

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Aflați partea imaginară a numărului $z = \frac{1-2i}{1+3i}$.
- 5p** 2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție impară cu proprietatea $f(2) = -3$ și $f(-1) = 5$. Calculați $f(0) + f(1) + f(-2)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} + 4 = 2x$.
- 5p** 4. Determinați câte submulțimi ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ conțin cel mult unul dintre elementele 5 sau 6.
- 5p** 5. Aflați numerele reale a pentru care vectorii \vec{u} și $\vec{u} + \vec{v}$ au același modul, unde $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ și $\vec{v} = (a+1)\vec{i} - (a-3)\vec{j}$.
- 5p** 6. Arătați că funcția $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} + \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$, este constantă.

SUBIECTUL II

(30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x, y) = \begin{vmatrix} x & x^2+1 & 1 \\ y & y^2+1 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** a. Calculați $D(2, -1)$.
- 5p** b. Demonstrați că $D(x, y) = (x-3)(y-3)(y-x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** c. Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $A(a, a^2+1)$, $B(1, 2)$ și $C(3, 10)$ sunt coliniare.
2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$.
- 5p** a. Demonstrați că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
- 5p** b. Aflați două matrice $C, D \in G$ cu proprietatea $C \cdot D \neq D \cdot C$.
- 5p** c. Arătați că orice matrice din G este simetrizabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2e^x + 5x^2 - 2x + 3$.
- 5p** a. Arătați că funcția f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
- 5p** b. Demonstrați că funcția f nu este surjectivă.

- 5p c. Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3-x)e^{-x}$ și $F(x) = (x-2)e^{-x}$.
- 5p a. Arătați că F este o primitivă a lui f .
- 5p b. Calculați primitivele funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{e^x f(x)}{x^2 + 1}$.
- 5p c. Aflați intervalele de concavitate și convexitate ale funcției F

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = \frac{(1-2i)(1-3i)}{1-9i^2}$ $z = \frac{1-5i+6i^2}{10} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \text{ deci partea imaginară este } -\frac{1}{2}.$	2p 3p
2.	<p>Deoarece funcția f este impară $\Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$</p> <p>Deci $f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0, f(1) = -f(-1) = -5$ și $f(-2) = -f(2) = 3$</p> <p>Atunci $f(0) + f(1) + f(-2) = 0 - 5 + 3 = -2$</p>	2p 3p
3.	<p>Ecuția este $\sqrt{x+1} = 2x-4 \Rightarrow x+1 = (2x-4)^2 \Leftrightarrow x+1 = 4x^2 - 16x + 16$</p> <p>$\Leftrightarrow 4x^2 - 17x + 15 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{3, \frac{5}{4}\right\}$. Numărul 3 verifică ecuația și $\frac{5}{4}$ nu verifică</p> <p>deci soluția este $x = 3$.</p>	2p 3p
4.	<p>Vom afla numărul submulțimilor lui A care conțin elementele 5 și 6 și îl vom scădea din numărul total de submulțimi.</p> <p>Submulțimile care conțin elementele 5 și 6 sunt de forma $\{5, 6\} \cup X$ unde X e o submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$, deci sunt 2^6 submulțimi.</p> <p>În total A are 2^8 submulțimi, deci numărul căutat este $2^8 - 2^6 = 256 - 64 = 192$.</p>	2p 3p
5.	$\vec{u} + \vec{v} = (a+4)\vec{i} - (a+2)\vec{j}$ $ \vec{u} + \vec{v} = \vec{u} \Leftrightarrow \sqrt{(a+4)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2}$ $\Leftrightarrow 2a^2 + 12a + 20 = 34 \Leftrightarrow a^2 + 6a - 7 = 0 \Rightarrow a \in \{-7, 1\}.$	2p 3p
6.	$f(x) = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} + \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$ $= 1 - \cos x + 1 + \cos x = 2, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ deci este constantă.}$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M_mate-info*

