo  $\frac{1}{s+1}$ . Il terzo blocco  $2 \times 2$  lo calcoliamo a parte:

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Il (2,1)-esimo elemento denota la instabilità perché mi assicura che anche nel polinomio minimo é presente il termine  $s^2$  (cioé una radice a  $\Re = 0$ , con molteplicitá 2). Se non avessi trovato questo termine, avrei dovuto calcolare anche i termini della matrice inversa corrispondenti agli \*.

### Esempio

Al contrario del precedente, in questo esercizio non ci basterá fare l'inversa degli elementi sulla diagonale, ma dovremmo calcolare anche i restanti.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} x$$

É una matrice triangolare a blocchi, quindi gli autovalori sono l'unione degli autovalori di ogni blocco. Per entrambi i blocchi gli autovalori sono  $\pm j$ , quindi avremo che gli autovalori della matrice sono  $j$  e  $-j$  con molteplicitá 2. Allora il polinomio caratteristico é:

$$\phi(s) = (s^2 + 1)^2$$

Deduciamo subito che il sistema non può essere asintoticamente stabile perché sono presenti radici a  $\Re = 0$ . Per determinare la stabilità studiamo  $(sI - A)^{-1}$ .

Facciamo l'inversa rispettivamente del primo e del secondo blocco:

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ -\frac{1}{s+1} & \frac{s}{s+1} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & -\frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s}{s+1} \end{bmatrix}$$

Guardando solo questi blocchi concluderei erroneamente che il sistema é semplicemente stabile perché nel polinomio minimo abbiamo un fattore  $s^2 + 1$ , invece di  $(s^2 + 1)^2$ , quindi esiste una radice a  $\Re = 0$  con molteplicitá 1. In realtà basta calcolare l'inversa di un elemento non sulla diagonale, ad esempio il (1,3)-esimo:

$$(sI - A)_{1,3}^{-1} = \frac{s}{(s+1)^2}$$

Possiamo anche non calcolare i restanti elementi dell'inversa, perché questo appena calcolato ci assicura che nel polinomio minimo é presente il termine  $(s^2 + 1)^2$ , quindi c'è una radice a  $\Re = 0$  con molteplicitá 2.

Il sistema é instabile.

### 8.1.7 Linearizzazione dei sistemi non lineari

Considero il seguente sistema

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)]$$

dove  $f$  é una funzione non lineare.

Considero il punto di equilibrio  $\hat{P} = (\hat{x}, \hat{u})$ , quindi per definizione di p.e.  $f(\hat{x}, \hat{u}) = 0$ .

Definiamo:

$$\delta x(t) = x(t) - \hat{x}$$
$$\delta u(t) = u(t) - \hat{u}$$

Scriviamo il polinomio di Taylor di  $f$  attorno  $(\hat{x}, \hat{u})$ :

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} [x(t) - \hat{x}] = \dot{x}(t) = f[x(t), u(t)] = \\ &= f[\hat{x}, \hat{u}] + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(\hat{x}, \hat{u})} \cdot (x - \hat{x}) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{(\hat{x}, \hat{u})} \cdot (u - \hat{u}) + \text{Resto} \end{aligned}$$

Il sistema linearizzato attorno  $(\hat{x}, \hat{u})$  é:

$$\dot{\delta x}(t) \cong \hat{A}\delta x(t) + \hat{B}\delta u(t) \quad (8.5)$$

Per esempio  $(0, 0)$  é un punto di equilibrio sia per il sistema linearizzato che per il sistema non lineare. Posso provare a studiare la stabilit  del sistema linearizzato e *sperare* che valga anche per il sistema non lineare in corrispondenza del punto di equilibrio  $(\hat{x}, \hat{u})$  considerato.

### Esempio

$$\dot{x}(t) = \sin[x(t)] + u(t)$$

Cominciamo facendo un'analisi qualitativa dei punti di equilibrio di questo sistema non lineare:

- $u(t) = 0$  e  $x(t) = 0$  sono un punto di equilibrio;
- se  $|u(t)| > 1$ , poich  il seno   compreso tra  $-1$  e  $1$ , non potr  mai essere punto di equilibrio;
- se  $|u(t)| < 1$  si pu  trovare un valore del seno che lo compensi.

In particolare, per  $\hat{u} = 0$ ,  $\dot{x} = 0 \leftrightarrow \sin \hat{x} = 0$ , cio   $x = k\pi$  per  $k \in \mathbb{Z}$ . L'equazione di stato diventa:

$$\dot{x} = \sin x$$

Osserviamo due punti di equilibrio:

- $(0, 0)$ : se aumentiamo leggermente  $x$  (ci allontaniamo verso destra di  $x = 0$ ), il seno assume valori positivi, quindi  $\dot{x} > 0$ , cio  lo stato tende ad aumentare sempre pi ; se diminuiamo leggermente  $x$  (ci allontaniamo verso sinistra di  $x = 0$ ), il seno assume valori negativi, quindi  $\dot{x} < 0$ , cio  lo stato tende a diminuire sempre di pi . Allora questo   un punto di equilibrio instabile localmente.
- $(\pi, 0)$ : se aumentiamo leggermente  $x$ , la derivata   negativa, cio  lo stato tende a tornare al punto di equilibrio; lo stesso accade se diminuiamo leggermente  $x$ , la derivata   positiva, cio  lo stato tende ad aumentare opponendosi alla nostra variazione. Allora si tratta di un punto di equilibrio asintoticamente stabile localmente.

