Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Norme, convergență, condiționare

Radu Trîmbiţaş

UBB

21 martie 2021

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaș

Analiză matricială

Norme n

Exemple de nom matriciale

Condiționarea unui

sistem liniar

liniar

condiționare Exemple de matrice pros

exemple de matrice prost condiționate

letode iterati

Rezultate utile

nvergența și delimit

tode concret

Rafinarea iterativ Metoda lui Jacol

Metoda IIII Jacobi Metoda Caure Soide

Elemente de analiză matricială

- ▶ $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, A^T transpusa lui A, A^* transpusa conjugată a lui A
- ▶ polinomul $p(\lambda) = \det(A \lambda I)$ polinomul caracteristic al lui A; rădăcinile lui se numesc valori proprii ale lui A
- $ightharpoonup Ax = \lambda x, \ \lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie, $x \neq 0$ vector propriu
- ▶ Valoarea $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ valoare proprie a lui } A\}$ — raza spectrală a matricei A.

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

Analiză matricială

Norme matriciale

Exemple de nom matriciale

Condiționarea un istem liniar

Condiționarea unui sisten liniar

condiționare

Exemple de matrice prost

ondiționate

letode iterati

Rezultate utile Introducere

Convergența și delimitare

etode concret

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi

Metoda Gauss-Sei

O matrice se numeşte

- ightharpoonup normală, dacă $AA^* = A^*A$
- ightharpoonup unitară, dacă $AA^* = A^*A = I$
- ightharpoonup ortogonală, dacă $AA^T = A^TA = I$. A reală
- hermitiană, dacă $A^* = A$
- ightharpoonup simetrică, dacă $A^T = A$. A reală
- ▶ O normă matricială este o aplicație $\|\cdot\|: \mathbb{C}^{m\times m} \to \mathbb{R}$, care pentru orice matrice A, B și orice scalar $\alpha \in \mathbb{C}$ verifică

(NM1)
$$||A|| \ge 0$$
, $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
(NM2) $||\alpha A|| = |\alpha| ||A||$
(NM3) $||A + B|| \le ||A|| + ||B||$
(NM4) $||AB|| \le ||A|| ||B||$

Norme matriciale - exemple

▶ fiind dată o normă vectorială $\|\cdot\|$ pe \mathbb{C}^n , aplicația $\|\cdot\|:\mathbb{C}^{m\times n}\to\mathbb{R}$

$$||A|| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ v \neq 0}} \frac{||Av||}{||v||} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ ||v|| \leq 1}} ||Av|| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ ||v|| = 1}} ||Av||$$

este o normă matricială numita normă matricială subordonată (normei vectoriale date) sau normă indusă (de norma vectorială) sau normă naturală.

- lacktriangle Orice normă subordonată verifică $\|I\|=1$
- Un exemplu important de normă nesubordonată (neindusă) este norma Frobenius

$$||A||_F = \left(\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = (tr(A^*A))^{1/2}.$$

 $\|I\|_F=\sqrt{n}$, deci norma Frobenius nu este subordonată \sqrt{n}

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

Analiză matricia

Norme matriciale

Exemple de norme
matriciale

Condiționarea unui sistem liniar

Estimarea numărului de condiționare

Rezultate utile Introducere

Convergența și delimitare: erorii

Vietode concreti Rafinarea iterativă

Metoda Gauss-Se Metoda relaxării

Norme induse clasice

Teoremă

Fie $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Atunci

$$\begin{split} \|A\|_1 &= \sup_{v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}| \\ \|A\|_2 &= \sup_{v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2 \\ \|A\|_{\infty} &= \sup_{v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_{\infty}}{\|v\|_{\infty}} = \max_i \sum_j |a_{ij}| \end{split}$$

Dacă A este normală $(AA^* = A^*A)$, atunci $||A||_2 = \rho(A)$.

