



BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Nome completo

Meu título

São Paulo

nº Semestre de xxxx

Nome completo

Meu título

Monografia apresentada à disciplina
MAT-0148 — Introdução ao Trabalho Científico,
Departamento de Matemática,
Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo.

Área de Concentração: ÁREA

Orientador: Meu orientador – Instituição

São Paulo

nº Semestre de xxxx



O conteúdo deste trabalho é publicado sob a **Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional – CC BY 4.0**

FOLHA DE AVALIAÇÃO

Aluno: Nome completo
Título: Meu título
Data: nº Semestre de xxxx

BANCA EXAMINADORA

Meu orientador – Instituição (Orientador)
Professor 1 – Instituição
Professor 2 – Instituição

*Pequeno texto em que o autor presta homenagem
ou dedica seu trabalho a alguém importante em sua vida.*

E outras homenagens aqui, não ligadas às acima.

AGRADECIMENTOS

Texto em que o autor faz agradecimentos dirigidos àqueles que contribuíram de maneira relevante à elaboração do trabalho.

Esta contribuição pode ser através do fornecimento de material, compartilhamento de conhecimento ou pelo apoio recebido durante a elaboração do trabalho.

Agradeço a quem sou muito grato.

*Aqui o autor apresenta uma citação
relacionada com a matéria de seu trabalho,
seguida de indicação de autoria.
A epígrafe é uma citação direta e,
portanto, a fonte deve constar na lista de Referências.*

RESUMO

SOBRENOME, N. Meu título. xxxx. 11 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, nº Semestre de xxxx.

Um resumo: o que vai abordar no trabalho em poucas palavras e algumas referências.

Palavras-chave: palavra-chave 1. palavra-chave 2. (até 5 palavras-chave)

ABSTRACT

SOBRENOME, N. My title. xxxx. 11 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, n^o Semestre de xxxx.

Uma tradução do que ficou no resumo.

Keywords: keyword 1. keyword 2. (up to 5 keywords)

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFT	Transformada contínua de Fourier (<i>Continuous Fourier Transform</i>)
DFT	Transformada discreta de Fourier (<i>Discrete Fourier Transform</i>)
EIIP	Potencial de interação elétron-íon (<i>Electron-Ion Interaction Potentials</i>)
STFT	Transformada de Fourier de tempo reduzido (<i>Short-Time Fourier Transform</i>)
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
URL	Localizador Uniforme de Recursos (<i>Uniform Resource Locator</i>)
IME	Instituto de Matemática e Estatística
USP	Universidade de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

ω	Frequência angular
ψ	Função de análise <i>wavelet</i>
Ψ	Transformada de Fourier de ψ

Sumário

1	Meu Primeiro Capítulo	1
1.1	Minha Primeira Seção	1
A	Apêndice	9

Capítulo 1

Meu Primeiro Capítulo

Um pouco de texto...

1.1 Minha Primeira Seção

Definição 1.1.1 (Nome do objeto). Minha primeira definição.

Proposição 1.1.2 (Nome da proposição). Minha primeira proposição.

Proposição 1.1.3 (Nome do lema). Meu primeiro lema.

Teorema 1.1.4. Existe n_0 natural tal que, para todo $n \geq n_0$, a seguinte afirmação é verdadeira: para qualquer coloração das arestas de K_n em vermelho e azul, existe uma partição do conjunto dos vértices de K_n em dois circuitos monocromáticos, um vermelho e outro azul.

Definição 1.1.5. Dado um grafo G e $A, B \subseteq V(G)$ tais que $A \cap B = \emptyset$, dizemos que (A, B) é um par (ε, G) -regular (onde $\varepsilon > 0$), ou simplesmente ε -regular, se para todo $X \subseteq A, Y \subseteq B$ com $|X| \geq \varepsilon|A|, |Y| \geq \varepsilon|B|$, temos

$$\left| \frac{e(X, Y)}{|X||Y|} - \frac{e(A, B)}{|A||B|} \right| < \varepsilon.$$

Proposição 1.1.6. Se $0 < \varepsilon < 0.1$, e (A, B) é um par ε -regular em um grafo G com $|A| = |B| = m$, então existem $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$, com $|A'|, |B'| \geq (1 - \varepsilon)m$, tais que

- (A', B') é (3ε) -regular;
- no subgrafo (A', B') -bipartido, todo vértice tem grau maior ou igual a $\left(\frac{e(A, B)}{m^2} - 2\varepsilon \right) m$.