Adesso studiamo il sistema linearizzato:

$$\hat{A} = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\hat{x}, \hat{u}} = \cos x|_{\hat{x}, \hat{u}} = \cos \hat{x}$$

$$\hat{B} = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\hat{x}, \hat{u}} = 1$$

- attorno  $(0, 0)$ :

$$\dot{\delta x} = 1 \cdot \delta x + 1 \cdot \delta u$$

si tratta di un sistema linearizzato instabile, congruente alla stabilit  del punto di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

- attorno  $(\pi, 0)$ :

$$\dot{\delta x} = -1 \cdot \delta x + 1 \cdot \delta u$$

si tratta di un sistema linearizzato asintoticamente stabile, come la stabilit  del punto di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

### Esempio

Consideriamo il sistema non lineare della vasca già analizzato in precedenza:

$$\dot{x} = \frac{1}{S}u - \frac{E}{S}\sqrt{2gx} = f(x, u)$$

Lo linearizziamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} &= -\frac{E}{2S}\sqrt{\frac{2g}{x}} \\ \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} &= \frac{1}{S} \\ \dot{\delta x} &= -\frac{E}{2S}\sqrt{\frac{2g}{\hat{x}}}\delta x + \frac{1}{S}\delta u = -\alpha\delta x + \frac{1}{S}\delta u\end{aligned}$$

(Il termine  $\frac{1}{S}\delta u$  era già lineare e infatti non è stato modificato dalla linearizzazione)

Il sistema linearizzato è asintoticamente stabile  $\forall \hat{x} > 0$ . Notiamo che più  $\hat{x}$  è piccolo, più  $\dot{\delta x}$  diventa grande e negativa: cioè il sistema tende a tornare nel punto di equilibrio più velocemente, più  $\hat{x}$  è piccolo.

### 8.1.8 Studio della stabilità dei punti di equilibrio per sistemi non lineari

Dato un sistema non lineare

$$\dot{x} = f[x, u]$$

linearizzato attorno al punto di equilibrio  $(\hat{x}, \hat{u})$ :

$$\dot{\delta x}(t) = \hat{A}\delta x(t) + \hat{B}\delta u(t)$$

Se il sistema linearizzato ha:

- tutti autovalori a  $\Re < 0 \Rightarrow (\hat{x}, \hat{u})$  è **asintoticamente stabile localmente** per il sistema non lineare;
- almeno un autovalore a  $\Re > 0 \Rightarrow (\hat{x}, \hat{u})$  è **instabile localmente** per il sistema non lineare;
- in tutti gli altri casi (esistono autovalori del linearizzato a  $\Re = 0$  e nessuno a  $\Re > 0$ )  $\Rightarrow$  **non si conclude** nulla sulla stabilità del sistema non lineare, anche se il linearizzato è semplicemente stabile.

### Esempio

Prendiamo il punto di equilibrio  $(0, \hat{u})$  e analizziamo i seguenti sistemi:

1.  $\dot{x} = x$  è un sistema lineare instabile. La linearizzazione  $\dot{\delta x} = \delta x$  ovviamente coincide con il sistema;
2.  $\dot{x} = -x$  è un sistema lineare asintoticamente stabile. La linearizzazione non cambia  $\dot{\delta x} = -\delta x$ ;
3.  $\dot{x} = x^2$  è un sistema non lineare instabile. Se linearizziamo attorno  $\hat{x} = 0$ , otteniamo

$$\dot{\delta x} = \left. \frac{\partial x^2}{\partial x} \right|_{x=0} = 2x|_{x=0} = 0$$

perché nell'origine la pendenza è nulla. Quindi il sistema linearizzato è semplicemente stabile come avevamo visto nell'esempio 8.1.5;

4.  $\dot{x} = x^2$  è un sistema non lineare instabile. Se linearizziamo attorno  $\hat{x} = 0$ , otteniamo  $\dot{\delta x} = 0$ . Il sistema linearizzato è semplicemente stabile;

5.  $\dot{x} = x^3$  é un sistema non lineare instabile. Se linearizziamo attorno  $\hat{x} = 0$ , otteniamo  $\delta\dot{x} = 0$ . Il sistema linearizzato é semplicemente stabile;
6.  $\dot{x} = -x^3$  é un sistema non lineare asintoticamente stabile. Se linearizziamo attorno  $\hat{x} = 0$ , otteniamo  $\delta\dot{x} = 0$ . Il sistema linearizzato é semplicemente stabile;

Negli esempi 3,4,5,6 abbiamo sistemi non lineari in cui si può verificare facilmente se sono instabili o asintoticamente stabili, mentre il sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio é semplicemente stabile e quindi non ci dá alcuna informazione utile.

### 8.1.9 Modello preda predatore

Definiamo:

- $N(t)$  il numero di prede;
- $P(t)$  il numero di predatori.

Inoltre ipotizziamo che le risorse per le prede siano infinite. Quindi le equazioni che modellano l'evoluzione della specie in questo ecosistema sono:

$$\begin{aligned}\dot{N} &= rN - cNP \\ \dot{P} &= -dP + bNP\end{aligned}$$

Riscriviamo il sistema introducendo nuove variabili:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{b}{d}N & x_2 &= \frac{c}{r}P \\ \underline{\dot{x}} &= \underline{f}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dot{x}_1 &= rx_1(1 - x_2) \\ \dot{x}_2 &= dx_2(x_1 - 1) \end{cases}\end{aligned}$$

Adesso studiamo i punti di equilibrio  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  tale che  $\underline{f}(x_1, x_2) = \underline{0}$ . Le soluzioni di questo sistema omogeneo sono:

$$P_A = (0, 0) \quad P_B = (1, 1)$$

Analizziamo qualitativamente la natura di questi punti di equilibrio:

- $P_A$ :

- $x_2 = 0$ : equivale a  $P = 0$  non ci sono predatori, quindi la legge che regola le prede é  $\dot{N} = rN$ . Come ci aspettiamo intuitivamente, se aumentiamo leggermente il numero di prede dal punto di equilibrio  $x_1 = 0$ , esse aumentano indefinitamente grazie alle risorse infinite.