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Analiză matricial

Norme matriciale

Exemple de norme
matriciale

Condiționarea unui

liniar

Exemple de matrice prost

Netode iterative

ezultate utile troducere onvergența și delimita

etode concret

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi

Metoda Gauss-Seid Metoda relaxării

Exemple

Fie matricele

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Normele uzuale ale lui A și B vor fi

$$\|A\|_1 = 5$$
, $\|A\|_{\infty} = 6$, $\|A\|_2 = \frac{\sqrt{29} + \sqrt{17}}{2} \approx 4.7541$, $\|A\|_F = \sqrt{23}$ $\|B\|_1 = 6$, $\|B\|_{\infty} = 7$, $\|B\|_2 \approx 42986$, $\|B\|_F = 2\sqrt{7}$.

Analiză matricială si conditionarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Exemple de norme matriciale

Condiționarea unui sistem liniar 1

- ► Care este condiționarea problemei: dându-se $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ și $b \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ să se rezolve sistemul Ax = b.
- Considerăm exemplul (Wilson)

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

Analiză matricială

Exemple de norm

Condiționarea unui sistem liniar

Condiționarea unui sistem liniar

ondiționare xemple de matrice prost

letode iterativ

tezuitate utile

Convergența și delimitare rorii

letode concret

Metoda lui Jacobi

Condiționarea unui sistem liniar

Condiționarea unui sistem liniar

condiționare

Exemple de matrice prost

Metode iterative

Introducere
Convergența și delimitare

Metode concret Rafinarea iterativă

Metoda lui Jacobi Metoda Gauss-Seid

Metoda Gauss-Sei Metoda relaxării

Perturbăm membrul drept

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \\ x_4 + \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{bmatrix}$$

- ▶ soluția $\begin{bmatrix} 9.2 & -12.6 & 4.5 & -1.1 \end{bmatrix}^T$.
- ightharpoonup o eroare (relativă) de 1/200 în date \longrightarrow eroare relativă de 10/1 (amplificare a erorii relative de 2000 de ori)

Condiționarea unui sistem liniar 3

Perturbăm matricea

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 9.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \\ x_4 + \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

- ▶ soluția [-81 137 -34 22] ^T .
- Din nou, o variație mică în datele de intrare modifică complet rezultatul
- ► Matricea are un aspect "bun", ea este simetrică, determinantul ei este 1, iar inversa ei este

$$\begin{bmatrix}
25 & -41 & 10 & -6 \\
-41 & 68 & -17 & 10 \\
10 & -17 & 5 & -3 \\
-6 & 10 & -3 & 2
\end{bmatrix}$$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

Norme matriciale Exemple de norme

Condiționarea unui istem liniar

Condiționarea unui sistem liniar Estimarea numărului de

condiționare

Exemple de matrice prost
conditionate

/letode iterat

Rezultate utile ntroducere Convergența și delimit

letode concret

Metoda lui Jacobi Metoda Gauss-Seid Considerăm sistemul parametrizat, cu parametrul t

$$(A + t\Delta A)x(t) = b + t\Delta b, \qquad x(0) = x^*.$$

- ► A nesingulară \Longrightarrow funcția x este diferențiabilă în t=0 și $x'(0) = A^{-1} (\Delta b \Delta A x^*)$.
- ightharpoonup Dezvoltarea Taylor a lui x(t) este

$$x(t) = x^* + tx'(0) + O(t^2).$$

Estimarea erorii absolute

$$\|\Delta x(t)\| = \|x(t) - x^*\| \le |t| \|x'(0)\| + O(t^2)$$

$$\le |t| \|A^{-1}\| (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \|x^*\|) + O(t^2)$$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaș

Analiză matricială

Norme matriciale Exemple de nom matriciale

Condiționarea unui sistem liniar

liniar

Fetimarea numărului de

Estimarea numărului de condiționare

condiționate

Metode iterativ

troducere onvergența și delimita

etode concre

Metoda lui Jacobi Metoda Gauss-Seide

Estimarea numărului de condiționare 2

▶ din $||b|| \le ||A||||x^*||$ obţinem pentru eroarea relativă

$$\begin{split} \frac{\|\Delta x(t)\|}{\|x^*\|} &\leq |t| \, \|A^{-1}\| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x^*\|} + \|\Delta A\| \right) + O(t^2) \\ &\leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \, |t| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right) + O(t^2) \end{split}$$

