INSTITUTO DE MATEMÁTICA
E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Nome completo

Meu título

São Paulo

nº Semestre de xxxx

Nome completo

Meu título

Monografia apresentada à disciplina
MAT–0148 — Introdução ao Trabalho Científico,
Departamento de Matemática,
Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo.

Área de Concentração: Área

Orientador: Meu orientador – Instituição

São Paulo

nº Semestre de xxxx

Folha de Avaliação

Aluno: Nome completo
Título: Meu título
Data: nº Semestre de xxxx

Banca Examinadora

Meu orientador – Instituição (Orientador)
Professor 1 – Instituição
Professor 2 – Instituição

*Pequeno texto em que o autor presta homenagem
ou dedica seu trabalho a alguém importante em sua vida.*

E outras homenagens aqui, não ligadas às acima.

Agradecimentos

Texto em que o autor faz agradecimentos dirigidos àqueles que contribuíram de maneira relevante à elaboração do trabalho.

Esta contribuição pode ser através do fornecimento de material, compartilhamento de conhecimento ou pelo apoio recebido durante a elaboração do trabalho.

Agradeço a quem sou muito grato.

Aqui o autor apresenta uma citação
relacionada com a matéria de seu trabalho,
seguida de indicação de autoria.
A epígrafe é uma citação direta e,
portanto, a fonte deve constar na lista de Referências.

Resumo

SOBRENOME, N. **Meu título**. xxxx. 13 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, nº Semestre de xxxx.

Um resumo: o que vai abordar no trabalho em poucas palavras e algumas referências.

Palavras-chave: palavra-chave 1. palavra-chave 2. (até 5 palavras-chave)

Abstract

SOBRENOME, N. **My title**. xxxx. 13 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, nº Semestre de xxxx.

Uma tradução do que ficou no resumo.

Keywords: keyword 1. keyword 2. (up to 5 keywords)

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

CFT	Transformada contínua de Fourier (*Continuous Fourier Transform*)
DFT	Transformada discreta de Fourier (*Discrete Fourier Transform*)
EIIP	Potencial de interação elétron-íon (*Electron-Ion Interaction Potentials*)
STFT	Transformada de Fourier de tempo reduzido (*Short-Time Fourier Transform*)
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
URL	Localizador Uniforme de Recursos (*Uniform Resource Locator*)
IME	Instituto de Matemática e Estatística
USP	Universidade de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

ω	Frequência angular
ψ	Função de análise *wavelet*
Ψ	Transformada de Fourier de ψ

Sumário

Capítulo 1

Meu Primeiro Capítulo

Um pouco de texto...

1.1 Minha Primeira Seção

Definição 1.1.1 (Nome do objeto)**.** Minha primeira definição.

Proposição 1.1.2 (Nome da proposição)**.** *Minha primeira proposição.*

Proposição 1.1.3 (Nome do lema)**.** *Meu primeiro lema.*

Teorema 1.1.4. *Existe n_0 natural tal que, para todo $n \geq n_0$, a seguinte afirmação é verdadeira: para qualquer coloração das arestas de K_n em vermelho e azul, existe uma partição do conjunto dos vértices de K_n em dois circuitos monocromáticos, um vermelho e outro azul.*

Definição 1.1.5. Dado um grafo G e $A, B \subseteq V(G)$ tais que $A \cap B = \emptyset$, dizemos que (A, B) é um par (ε, G)-regular (onde $\varepsilon > 0$), ou simplesmente ε-regular, se para todo $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ com $|X| \geq \varepsilon|A|$, $|Y| \geq \varepsilon|B|$, temos

$$\left|\frac{e(X,Y)}{|X||Y|} - \frac{e(A,B)}{|A||B|}\right| < \varepsilon\,.$$

Proposição 1.1.6. *Se $0 < \varepsilon < 0.1$, e (A, B) é um par ε-regular em um grafo G com $|A| = |B| = m$, então existem $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$, com $|A'|, |B'| \geq (1-\varepsilon)m$, tais que*

- *(A', B') é (3ε)-regular;*
- *no subgrafo (A', B')-bipartido, todo vértice tem grau maior ou igual a $\left(\frac{e(A,B)}{m^2} - 2\varepsilon\right) m\,.$*

Mais ainda, é possível escolher A' e B' de modo que $|A'| = |B'|$.

Demonstração: Seja $\delta = \dfrac{e(A,B)}{m^2}$ a densidade do par (A, B) e $X_1 = \{u \in A : |N(u) \cap B| < (\delta - \varepsilon)|B|\}$. Se $|X_1| \geq \varepsilon|A|$, então para $X = X_1$ e $Y = B$ teríamos

$$\left|\frac{e(X,Y)}{|X||Y|} - \frac{e(A,B)}{|A||B|}\right| > \varepsilon\,,$$

absurdo. Logo $|X_1| < \varepsilon|A|$. Analogamente, se definirmos $Y_1 = \{v \in B : |N(v) \cap A| < (\delta - \varepsilon)|A|\}$, então $|Y_1| < \varepsilon|B|$. Suponha, sem perda de generalidade, que $|X_1| \geq |Y_1|$. Então tome $A' = A \setminus X_1$ e $B' \subseteq B \setminus Y_1$ tal que $|A'| = |B'|$. A seguir, verificamos as propriedades de (A', B'):

(A', B') É (3ε)-REGULAR:

Sejam $X \subseteq A'$ e $Y \subseteq B'$ tais que $|X| \geq 3\varepsilon|A'|$ e $|Y| \geq 3\varepsilon|B'|$. Queremos provar que

$$\left|\frac{e(X,Y)}{|X||Y|} - \frac{e(A',B')}{|A'||B'|}\right| < 3\varepsilon\,.$$