Infatti abbiamo un sistema lineare con un autovalore positivo: il punto di equilibrio é instabile localmente.

- $x_1 = 0$ : equivale a  $N = 0$ , cioè non ci sono prede, quindi la legge che regola i predatori é  $\dot{P} = -dP$ . Se aumentiamo il numero di predatori nell'ecosistema da zero a un certo valore positivo, poiché non hanno nutrimento (non ci sono prede), si estingueranno.

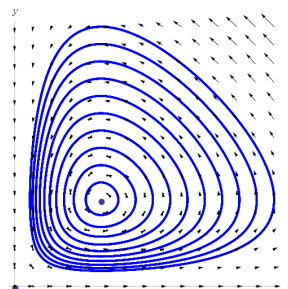
Il sistema é lineare con un autovalore negativo, quindi il punto di equilibrio é asintoticamente stabile.

Possiamo concludere che si tratta di un punto di equilibrio instabile.

- $P_B$ :

Ovunque mettiamo la coppia preda-predatore, essa si trova su un'orbita chiusa di  $P_B$ .

Allontanandosi dal punto, le orbite si allargano fino a degenerare e a coincidere con gli assi. Quindi si tratta di un punto di equilibrio semplicemente stabile.



Adesso analizziamo il sistema linearizzandolo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} r(1-x_2) & -rx_1 \\ dx_2 & d(x_1-1) \end{bmatrix}$$

- attorno  $P_A$ :  $\hat{A} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$ .

Il sistema linearizzato ha un autovalore reale positivo, allora il punto di equilibrio del sistema non lineare é instabile.

- attorno  $P_B$ :  $\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ d & 0 \end{bmatrix}$

$$\phi(s) = \det \begin{bmatrix} s & r \\ -d & s \end{bmatrix} = s^2 + rd$$

Poiché  $rd > 0$ , abbiamo due radici immaginarie pure con molteplicità 1:  $s_1 = j\sqrt{rd}$  e  $s_2 = -j\sqrt{rd}$ . Il sistema linearizzato é semplicemente stabile, ma questo non ci basta per concludere anche per il sistema non lineare.

## Chapter 9

# Raggiungibilità e controllabilità

### 9.1 Raggiungibilità e controllabilità

Dato un sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$ :

$\hat{x}$  é uno stato **raggiungibile** in un tempo  $\hat{t}$  se  $\exists \hat{u}(t)$  con  $t \in [0, \hat{t}]$  tale che se  $x(0^-) = 0$  e  $u(t) = \hat{u}(t)$ , allora  $x(\hat{t}) = \hat{x}$ .

$X_R(\hat{t})$  sottospazio degli stati raggiungibili in  $\hat{t}$

$\tilde{x}$  é uno stato **controllabile** in un tempo  $\tilde{t}$  se  $\exists \tilde{u}(t)$  con  $t \in [0, \tilde{t}]$  tale che se  $x(0^-) = \tilde{x}$  e  $u(t) = \tilde{u}(t)$ , allora  $x(\tilde{t}) = 0$ .

$X_C(\tilde{t})$  sottospazio degli stati controllabili in  $\tilde{t}$

#### 9.1.1 Proprietá per i sistemi LTI a tempo continuo

Per i sistemi LTI a tempo continuo valgono le seguenti proprietá:

- se  $\tilde{x}$  é raggiungibile in  $\tilde{t}$ , se e solo se  $\tilde{x}$  é controllabile.

$$X_R(\tilde{t}) \equiv X_C(\tilde{t})$$

Questo é dovuto all'invertibilitá della matrice  $e^{A\tilde{t}}$  (che per la proprietá dell'esponenziale si puó calcolare come  $(e^{A\tilde{t}})^{-1} = e^{-A\tilde{t}}$ ).

- se  $\tilde{x} \in X_R(\tilde{t})$ , allora  $\tilde{x} \in X_R(t) \forall t > 0$ . Lo stesso vale per  $X_C$  per la proprietá precedente.

Per i SLTI si parla dunque di  $X_R \equiv X_C$  indipendentemente dal tempo.

Prendiamo:

- $\dot{x} = Ax + Bu$  é un sistema completamente controllabile in  $\tilde{t}$ ;
- dato uno stato iniziale  $x(0^-) = \hat{x}$ , voglio ottenere che lo stato in  $\tilde{t}$  sia:  $x(\tilde{t}) = \tilde{x}$ ;

Dimostriamo questa proprietá per un determinato controllo:

$$\tilde{u}(\tau) = B^T e^{A^T(\tilde{t}-\tau)} \cdot \left[ \int_{0^-}^{\tilde{t}} e^{A(\tilde{t}-\epsilon)} B B^T e^{A^T(\tilde{t}-\epsilon)} d\epsilon \right]^{-1} \cdot (\tilde{x} - e^{A\tilde{t}} \hat{x}) = B^T e^{A^T(\tilde{t}-\tau)} \cdot W^{-1}(\tilde{t}) \cdot (\tilde{x} - e^{A\tilde{t}} \hat{x})$$

Applico l'equazione di Lagrange per calcolare  $x(\tilde{t})$ :

$$\begin{aligned} x(\tilde{t}) &= e^{A\tilde{t}}\hat{x} + \underbrace{\int_{0^-}^{\tilde{t}} e^{A(\tilde{t}-\tau)} BB^T e^{A^T(\tilde{t}-\tau)} W^{-1}(\tilde{t}) \left( \tilde{x} - e^{A\tilde{t}}\hat{x} \right) d\tau}_{W(\tilde{t})} \\ &= e^{A\tilde{t}}\hat{x} + [W(\tilde{t})W^{-1}(\tilde{t})] \left( \tilde{x} - e^{A\tilde{t}}\hat{x} \right) = \hat{x} \quad \forall \tilde{t} > 0 \end{aligned}$$

Ho dimostrato che partendo da dove voglio  $\hat{x}$ , arrivo dove voglio  $\tilde{x}$  in un tempo a piacere, se prendo il giusto controllo  $\tilde{u}(t)$ .

