

图像中的数学问题第一次作业

黄海文 1500010657

2018 年 10 月 30 日

1 问题

我们处理的问题是要对一张由高斯的卷积核模糊，并加上了噪声后的图片，试图把它恢复成原图。即要处理的图是

$$f = \mathcal{A}x + \sigma_1 \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma_2),$$

这里 $\mathcal{A}x = \text{kernel} * x$ ，而 kernel 是一个可选择大小的 Gaussian 卷积核。

而我们要做的，就是给定 f 和 kernel ，我们来试图复原出原图 x 。

2 模型

我们使用的模型是 Total Variation regularized deblurring model。即通过如下的优化过程：

$$\hat{u} = \arg \min_u \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{A}u - f)^2 dx, \quad (1)$$

得到优化后的 \hat{u} 即为我们近似出的“原图”。这里 $\int_{\Omega} |\nabla u| dx$ 即为 total variation。

值得指出的是，对彩色的图片，相当于 $m \times n \times 3$ 的 array，如果采用对 R,G,B 逐个通道进行去噪去模糊后再合并为一张图的方法，利用我们现在的算法，只是对每个通道循环我们的算法一次，因此我们这里不再直接处理彩色图，而是直接转为灰度图来处理。Again，若要处理彩图，一种简单的方法就是对每个通道用一次我们的 TVblur 函数即可。

3 模型的优化

我们对上面的模型,采用 Alternating Direction Multiplier Method(ADMM)的方法来进行优化。我们原本的优化函数为(1)。若用 A 来表示 blur 的算子, W 来表示 gradient 算子,我们可以将原式的 ADMM 优化过程写成如下的三个 blocks:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \arg \min_u \frac{1}{2} \|Au - f\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|Wu - d_k + b_k\|_2^2, \\ d_{k+1} &= \arg \min_d \|\lambda d\|_1 + \frac{\mu}{2} \|d - Wu_{k+1} - b_k\|_2^2, \\ b_{k+1} &= b_k + \delta(Wu_{k+1} - d_{k+1}). \end{aligned}$$

第一个 block 需要我们解一个线性方程,即解 $(A^T A + \mu W^T W)u = A^T f + \mu W^T (d_k - b_k)$ 得 u 作为 u_{k+1} 。注意到这里的 A 和 W 实际上都是线性算子, A^T, W^T 则分别是 A 和 W 的 adjoint 算子,在这里则分别是用卷积核的转置来做卷积进行 blur 和 divergence 算子。用很多种方法可以解这个类似 Poisson 的方程。我采用的是做 Fourier Transform,即把左右同时进行傅立叶变换。若我们把原式记作 $lhs \cdot u = rhs$,则我们的解 $u = \text{ifft}(\frac{\text{fft}(rhs)}{\text{fft}(lhs)})$ 。这里我们把原本的算子 A, W 等作为 point spread function,那么它们的 Fourier Transform 就可以利用 MATLAB 函数 `pst2otf` 得到。

第二个 block 我们可以通过求其导数,得到 d 为最小值点的条件,从而求出 d 。我们可以用 shrinkage 函数来显式地写出 $d_{k+1} = \text{shrinkage}_{\lambda/\mu}(Wu_{k+1} + b_k)$ 。这里 $\text{shrinkage}_\tau(v) := \frac{v}{|v|} \max\{|v| - \tau, 0\}$ 。

具体实现中我们需要实现 grad 函数和 div 函数,它们都是通过 finite difference method 来定义的。而 laplace 算子我采用的是五点中心差分格式。图像的边值是 circular。本次实验中 σ_1 取为原图 intensity 的最大值的 1/100, σ_2 取为 1.5 或 2。当然也可以测试更多的可能组合。

4 结果

4.1 Main Results

我们对几张经典的图进行了测试。作为参考,我们还提供了处理前后的图与原图的信噪比 (peak signal-to-noise ratio, PSNR) 和结构相似性指数



