

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model ianuarie 2025

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_3 = 9$ și $a_{24} = 114$. Verificați dacă 2024 este termen al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$.
- 5p 2. Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că ecuația $x^2 - mx - 1 - m = 0$ are două rădăcini reale strict negative distincte.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(4 - 2^x) = 2 - x$.
- 5p 4. Se consideră mulțimea $M = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$. Determinați numărul submulțimilor lui M care conțin cel puțin un număr impar.
- 5p 5. Determinați distanța dintre dreptele paralele $d_1: 3x - 4y + 5 = 0$ și $d_2: y = mx - 10$, unde $m \in \mathbb{R}$.
- 5p 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_3 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Arătați că $\det(X(1)) = 16$.
- 5p b) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 3ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Determinați $p \in \mathbb{R}$, astfel încât $X\left(-\frac{2025}{2025}\right) \cdot X\left(-\frac{2024}{2025}\right) \cdot \dots \cdot X\left(\frac{2025}{2025}\right) = X(p)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{1}{3}xy - x - y + 6$.
- 5p a) Arătați că $x \circ y = \frac{1}{3}(x - 3)(y - 3) + 3$, pentru orice numere reale x, y .
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $(2^n + 3) \circ (2^{n+1} + 3) \circ (2^{n+2} + 3) = \frac{1}{9}(2^{27} + 27)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$ și șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.

- 5p a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p b) Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{\sqrt{n}} \right)^{2n}$.
2. Se consideră funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2025 \cdot x^{2024}}{x^{2025} + 1}$ și $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a sa.
- 5p a) Calculați $\int f(x) dx$.
- 5p b) Arătați că $F\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \leq F\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$.
- 5p c) Calculați $\int_0^1 [F(x) + xf(x)] dx$.