Inoltre valgono le seguenti proprietà per  $X_R \equiv X_C$ :

- $X_R$  é invariante rispetto ad A:

$$\tilde{x} \in X_R \quad \Rightarrow \quad A\tilde{x} \in X_R$$

cioé se é controllabile, allora posso imporre la direzione con cui lo stato si muove.

- $X_R$  é invariante per il sistema:

$$x(\hat{t}) \in X_R \quad \Rightarrow \quad x(t) \in X_R \quad \forall t \geq \hat{t}$$

cioé se lo stato é dentro lo spazio di raggiungibilitá, ci rimane per sempre.

- $X_R$  é un sottospazio lineare: se posso raggiungere due stati  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$ , allora posso raggiungere una qualunque combinazione lineare.

Possiamo dimostrarlo con la proprietà di sovrapposizione degli effetti: dati  $x_A, x_B \in X_R$

$$- \quad x(0^-) = 0 \Rightarrow \exists u_A(\tau) \Rightarrow x(\hat{t}) = x_A$$

$$- \quad x(0^-) = 0 \Rightarrow \exists u_B(\tau) \Rightarrow x(\hat{t}) = x_B$$

$$u(\tau) = \alpha u_A(\tau) + \beta u_B(\tau) \Rightarrow x(\hat{t}) = \alpha x_A + \beta x_B$$

Poiché si tratta di un sottospazio lineare,  $\tilde{x} = 0$  é sempre incluso in  $X_R$ . Quindi non esiste un sistema con  $X_R$  insieme vuoto, perché l'origine c'è sempre.

### 9.1.2 Completa controllabilità

Supponiamo di avere il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Dalla seconda equazione vedo che  $\underline{x}_2$  da  $\underline{u}$  direttamente né indirettamente attraverso  $\underline{x}_1$ .  $\underline{x}_2$  non é controllabile e quindi il sistema non é **completamente controllabile**.

#### Esempio

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Si nota che la seconda componente dello stato non é controllabile:

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_2$$



Quindi il sistema non é completamente controllabile.

Per esercizio calcoliamo la trasformata della soluzione di questa equazione differenziale:

$$X_2(s) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} \underline{x}(0^-) =$$

Antitrasformiamo:

$$\underline{x}_2(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} 1(t) \underline{x}(0^-)$$

### 9.1.3 Teorema di Cayley-Hamilton

Data una matrice quadrata  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e il relativo polinomio caratteristico  $\phi(s) = \det(sI - A)$ , allora:

$$\phi(A) = 0 \text{ matrice nulla}$$

In generale:

$$\phi(s) = s^{n_x} + \phi_{n_x-1}s^{n_x-1} + \dots + \phi_1s + \phi_0$$

Per il teorema di Cayley-Hamilton:

$$\phi(A) = A^{n_x} + \phi_{n_x-1}A^{n_x-1} + \dots + \phi_1A + \phi_0I = 0 \quad (9.1)$$

$$A^{n_x} = -\phi_{n_x-1}A^{n_x-1} - \dots - \phi_1A - \phi_0I \quad (9.2)$$

$A_{n_x}$  é combinazione lineare di  $I, A, \dots, A_{n_x-1}$ .

**Come calcolare  $A^{n_x+k} \forall k \geq 0$**

Per esempio cominciamo da  $k = 1$ :

$$A^{n_x+1} = A^{n_x}A = \underbrace{-\phi_{n_x-1}A^{n_x}}_{\text{comb. lineare di } I, A, \dots, A_{n_x-1}} \underbrace{-\phi_{n_x-2}A^{n_x-1} - \dots - \phi_1A^2 - \phi_0A}_{\text{comb. lineare di } I, A, \dots, A_{n_x-1}}$$

Quindi  $A^{n_x+1}$  é combinazione lineare di  $I, A, \dots, A_{n_x-1}$ .

In generale  $A^{n_x+k}$  é combinazione lineare di  $I, A, \dots, A_{n_x-1}$ .

**Com'è fatto  $X_R$**

se ipotizziamo  $\underline{x}(0^-)$ :

$$X_R = \{\text{sottospazio di tutti i } \tilde{x} \text{ raggiungibili}\} = \left\{ \int_{0^-}^{\tilde{t}} e^{A(\tilde{t}-\tau)} B \tilde{u}(\tau) d\tau, \forall \tilde{t} \right\}$$

L'integrale può essere visto come combinazione lineare di infiniti termini tra  $e^{A(\tilde{t}-\tau)}B$  e  $u(\tau)$ :

$$X_R = \left\{ \text{tutte le possibili combinazioni lineari di tutte le colonne di } e^{A(\tilde{t}-\tau)}B \right\}$$

Ma abbiamo visto che  $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ :

$$\begin{aligned} e^{A(\tilde{t}-\tau)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (\tilde{t}-\tau)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde{t}-\tau)^k}{k!} A^k = \\ &= I + \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n_x-1} A^{n_x-1} + \sum_{k=n_x}^{\infty} \alpha_k A^k \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che  $A^k$  é combinazione lineare di tutti i termini precedenti  $I, A, \dots, A_{n_x-1}$ . Quindi:

$$e^{A(\tilde{t}-\tau)} = \text{combinazione lineare}(I, A, \dots, A_{n_x-1})$$

In definitiva l'integrale é combinazione lineare delle colonne di  $e^{A(\tilde{t}-\tau)}B\forall(\tilde{t}-\tau)$ , che equivale a una matrice del tipo:

$$[B|AB|\dots|A^{n_x-1}B]$$

#### 9.1.4 Teorema di Kalman di raggiungibilitá

$X_R$  é combinazione lineare di tutte le colonne di:

$$P = [B|AB|\dots|A^{n_x-1}B]$$

Il teorema si può anche scrivere come:

$$X_R = \text{Immagine}([B|AB|\dots|A^{n_x-1}B])$$

#### Esempio

Alcune volte non tutte le colonne di  $P$  sono necessarie:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u}$$