Primeiro, como (A,B) é um par ε-regular e $|X| \geq 3\varepsilon|A'| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon|B|$, temos que

$$\left|\frac{e(X,Y)}{|X||Y|} - \frac{e(A,B)}{|A||B|}\right| < \varepsilon\,.$$

Basta então provar que

$$\left|\frac{e(A,B)}{|A||B|} - \frac{e(A',B')}{|A'||B'|}\right| < 2\varepsilon\,.$$

Por um lado, temos que

$$\frac{e(A',B')}{|A'||B'|} > \frac{e(A,B) - 2(\delta-\varepsilon)\varepsilon|A||B|}{|A'||B'|} \geq \frac{e(A,B) - 2(\delta-\varepsilon)\varepsilon|A||B|}{|A||B|} = \frac{e(A,B)}{|A||B|} - 2(\delta-\varepsilon)\varepsilon\,,$$

o que implica que $\frac{e(A',B')}{|A'||B'|} - \frac{e(A,B)}{|A||B|} > -2(\delta-\varepsilon)\varepsilon > -2\varepsilon$.

Por outro lado, temos

Grau mínimo no subgrafo (A',B')-bipartido:
Dado $u \in A'$, temos que

$$|N(u) \cap B'| \geq (\delta-\varepsilon)|B| - \varepsilon|B| = (\delta - 2\varepsilon)|B| = \left(\frac{e(A,B)}{m^2} - 2\varepsilon\right) m\,.$$

Analogamente, para $v \in B'$ temos que $|N(v) \cap A'| \geq \left(\frac{e(A,B)}{m^2} - 2\varepsilon\right) m$. Logo o subgrafo (A',B')-bipartido tem grau mínimo maior ou igual a $\left(\frac{e(A,B)}{m^2} - 2\varepsilon\right) m$.

□

Lema 1.1.7. *Para todo $\varepsilon > 0$ e para todo inteiro positivo k_0, existe $K_0 = K_0(\varepsilon, k_0)$ tal que a seguinte afirmação é verdadeira: Para todo grafo G, existe uma partição $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$ tal que*

1. $k_0 \leq k \leq K_0$;
2. $|V_0| < K_0$;
3. $|V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k|$;
4. *dentre os $\binom{k}{2}$ pares (V_i, V_j) com $1 \leq i < j$, há menos de $\varepsilon\binom{k}{2}$ deles que não são ε-regulares.*

Lema 1.1.8. *Seja $0 < \varepsilon < 1/7$. Seja ainda G um grafo (V_1,V_2)-bipartido tal que $|V_1| = |V_2| = m \geq 1/\varepsilon$. Suponha que G tem grau mínimo maior ou igual a $7\varepsilon m$, e que para qualquer par de subconjuntos $A \subseteq V_1$ e $B \subseteq V_2$ tal que $|A|, |B| \geq \varepsilon m$, existe uma aresta ligando A a B (isto é, $e(A,B) \geq 1$). Então G é hamiltoniano.*

Definição 1.1.9. Se K é um grafo (X,Y)-bipartido, dizemos que K é (b,f)-*expanding* se, para todo $S \subseteq X$ com $|S| \leq b$ vale que $|N(S)| \geq f|S|$, e, simetricamente, para todo $S \subseteq Y$ com $|S| \leq b$, vale $|N(S)| \geq f|S|$.

Proposição 1.1.10. *Seja t um inteiro positivo. Se K é um grafo bipartido não-vazio e K é $(t,2)$-expanding, então K contém um caminho com $4t$ vértices.*

Demonstração: A ideia é que, dado um caminho em K com $k \leq 4t - 1$ vértices, conseguimos usar a condição de K ser $(t, 2)$-expanding exaustivamente para garantir a existência de um caminho de $k + 1$ vértices em K. Partindo de uma aresta e aplicando esse fato repetidas vezes, obtemos um caminho de $4t$ vértices.

Primeiro, note que, se temos um caminho $Q = v_1 v_2 \dots v_k$ em K e uma aresta $v_1 v_i \in E(K)$, então $\tilde{Q} = v_{i-1} v_{i-2} \dots v_1 v_i v_{i+1} \dots v_{k-1} v_k$ é um caminho em K. Mais ainda, quase todos os vértices em $\tilde{Q}$ tem como vizinhos os mesmos que em Q, possivelmente em ordem reversa. Diremos que $\tilde{Q}$ é uma *transformação simples* de Q relativa a v_k. Se um caminho pode ser obtido de Q a partir de uma sequência de transformações simples relativas a v_k, diremos que tal caminho é uma *transformação* de Q (relativa a v_k). Note que qualquer transformação de Q mantém x_k como extremidade do caminho. Vamos dizer que um vértice v é um *endpoint* de Q relativo a v_k se existe um caminho R transformação de Q tal que R tem v e v_k como extremidades.

Dado um caminho $P_0 = x_1 x_2 \dots x_k$ em K, com $k \leq 4t - 1$, suponha, sem perda de generalidade, que $x_1 \in X$, e queremos provar que K contém um caminho de $k + 1$ vértices. Seja U o conjunto de endpoints de P_0 relativo a x_k. Se $N(U) \not\subseteq V(P_0)$, então encontramos um caminho de $k + 1$ vértices de v_k a um vizinho de um endpoint de P_0. Então, podemos supor que $N(U) \subseteq V(P_0)$. Vejamos que $|U| \geq t$. Com efeito, se $|U| < t$, então $|N(U)| \geq 2|U|$. Como o conjunto $\{x_2\} \cup \bigcup_{x_i \in U \setminus \{x_2\}} \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$ tem no máximo $2|U| - 1$ elementos, existe um vértice $w \in N(U) \setminus (\{x_2\} \cup \bigcup_{x_i \in U \setminus \{x_2\}} \{x_{i-1}, x_{i+1}\})$. Veja que os vizinhos de w em qualquer transformação de P_0 são os mesmos que em P_0. Além disso, os vizinhos de w não pertencem a U. Mas uma aresta que liga w a U dá uma transformação de P_0 que tem um vizinho de w como endpoint, absurdo. Agora, aplique a condição de $(t, 2)$-expanding para um subconjunto de t elementos de U. Como $|V(P_0) \cap Y| = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq 2t - 1$, algum vizinho de U não está em $V(P_0)$, e com isso temos um caminho de $k + 1$ vértices.