Introducem notaţiile

$$\rho_A(t) = |t| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \quad \rho_b(t) = |t| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

și putem scrie pentru eroarea relativă

$$\frac{\|\Delta x(t)\|}{\|x^*\|} \le \|A\| \|A^{-1}\| \left(\rho_A(t) + \rho_b(t)\right) + O(t^2) \quad (1)$$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Analiză matric

Norme matriciale Exemple de nom matriciale

Condiționarea unui sistem liniar

liniar Estimarea numărului de

condiționare Exemple de matrice prost

Metode iterativ

ezultate utile itroducere onvergența și delimi

letode concre

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi Metoda Gauss-Seidel



Estimarea numărului de condiționare 3

Definiție

Dacă A este nesingulară, numărul

$$cond(A) = ||A|| ||A^{-1}||$$
 (2)

se numește număr de condiționare al matricei A. Dacă A este singulară, $cond(A) = \infty$.

Relația (1) se poate scrie sub forma

$$\frac{\|\Delta x(t)\|}{\|x^*\|} \le \operatorname{cond}(A) \left(\rho_A(t) + \rho_b(t)\right) + O(t^2)$$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Analiză matricială

Norme matricial Exemple de norr matriciale

Condiționarea unui sistem liniar

Condiționarea unui sistem iniar

Estimarea numărului de condiționare

Exemple de matrice prost condiționate

Metode iterati

Introducere

onvergența și delimitare rorii

etode concret

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi

Metoda Gauss-S Metoda relaxării

Exemple de matrice prost condiționate

Matricea lui Hilbert $H_m = (h_{ij})$ cu $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Szegő a demonstrat

cond₂(
$$H_m$$
) = $\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{4m+4}}{2^{14/4}\sqrt{\pi m}}$.

$$\frac{m}{\text{cond}_2(H_m)}$$
 | 10 | 20 | 40 | $\frac{1.6 \cdot 10^{13}}{1.6 \cdot 10^{13}}$ | 2.45·10²⁸ | 7.65·10⁵⁸

- Matricea Vandermonde $V = (v_{ij}), v_{ij} = t_j^{i-1}, i, j = 1, ..., m$
 - lack elemente echidistante în [-1,1]

$$cond_{\infty}(V_m) \sim \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\pi}{4}} e^{m\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\right)}$$

 $ightharpoonup t_j = 1/j, j = 1, ... m: cond_{\infty}(V_m) > m^{m+1}.$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

Analiză matrici

Norme matriciale Exemple de norm matriciale

Condiționarea unui sistem liniar

liniar Estimarea numărului de

Exemple de matrice prost condiționate

letode iterative

ntroducere Convergența și delimitare Prorii

etode concre

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi Metoda Gauss-Seidel





David Hilbert (1862-1943)



Gábor Szegő (1895-1985)

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

Analiză matricială

Norme matriciale

Exemple de norme

Condiționarea unui sistem liniar

liniar

Exemple de matrice prost conditionate

Consideration and the

etode iterative

onvergența și delimitarea rorii

etode concret

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi

Metoda gauss-se Metoda relaxării

Un rezultat util

Teoremă

(1) Fie A o matrice pătratică oarecare și ∥·∥ o normă matricială oarecare (indusă sau nu). Atunci

$$\rho(A) \leq ||A||$$
.

(2) Fiind dată o matrice A și un număr $\varepsilon > 0$, există cel puțin o normă matricială subordonată astfel încât

$$||A|| \le \rho(A) + \varepsilon$$
.

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

Analiză matri

Norme matricia Exemple de nor

> londiționarea un Istem liniar

Condiționarea unui sister liniar

condiționare Exemple de matrice prost

etode iterativ

Rezultate utile

ntroducere onvergenta si delimit

tode concret

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi



Demonstrație. (1) Fie p un vector propriu dominant, adică $p \neq 0$, $Ap = \lambda p$ și $|\lambda| = \rho(A)$ și q un vector astfel încât $pq^* \neq 0$. Dar

$$ho(A)\left\lVert pq^* \right\lVert = \left\lVert \lambda pq^* \right\lVert = \left\lVert Apq^* \right\lVert \leq \left\lVert A \right\lVert \left\lVert pq^* \right\lVert$$
 ,

de unde prima parte.