Ci sono 2 variabili di controllo  $n_u = 2$  e 2 variabili di stato  $n_x = 2$ .

$$P = [B|AB] = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \end{array} \right]$$

In questo caso solo con  $B$  ho già  $n_x = 2$  colonne linearmente indipendenti:  $\frac{1}{0}$  e  $\frac{1}{1}$ . Quindi é inutile scrivere le matrici successive di  $P$ , perché le loro colonne saranno sicuramente linearmente dipendenti a quelle di  $B$ .

In conclusione  $\dim(X_R) = 2$ .

#### 9.1.5 Corollari del teorema di Kalman

•

$$\dim(X_R) = \text{rank}(P)$$

La matrice  $P$  ha un numero di colonne e righe pari a:

$$P = \left[ \underbrace{\underbrace{B}_{n_u} | \underbrace{AB}_{n_u} | \dots | \underbrace{A^{n_x-1}B}_{n_u}}_{n_u \times n_u \text{ colonne}} \right] \left. \vphantom{\begin{matrix} B \\ AB \\ \dots \\ A^{n_x-1}B \end{matrix}} \right\} n_x \text{ righe}$$

Quindi il rango di  $P$  può essere al massimo  $n_x$ .

•

$$X_R \equiv \mathbb{R}^{n_x} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rank}(P) = n_x \quad \Leftrightarrow \quad \text{sistema completamente controllabile}$$

•

$$\text{rank}(P) + \dim(\ker(P)) = n_x$$

dove  $\ker$  é l'operatore kernel:  $\ker(P) = \underline{v}|P\underline{v} = 0$

- Il teorema di Kalman di raggiungibilitá può essere applicato separatamente su ogni singola variabile di controllo o gruppi di esse.

### Esempio

In questo sistema non tutti i controlli sono necessari per controllare il sistema.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$P = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$\text{rank}(P) = n_x = 2$  quindi il sistema é completamente controllabile se usiamo entrambi i controlli.

Adesso proviamo ad usare solo  $u_1$ :

$$P_1 = [B_1 | AB_1] = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\text{rank}(P_1) \neq 2$  quindi il sistema non é completamente controllabile con  $u_1$ .

Applichiamo solo  $u_2$ :

$$P_2 = [B_2 | AB_2] = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right]$$

$\text{rank}(P_2) = 2$  quindi il sistema é completamente controllabile con  $u_2$ .

### 9.1.6 Cambio di base

Prendiamo una matrice quadrata e invertibile  $T$ . Il cambio di base sará descritto dalla relazione:

$$x = Tz$$

Effettuiamo il cambio di base:

$$\dot{z} = (\dot{T}z) = T\dot{z} = ATz + Bu$$

$$y = CTz + Du$$

Moltiplichiamo la prima equazione a sinistra per  $T^{-1}$ :

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \tilde{A}z + \tilde{B}u \quad (9.3)$$

$$y = CTz + Du = \tilde{C}z + \tilde{D}u \quad (9.4)$$

La funzione di trasferimento non cambia perché il cambiamento di base coinvolge solo lo stato del sistema, non la relazione ingresso uscita:

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}$$

Si può verificare attraverso il teorema di Kalman che lo spazio di raggiungibilità é invariante rispetto al cambio di base:

$$Z_R = \text{Im} \left\{ \tilde{P} = \left[ \tilde{B} | \tilde{A}\tilde{B} | \dots | \tilde{A}^{n_x-1}\tilde{B} \right] \right\}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B$$

$$\tilde{A}\tilde{B} = T^{-1}ATT^{-1}B = T^{-1}AB$$

$$\vdots$$

$$\tilde{A}^{n_x-1}\tilde{B} = T^{-1}A^{n_x-1}B$$

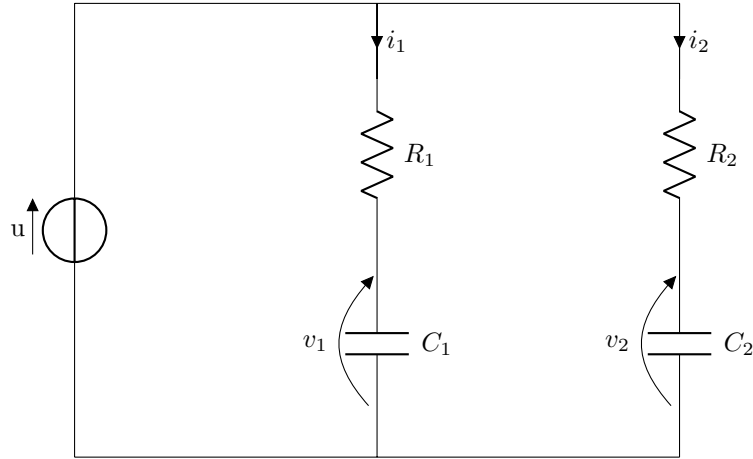
Quindi:

$$\tilde{P} = [T^{-1}B | T^{-1}AB | \dots | T^{-1}A^{n_x-1}B] = T^{-1} [B | AB | \dots | A^{n_x-1}B] = T^{-1}P$$

