

**Examenul național de bacalaureat 2025**
**Proba E. c)**
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$** 
*Model ianuarie 2025*
*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**
**(30puncte)**

- 5p** 1) Arătați că  $2 \cdot \log_5 (4 - \sqrt{6}) + 2 \cdot \log_5 (4 + \sqrt{6}) - \log_5 4 = 2$ .
- 5p** 2) Se consideră funcția  $f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ . Determinați  $f(A)$ , unde  $A = [-2, 2)$ .
- 5p** 3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}$ .
- 5p** 4) Se consideră mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile mulțimii  $A$ , aceasta să aibă cel mult două elemente.
- 5p** 5) În reperul cartezian  $xOy$  se consideră dreptele paralele  $d_1: 3x - 4y = 0$  și  $d_2: 6x - 8y - 5 = 0$ . Determinați distanța dintre dreptele  $d_1$  și  $d_2$ .
- 5p** 6) Calculați  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ , știind că  $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$  și  $\sin x = -\frac{4}{5}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**
**(30puncte)**

- 1) Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 1+3x & -2x \\ 6x & 1-4x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(x) - I_2) = 0$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** b) Arătați că  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y - x \cdot y)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Arătați că  $\det(A^2(x) + I_2) > 0$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 2) Pe mulțimea  $G = (0, 1)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = \frac{2024xy}{2025xy - x - y + 1}$ .
- 5p** a) Calculați  $\frac{1}{2025} \circ \frac{1}{2025}$ .
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** c) Arătați că  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ ,  $f(x) = \frac{x}{x + 2024}$  este un izomorfism între grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive  $((0, \infty), \cdot)$  și grupul  $(G, \circ)$ .

**SUBIECTUL al III-lea**
**(30puncte)**

- 1) Se consideră funcția  $f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = e^{-3x+3} - \frac{9}{2}x^2 + 12x - \frac{17}{2}$ .
- 5p** a) Calculați  $f'(x)$ ,  $x \in R$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x_0 = 1$ , situat

- pe graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Arătați că funcția  $f$  are un singur punct de inflexiune.
- 2) Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2025(1 - x^{2024}), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ .
- 5p** a) Arătați că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_0^e f(x) dx$ .
- 5p** c) Arătați că  $2025 \int_1^x f^{2024}(t) dt + \int_1^x f^{2025}(t) dt = x f^{2025}(x)$ , pentru orice  $x \geq 1$ .