(2) $\exists U$ unitară a.î. $U^{-1}AU$ este triunghiulară superior, și are valorile proprii ale lui A pe diagonală

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1m} \\ & \lambda_2 & t_{23} & \cdots & t_{2m} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_{m-1} & t_{m-1,m} \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

Fiecărui scalar $\delta \neq 0$ îi asociem matricea $D_{\delta} = diag(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{m-1}),$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaș

naliză matricială

Exemple de norm

Condiționarea unui sistem liniar

liniar
Estimarea numărului de

Exemple de matrice pros condiționate

etode iterative

Rezultate utile

ntroducere Convergența și delimita

etode concre

Metoda lui Jacobi Metoda Gauss-Seid



astfel ca

$$(UD_{\delta})^{-1} A (UD_{\delta}) = \begin{bmatrix} \lambda_{1} & \delta t_{12} & \delta^{2} t_{13} & \cdots & \delta^{m-1} t_{1m} \\ & \lambda_{2} & \delta t_{23} & \cdots & \delta^{m-2} t_{2m} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_{m-1} & \delta t_{m-1,m} \\ & & & \lambda_{m} \end{bmatrix}$$

Pentru ε dat, fixăm δ a.î. $\sum_{j=i+1}^{m} \left| \delta^{j-i} t_{ij} \right| \leq \varepsilon$, $i = 1, \dots, m-1$.

Atunci aplicația

$$\|\cdot\|: B \in \mathbb{C}^{m \times m} \mapsto \|B\| = \|(UD_{\delta})^{-1} B (UD_{\delta})\|_{\infty}$$

îndeplinește condițiile problemei. Într-adevăr, datorită alegerii lui δ și definiției $\|\cdot\|_{\infty}$

$$||A|| < \rho(A) + \varepsilon$$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaș

naliză matric

Norme matriciale Exemple de norme matriciale

Condiționarea unui istem liniar

liniar Estimarea numărului de

Exemple de matrice prost conditionate

letode iterati

Rezultate utile

Introducere

Convergența și delimitarea erorii

etode concret

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi

$$v \in \mathbb{C}^m \mapsto \left\| \left(\mathit{UD}_d \right)^{-1} v \right\|_{\infty}.$$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaș

Analiză matricială

Norme matriciale Exemple de norme

Condiționarea unui sistem liniar

Condiționarea unui sister liniar

Estimarea numărului de condiționare

Exemple de matrice prost

Aetode iterativ

Rezultate utile

itroducere

Convergența și delimitarea erorii

etode concrete

Rafinarea iterativ Metoda lui Jacol

Metoda Gauss-Seide

Un alt rezultat util

Teoremă

Fie B o matrice pătratică de ordin m. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (1) $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$
- (2) $\lim_{k\to\infty} B^k v = 0, \ \forall v \in \mathbb{C}^m$
- (3) $\rho(B) < 1$
- (4) Există o normă matricială subordonată $\|\cdot\|$, astfel încât $\|B\| < 1$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaș

Analiză matricială

Norme matriciale

Exemple de norme

Condiționarea unui istem liniar

liniar

Exemple de matrice prost

Metode iterati

Rezultate utile

ntroducoro

onvergența și delimita

tode concret

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi

Metoda Gauss-Se Metoda relaxării **Demonstrație.** (1) \Longrightarrow (2) $\|B^kv\| \le \|B^k\| \|v\| \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} B^kv = 0$ (2) \Longrightarrow (3) Dacă $\rho(B) \ge 1$, putem găsi un p astfel încât $p \ne 0$, $Bp = \lambda p$, $|\lambda| \ge 1$. Deoarece $B^kp = \lambda^k p$, șirul de vectori $(B^kp)_{k\in\mathbb{N}}$ ar putea să nu conveargă către 0. (3) \Longrightarrow (4) Din teorema 3 avem $\rho(B) < 1 \Longrightarrow \exists \|\cdot\|$ astfel încât $\|B\| \le \rho(B) + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, deci $\|B\| < 1$. (4) \Longrightarrow (1) $\|B^k\| < \|B\|^k \to 0$, dacă $\|B\| < 1$.