Il sottospazio degli stati raggiungibili nella nuova base é:

$$Z_R = T^{-1}X_R$$

\*\*\* Exercise 1 studiare la controllabilità di due rami RC in parallelo



Nei circuiti a parametri concentrati, le variabili di stato possono essere identificate con i dispositivi che accumulano energia (in questo caso i condensatori):

$$x_1 \triangleq v_1 \quad x_2 \triangleq v_2$$

Scriviamo le equazioni delle maglie:

$$\begin{aligned} u &= R_1 i_1 + v_1 \quad \Rightarrow i_1 = \frac{1}{R_1} (u - v_1) \\ u &= R_2 i_2 + v_2 \quad \Rightarrow i_2 = \frac{1}{R_2} (u - v_2) \end{aligned}$$

Le sostituiamo nelle equazioni descrittive dei condensatori:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{1}{C_1} i_1 = \frac{1}{R_1 C_1} (u - v_1) \\ \dot{v}_2 &= \frac{1}{C_2} i_2 = \frac{1}{R_2 C_2} (u - v_2) \end{aligned}$$

Ridefiniamo le costanti di tempo:

$$\frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{\tau_1} \triangleq \alpha_1 \quad \frac{1}{R_2 C_2} = \frac{1}{\tau_2} \triangleq \alpha_2$$

dove  $\alpha_1 \neq 0$  e  $\alpha_2 \neq 0$ .

Le equazioni di stato del sistema diventano:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\alpha_1 x_1 + \alpha_1 u \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_2 x_2 + \alpha_2 u \end{cases} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} u$$

Calcoliamo la matrice  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & | & -\alpha_1^2 \\ \alpha_2 & | & -\alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = -\alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_2 = -\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\det(P) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow X_R = \mathbb{R}^2$$

il sistema é completamente raggiungibile.

Nel circuito equivale a  $\tau_1 \neq \tau_2 \Leftrightarrow R_1 C_1 \neq R_2 C_2$ .

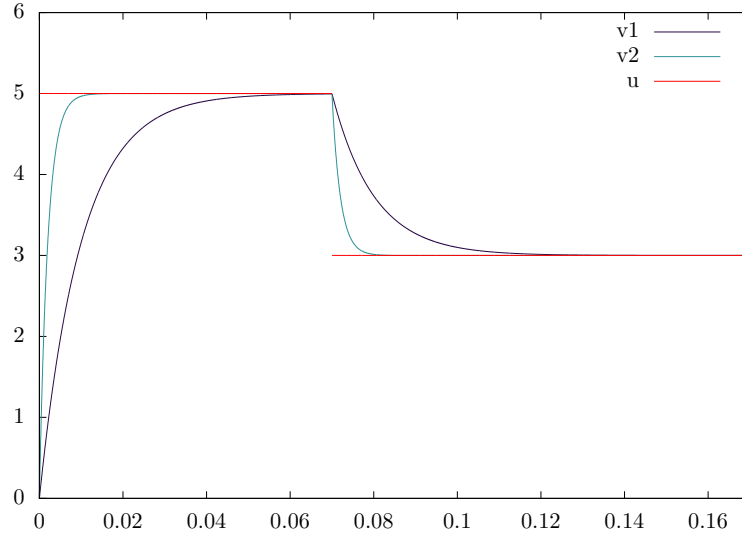


Figure 9.1: Andamento di  $v_1$  e  $v_2$  per  $\tau_1 = 0.01s$  e  $\tau_2 = 0.002s$

**Osservazione** Ragionando intuitivamente sul grafico potremmo pensare che in realtà questo sistema non *raggiunge* qualunque coppia di stati noi desideriamo  $(x_1, x_2)$  con  $x_1 \neq x_2$ , perché la tensione sui condensatori va sempre a stabilizzarsi asintoticamente alla tensione imposta dal generatore. In realtà per *raggiungere* uno stato, basta che lo stato del sistema assuma quel valore in un certo istante di tempo.

Se lo stato assume un valore e lo mantiene, allora si tratta di un punto di equilibrio. Infatti è facile intuire che i punti di equilibrio di questo sistema sono caratterizzati dalla relazione  $u = x_1 = x_2$ . Verifichiamolo:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) \text{ è punto di equilibrio} \Leftrightarrow A\tilde{x} + B\tilde{u} = 0$$

$$-\begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \tilde{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \tilde{x}_1 \\ \alpha_2 \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \tilde{u} \\ \alpha_2 \tilde{u} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{x}_1 = \tilde{u} \\ \tilde{x}_2 = \tilde{u} \end{cases}$$

Quindi i punti di equilibrio sono  $A = (\tilde{x}, \tilde{u}) = [(\beta, \beta), \beta]$

## \*\* Exercise 2 studiare la controllabilità di due vasche in parallelo

Consideriamo l'esempio del sistema non lineare delle vasche:

$$\dot{h} = \frac{1}{S}u - \frac{E}{S}\sqrt{2gh}$$

Linearizzato attorno al punto di equilibrio  $(\tilde{h}, \tilde{u})$ :

$$\delta \dot{h} = -\alpha \delta h + \beta \delta u$$

$$\delta h = h - \tilde{h} \quad \delta u = u - \tilde{u}$$

Se abbiamo due vasche in parallelo:

$$\begin{cases} \delta \dot{h}_1 = -\alpha_1 \delta h_1 + \frac{\beta_1}{2} \delta u \\ \delta \dot{h}_2 = -\alpha_2 \delta h_2 + \frac{\beta_2}{2} \delta u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{2} \\ \frac{\beta_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$P = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\beta_1}{2} & -\frac{\alpha_1\beta_1}{2} \\ \frac{\beta_2}{2} & -\frac{\alpha_2\beta_2}{2} \end{array} \right] \quad \det(P) = -\frac{\alpha_2\beta_1\beta_2}{4} + \frac{\alpha_1\beta_1\beta_2}{4} = \frac{\beta_1\beta_2}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \neq 0$$

Il sistema linearizzato é completamente controllabile se e solo se  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .

