

**Examenul național de bacalaureat 2025**

**Proba E. c)**  
**Matematică M\_st-nat**

*Model ianuarie 2025*

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I (30puncte)**

- |           |  |
|-----------|--|
| <b>5p</b> | 1) Arătați că $2 \cdot \log_5(4 - \sqrt{6}) + 2 \cdot \log_5(4 + \sqrt{6}) - \log_5 4 = 2$ .   |
| <b>5p</b> | 2) Se consideră funcția $f : R \rightarrow R$ , $f(x) = x^2 + 2x - 3$ . Determinați $f(A)$ , unde $A = [-2, 2]$ .  |
| <b>5p</b> | 3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}$ .   |
| <b>5p</b> | 4) Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile mulțimii $A$ , aceasta să aibă cel mult două elemente. |
| <b>5p</b> | 5) În reperul cartezian $xOy$ se consideră dreptele paralele $d_1 : 3x - 4y = 0$ și $d_2 : 6x - 8y - 5 = 0$ . Determinați distanța dintre dreptele $d_1$ și $d_2$ .    |
| <b>5p</b> | 6) Calculați $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x$ , știind că $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x = -\frac{4}{5}$ .                              |

**SUBIECTUL al II-lea (30puncte)**

- |           |   |
|-----------|---|
| <b>5p</b> | 1) Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+3x & -2x \\ 6x & 1-4x \end{pmatrix}$ , unde $x$ este număr real.   |
| <b>5p</b> | a) Arătați că $\det(A(x) - I_2) = 0$ , pentru orice număr real $x$ .  |
| <b>5p</b> | b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y - x \cdot y)$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ .   |
| <b>5p</b> | c) Arătați că $\det(A^2(x) + I_2) > 0$ , pentru orice număr real $x$ .  |
| <b>2)</b> | Pe mulțimea $G = (0, 1)$ se definește legea de compozitie asociativă $x \circ y = \frac{2024xy}{2025xy - x - y + 1}$ .  |
| <b>5p</b> | a) Calculați $\frac{1}{2025} \circ \frac{1}{2025}$ .  |
| <b>5p</b> | b) Determinați elementul neutru al legii de compozitie „ $\circ$ ”.   |
| <b>5p</b> | c) Arătați că $f : (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ , $f(x) = \frac{x}{x + 2024}$ este un izomorfism între grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive $((0, \infty), \cdot)$ și grupul $(G, \circ)$ . |

**SUBIECTUL al III-lea (30puncte)**

- |           |   |
|-----------|---|
| <b>1)</b> | Se consideră funcția $f : R \rightarrow R$ , $f(x) = e^{-3x+3} - \frac{9}{2}x^2 + 12x - \frac{17}{2}$ . |
| <b>5p</b> | a) Calculați $f'(x)$ , $x \in R$ .  |
| <b>5p</b> | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0 = 1$ , situat      |



- pe graficul funcției  $f$ .
- 5p** **c)** Arătați că funcția  $f$  are un singur punct de inflexiune.
- 2)** Se consideră funcția  $f : R \rightarrow R$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2025(1-x^{2024}), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ .
- 5p** **a)** Arătați că funcția  $f$  admite primitive pe  $R$ .
- 5p** **b)** Calculați  $\int_0^e f(x)dx$ .
- 5p** **c)** Arătați că  $2025 \int_1^x f^{2024}(t)dt + \int_1^x f^{2025}(t)dt = xf^{2025}(x)$ , pentru orice  $x \geq 1$ .