Mais ainda, é possível escolher A' e B' de modo que $|A'| = |B'|$.

Demonstração: Seja $\delta = \frac{e(A, B)}{m^2}$ a densidade do par (A, B) e $X_1 = \{u \in A : |N(u) \cap B| < (\delta - \varepsilon)|B|\}$. Se $|X_1| \geq \varepsilon|A|$, então para $X = X_1$ e $Y = B$ teríamos

$$\left| \frac{e(X, Y)}{|X||Y|} - \frac{e(A, B)}{|A||B|} \right| > \varepsilon,$$

absurdo. Logo $|X_1| < \varepsilon|A|$. Analogamente, se definirmos $Y_1 = \{v \in B : |N(v) \cap A| < (\delta - \varepsilon)|A|\}$, então $|Y_1| < \varepsilon|B|$. Suponha, sem perda de generalidade, que $|X_1| \geq |Y_1|$. Então tome $A' = A \setminus X_1$ e $B' \subseteq B \setminus Y_1$ tal que $|A'| = |B'|$. A seguir, verificamos as propriedades de (A', B') :

(A', B') é (3ε) -REGULAR:

Sejam $X \subseteq A'$ e $Y \subseteq B'$ tais que $|X| \geq 3\varepsilon|A'|$ e $|Y| \geq 3\varepsilon|B'|$. Queremos provar que

$$\left| \frac{e(X, Y)}{|X||Y|} - \frac{e(A', B')}{|A'||B'|} \right| < 3\varepsilon.$$

Primeiro, como (A, B) é um par ε -regular e $|X| \geq 3\varepsilon|A'| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon|B|$, temos que

$$\left| \frac{e(X, Y)}{|X||Y|} - \frac{e(A, B)}{|A||B|} \right| < \varepsilon.$$

Basta então provar que

$$\left| \frac{e(A, B)}{|A||B|} - \frac{e(A', B')}{|A'||B'|} \right| < 2\varepsilon.$$

Por um lado, temos que

$$\frac{e(A', B')}{|A'||B'|} > \frac{e(A, B) - 2(\delta - \varepsilon)\varepsilon|A||B|}{|A'||B'|} \geq \frac{e(A, B) - 2(\delta - \varepsilon)\varepsilon|A||B|}{|A||B|} = \frac{e(A, B)}{|A||B|} - 2(\delta - \varepsilon)\varepsilon,$$

o que implica que $\frac{e(A', B')}{|A'||B'|} - \frac{e(A, B)}{|A||B|} > -2(\delta - \varepsilon)\varepsilon > -2\varepsilon$.

Por outro lado, temos

GRAU MÍNIMO NO SUBGRAFO (A', B') -BIPARTIDO:

Dado $u \in A'$, temos que

$$|N(u) \cap B'| \geq (\delta - \varepsilon)|B| - \varepsilon|B| = (\delta - 2\varepsilon)|B| = \left(\frac{e(A, B)}{m^2} - 2\varepsilon \right) m.$$

Analogamente, para $v \in B'$ temos que $|N(v) \cap A'| \geq \left(\frac{e(A, B)}{m^2} - 2\varepsilon \right) m$. Logo o subgrafo (A', B') -bipartido tem grau mínimo maior ou igual a $\left(\frac{e(A, B)}{m^2} - 2\varepsilon \right) m$. □

Lema 1.1.7. Para todo $\varepsilon > 0$ e para todo inteiro positivo k_0 , existe $K_0 = K_0(\varepsilon, k_0)$ tal que a seguinte afirmação é verdadeira: Para todo grafo G , existe uma partição $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$ tal que

1. $k_0 \leq k \leq K_0$;
2. $|V_0| \leq K_0$;
3. $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_k|$;
4. dentre os $\binom{k}{2}$ pares (V_i, V_j) com $1 \leq i < j$, há menos de $\varepsilon \binom{k}{2}$ deles que não são ε -regulares.