### 9.1.7 Nota sul prodotto di matrici

Date due matrici  $R$  e  $C$  compatibili per il prodotto righe per colonne  $RC$ . Dividiamo le matrici in blocchi:  $R_1$  e  $R_2$  per  $R$ ;  $C_1$  e  $C_2$  per  $C$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 C_1 & R_1 C_2 \\ R_2 C_1 & R_2 C_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MC_1 & MC_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 MC_1 & R_1 MC_2 \\ R_2 MC_1 & R_2 MC_2 \end{bmatrix}$$

oppure

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MR_1 \\ MR_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 MC_1 & R_1 MC_2 \\ R_2 MC_1 & R_2 MC_2 \end{bmatrix}$$

### 9.1.8 Decomposizione canonica di raggiungibilit 

Definiamo  $X_{NR} \triangleq X_R^\perp$ , cio   $X_{NR}$    complemento ortogonale di  $X_R$ : se  $\hat{x} \in X_R$  e  $\tilde{x} \in X_{NR}$ , allora  $\hat{x} \cdot \tilde{x} = 0$ .

Poich  il vettore nullo   ortogonale a qualunque vettore, esso   contenuto sia in  $X_R$  che in  $X_{NR}$ .

Per costruzione  $\dim(X_R) = n_x - n_R$ . Quindi se  $X_R = \mathbb{R}^{n_x}$  allora  $X_{NR} = \{0\}$ . Viceversa se  $X_{NR} = \mathbb{R}^{n_x}$ , allora  $X_R = \{0\}$

$X_{NR}$  non va confuso con l'insieme di tutti e soli gli stati non raggiungibili, ma   un sottospazio che definiamo artificialmente.

Se uno stato non   raggiungibile non significa che non potr  mai essere raggiunto, ma che non pu  essere raggiunto partendo dall'origine. Se lo stato parte fuori da  $X_R$ , potr  raggiungere stati che non appartengono a  $X_R$ .

Prendiamo per esempio il caso di  $n_x = 3$ : se  $X_R$    una retta,  $X_{NR}$    il piano perpendicolare; viceversa se  $X_R$    un piano,  $X_{NR}$    la retta perpendicolare;

Prendiamo:

- una base di  $X_R$  costituita da  $n_R = \dim(X_R)$  elementi;
- una matrice  $T_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_R}$ , le cui colonne sono base di  $X_R$ ;
- una matrice  $T_2 \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x - n_R)}$ , le cui colonne sono una base di  $X_{NR}$ .

Costruiamo una nuova matrice quadrata:

$$T = [T_1 | T_2] \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$$

Tutte le colonne di  $T$  sono linearmente indipendenti perch  le colonne di  $T_1$  sono ortogonali alle colonne di  $T_2$ . Quindi  $T$    invertibile.

Suddividiamo  $T^{-1}$  in due sottoblocchi:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

Per definizione di matrice invertibile  $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ :

$$T^{-1}T = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1T_1 & H_1T_2 \\ H_2T_1 & H_2T_2 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_1T_2 = [0] \quad H_2T_1 = [0]$$

In particolare dal secondo prodotto otteniamo che le righe di  $H_2$  sono ortogonali alle colonne di  $T_1$ , quindi le righe di  $H_2$  sono ortogonali alla base di  $X_R$ :  $H_2 \perp X_R$ .

Effettuiamo il cambio di base attraverso la matrice  $T$ :

$$x = Tz \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \tilde{A}z + \tilde{B}u$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1AT_1 & H_1AT_2 \\ H_2AT_1 & H_2AT_2 \end{bmatrix}$$

Concentriamoci sulla (2-1)-esima sottomatrice  $H_2AT_1$ :  $T_1$  é una base di  $X_R$  e  $X_R$  é invariante rispetto ad  $A \Rightarrow AT_1 \in X_R \Rightarrow H_2 \perp AT_1$  perché  $H_2 \perp X_R \Rightarrow H_2AT_1 = 0$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Invece per  $\tilde{B}$ :

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} H_1B \\ H_2B \end{bmatrix}$$

Per il teorema di Kalman le colonne di  $B$  appartengono a  $X_R$  quindi  $H_2 \perp B$

$$\Rightarrow \tilde{B} = \begin{bmatrix} H_1B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Riscriviamo il sistema che abbiamo ottenuto:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_R \\ \dot{z}_{NR} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_R \\ \} n_{NR} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Con questo cambiamento di base abbiamo ottenuto che le prime  $n_R$  componenti sono raggiungibili, le ultime  $n_{NR}$  non sono raggiungibili. Abbiamo messo in ordine la struttura della matrice. Strutturalmente  $z_{NR}$  é non raggiungibile perché é indipendente dal controllo, invece  $z_R$  é completamente raggiungibile.

### \* Exercise 3      Calcolo di $X_R$ e decomposizione di raggiungibilità

Dato il sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{cases} \dot{x}_1 & = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 & = -x_2 + u \end{cases}$$

$$P = [B|AB] = \begin{bmatrix} 1 & | & -1 \\ 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rank}(P) = \dim(X_R) = 1$$

Infatti si può osservare che si tratta di due sistemi indipendenti tra loro, ma pilotati dallo stesso controllo: se partono dallo stesso stato si muovono in sincronia.

$$X_R = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

É l'insieme degli stati per cui  $x_1 = x_2$ .