□

Lema 1.1.11. *Seja G um grafo que contém exatamente:*

1. *um grafo G_0 bipartido com bipartição (V', V'') tal que cada $v' \in V'$ tem pelo menos $0.15|V''|$ vizinhos em V'', cada $v'' \in V''$ tem pelo menos $0.15|V'|$ vizinhos em V' e, para quaisquer $W' \subseteq V'$, $W'' \subseteq V''$ tais que $|W'| \geq 10^{-6}|V'|$, $|W''| \geq 10^{-6}|V''|$, existe pelo menos uma aresta entre W' e W''.*

2. *uma família $\mathcal{P}'$ de r' caminhos vértice-disjuntos, cada um com as duas extremidades em V', tal que nenhum vértice do interior do caminho pertence a $V' \cup V''$;*

3. *uma família $\mathcal{P}''$ de r'' caminhos vértice-disjuntos, cada um com as duas extremidades em V'', tal que nenhum vértice do interior do caminho pertence a $V' \cup V'' \cup \bigcup_{P' \in \mathcal{P}'} V(P')$;*

Sejam x' um vértice de $V' \setminus \bigcup_{P' \in \mathcal{P}'} V(P')$ e y'' um vértice de $V'' \setminus \bigcup_{P'' \in \mathcal{P}''} V(P'')$. Suponha que

$$r' + r'' \leq 0.01m = 0.01 \min\{|V'|, |V''|\}$$

e

$$r'' - r' = |V''| - |V'|.$$

Então existe um caminho em G que começa em x', termina em y'', passa por todos os vértices de V' e V'' e percorre completamente todos os caminhos de $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$.

Demonstração: Dados $x' \in V' \setminus \bigcup_{P' \in \mathcal{P}'} V(P')$ e $y'' \in V'' \setminus \bigcup_{P'' \in \mathcal{P}''} V(P'')$, queremos construir um caminho $P_{x'y''}$ passando por todos os vértices de V' e V'' e todas as arestas de caminhos em $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$. Faremos isso em três partes: primeiro, um caminho $P_{x'z''}$ saindo de x' e cobrindo todos os caminhos de $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$; segundo, um caminho $P_{z'y''}$ que termina em y'', com uma certa condição para que $P_{z'y''}$ tenha vários “endpoints” além de z'; e finalmente aplicaremos o Lema 1.1.8 nos vértices que sobraram para obter um caminho $P_{z''z'}$, de modo que o caminho final $P_{x'y''}$ consiste apenas de juntar $P_{x'z''}$, $P_{z''z'}$ e $P_{z'y''}$.

Para o caminho $P_{x'z''}$, note que, dado um vértice $v' \in V'$ e outro vértice $v'' \in V''$, podemos construir um caminho de tamanho três de v' para v'' evitando qualquer subconjunto $A' \subset V' \setminus \{v\}$ com $|A'| \leq 0.1m$ e qualquer subconjunto $B'' \subset V'' \setminus \{v''\}$ com $|B''| \leq 0.1m$: basta considerar as vizinhanças de v' e v'' e aplicar 1 para $(N(v') \cap V'') \setminus B''$ e $(N(v'') \cap V') \setminus A'$.

Com isso, basta construir $P_{x'z''}$ de forma gulosa, saindo de x' e percorrendo os caminhos em $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$, gastando caminhos de tamanho três para conectar uma ponta de um caminho de $\mathcal{P}'$ com a ponta de um caminho de $\mathcal{P}''$, e gastando caminhos de tamanho quatro para conectar pontas de dois caminhos em $\mathcal{P}'$ ou dois caminhos de $\mathcal{P}''$ (é só primeiro ir para o outro lado e então usar um caminho de tamanho três). Desse modo, conseguimos obter um caminho $P_{x'z''}$ que começa em x', termina em $z'' \in V''$, passa por todas as arestas dos caminhos de $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$, e que satisfaz

$$|V(P_{x'z''}) \cap V'| \leq 1 + 3(r' + r'') \leq 0.04m\,,$$
$$|V(P_{x'z''}) \cap V'| \leq 1 + 3(r' + r'') \leq 0.04m\,.$$

Para $P_{z'y''}$, comece de y'' e percorra um caminho até um $z_0' \in V'$, digamos $P_{z_0'y''}$, de modo que $|V(P_{z_0'y''})| = 2\lfloor 0.03m \rfloor - 2$. Daí sejam $P = V' \setminus (V(P_{x'z''}) \cup V(P_{z_0'y''}))$ e $Q = V'' \cap V(P_{z_0'y''})$.