Simulare

Barem de evaluare și de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

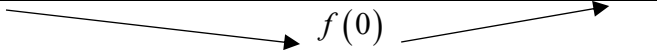
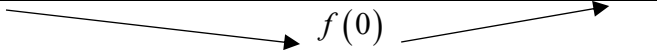
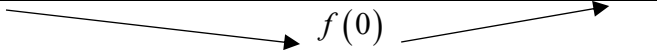
SUBIECTUL II

(30 de puncte)

1.a.	$D(2, -1) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 10 + 15 - 6 + 5 - 20 = -12$	5p
b.	$D(x, y) \stackrel{L_1=L_1-L_3}{\stackrel{L_2=L_2-L_3}{=}} \begin{vmatrix} x & x^2+1 & 1 \\ y & y^2+1 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & x^2-9 & 0 \\ y-3 & y^2-9 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}$ $= (x-3)(y-3) \begin{vmatrix} 1 & x+3 \\ 1 & y+3 \end{vmatrix} = (x-3)(y-3)(y-x)$	3p 2p
c.	<p>Punctele A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \Delta = 0$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2+1 & 1 \\ 1 & 1^2+1 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}$</p> <p>$\stackrel{b.}{=} (a-3)(1-3)(1-a)$.</p> <p>$-2(a-3)(1-a) = 0 \Leftrightarrow a \in \{1, 3\}$</p>	3p 2p
2.a.	<p>Fie $A, B \in G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a > 0, c > 0$ și $b, d \in \mathbb{R}$</p> <p>$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, deoarece $a \cdot c > 0$ și $ad+b \in \mathbb{R}$.</p>	2p 3p
b.	<p>Pentru $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avem</p> <p>$CD = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $DC = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow CD \neq DC$</p>	2p 3p
c.	<p>Pentru $a=1, b=0$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow I_2 \in G$, este elementul neutru pentru înmulțirea matricelor din G.</p> <p>Matricea $A \in G$ este simetrizabilă dacă $\exists A' \in G$ cu $A \cdot A' = A' \cdot A = I_2$</p> <p>Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ și $A' = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & bc+d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} ac=1 \\ ad+b=0 \\ bc+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{a} > 0 \\ d=-\frac{b}{a} \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, deci orice matrice din G este simetrizabilă.</p>	2p 3p

SUBIECTUL III

(30 de puncte)

1.a.	f e derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = 2e^x + 10x - 2 = 2(e^x - 1) + 10x$ Observăm că $f'(0) = 0$ și pentru $x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ e strict crescătoare pe $[0, \infty)$	2p 3p												
b.	Deoarece pentru $x < 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x < 0$. <table border="1"><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>∞</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>-----</td><td>0</td><td>+++++</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="3"></td></tr></table> Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, f(0) = 5$ și f e continuă atunci $\text{Im } f = [5, \infty) \neq \mathbb{R} \Rightarrow f$ nu este surjectivă	x	$-\infty$	0	∞	$f'(x)$	-----	0	+++++	$f(x)$				2p 3p
x	$-\infty$	0	∞											
$f'(x)$	-----	0	+++++											
$f(x)$														
c.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f''(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x + 10}{2e^x + 10x - 2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{2e^x + 10} = 1$	5p												
2.a.	F este derivabilă pe \mathbb{R} și $F'(x) = (x - 2)' e^{-x} + (x - 2)(e^{-x})'$ $= e^{-x} + (x - 2)(-e^{-x}) = (3 - x)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ este o primitivă a lui f .	5p												
b.	$\int g(x) dx = \int \frac{3 - x}{x^2 + 1} dx = 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$ $= 3 \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$	2p 3p												
c.	Din a. $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ Atunci F' este derivabilă și $F''(x) = f'(x) = (3 - x)' e^{-x} + (3 - x)(e^{-x})'$ $= -e^{-x} - (3 - x)e^{-x} = (x - 4)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Deoarece $F''(x) \geq 0, \forall x \in [4, \infty)$ și $F''(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 4]$, rezultă că funcția F este convexă pe $[4, \infty)$ și concavă pe $(-\infty, 4]$	2p 3p												