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaș

Analiză matricială

Norme matricia Exemple de nor

Condiționarea unui sistem liniar

liniar
Estimarea numărului de

condiționare Exemple de matrice pros

letode iterati

Rezultate utile

l-t---du----

ntroducere

Convergența și delimitare erorii

1etode concre

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi

Metoda Iui Jacob

Metoda Gauss-a

Introducere

 Pentru A nesingulară, presupunem că putem reduce rezolvarea lui

$$Ax = b \tag{3}$$

la rezolvarea problemei de punct fix

$$x = Tx + c, (4)$$

unde T este o matrice, c este un vector, I - T este inversabilă și punctul fix al lui (4) concide cu soluția x^* a lui (3).

Definim metoda iterativă prin: se ia un $x^{(0)}$ arbitrar și se definește șirul $\left(x^{(k)}\right)$ prin

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c. (5)$$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

Analiză matrici

Norme matriciale Exemple de norm matriciale

ondiționarea unui stem liniar

.ondiționarea unui sistem iniar ictimarea numărului de

condiționare

Exemple de matrice prost

Metode iterativ

Introducere

Convergența și delimitarea erorii

etode concret

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi

Dacă
$$ho(X) < 1$$
, există $(I - X)^{-1}$ și

$$(I - X)^{-1} = I + X + X^{2} + \dots + X^{k} + \dots$$

Demonstratie. Fie $S_k = I + X + X^2 + \cdots + X^k$. Deoarece

$$(I-X)S_k = I - X^{k+1},$$

avem

$$\lim_{k\to\infty} (I-X)S_k = I \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} S_k = (I-X)^{-1},$$

căci
$$X^{k+1} \to 0 \Longleftrightarrow \rho(X) < 1$$
.

Analiză matricială si conditionarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Introducere

Convergența

Teoremă

U.a.s.e.

- (1) metoda (5) este convergentă
- (2) $\rho(T) < 1$
- (3) ||T|| < 1 pentru cel puțin o normă matricială

Demonstratie.

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c = T(Tx^{(k-2)} + c) + c$$
$$= T^{(k)}x^{(0)} + (I + T + \dots + T^{k-1})c$$

(5) convergentă \iff (I-T) inversabilă \iff $\rho(T) < 1 \iff \exists \|\cdot\| \text{ a.î. } \|T\| < 1 \text{ (teorema 4).} \blacksquare$ Analiză matricială si conditionarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Convergenta si delimitarea emrii

Delimitarea erorii

Aplicând teorema de punct fix a lui Banach obținem

Teoremă

Dacă există $\|\cdot\|$ a.î. $\|T\| < 1$, șirul $\left(x^{(k)}\right)$ definit de (5) este convergent pentru orice $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ și au loc delimitările

$$\begin{aligned} \left\| x^* - x^{(k)} \right\| &\leq \left\| T \right\|^k \left\| x^{(0)} - x^* \right\| \\ \left\| x^* - x^{(k)} \right\| &\leq \frac{\left\| T \right\|^k}{1 - \left\| T \right\|} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\| \\ &\leq \frac{\left\| T \right\|}{1 - \left\| T \right\|} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|. \end{aligned}$$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaș

Analiză matricia

Norme matriciale

Exemple de norme
matriciale

Condiționarea unui istem liniar

liniar Estimarea numărului de

Exemple de matrice prost

letode iterativ

Rezultate util Introducere

Convergența și delimitarea erorii

Metode concre

Rafinarea iterativ Metoda lui Jacob

> Metoda Gauss-S Metoda relaxării

Criteriul de oprire

Criteriul de oprire

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \le \frac{1 - \|T\|}{\|T\|} \varepsilon.$$
 (6)

Propoziție

Dacă x^* este soluția sistemului (3) și ||T|| < 1, atunci

$$\|x^* - x^{(k)}\| \le \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$
 (7)