Como $k := |P| \geq |V'| - 0.07m$ e cada vértice de Q manda $0.15m$ arestas para V', então cada vértice de Q manda pelo menos $0.08m$ arestas em P, logo

$$e(P, Q) \geq 0.08m|Q| \geq 0.08m \cdot 0.02m = 0.0016m^2\,.$$

Seja $\tilde{x} = \#\{v \in P : |N(v) \cap Q| > 0.001m\}$. Então

$$\begin{aligned}
&0.0016m^2 \leq e(P, Q) \leq (k - \tilde{x})0.001m + \tilde{x} \cdot 0.03m \implies \\
&\;0.0016m \leq (k - \tilde{x})0.001 + \tilde{x} \cdot 0.03m \iff \\
&\iff 16m \leq 10(k - \tilde{x}) + 300\tilde{x} = 10k + 290\tilde{x} \implies \\
&\implies 290\tilde{x} \geq 16m - 10k\,.
\end{aligned}$$

Note que $|V'| = |V''| + r' + r'' \leq |V''| + 0.01m$, donde $|V'| \leq 1.01m$, e daí $k = |P| \leq |V'| - |V(P_{z_0'y''})| \leq 1.01m - 0.02m < m$. Logo ficamos com

$$\begin{aligned}
290\tilde{x} &\geq 16m - 10k \geq 16m - 10m = 6m \\
&\implies \tilde{x} \geq \frac{6m}{290} > 0.02m\,.
\end{aligned}$$

Assim, por 1, existe uma aresta entre $\{v \in P : |N(v) \cap Q| > 0.001m\}$ e $(N(z_0') \cap V'') \setminus (V(P_{x'z''}) \cup V(P_{z_0'y''}))$, logo o caminho $P_{z_0'y''}$ pode ser estendido para um caminho $P_{z'y''}$ tal que $|V(P_{z'y''})| = 2\lfloor 0.03m \rfloor$ e z' tem pelo menos $0.001m$ vizinhos em $V(P_{z'y''}) \cap V''$. Cada vizinho desses dá um "endpoint", isto é, existe $S' \subset V(P_{z'y''})$, $|S'| \geq 0.001m$, tal que para todo $s' \in S'$ existe um caminho começando em y'' e terminando em s', e que percorre os mesmos vértices de $P_{z'y''}$.

Agora, basta notar que o subgrafo bipartido induzido por $V' \setminus (V(P_{x'z''}) \cup V(P_{z'y''}))$ e $V'' \setminus (V(P_{x'z''}) \cup V(P_{z'y''}))$ é $(10^{-5}, 0.07)$-uniforme, logo pelo Lema 1.1.8, existe um circuito hamiltoniano C percorrendo tais vértices.

Para cada vizinho de z'' em C, existe um caminho $P_{z''t''}$ que percorre exatamente os vértices de C além de z''. Em outras palavras, existe um conjunto $T'' \subset V''$ tal que $|T''| \geq 0.07m$ e para cada $t'' \in T''$ existe um caminho $P_{z''t''}$ de z'' a t'' com $V(P_{z''t''}) = \{z''\} \cup V(C)$.

Por 1, existe pelo menos uma aresta entre S' e T'', digamos $\{s', t''\}$. Para tal s', existe um caminho $P_{s'y''}$ de s' a y'' que percorre os mesmos vértices de $P_{z'y''}$. Concatenando os caminhos $P_{x'z''}$, $P_{z''t''}$, a aresta $\{t'', s'\}$ e o caminho $P_{s'y''}$, obtemos o caminho desejado.

$\square$

Lema 1.1.12. *Dada qualquer coloração das arestas do grafo completo K_n em vermelho e azul, existem dois circuitos C^r e C^b em K_n, tais que as arestas de C^r são vermelhas, as arestas de C^b são azuis, $V(C^r) \cup V(C^b) = V(K_n)$ e $|V(C^r) \cap V(C^b)| \leq 1$.*

Demonstração. Tome um maior caminho $P = u_1 \dots u_k v_1 \dots v_l$ tal que cada aresta $u_i u_{i+1}$ é azul e $u_k v_1$, $v_1 v_2, \dots, v_{l-1} v_l$ são vermelhas. Vamos provar que P é um caminho hamiltoniano. De fato, se $w \notin V(P)$, então considere a aresta wu_k. Suponha, sem perda de generalidade, que wu_k é azul. Então o caminho $\tilde{P} = u_1 \dots u_k w v_1 \dots v_l$ é maior que P e é composto de um caminho azul seguido de um caminho vermelho, absurdo. Logo P é caminho hamiltoniano.

Suponha, sem perda de generalidade, que $v_l u_1$ é vermelho (se $P = u_1 \dots u_k$, troque v_l por u_k). Suponha também, sem perda de generalidade, que $u_1 u_k$ é azul. Se $l = 0$, isto é, $P = u_1 \dots u_k$ com $u_1 u_k$ azul, então P é um circuito hamiltoniano azul, e temos partição tomando C^r vazio. Se $l = 1$, então temos partição de $V(K_n)$ em um circuito azul e um único vértice como circuito vermelho. Suponha então $l \geq 2$. Caso $v_1 v_l$ seja vermelho, temos partição com $C^b = u_1 \dots u_k$ e $C^r = v_1 \dots v_l$. Caso $v_1 u_1$ seja vermelho, tome $C^b = u_1 \dots u_k$ e $C^r = v_1 \dots v_l u_1$. Caso $u_k v_l$ seja vermelho, tome $C^b = u_1 \dots u_k$ e $C^r = u_k v_1 \dots v_l$. Podemos supor, então, que $u_k v_l$, $v_l v_1$ e $v_1 u_1$ são azuis. Mas então $Q = u_k v_l v_1 u_1 \dots u_k$ é um circuito azul. Troque P por $v_1 u_1 \dots u_k v_l \dots v_2$ e repita o argumento. Como l diminui de dois em dois a cada passo, eventualmente caímos em $l = 0$ ou $l = 1$, o que encerra a prova. □

Lema 1.1.13. *Dada uma coloração das arestas de K_n em vermelho e azul, suponha que exista uma partição dos vértices de K_n em três conjuntos V_1, V_2 e V_3 tal que:*

(i) *todas as arestas entre V_1 e V_2 são azuis;*

(ii) $\min\{|V_1|, |V_2|\} \geq 5 + 2|V_3|$.

