

图像中的数学问题第二次作业

黄海文 1500010657

2018 年 11 月 8 日

1 问题 1:Denoising

我们要去噪的图片是原图加上高斯噪声的图片，即：

$$f = x + \sigma_1 \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma_2).$$

我们要做的，就是给定 f ，来复原出 x 。

1.1 算法 1:Heat Equation Evolution

将图片看作一个关于 x, y 的函数，我们假定函数随时间 t 的变化速率是它的 Laplacian。从待处理图出发，进行演变 (evolve)，每次走一个小步长，最后在某个时间 T 时停下，得到我们的复原后的图片。用数学化的语言来说，就是：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, & t \geq 0 \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

这里 $u_0(x)$ 就是一开始带噪声的图。若在时刻 T 终止，则我们的结果即位 $u(T, x)$ 。

1.2 算法 2:Perona-Malik PDE Evolution

对图片的处理方法 (PDE evolution) 与上一小节类似，不同的是不再假定 u 满足热方程，而是 Perona-Malik 方程，利用 anisotropic diffusion：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}((|\nabla u|^2) \nabla u) & t \geq 0 \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

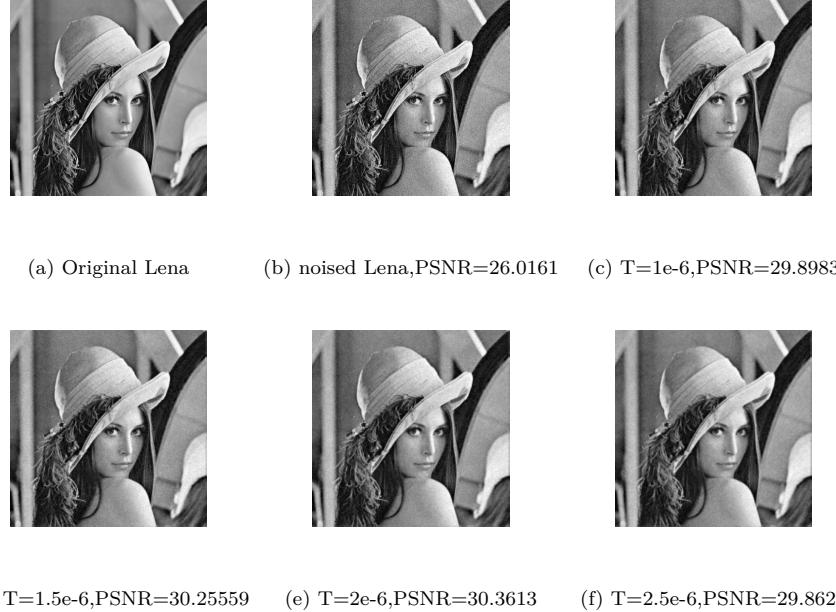


图 1: Heat Equation Denoising 1

这里 $c(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{K}}$ or $\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{s}{K})^2}}$, 可以通过控制参数 fchoice 为 1 或 2 来选择 $c(s)$ 。由于它们的结果类似, 在下一小节中我们只展现其中之一的结果。

1.3 去噪结果

我们来比较 Heat Equation 和 Perona-Malik Equation Evolution 这两个 denoising 方法。我们观察不同终止时间 T 下的图片和 psnr 进行比较。

1.3.1 Heat Equation Results

我们对 Lena 图, 取噪声的标准差为原图最大 intensity 的 $\frac{1}{20}$ 。不同时的表现如图:

从 1可以比较明显地看出 Heat Equation 的去噪效果, 同时也可以看到它会导致图像变得模糊: 随着终止时间 T 的增大, 图像虽然没有噪声了, 但也逐渐变得模糊了。

我们再对 Barbara 图采用更大的噪声 (原图最大 intensity 的 $\frac{1}{10}$) 来看去噪效果。在图 2中, 我们可以比较明显地看到, 当终止时间 T 过大时, 如



图 2: Heat Equation Denoising 2

$T=5e-6$ 时, 图像虽然看不见噪声, 但是已经非常模糊了。

1.3.2 Perona-Malik Equation Results

我们看到, 在图 3中, Perona-Malik Equation 的 denoising 结果从 PSNR 的角度看似乎不如 heat equation, 但是在 Perona-Malik Equation Denoising 中, 终止时间 T 较大时, 不会出现热方程特有的模糊问题, 而是边缘 (edge) 变得更清晰鲜明, 如帽子的边缘。



图 3: Perona-Malik Equation Denoising

2 问题 2:Deblurring

2.1 算法: Osher and Rudin shock filters

Shock filters 模型主要是对 edge 进行了 enhancing, 它的方程是:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -|\nabla u|F(\mathcal{L}(u)) & t \geq 0 \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

这里我们取 $\mathcal{L}(u)$ 为 Δu 或者 $\frac{1}{|\nabla u|^2}(u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy})$ 。而 F 需要满足 $F(0) = 0$, 以及 $sign(s)F(s) > 0, \forall s \neq 0$; 在代码中, 我取了 $F(s) = sign(s)$ 。

2.2 去模糊结果

我们来看在不同噪声, 不同 $\mathcal{L}(u)$ 取法下的效果。我们用噪声的标准差 σ_1 大小来看噪声强弱, $\sigma_1 = 0$ 时即没有噪声。用 $Lchoice = 1$ 表示 $\mathcal{L} = \Delta u$; $Lchoice = 2$ 表示 $\mathcal{L} = \frac{1}{|\nabla u|^2}(u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy})$ 。