Analiză matricială si conditionarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Convergenta si delimitarea emrii

Demonstrația criteriului I

Demonstrație. $\forall p \in \mathbb{N}^*$ avem

$$||x^{(k+p)} - x^{(k)}|| \le ||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| + \dots + ||x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)}||$$
(8)

Din (5) rezultă

$$||x^{(m+1)} - x^{(m)}|| \le ||T|| ||x^{(m)} - x^{(m-1)}||$$

sau pentru k < m

$$||x^{(m+1)} - x^{(m)}|| \le ||T||^{m-k-1} ||x^{(k)} - x^{(k-1)}||.$$

Aplicând aceste inegalități, pentru $m=k,\ldots,k+p-1$, relația (8) devine

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Analiză matricială

Norme matricial Exemple de nom matriciale

Condiționarea unui sistem liniar

liniar Estimarea numărului de

Exemple de matrice prost condiționate

Rezultate utile

Convergența și delimitarea erorii

Metode concre

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi Metoda Gauss-Seidel



Demonstrația criteriului II

$$\begin{aligned} \left\| x^{(k+p)} - x^{(k)} \right\| &\leq (\|T\| + \dots + \|T\|^p) \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \\ &\leq (\|T\| + \dots + \|T\|^p + \dots) \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \end{aligned}$$

de unde, deoarece ||T|| < 1

$$||x^{(k+p)} - x^{(k)}|| \le \frac{||T||}{1 - ||T||} ||x^{(k)} - x^{(k-1)}||,$$

din care prin trecere la limită în raport cu p se obține (7). \blacksquare Dacă $\|T\| \leq \frac{1}{2}$, inegalitatea (7) devine

$$||x^* - x^{(k)}|| \le ||x^{(k)} - x^{(k-1)}||$$
,

iar criteriul de oprire

$$\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|<\varepsilon.$$

condiționare

Norme matriciale Exemple de norme

Analiză matricială

și condiționarea unui sistem liniar Radu Trîmbitas

Condiționarea unui

Condiționarea unui sisten liniar

condiționare

Exemple de matrice prost
conditionate

Vietode iterativ Rezultate utile

Rezultate utile ntroducere

Convergența și delimitarea erorii

Metode concre

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi Metoda Gauss-Seidel



Rafinarea iterativă

Dacă metoda de rezolvare pentru Ax = b este nestabilă, atunci $A\overline{x}_1 \neq b$, unde \overline{x}_1 este valoarea calculată. Vom calcula corecția Δx_1 astfel încât

$$A(\overline{x} + \Delta x_1) = b \Longrightarrow A\Delta x_1 = b - A\overline{x}$$

Se rezolvă sistemul și se obține un nou \overline{x} , $\overline{x}_2 = \overline{x}_1 + \Delta x_1$. Dacă din nou $A\overline{x}_2 \neq b$, se calculează o nouă corecție până când

$$\|\Delta x_i - \Delta x_{i-1}\| < \varepsilon$$
 sau $\|b - A\overline{x}_i\| < \varepsilon$

► Calculul vectorului $r_i = b - A\overline{x}_i$, numit reziduu, se va efectua în dublă precizie.

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

Analiză matricială

Norme matricia Exemple de noi matriciale

Condiționarea unui sistem liniar

liniar Estimarea numărului de

Exemple de matrice prost

letode iterativ

ezultate utile itroducere onvergența și delimi

rorii

/letode concre

Rafinarea iterativă

Metoda Gauss-Seid



Metode concrete

- Fie sistemul Ax = b, A inversabilă.
- Scriem A sub forma A = M N, unde M este ușor de inversat (diagonală, triunghiulară, etc.)

$$Ax = b \iff Mx = Nx + b \iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

- ▶ Ultima ecuație are forma x = Tx + c, unde $T = M^{-1}N$ și $c = M^{-1}b$.
- Obţinem iteraţiile

$$x^{(0)} = \text{arbitrar}$$

 $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b.$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Analiză matricială

Norme matriciale

Condiționarea unui sistem liniar

Condiționarea unui sistem liniar

condiționare

Exemple de matrice prost

Metode iterative

zultate utile roducere

nvergența și delimitare rii

etode concret

Rafinarea iterativă

Metoda lui Jacol

Metoda Gauss-S Metoda relaxării

Metoda lui Jacobi

Considerăm descompunerea A = D - L - U, unde D = diag(A), L = -tril(A, -1), U = -triu(A, 1).