Prendiamo la matrice  $T_1$  la cui colonna sia base di  $X_R$  e la matrice  $T_2$  la cui colonna sia base di  $X_{NR}$  (cioé un vettore ortogonale a  $T_1$ ):

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Quindi effettuiamo il cambio di base attraverso la matrice  $T$ :

$$T = [T_1 \mid T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x = Tz \Rightarrow \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Applichiamo il teorema di Kalman e calcoliamo  $\tilde{P}$ :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1 & | & \dots \\ 0 & | & \dots \end{bmatrix}$$

Poiché  $n_R = 1$  e  $X_R$  é invariante al cambiamento di base, posso fermarmi alla prima colonna di  $\tilde{P}$ :

$$Z_R = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 9.1.9 Polinomio caratteristico di controllabilità

Dato il sistema su cui é stata effettuata una decomposizione di raggiungibilità attraverso la matrice  $T$ :

$$\dot{x} = Ax + Bu \xrightarrow{x=Tz} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u$$

Consideriamo l'evoluzione forzata dello stato:

$$x_f(t) = \int_{0-}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} X_f(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

Per la linearità della trasformata di Laplace:

$$z(t) = T^{-1}x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z(s) = T^{-1}X(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z_f(s) &= (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}U(s) = \\ &= (sT^{-1}IT - T^{-1}AT)^{-1} T^{-1}BU(s) = \\ &= (T^{-1}sIT - T^{-1}AT)^{-1} T^{-1}BU(s) = \\ &= (T^{-1}(sI - A)T)^{-1} T^{-1}BU(s) = \textcolor{blue}{1} \\ &= (T^{-1}(sI - A)^{-1}T) T^{-1}BU(s) = T^{-1}X_f(s) \end{aligned}$$

Quindi studiare  $(sI - A)^{-1}BU(s)$  o  $(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}U(s)$  é equivalente a meno di un  $T^{-1}$ .

---

<sup>1</sup> $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$



Il polinomio caratteristico (e anche il polinomio minimo) é invariante al cambio di base:

$$\phi(s) = \tilde{\phi}(s) \quad (m(s) = \tilde{m}(s))$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(s) &= \det(sI - \tilde{A}) = \det(sT^{-1}IT - T^{-1}AT) = \\ &= \det(T^{-1}(sI - A)T) = \det(T^{-1})\det(sI - A)\det(T) = {}^2\det(sI - A) \end{aligned}$$

Calcoliamo gli autovalori nella nuova base:

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \tilde{\phi}(s) = \det(sI - \tilde{A}) = \\ &= \det \left\{ s \begin{bmatrix} I_{n_R} & 0 \\ 0 & I_{n_{NR}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11}) & -\tilde{A}_{12} \\ 0 & (sI - \tilde{A}_{22}) \end{bmatrix} = \\ &= \underbrace{\det(sI - \tilde{A}_{11})}_{\phi_C(s)} \cdot \underbrace{\det(sI - \tilde{A}_{22})}_{\phi_{NC}(s)} \end{aligned}$$

- $\phi_C(s)$  é il **polinomio caratteristico di controllabilit **. Le radici di  $\phi_C(s)$  sono gli autovalori di  $\tilde{A}_{11}$ , che é la parte controllabile del sistema, e sono detti **autovalori controllabili**.
- $\phi_{NC}(s)$  é il **polinomio caratteristico di non controllabilit **. Le radici di  $\phi_{NC}(s)$  sono gli autovalori di  $\tilde{A}_{22}$ , che é la parte non controllabile del sistema, e sono detti **autovalori non controllabili**.

**Come calcolare gli autovalori controllabili**

$$\begin{aligned} (sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} &= \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11}) & -\tilde{A}_{12} \\ 0 & (sI - \tilde{A}_{22}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11})^{-1} & M_{12}(s) \\ 0 & (sI - \tilde{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$  non ha informazioni su  $\tilde{A}_{22}$ .

  evidente che il polinomio caratteristico associato a  $(sI - \tilde{A}_{11})\tilde{B}_1$  equivale a quello di  $(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$ , perch  le due matrici differiscono per un blocco di zeri (che non avendo un denominatore non influiscono sul polinomio caratteristico).

Si pu  dimostrare che il polinomio caratteristico associato a  $(sI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1$  coincide con  $\phi_C(s) = \det(sI - \tilde{A}_{11})$ . Quindi per calcolare  $\phi_C(s)$    sufficiente calcolare il polinomio caratteristico associato a  $(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$ .

Ma per **quanto gi  detto**, studiare  $(sI - A)^{-1}B$  equivale a studiare  $(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$  a meno di  $T^{-1}$ . Quindi per calcolare  $\phi_C(s)$  basta calcolare il polinomio caratteristico associato a  $(sI - A)^{-1}B$ .

---


$${}^2\det(T) \cdot \det(T^{-1}) = 1$$



# Chapter 10

## Riepilogo

### 10.1 Trasformata di Laplace

#### 10.1.1 Proprietà

Linearità	$f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$
Traslazione in t	$f(t - T) 1(t - T) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-sT} F(s)$
Traslazione in s	$e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - a)$
Derivata in t	$\dot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0^-)$
Derivata n-esima in t	$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$ $s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) - \dots - s f^{(n-2)}(0^-) - f^{(n-1)}(0^-)$
Integrale in t	$\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} F(s)$
Derivata in s	$t f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds} F(s)$
Derivata n-esima in s	$t^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$

### 10.1.2 Trasformate notevoli

Impulso	$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$
Doppietto	$\dot{\delta}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s$
Gradino	$\frac{1}{s}$
Rampa	$\frac{1}{s^2}$
Esponenziale	$e^{\sigma t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - \sigma}$
Seno	$\sin(wt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{w}{s^2 + w^2}$
Coseno	$\cos(wt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + w^2}$
Polinomio e seno	$t \cdot \sin(wt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2ws}{(s^2 + w^2)^2}$
Polinomio e coseno	$t \cdot \cos(wt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s^2 - w^2}{(s^2 + w^2)^2}$