Lema 1.1.8. Seja $0 < \varepsilon < 1/7$. Seja ainda G um grafo (V_1, V_2) -bipartido tal que $|V_1| = |V_2| = m \geq 1/\varepsilon$. Suponha que G tem grau mínimo maior ou igual a $7\varepsilon m$, e que para qualquer par de subconjuntos $A \subseteq V_1$ e $B \subseteq V_2$ tal que $|A|, |B| \geq \varepsilon m$, existe uma aresta ligando A a B (isto é, $e(A, B) \geq 1$). Então G é hamiltoniano.

Definição 1.1.9. Se K é um grafo (X, Y) -bipartido, dizemos que K é (b, f) -expanding se, para todo $S \subseteq X$ com $|S| \leq b$ vale que $|N(S)| \geq f|S|$, e, simetricamente, para todo $S \subseteq Y$ com $|S| \leq b$, vale $|N(S)| \geq f|S|$.

Proposição 1.1.10. Seja t um inteiro positivo. Se K é um grafo bipartido não-vazio e K é $(t, 2)$ -expanding, então K contém um caminho com $4t$ vértices.

Demonstração: A ideia é que, dado um caminho em K com $k \leq 4t - 1$ vértices, conseguimos usar a condição de K ser $(t, 2)$ -expanding exaustivamente para garantir a existência de um caminho de $k + 1$ vértices em K . Partindo de uma aresta e aplicando esse fato repetidas vezes, obtemos um caminho de $4t$ vértices.

Primeiro, note que, se temos um caminho $Q = v_1 v_2 \dots v_k$ em K e uma aresta $v_1 v_i \in E(K)$, então $\tilde{Q} = v_{i-1} v_{i-2} \dots v_1 v_i v_{i+1} \dots v_{k-1} v_k$ é um caminho em K . Mais ainda, quase todos os vértices em \tilde{Q} tem como vizinhos os mesmos que em Q , possivelmente em ordem reversa. Diremos que \tilde{Q} é uma *transformação simples* de Q relativa a v_k . Se um caminho pode ser obtido de Q a partir de uma sequência de transformações simples relativas a v_k , diremos que tal caminho é uma *transformação* de Q (relativa a v_k). Note que qualquer transformação de Q mantém x_k como extremidade do caminho. Vamos dizer que um vértice v é um *endpoint* de Q relativo a v_k se existe um caminho R transformação de Q tal que R tem v e v_k como extremidades.

Dado um caminho $P_0 = x_1 x_2 \dots x_k$ em K , com $k \leq 4t - 1$, suponha, sem perda de generalidade, que $x_1 \in X$, e queremos provar que K contém um caminho de $k + 1$ vértices. Seja U o conjunto de endpoints de P_0 relativo a x_k . Se $N(U) \not\subseteq V(P_0)$, então encontramos um caminho de $k + 1$ vértices de v_k a um vizinho de um endpoint de P_0 . Então, podemos supor que $N(U) \subseteq V(P_0)$. Vejamos que $|U| \geq t$. Com efeito, se $|U| < t$, então $|N(U)| \geq 2|U|$. Como o conjunto $\{x_2\} \cup \bigcup_{x_i \in U \setminus \{x_2\}} \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$ tem no máximo $2|U| - 1$ elementos, existe um vértice $w \in N(U) \setminus (\{x_2\} \cup \bigcup_{x_i \in U \setminus \{x_2\}} \{x_{i-1}, x_{i+1}\})$. Veja que os vizinhos de w em qualquer transformação de P_0 são os mesmos que em P_0 . Além disso, os vizinhos de w não pertencem a U . Mas uma aresta que liga w a U dá uma transformação de P_0 que tem um vizinho de w como endpoint, absurdo. Agora, aplique a condição de $(t, 2)$ -expanding para um subconjunto de t elementos de U . Como $|V(P_0) \cap Y| = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq 2t - 1$, algum vizinho de U não está em $V(P_0)$, e com isso temos um caminho de $k + 1$ vértices. □

Lema 1.1.11. *Seja G um grafo que contém exatamente:*

1. *um grafo G_0 bipartido com bipartição (V', V'') tal que cada $v' \in V'$ tem pelo menos $0.15|V''|$ vizinhos em V'' , cada $v'' \in V''$ tem pelo menos $0.15|V'|$ vizinhos em V' e, para quaisquer $W' \subseteq V'$, $W'' \subseteq V''$ tais que $|W'| \geq 10^{-6}|V'|$, $|W''| \geq 10^{-6}|V''|$, existe pelo menos uma aresta entre W' e W'' .*
2. *uma família \mathcal{P}' de r' caminhos vértice-disjuntos, cada um com as duas extremidades em V' , tal que nenhum vértice do interior do caminho pertence a $V' \cup V''$;*
3. *uma família \mathcal{P}'' de r'' caminhos vértice-disjuntos, cada um com as duas extremidades em V'' , tal que nenhum vértice do interior do caminho pertence a $V' \cup V'' \cup \bigcup_{P' \in \mathcal{P}'} V(P')$;*