- ightharpoonup Se ia M=D, N=L+U.
- Se obţine $T = T_J = D^{-1}(L + U)$, $c = c_J = D^{-1}b$.
- Metoda se numește metoda lui Jacobi
- ▶ Pe componente

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \ j \neq i}}^m a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), i = 1, \dots m, k = 1, 2, \dots$$

substituţia simultană

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaș

Analiză matricială

Exemple de norr matriciale

Condiționarea unui sistem liniar

liniar
Estimarea numărului de

condiționare Exemple de matrice prost

letode iterati

Rezultate utile Introducere Convergența și delimita

etode concreto afinarea iterativă

Metoda lui Jacobi

Metoda Gauss-Seid

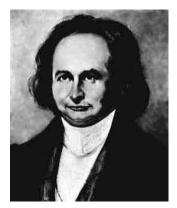


Figura: Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

Analiză matricială

Norme matriciale Exemple de norme

Condiționarea unui

Condiționarea unui sistem liniar

condiționare

exemple de matrice prost condiționate

letode iterativ

Introducere

Convergența și delimitare erorii

letode concret

Metoda lui Jacobi

Metoda Gauss-Seid

Metoda Gauss-Seidel

- ▶ În descompunerea A = D L U, se ia M = D L, N = U
- ► Se obţine $T = T_{GS} = (D L)^{-1}U$, $c_{GS} = (D L)^{-1}b$.
- Metoda Gauss-Seidel
- pe componente

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right),$$

$$i = 1, \dots, m, \ k = 1, 2, \dots$$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Analiză matricială

Norme matricial Exemple de norr

Condiționarea unui

Condiționarea unui sister liniar

condiționare Exemple de matrice prost

letode iterativ

Rezultate utile ntroducere

rorii

etode concret

Metoda lui Jacobi

Metoda Gauss-Seidel

Metoda Gauss-Seidel

Pornim de la iteratiile Jacobi

$$x_i^{(k)} = rac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \ i
eq i}}^m a_{ij} x_j^{(k-1)}
ight), \quad i = 1, \dots m, \; k = 1, 2, \dots$$

b deoarece $x_i^{(k-1)}$, j < i au fost deja actualizate le folosim în iteratie

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right),$$
 $i = 1, \dots m, \quad k = 1, 2, \dots$

Metoda relaxării

Putem îmbunătăți metoda Gauss-Seidel introducând un parametru ω și alegând

$$M = \frac{1}{\omega}D - L$$

Avem

$$A = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right) - \left(\frac{1 - \omega}{\omega}D + U\right)$$

► Se obţine

$$T = T_{\omega} = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \left(\frac{1 - \omega}{\omega}D + U\right)$$
$$= (D - \omega L)^{-1} \left((1 - \omega)D + \omega U\right)$$
$$c = c_{\omega} = (D - \omega L)^{-1} \omega b$$

ightharpoonup variante: subrelaxare $\omega < 1$, suprarelaxare $\omega > 1$, Gauss-Seidel $\omega = 1$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

Analiză matric

Norme matriciale Exemple de norm matriciale

Condiționarea unui sistem liniar

iniar Estimarea numărului de

condiționare

Exemple de matrice prost conditionate

Metode iterat

ntroducere onvergența și delimita rorii

etode concre

Metoda lui Jacobi Metoda Gauss-Seide

Metoda relaxării II

▶ Justificarea: pentru a accelera convergența metodei Gauss-Seidel, $x^{(k)}$ va fi media ponderată între $x^{(k-1)}$ și $x^{(k)}$ al metodei Gauss-Seidel

$$x^{(k)} = (1 - \omega)x^{(k-1)} + \omega x_{GS}^{(k)}$$

Folosind acum formula pe componente pentru metoda Gauss-Seidel, se obține următoarea expresie pe componente pentru metoda relaxării

$$\begin{aligned} x_{i}^{(k)} &= (1 - \omega) \, x_{i}^{(k-1)} + \\ &\frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_{i} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_{j}^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_{j}^{(k-1)} \right). \end{aligned}$$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Analiză matricială