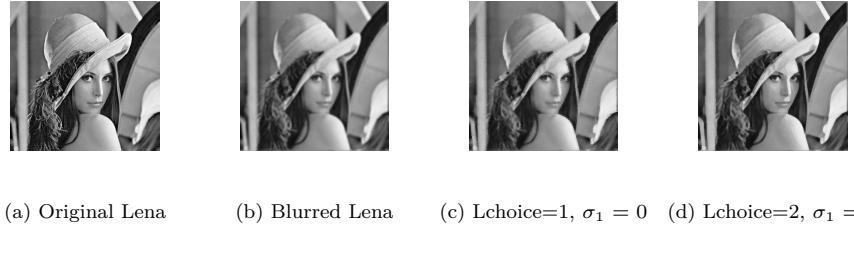


图 4: Shock Filters Deblurring 1, $\sigma_1 = 0$

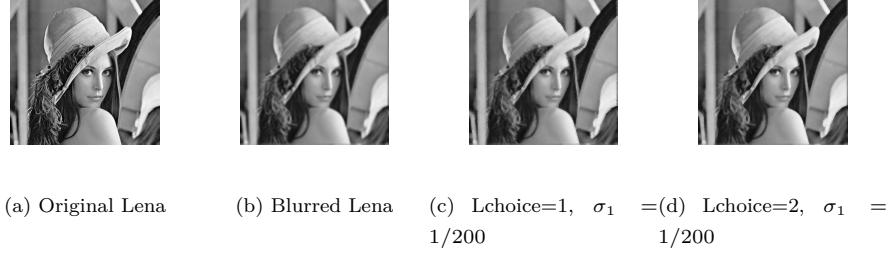


图 5: Shock Filters Deblurring 1, $\sigma_1 = 1/200$

从图 4,5,6,7可以看到, $Lchoice = 2$ 时的处理后图像的边缘更鲜明, enhancing 的效果更好; 同时, 在噪声较大的时候, 两种取法的 deblurring 效果都变差了很多, 这主要是因为 noise 也被 enhance 了。

最后, 我们再来看一看当终止时间 T 趋于无穷的时候, 图片的处理结果会如何。我们取零噪声和 $\sigma = 1/200$ 两种情形, 分别看 $Lchoice = 1$ 和 $Lchoice = 2$ 的情况。见图 8¹。

¹实际上, 在 $Lchoice = 2$ 时, 若 T 趋于无穷, 每个像素点的值都会变成 NaN, 我这里选取了 T 非常大, 但没有变成 NaN 的情况来代替 T 趋于无穷的图像

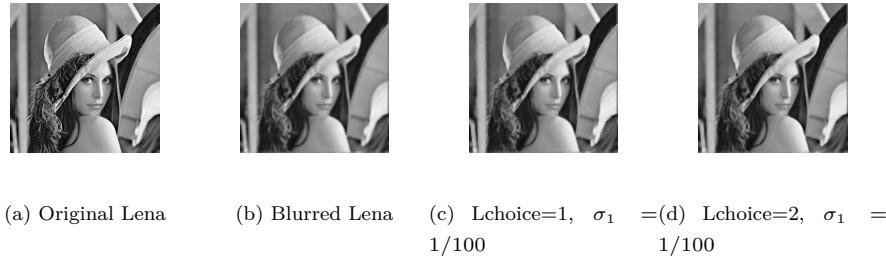


图 6: Shock Filters Deblurring 2, $\sigma_1 = 1/100$

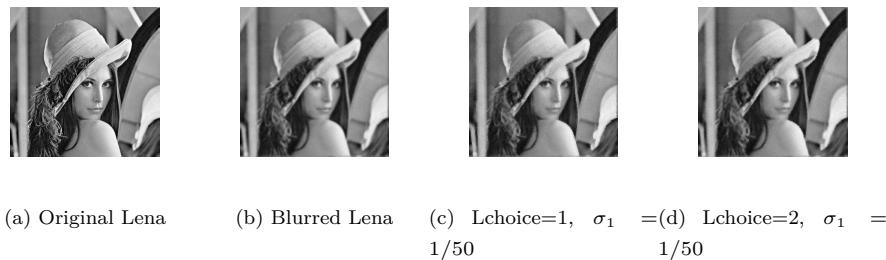


图 7: Shock Filters Deblurring 3, $\sigma_1 = 1/50$

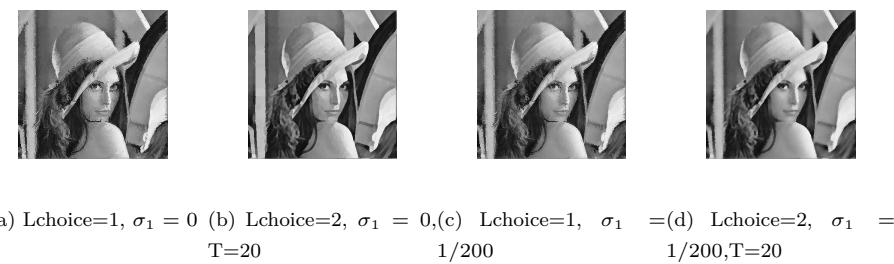


图 8: Shock Filters Deblurring 4, $\sigma_1 = 1/50$, $T \rightarrow \infty$