Então o conjunto de vértices de K_n pode ser particionado como $V(K_n) = V(C^r) \cup V(C^b)$, onde C^r é um circuito com todas as arestas vermelhas e C^b é um circuito com todas as arestas azuis.

Demonstração. Primeiramente, vamos construir subconjuntos $V_1' \subseteq V_1$, $V_2' \subseteq V_2$ e $V_3' \subseteq V_3$ de modo que qualquer vértice de V_3' manda apenas arestas vermelhas para $V_1' \cup V_2'$, e de modo que $V_4' := V(K_n) \setminus (V_1' \cup V_2' \cup V_3')$ contém um caminho hamiltoniano azul $x_1 \dots x_m$ com $x_1 \in V_2$ e $x_m \in V_1$. Conseguiremos fazer isso de modo que $\min\{|V_1'|, |V_2'|\} \geq 5 + |V_3'|$.

Começando com $V_1(0) = V_1$, $V_2(0) = V_2$ e $V_3(0) = V_3$, vamos definir recursivamente cadeias descendentes de conjuntos $V_1(k)$, $V_2(k)$ e $V_3(k)$ para k de zero até l tal que $(V_1', V_2', V_3', V_4') = (V_1(l), V_2(l), V_3(l), V(K_n) \setminus (V_1(l) \cup V_2(l) \cup V_3(l)))$ satisfaça as condições do parágrafo anterior.

Suponha construídos $V_1(k)$, $V_2(k)$ e $V_3(k)$ para um $k \geq 0$, e que ainda existe pelo menos uma aresta azul entre $V_3(k)$ e $V_1(k) \cup V_2(k)$. Então definimos $V_i(k+1)$ da seguinte forma:

Caso 1: Se existe $w \in V_3(k)$ tal que w tem pelo menos dois vizinhos azuis u_1 e u_2 em $V_1(k)$, tome $v \in V_2(k)$ arbitrário e faça $V_1(k+1) = V_1(k) \setminus \{u_1, u_2\}$, $V_2(k+1) = V_2(k) \setminus \{v\}$ e $V_3(k+1) = V_3(k) \setminus \{w\}$.

Note que, se $x_{1k} x_{2k} \dots x_{m_k k}$ é um caminho azul com $x_{1k} \in V_2$ e $x_{m_k k} \in V_1$, então $x_{1k} \dots x_{m_k k} v u_1 w u_2$ é um caminho azul terminando em $u_2 \in V_1$.

Caso 2: Se existe $w \in V_3(k)$ tal que w tem pelo menos dois vizinhos azuis v_1 e v_2 em $V_2(k)$, tome, analogamente ao caso anterior, $u \in V_1(k)$ arbitrário e faça $V_1(k+1) = V_1(k) \setminus \{u\}$, $V_2(k+1) = V_2(k) \setminus \{v_1, v_2\}$ e $V_3(k+1) = V_3(k) \setminus \{w\}$.

Note que, se $x_{1k} x_{2k} \dots x_{m_k k}$ é um caminho azul com $x_{1k} \in V_2$ e $x_{m_k k} \in V_1$, então $x_{1k} \dots x_{m_k k} v_2 w v_1 u$ é um caminho azul terminando em $u \in V_1$.

Se nenhum dos dois casos acima se aplica, então todo vértice $w \in V_3(k)$ tem no máximo um vizinho azul em $V_1(k)$ e no máximo um vizinho azul em $V_2(k)$. Nesse último caso, tiramos os vizinhos azuis ao invés do vértice em $V_3(k)$:

Caso 3: Se existe $w \in V_3(k)$ tal que w tem um único vizinho azul em $V_1(k)$ e/ou um único vizinho azul em $V_2(k)$, tome $u \in V_1(k)$ e $v \in V_2(k)$ de modo que $\{u, v\}$ contém esses possíveis dois vizinhos azuis, e faça $V_1(k+1) = V_1(k) \setminus \{u\}$, $V_2(k+1) = V_2(k+1) \setminus \{v\}$ e $V_3(k+1) = V_3(k)$.

Note que, se $x_{1k}x_{2k} \dots x_{m_k k}$ é um caminho azul com $x_{1k} \in V_2$ e $x_{m_k k} \in V_1$, então $x_{1k} \dots x_{m_k k} vu$ é um caminho azul terminando em $u \in V_1$.

Como, a cada passo da construção, o número de vértices em $V_3(k)$ que tem algum vizinho azul em $V_1(k) \cup V_2(k)$ diminui em pelo menos um, o roteiro acima para em $l \leq |V_3|$ passos. Sejam então $V_1' = V_1(l)$, $V_2' = V_2(l)$, $V_3' = V_3(l)$ e $V_4' = V(K_n) \setminus (V_1(l) \cup V_2(l) \cup V_3(l))$, com V_3' e V_4' possivelmente vazios. Como o processo parou, todas as arestas entre V_3' e $V_1' \cup V_2'$ são vermelhas. Como $V_1' \subseteq V_1$ e $V_2' \subseteq V_2$, temos que todas as arestas entre V_1' e V_2' são azuis. Como $|V_1(k+1)| - |V_3(k+1)| \geq |V_1(k)| - |V_3(k)| - 1$, temos que

$$|V_1'| - |V_3'| \geq |V_1| - |V_3| - l \geq |V_1| - 2|V_3| \geq 5\,,$$

donde $|V_1'| \geq 5 + |V_3'|$ (e, analogamente, $|V_2'| \geq 5 + |V_3'|$). Note também que foi construído ao longo do processo um caminho $x_1 \dots x_m$ azul passando por todos os vértices de V_4', tal que todas as arestas de x_1 a V_1' e todas as arestas de x_m a V_2' são azuis (em particular, $x_1 \in V_2$ pois, em todos os casos, o primeiro vértice adicionado ao caminho é um vértice de V_2).