Exemple de norr matriciale

Condiționarea unui sistem liniar

liniar Estimarea numărului de

Exemple de matrice pros conditionate

etode iterati

ezultate utile troducere onvergența și delimita

tode concret

Metoda lui Jacobi

Convergența metodei relaxării

Teoremă (Kahan)

Dacă $a_{ii} \neq 0$, $i=1,\ldots,n$, $\rho(T_{\omega})<|\omega-1|$. De aici rezultă că $\rho(T_{\omega})<1\Longrightarrow 0<\omega<2$ (condiție necesară).

Teoremă (Ostrowski-Reich)

Dacă A este o matrice pozitiv definită și $0 < \omega < 2$, atunci SOR converge pentru orice alegere a aproximației inițiale $x^{(0)}$.

Valoarea optimă a parametrului relaxării este

$$\omega_O = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\rho(T_J))^2}}.$$

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Analiză matricială

Norme matricial Exemple de non matriciale

Condiționarea un istem liniar

Condiționarea unui sister liniar Estimarea numărului de

Exemple de matrice prost

etode iterative

zultate utile troducere

nvergența și delimitare. orii

etode concret

Metoda lui Jacobi

Convergența metodelor Jacobi și Gauss-Seidel

 Condiția necesară și suficientă de convergență pentru o metodă iterativă staționară este

$$\rho(T) < 1$$

- $lackbox{ O condiție suficientă este: } \|T\| < 1$, pentru o anumită normă
- Pentru metoda lui Jacobi (și Gauss-Seidel) avem următoarele două condiții suficiente de convergență

$$|a_{ii}| \ge \sum_{\substack{j=1 \ j \ne i}}^m |a_{ij}|$$

 $|a_{ii}| \ge \sum_{j=1}^m |a_{ji}|$

(diagonal dominanță pe linii și respectiv pe coloane)

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

knaliză matrici

Norme matriciale Exemple de nom

> Condiționarea unui istem liniar

liniar Estimarea numărului de

Exemple de matrice prost

Metode itera

ezultate utile ntroducere onvergența și delimit

Metode concret

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi

Bibliografie I

- Octavian Agratini, Ioana Chiorean, Gheorghe Coman, Trîmbiţaş Radu, Analiză numerică şi teoria aproximării, vol. III, Presa Universitară Clujeană, 2002, coordonatori D. D. Stancu şi Gh. Coman.
- R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. van der Vorst, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, 2nd ed., SIAM, Philadelphia, PA, 1994, disponibila prin www, http://www.netlib.org/templates.
- James Demmel, Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 1997.
- H. H. Goldstine, J. von Neumann, *Numerical inverting of matrices of high order*, Amer. Math. Soc. Bull. **53** (1947), 1021–1099.

Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş

Analiză matric

Norme matriciale Exemple de norm matriciale

Condiționarea unu sistem liniar

liniar Estimarea numărului de

Exemple de matrice procondiționate

Rezultate utile

troducere onvergența și delimita orii

tode concret

Rafinarea iterativă Metoda lui Jacobi Metoda Gauss-Seidel

Bibliografie II

- Gene H. Golub, Charles van Loan, Matrix Computations, 3rd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- C. G. J. Jacobi, Über eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen, Astronomische Nachrichten 22 (1845), 9–12, Issue no. 523.
- N. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sidney, 1996, disponibila prin www, http://www.nr.com/.

Analiză matricială si conditionarea unui sistem liniar

Radu Trîmbitas

Bibliografie III

Y. Saad, Iterative Methods for Sparse Linear Systems, PWS Publishing, Boston, 1996, disponibilă via www la adresa http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html.

Lloyd N. Trefethen, David Bau III, Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 1996.

Analiză matricială și conditionarea unui sistem liniar

Radu Trîmbiţaş