Sejam x' um vértice de $V' \setminus \bigcup_{P' \in \mathcal{P}'} V(P')$ e y'' um vértice de $V'' \setminus \bigcup_{P'' \in \mathcal{P}''} V(P'')$. Suponha que

$$r' + r'' \leq 0.01m = 0.01 \min\{|V'|, |V''|\}$$

e

$$r'' - r' = |V''| - |V'|.$$

Então existe um caminho em G que começa em x' , termina em y'' , passa por todos os vértices de V' e V'' e percorre completamente todos os caminhos de \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' .

Demonstração: Dados $x' \in V' \setminus \bigcup_{P' \in \mathcal{P}'} V(P')$ e $y'' \in V'' \setminus \bigcup_{P'' \in \mathcal{P}''} V(P'')$, queremos construir um caminho $P_{x'y''}$ passando por todos os vértices de V' e V'' e todas as arestas de caminhos em \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' . Faremos isso em três partes: primeiro, um caminho $P_{x'z''}$ saindo de x' e cobrindo todos os caminhos de \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' ; segundo, um caminho $P_{z'y''}$ que termina em y'' , com uma certa condição para que $P_{z'y''}$ tenha vários “endpoints” além de z'' ; e finalmente aplicaremos o Lema 1.1.8 nos

vértices que sobraram para obter um caminho $P_{z''z'}$, de modo que o caminho final $P_{x'y''}$ consiste apenas de juntar $P_{x'z''}$, $P_{z''z'}$ e $P_{z'y''}$.

Para o caminho $P_{x'z''}$, note que, dado um vértice $v' \in V'$ e outro vértice $v'' \in V''$, podemos construir um caminho de tamanho três de v' para v'' evitando qualquer subconjunto $A' \subset V' \setminus \{v'\}$ com $|A'| \leq 0.1m$ e qualquer subconjunto $B'' \subset V'' \setminus \{v''\}$ com $|B''| \leq 0.1m$: basta considerar as vizinhanças de v' e v'' e aplicar 1 para $(N(v') \cap V'') \setminus B''$ e $(N(v'') \cap V') \setminus A'$.

Com isso, basta construir $P_{x'z''}$ de forma gulosa, saindo de x' e percorrendo os caminhos em \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' , gastando caminhos de tamanho três para conectar uma ponta de um caminho de \mathcal{P}' com a ponta de um caminho de \mathcal{P}'' , e gastando caminhos de tamanho quatro para conectar pontas de dois caminhos em \mathcal{P}' ou dois caminhos de \mathcal{P}'' (é só primeiro ir para o outro lado e então usar um caminho de tamanho três). Desse modo, conseguimos obter um caminho $P_{x'z''}$ que começa em x' , termina em $z'' \in V''$, passa por todas as arestas dos caminhos de \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' , e que satisfaz

$$\begin{aligned} |V(P_{x'z''}) \cap V'| &\leq 1 + 3(r' + r'') \leq 0.04m, \\ |V(P_{x'z''}) \cap V''| &\leq 1 + 3(r' + r'') \leq 0.04m. \end{aligned}$$

Para $P_{z'y''}$, comece de y'' e percorra um caminho até um $z'_0 \in V'$, digamos $P_{z'_0y''}$, de modo que $|V(P_{z'_0y''})| = 2\lfloor 0.03m \rfloor - 2$. Daí sejam $P = V' \setminus (V(P_{x'z''}) \cup V(P_{z'_0y''}))$ e $Q = V'' \cap V(P_{z'_0y''})$.