Seja $n_i = |V_i'|$ para $i = 1, 2, 3$, e suponha, sem perda de generalidade, que $n_1 \geq n_2$. A partir daqui, o argumento se separa de acordo com os casos abaixo. Por exemplo, se $n_1 - n_2 = n_3$, então podemos separar $W_1' \subseteq V_1'$ com $|W_i'| = n_1 - n_2$ e tomar C^r como sendo um circuito hamiltoniano vermelho no subgrafo bipartido completo entre V_3' e W_1', e C^b como um circuito azul percorrendo primeiro o caminho $x_1 \dots x_m$ e alternando entre vértices de V_2' e $V_1' \setminus W_1'$. De forma geral, temos:

Caso 1. $n_1 - n_2 \leq n_3$.
Se $n_3 - n_1 + n_2$ é par, então tome $W_1' \subseteq V_1'$ e $W_2' \subseteq V_2'$ com $|W_1'| = n_1 - n_2 + \frac{n_3 - n_1 + n_2}{2}$ e $|W_2'| = \frac{n_3 - n_1 + n_2}{2}$. Como $|W_1' \cup W_2'| = n_3 = |V_3'|$, existe um circuito vermelho no subgrafo bipartido completo vermelho entre V_3' e $W_1' \cup W_2'$, e um circuito azul cobrindo o restante dos vértices (percorra o caminho $x_1 \dots x_m$ primeiro e alterne entre vértices de $V_2' \setminus W_2'$ e $V_1' \setminus W_1'$).

Por outro lado, se $n_3 - n_1 + n_2$ é ímpar, então consideramos o seguinte argumento. Considere uma aresta $e = \{u_1, u_2\} \subseteq V_1'$ qualquer (note que $n_1 \geq 5 > 2$, logo e existe). Se e é azul, então fazemos o argumento anterior para $n_1 - 1$ no lugar de n_1 (tomando $W_1' \subseteq V_1' \setminus \{u_1, u_2\}$) e, para o circuito azul, começamos pela aresta u_1u_2 e então percorremos o caminho $x_1 \dots x_m$ e alternamos entre V_2' e V_1'. Caso contrário, se e é vermelha, então, para $n_3 \geq 2$, tome $e \subseteq W_1' \subseteq V_1'$ e $W_2' \subseteq V_2'$ com $|W_1'| = (n_1 + 1) - n_2 + \frac{n_3 - (n_1+1) + n_2}{2}$ e $|W_2'| = \frac{n_3 - n_1 + n_2 + 1}{2}$ (é possível tomar $e \subseteq W_1'$ pois $|W_1'| = \frac{n_1 - n_2 + n_3 + 1}{2} \geq \frac{n_3 + 1}{2} > 1$). Note que $|V_1' \setminus W_1'| = |V_2' \setminus W_2'| = \frac{n_1 + n_2 - n_3 - 1}{2}$. Logo existe um circuito azul cobrindo $(V_1' \setminus W_1') \cup (V_2' \setminus W_2') \cup V_4'$. Para construir um circuito vermelho C^r com $V(C^r) = V_3' \cup W_1' \cup W_2'$, basta começar por u_1u_2 e alternar entre V_3' e $W_1' \cup W_2'$. Se $n_3 = 1$, então $n_1 = n_2$ e faça C^r como o único vértice em V_3' e C^b começando pelo caminho $x_1 \dots x_m$ e alternando entre V_2' e V_1'.

Caso 2. $n_1 - n_2 > n_3$.
Aqui, vamos considerar os tamanhos dos circuitos vermelhos contidos em V_1'.

Primeiro, suponha que V_1' contém um circuito vermelho C_1' de tamanho $n_1 - n_2$. Então note que podemos tomar C^b como sendo um circuito com $V(C^b) = (V_1' \setminus V(C_1')) \cup V_2' \cup V_4'$, e C^r como um circuito começando de um vértice de C_1', alternando entre $V(C_1')$ e V_3' até percorrer todos os vértices de V_3', e terminando de percorrer os vértices de C_1' até fechar o circuito.

Agora, suponha que todos os circuitos vermelhos em V_1' têm tamanho menor que $n_1 - n_2$. Pelo Lema 1.1.12 aplicado no grafo completo nos vértices em V_1', existem um circuito vermelho $\tilde{C}^r$ e um caminho azul P^b tal que $V_1' = V(\tilde{C}^r) \cup V(P^b)$ é uma partição.

□

Fato 1.1.14. *Seja k inteiro positivo, e $n \geq 120k^3$. Considere uma coloração arbitrária das arestas de K_n em vermelho e azul. Suponha que não existe partição de $V(K_n)$ em V_1, V_2 e V_3 satisfazendo as condições do Lema 1.1.13. Então, se $S_1, \ldots, S_l$, $T_1, \ldots, T_l \subseteq V(K_n)$ são conjuntos disjuntos com $l \geq 2$, onde $|S_i|, |T_i| \geq n/2k$ para $i \in \{1, \ldots, l\}$, existem caminhos vermelhos $P_1, \ldots, P_l$, vértice-disjuntos, cada um de comprimento no máximo $10k$, tal que cada P_i tem um extremo em S_i e outro em T_i.*

Demonstração: Vamos provar que os caminhos P_i existem mostrando que podemos escolhê-los um por um, começando por P_1, e a cada passo exibindo um P_j que é vértice-disjunto aos anteriores, $P_1, \ldots, P_{j-1}$.