(a) Original Barbara

(b) Blurred Barbara

(c) Processed Barbara

图 1: Barbara. (b)PSNR=25.6639; SSIM=0.7140. (c) PSNR=26.0371; 0.7517SSIM=0.7517

(structural similarity index)。

在测试中，我们看到无论是从数值上还是直观观察上，都可以明显看出 TV deblur 的效果。当然我们也观察到了 texture 的丧失；由于边值条件导致的 processed image 在边值上的失真；以及（放大后）可以看见 staircase effect，即原本 smooth 的信号现在变成了分片常数，显得有些失真。但总的来说，denoising 和 deblurring 的效果都是相当显著的。

4.2 Explore: 参数的影响

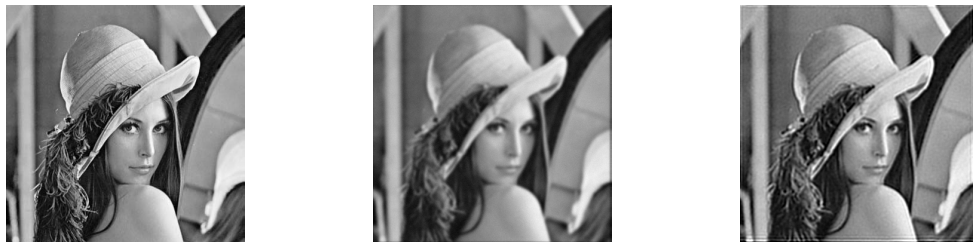
另外，我还做了一些额外的实验，来探索参数对模型的去噪去模糊的影响。首先是 regularization 的系数 λ ，另外是 kernel 的大小；还有 kernel 的方差 σ_1 。

我们用 Barbara 图的 PSNR 和 SSIM 来体现这几个参数的影响。Barbara 图的大小为 512×512 。算法默认的参数为 $\lambda = 1$, kernel size = 15, $\sigma_1 = 1.5$ 。当我们研究每一个参数的影响时，都保持其他参数为默认参数。终止条件均为

$$\frac{\|Wu_k - d_k\|_2}{\|f\|_2} < tol,$$

且取 $tol = 1e - 4$ 。结果见表。

我们看到，要有较好的去噪去模糊效果，单独的参数调整可能并不能起到最好的效果，比如当 kernel size 被单独调整后，就不再有去噪去模糊效果了。但是，单独调整 λ 时我们看到，regularization 的系数过大会导致去噪



(a) Original Lena

(b) Blurred Lena

(c) Processed Lena

图 2: Lena. (b)PSNR=24.3302; SSIM=0.7309. (c)PSNR=24.4352; 0.7517; SSIM=0.7745.

和去模糊效果消失（见 $\lambda = 4$ 的情况），但当 regularization 过小时，效果也不好（见 $\lambda = 0.5$ ）。再来看 σ_1 的影响，作为模糊算子卷积核的方差，它的大小影响的是模糊的程度。我们在不同模糊程度下来看 TV deblur 算法的作用：看起来 σ_1 小一些的时候，去噪去摸的效果会更明显，比如 $\sigma_1 = 1$ 和 $\sigma_1 = 2$ 这两种情况的处理后的 PSNR 和 SSIM 是相差很小的，但是 $\sigma_1 = 1$ 时的去噪去模糊效果要好很多。

		PSNR		SSIM	
		Blurred	Processed	Blurred	Processed
λ	0.5	25.66	25.79	0.714	0.733
	1	25.66	26.04	0.714	0.752
	2	25.66	25.92	0.714	0.718
	4	25.66	25.11	0.714	0.599
kernel size	10	25.14	22.76	0.697	0.638
	15	25.66	26.04	0.714	0.752
	20	25.13	22.77	0.696	0.639
σ_1	1	27.53	28.05	0.794	0.812
	1.5	25.66	26.04	0.714	0.752
	2	27.52	27.70	0.794	0.786