Como $k := |P| \geq |V'| - 0.07m$ e cada vértice de Q manda $0.15m$ arestas para V' , então cada vértice de Q manda pelo menos $0.08m$ arestas em P , logo

$$e(P, Q) \geq 0.08m|Q| \geq 0.08m \cdot 0.02m = 0.0016m^2.$$

Seja $\tilde{x} = \#\{v \in P : |N(v) \cap Q| > 0.001m\}$. Então

$$\begin{aligned} 0.0016m^2 &\leq e(P, Q) \leq (k - \tilde{x})0.001m + \tilde{x} \cdot 0.03m \implies \\ 0.0016m &\leq (k - \tilde{x})0.001 + \tilde{x} \cdot 0.03m \iff \\ \iff 16m &\leq 10(k - \tilde{x}) + 300\tilde{x} = 10k + 290\tilde{x} \implies \\ \implies 290\tilde{x} &\geq 16m - 10k. \end{aligned}$$

Note que $|V'| = |V''| + r' + r'' \leq |V''| + 0.01m$, donde $|V'| \leq 1.01m$, e daí $k = |P| \leq |V'| - |V(P_{z'_0y''})| \leq 1.01m - 0.02m < m$. Logo ficamos com

$$\begin{aligned} 290\tilde{x} &\geq 16m - 10k \geq 16m - 10m = 6m \\ \implies \tilde{x} &\geq \frac{6m}{290} > 0.02m. \end{aligned}$$

Assim, por 1, existe uma aresta entre $\{v \in P : |N(v) \cap Q| > 0.001m\}$ e $(N(z'_0) \cap V'') \setminus (V(P_{x'z''}) \cup V(P_{z'_0y''}))$, logo o caminho $P_{z'_0y''}$ pode ser estendido para um caminho $P_{z'y''}$ tal que $|V(P_{z'y''})| = 2\lfloor 0.03m \rfloor$ e z' tem pelo menos $0.001m$ vizinhos em $V(P_{z'y''}) \cap V''$. Cada vizinho desses dá um "endpoint", isto é, existe $S' \subset V(P_{z'y''})$, $|S'| \geq 0.001m$, tal que para todo $s' \in S'$ existe um caminho começando em y'' e terminando em s' , e que percorre os mesmos vértices de $P_{z'y''}$.

Agora, basta notar que o subgrafo bipartido induzido por $V' \setminus (V(P_{x'z''}) \cup V(P_{z'y''}))$ e $V'' \setminus (V(P_{x'z''}) \cup V(P_{z'y''}))$ é $(10^{-5}, 0.07)$ -uniforme, logo pelo Lema 1.1.8, existe um circuito hamiltoniano C percorrendo tais vértices.

Para cada vizinho de z'' em C , existe um caminho $P_{z''t''}$ que percorre exatamente os vértices de C além de z'' . Em outras palavras, existe um conjunto $T'' \subset V''$ tal que $|T''| \geq 0.07m$ e para cada $t'' \in T''$ existe um caminho $P_{z''t''}$ de z'' a t'' com $V(P_{z''t''}) = \{z''\} \cup V(C)$.

Por 1, existe pelo menos uma aresta entre S' e T'' , digamos $\{s', t''\}$. Para tal s' , existe um caminho $P_{s'y''}$ de s' a y'' que percorre os mesmos vértices de $P_{z'y''}$. Concatenando os caminhos $P_{x'z''}$, $P_{z''t''}$, a aresta $\{t'', s'\}$ e o caminho $P_{s'y''}$, obtemos o caminho desejado.

□

Lema 1.1.12. *Dada qualquer coloração das arestas do grafo completo K_n em vermelho e azul, existem dois circuitos C^r e C^b em K_n , tais que as arestas de C^r são vermelhas, as arestas de C^b são azuis, $V(C^r) \cup V(C^b) = V(K_n)$ e $|V(C^r) \cap V(C^b)| \leq 1$.*

Demonstração. Tome um maior caminho $P = u_1 \dots u_k v_1 \dots v_l$ tal que cada aresta $u_i u_{i+1}$ é azul e $u_k v_1, v_1 v_2, \dots, v_{l-1} v_l$ são vermelhas. Vamos provar que P é um caminho hamiltoniano. De fato, se $w \notin V(P)$, então considere a aresta wu_k . Suponha, sem perda de generalidade, que wu_k é azul. Então o caminho $\tilde{P} = u_1 \dots u_k w v_1 \dots v_l$ é maior que P e é composto de um caminho azul seguido de um caminho vermelho, absurdo. Logo P é caminho hamiltoniano.