Seja então $j \in \{1, \ldots, l\}$ e suponha já construídos os caminhos P_i, $1 \leq i < j$. Seja R o subgrafo de K_n com $V(R) = V(K_n) \setminus W$, onde $W = \bigcup_{i=1}^{j-1} V(P_i)$, dado pelas arestas vermelhas. Para cada $r \in \{0, \ldots, 5k\}$, defina

$$N_r = \{v \in V(K_n) \setminus W : d_R(v, S_j \setminus W) = r\},$$
$$N'_r = \{v \in V(K_n) \setminus W : d_R(v, T_j \setminus W) = r\}.$$

Se $(\bigcup_{r=0}^{5k} N_r) \cap (\bigcup_{r=0}^{5k} N'_r) \neq \emptyset$, então temos um caminho de tamanho no máximo $10k$ ligando S_j a T_j, e tomamos P_j para ser esse caminho. Suponha então que $(\bigcup_{r=0}^{5k} N_r) \cap (\bigcup_{r=0}^{5k} N'_r) = \emptyset$. Portanto, $|\bigcup_{r=1}^{5k} N_r| \leq n/2$ ou $|\bigcup_{r=1}^{5k} N'_r| \leq n/2$. Suponha, sem perda de generalidade, que $|\bigcup_{r=1}^{5k} N_r| \leq n/2$. Como os N_r são disjuntos, então existe r_0 tal que $|N_{r_0}| \leq n/10k$. Agora, sejam $V_3 = N_{r_0} \cup W$, $V_1 = (S_j \setminus W) \cup \bigcup_{r=1}^{r_0-1} N_r$ e $V_2 = V(K_n) \setminus (V_1 \cup V_2)$. Vamos provar que V_1, V_2 e V_3 satisfazem as condições do Lema 1.1.13. Note que o par (V_1, V_2) induz um grafo bipartido azul completo. Vamos verificar agora que $|V_1| \geq 5 + 2|V_3|$. Primeiro,

$$|V_1| \geq |S_j \setminus W| \geq |S_j| - |W| \geq \frac{n}{2k} - (l-1)(10k+1).$$

Por outro lado, temos que

$$5 + 2|V_3| = 5 + 2|N_{r_0} \cup W| \leq 5 + 2\left(\frac{n}{10k} + (l-1)(10k+1)\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{n}{2k} - (l-1)(10k+1) \geq 5 + 2\left(\frac{n}{10k} + (l-1)(10k+1)\right) &\iff \\ \frac{n}{2k} - \frac{n}{5k} \geq 5 + 3(l-1)(10k+1) &\iff \\ \frac{3n}{10k} \geq 5 + 3(l-1)(10k+1). & \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como $(l-1)(10k+1) \leq l \cdot 10k \leq 10k^2$ e $\frac{3n}{10k} \geq 5 + 3 \cdot 10k^2 \Leftrightarrow 3n \geq 50k + 300k^3 \Leftrightarrow n \geq \frac{50k}{3} + 100k^3$ vale quando $n \geq 120k^3$, temos que $|V_1| \geq 5 + 2|V_3|$. Como $|V_2| \geq |T_j \setminus W|$, temos também que $|V_2| \geq 5 + 2|V_3|$. Logo V_1, V_2 e V_3 particionam $V(K_n)$ satisfazendo as condições do Lema 1.1.13, contradição. □

1.2 Demonstração do Teorema 1.1.4

Sejam $\varepsilon = 10^{-60}$ e $k_0 = 2/\varepsilon$. Seja $K_0 = K_0(\varepsilon, k_0)$ a constante garantida pelo Lema da Regularidade de Szemerédi. Vamos provar que o Teorema 1.1.4 é verdade para $n_0 = 120K_0^3$.

Seja $n \geq n_0$ e considere uma coloração arbitrária das arestas de K_n em vermelho e azul. Vamos provar que existe uma partição de $V(K_n)$ em dois circuitos monocromáticos, um vermelho e outro azul.

Seja R o grafo induzido pelas arestas vermelhas e B o induzido pelas arestas azuis. Vamos supor, sem perda de generalidade, que o número de arestas vermelhas é maior ou igual ao número de arestas azuis, ou seja, que pelo menos metade das arestas são vermelhas, i.e. $E(R) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2}$. Se a coloração das arestas de K_n satisfaz as hipóteses do Lema 1.1.13, então existe a partição desejada e não há mais nada o que fazer. Logo, podemos supor que isso não ocorre, de modo que podemos usar o Fato 1.1.14 para $k \leq K_0$.

Começamos aplicando o Lema da Regularidade de Szemerédi para $G = R$, obtendo uma partição $(\varepsilon, \hat{k}, R)$-regular $\hat{\Pi} = (\hat{V}_0, \hat{V}_1, \ldots, \hat{V}_{\hat{k}})$, com $k_0 \leq \hat{k} \leq K_0$. Lembre que um par (ε, R)-regular é também (ε, B)-regular; vamos dizer que tais pares são *regulares*. Sobre $\hat{\Pi}$, temos que:

$$|\hat{V}_0| < K_0 \leq \frac{n}{120K_0^2} < \varepsilon n\,;$$
$$\left|\left\{\{i,j\} \in \binom{[\hat{k}]}{2} : (\hat{V}_i, \hat{V}_j) \text{ não é regular}\right\}\right| \leq \varepsilon\binom{\hat{k}}{2} \leq \varepsilon\frac{\hat{k}^2}{2}\,.$$