Suponha, sem perda de generalidade, que $v_l u_1$ é vermelho (se $P = u_1 \dots u_k$, troque v_l por u_k). Suponha também, sem perda de generalidade, que $u_1 u_k$ é azul. Se $l = 0$, isto é, $P = u_1 \dots u_k$ com $u_1 u_k$ azul, então P é um circuito hamiltoniano azul, e temos partição tomando C^r vazio. Se $l = 1$, então temos partição de $V(K_n)$ em um circuito azul e um único vértice como circuito vermelho. Suponha então $l \geq 2$. Caso $v_1 v_l$ seja vermelho, temos partição com $C^b = u_1 \dots u_k$ e $C^r = v_1 \dots v_l$. Caso $v_1 u_1$ seja vermelho, tome $C^b = u_1 \dots u_k$ e $C^r = v_1 \dots v_l u_1$. Caso $u_k v_l$ seja vermelho, tome $C^b = u_1 \dots u_k$ e $C^r = u_k v_1 \dots v_l$. Podemos supor, então, que $u_k v_l, v_l v_1$ e $v_1 u_1$ são azuis. Mas então $Q = u_k v_l v_1 u_1 \dots u_k$ é um circuito azul. Troque P por $v_1 u_1 \dots u_k v_l \dots v_2$ e repita o argumento. Como l diminui de dois em dois a cada passo, eventualmente caímos em $l = 0$ ou $l = 1$, o que encerra a prova. \square

Lema 1.1.13. *Dada uma coloração das arestas de K_n em vermelho e azul, suponha que exista uma partição dos vértices de K_n em três conjuntos V_1, V_2 e V_3 tal que:*

- (i) *todas as arestas entre V_1 e V_2 são azuis;*
- (ii) $\min\{|V_1|, |V_2|\} \geq 5 + 2|V_3|$.

Então o conjunto de vértices de K_n pode ser particionado como $V(K_n) = V(C^r) \cup V(C^b)$, onde C^r é um circuito com todas as arestas vermelhas e C^b é um circuito com todas as arestas azuis.

Demonstração. Primeiramente, vamos construir subconjuntos $V'_1 \subseteq V_1, V'_2 \subseteq V_2$ e $V'_3 \subseteq V_3$ de modo que qualquer vértice de V'_3 manda apenas arestas vermelhas para $V'_1 \cup V'_2$, e de modo que $V'_4 := V(K_n) \setminus (V'_1 \cup V'_2 \cup V'_3)$ contém um caminho hamiltoniano azul $x_1 \dots x_m$ com $x_1 \in V_2$ e $x_m \in V_1$. Conseguiremos fazer isso de modo que $\min\{|V'_1|, |V'_2|\} \geq 5 + |V'_3|$.

Começando com $V_1(0) = V_1, V_2(0) = V_2$ e $V_3(0) = V_3$, vamos definir recursivamente cadeias descendentes de conjuntos $V_1(k), V_2(k)$ e $V_3(k)$ para k de zero até l tal que $(V'_1, V'_2, V'_3, V'_4) = (V_1(l), V_2(l), V_3(l), V(K_n) \setminus (V_1(l) \cup V_2(l) \cup V_3(l)))$ satisfaça as condições do parágrafo anterior.

Suponha construídos $V_1(k), V_2(k)$ e $V_3(k)$ para um $k \geq 0$, e que ainda existe pelo menos uma aresta azul entre $V_3(k)$ e $V_1(k) \cup V_2(k)$. Então definimos $V_i(k+1)$ da seguinte forma:

Caso 1: Se existe $w \in V_3(k)$ tal que w tem pelo menos dois vizinhos azuis u_1 e u_2 em $V_1(k)$, tome $v \in V_2(k)$ arbitrário e faça $V_1(k+1) = V_1(k) \setminus \{u_1, u_2\}$, $V_2(k+1) = V_2(k) \setminus \{v\}$ e $V_3(k+1) = V_3(k) \setminus \{w\}$.

Note que, se $x_{1k} x_{2k} \dots x_{m_k k}$ é um caminho azul com $x_{1k} \in V_2$ e $x_{m_k k} \in V_1$, então $x_{1k} \dots x_{m_k k} v u_1 w u_2$ é um caminho azul terminando em $u_2 \in V_1$.

Caso 2: Se existe $w \in V_3(k)$ tal que w tem pelo menos dois vizinhos azuis v_1 e v_2 em $V_2(k)$, tome, analogamente ao caso anterior, $u \in V_1(k)$ arbitrário e faça $V_1(k+1) = V_1(k) \setminus \{u\}$, $V_2(k+1) = V_2(k) \setminus \{v_1, v_2\}$ e $V_3(k+1) = V_3(k) \setminus \{w\}$.

Note que, se $x_{1k} x_{2k} \dots x_{m_k k}$ é um caminho azul com $x_{1k} \in V_2$ e $x_{m_k k} \in V_1$, então $x_{1k} \dots x_{m_k k} v_2 w v_1 u$ é um caminho azul terminando em $u \in V_1$.

Se nenhum dos dois casos acima se aplica, então todo vértice $w \in V_3(k)$ tem no máximo um vizinho azul em $V_1(k)$ e no máximo um vizinho azul em $V_2(k)$. Nesse último caso, tiramos os vizinhos azuis ao invés do vértice em $V_3(k)$:

Caso 3: Se existe $w \in V_3(k)$ tal que w tem um único vizinho azul em $V_1(k)$ e/ou um único vizinho azul em $V_2(k)$, tome $u \in V_1(k)$ e $v \in V_2(k)$ de modo que $\{u, v\}$ contém esses possíveis dois vizinhos azuis, e faça $V_1(k+1) = V_1(k) \setminus \{u\}$, $V_2(k+1) = V_2(k+1) \setminus \{v\}$ e $V_3(k+1) = V_3(k)$.

Note que, se $x_{1k}x_{2k}\dots x_{m_kk}$ é um caminho azul com $x_{1k} \in V_2$ e $x_{m_kk} \in V_1$, então $x_{1k}\dots x_{m_kk}vu$ é um caminho azul terminando em $u \in V_1$.

Como, a cada passo da construção, o número de vértices em $V_3(k)$ que tem algum vizinho azul em $V_1(k) \cup V_2(k)$ diminui em pelo menos um, o roteiro acima para em $l \leq |V_3|$ passos. Sejam então $V'_1 = V_1(l)$, $V'_2 = V_2(l)$, $V'_3 = V_3(l)$ e $V'_4 = V(K_n) \setminus (V_1(l) \cup V_2(l) \cup V_3(l))$, com V'_3 e V'_4 possivelmente vazios. Como o processo parou, todas as arestas entre V'_3 e $V'_1 \cup V'_2$ são vermelhas. Como $V'_1 \subseteq V_1$ e $V'_2 \subseteq V_2$, temos que todas as arestas entre V'_1 e V'_2 são azuis. Como $|V_1(k+1)| - |V_3(k+1)| \geq |V_1(k)| - |V_3(k)| - 1$, temos que

$$|V'_1| - |V'_3| \geq |V_1| - |V_3| - l \geq |V_1| - 2|V_3| \geq 5,$$

donde $|V'_1| \geq 5 + |V'_3|$ (e, analogamente, $|V'_2| \geq 5 + |V'_3|$). Note também que foi construído ao longo do processo um caminho $x_1 \dots x_m$ azul passando por todos os vértices de V'_4 , tal que todas as arestas de x_1 a V'_2 e todas as arestas de x_m a V'_1 são azuis (em particular, $x_1 \in V_2$ pois, em todos os casos, o primeiro vértice adicionado ao caminho é um vértice de V_2).

Seja $n_i = |V'_i|$ para $i = 1, 2, 3$, e suponha, sem perda de generalidade, que $n_1 \geq n_2$. \square

Fato 1.1.14. *Seja k inteiro positivo, e $n \geq 120k^3$. Considere uma coloração arbitrária das arestas de K_n em vermelho e azul. Suponha que não existe partição de $V(K_n)$ em V_1 , V_2 e V_3 satisfazendo as condições do Lema 1.1.13. Então, se S_1, \dots, S_l , $T_1, \dots, T_l \subseteq V(K_n)$ são conjuntos disjuntos com $l \geq 2$, onde $|S_i|, |T_i| \geq n/2k$ para $i \in \{1, \dots, l\}$, existem caminhos vermelhos P_1, \dots, P_l , vértice-disjuntos, cada um de comprimento no máximo $10k$, tal que cada P_i tem um extremo em S_i e outro em T_i .*

Demonstração: Vamos provar que os caminhos P_i existem mostrando que podemos escolhê-los um por um, começando por P_1 , e a cada passo exibindo um P_j que é vértice-disjunto aos anteriores, P_1, \dots, P_{j-1} .