Apesar de $\hat{\Pi}$ ter poucos pares não-regulares, podem haver $\hat{V}_i$'s que são não-regulares com, por exemplo, todos os outros $\hat{V}_j$'s. Vamos tirar esses $\hat{V}_i$'s que são não-regulares com muitos outros $\hat{V}_j$'s da partição e colocá-los em $\hat{V}_0$. Mais especificamente, seja $\bar{V}_0$ o conjunto formado pela união de $\hat{V}_0$ com os $\hat{V}_i$ que são não-regulares com mais de $2\varepsilon^{1/2}(1-\varepsilon^{1/2})\hat{k}$ outros $\hat{V}_j$, e sejam $\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_k$ os $\hat{V}_i$ que sobraram. Temos então uma partição $\bar{\Pi} = (\bar{V}_0, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_k)$ com $k \leq \hat{k}$. Como a quantidade de pares não-regulares é menor que $\varepsilon\hat{k}^2/2$, a quantidade de $\hat{V}_i$'s que entraram em $\bar{V}_0$ é no máximo

$$\frac{\varepsilon\hat{k}^2}{2\varepsilon^{1/2}(1-\varepsilon^{1/2})\hat{k}} = \frac{\varepsilon^{1/2}\hat{k}}{2(1-\varepsilon^{1/2})} = \varepsilon^{1/2}\hat{k}\,.$$

Logo $k \geq (1-\varepsilon^{1/2})\hat{k} > \frac{\hat{k}}{2} \geq 1/\varepsilon$, e cada $\bar{V}_i$ é não-regular com no máximo $2\varepsilon^{1/2}(1-\varepsilon^{1/2})\hat{k} < 2\varepsilon^{1/2}k$ outros $\bar{V}_j$. Por fim, $|\bar{V}_0| \leq \varepsilon n + \varepsilon^{1/2}\hat{k}\frac{n}{\hat{k}} < 2\varepsilon^{1/2}n$.

Vamos colorir os pares $\{i,j\}$, $1 \leq i < j \leq k$ em três cores de acordo com o par $(\bar{V}_i, \bar{V}_j)$. Diremos que $\{i,j\}$ é:

- preto, se $(\bar{V}_i, \bar{V}_j)$ é não-regular;
- vermelho, se $(\bar{V}_i, \bar{V}_j)$ é regular com $e_R(\bar{V}_i, \bar{V}_j) \geq 0.2|\bar{V}_i||\bar{V}_j|$;
- azul, se $(\bar{V}_i, \bar{V}_j)$ é regular com $e_B(\bar{V}_i, \bar{V}_j) > 0.8|\bar{V}_i||\bar{V}_j|$.

Seja Γ_R o grafo reduzido dado pelos pares vermelhos, isto é, $V(\Gamma_R) = \{1, \ldots, k\}$ e $E(\Gamma_R) = \{\{i,j\} \in \binom{[k]}{2} : \{i,j\} \text{ é vermelho}\}$. Vamos provar que $e(\Gamma_R) \geq 0.185k^2$. Como estamos supondo $e(R) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2}$, vamos limitar por cima a quantidade de arestas em R de acordo com a partição $\bar{\Pi}$. Contando arestas vermelhas, temos então:

Dentro de $\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_k$: $\leq k\binom{n/k}{2} < \frac{n^2}{2k} < \frac{\varepsilon}{2}n^2\,;$

Dentro de $\bar{V}_0$: $\leq \binom{|\bar{V}_0|}{2} \leq \binom{2\varepsilon^{1/2}n}{2} < 2\varepsilon n^2\,;$

Entre $\bar{V}_0$ e $\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_k$: $\leq |\bar{V}_0||\bar{V}_1 \cup \cdots \cup \bar{V}_k| \leq 2\varepsilon^{1/2}n \cdot n = 2\varepsilon^{1/2}n^2\,;$

Em pares não-regulares: $\leq 2\varepsilon k^2 \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 = \varepsilon n^2\,;$

Em pares azuis: $\leq \left[\binom{k}{2} - e(\Gamma_R)\right] \cdot 0.2 \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 < 0.2\frac{n^2}{2} - \frac{e(\Gamma_R)}{5}\left(\frac{n}{k}\right)^2 = \frac{n^2}{10} - \frac{e(\Gamma_R)}{5}\left(\frac{n}{k}\right)^2\,;$

Em pares vermelhos: $\leq e(\Gamma_R)\left(\frac{n}{k}\right)^2.$

Logo

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon + 2\varepsilon^{1/2} + \varepsilon\right) n^2 + \frac{n^2}{10} + \frac{4}{5} e(\Gamma_R) \left(\frac{n}{k}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} \\
\Longrightarrow\ &\frac{4}{5} e(\Gamma_R) \left(\frac{n}{k}\right)^2 \geq n^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} - 3\varepsilon^{1/2}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, $e(\Gamma_R) \geq \frac{5}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} - 3\varepsilon^{1/2}\right) k^2 > 0.185 k^2$.

Observação 1.2.1. Uma observação.

Corolário 1.2.2 (Nome do corolário)**.** *Meu primeiro corolário.*

Demonstração: Segue trivialmente do Teorema **??**. □

Axioma 1.2.3. *Todo subconjunto de* $\mathbb{R}$*, que é não vazio e limitado superiormente, admite supremo.*

Para mais detalhes veja [1, p. nn] e [2]

Apêndice A

Apêndice

Referências Bibliográficas

Livros

[1] Sobrenome, Nome. *Título de Livro*, Editora, Edição, Ano.

Artigos e periódicos

[2] Sobrenome, Nome. *Título de Artigo referência*, Revista, **volume** (ano), pagini–pagfin.