Seja então $j \in \{1, \dots, l\}$ e suponha já construídos os caminhos P_i , $1 \leq i < j$. Seja R o subgrafo de K_n com $V(R) = V(K_n) \setminus W$, onde $W = \bigcup_{i=1}^{j-1} V(P_i)$, dado pelas arestas vermelhas. Para cada $r \in \{0, \dots, 5k\}$, defina

$$N_r = \{v \in V(K_n) \setminus W : d_R(v, S_j \setminus W) = r\},$$

$$N'_r = \{v \in V(K_n) \setminus W : d_R(v, T_j \setminus W) = r\}.$$

Se $(\bigcup_{r=0}^{5k} N_r) \cap (\bigcup_{r=0}^{5k} N'_r) \neq \emptyset$, então temos um caminho de tamanho no máximo $10k$ ligando S_j a T_j , e tomamos P_j para ser esse caminho. Suponha então que $(\bigcup_{r=0}^{5k} N_r) \cap (\bigcup_{r=0}^{5k} N'_r) = \emptyset$. Portanto, $|\bigcup_{r=1}^{5k} N_r| \leq n/2$ ou $|\bigcup_{r=1}^{5k} N'_r| \leq n/2$. Suponha, sem perda de generalidade, que $|\bigcup_{r=1}^{5k} N_r| \leq n/2$. Como os N_r são disjuntos, então existe r_0 tal que $|N_{r_0}| \leq n/10k$. Agora, sejam $V_3 = N_{r_0} \cup W$, $V_1 = (S_j \setminus W) \cup \bigcup_{r=1}^{r_0-1} N_r$ e $V_2 = V(K_n) \setminus (V_1 \cup V_3)$. Vamos provar que V_1 , V_2 e V_3 satisfazem as condições do Lema 1.1.13. Note que o par (V_1, V_2) induz um grafo bipartido azul completo. Vamos verificar agora que $|V_1| \geq 5 + 2|V_3|$. Primeiro,

$$|V_1| \geq |S_j \setminus W| \geq |S_j| - |W| \geq \frac{n}{2k} - (l-1)(10k+1).$$

Por outro lado, temos que

$$5 + 2|V_3| = 5 + 2|N_{r_0} \cup W| \leq 5 + 2\left(\frac{n}{10k} + (l-1)(10k+1)\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{n}{2k} - (l-1)(10k+1) &\geq 5 + 2 \left(\frac{n}{10k} + (l-1)(10k+1) \right) \iff \\ \frac{n}{2k} - \frac{n}{5k} &\geq 5 + 3(l-1)(10k+1) \iff \\ \frac{3n}{10k} &\geq 5 + 3(l-1)(10k+1). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Como $(l-1)(10k+1) \leq l \cdot 10k \leq 10k^2$ e $\frac{3n}{10k} \geq 5 + 3 \cdot 10k^2 \iff 3n \geq 50k + 300k^3 \iff n \geq \frac{50k}{3} + 100k^3$ vale quando $n \geq 120k^3$, temos que $|V_1| \geq 5 + 2|V_3|$. Como $|V_2| \geq |T_j \setminus W|$, temos também que $|V_2| \geq 5 + 2|V_3|$. Logo V_1, V_2 e V_3 particionam $V(K_n)$ satisfazendo as condições do Lema 1.1.13, contradição. \square

Observação 1.1.15. Uma observação.

Corolário 1.1.16 (Nome do corolário). *Meu primeiro corolário.*

Demonstração: Segue trivialmente do Teorema ??.

\square

Axioma 1.1.17. *Todo subconjunto de \mathbb{R} , que é não vazio e limitado superiormente, admite supremo.*

Para mais detalhes veja [1, p. nn] e [2]

Apêndice A

Apêndice

Referências Bibliográficas

Livros

[1] Sobrenome, Nome. *Título de Livro*, Editora, Edição, Ano.

Artigos e periódicos

[2] Sobrenome, Nome. *Título de Artigo referência*, Revista, **volume** (ano), pagini–pagfin.