

Formula lui Taylor și aplicații

O cărămidă importantă a analizei numerice

Radu T. Trîmbițaș

UBB

28 februarie 2022

- Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(I)$, $a \in \text{int}(I)$. Dorim să găsim un polinom P de grad minim care să verifice condițiile

$$P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), \dots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \quad (1)$$

- Căutăm P sub forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n \quad (2)$$

Polinomul lui Taylor II

- Din (1) și (2) obținem

$$P(a) = a_0 = f(a)$$

$$P'(a) = a_1 = f'(a)$$

$$\vdots$$

$$P^{(k)}(a) = k!a_k = f^{(k)}(a)$$

$$\vdots$$

$$P^{(n)}(a) = n!a_n = f^{(n)}(a),$$

de unde rezultă

$$a_0 = f(a), a_1 = f'(a), \dots, a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (3)$$

Polinomul lui Taylor III

- **Unicitatea:** presupunem că există $Q \neq P$ care verifică (1). Notăm $H := P - Q$. Obținem

$$H(a) = 0, H'(a) = 0, \dots, H^{(n)}(a) = 0,$$

adică $H \equiv 0$ (H identic nul)

- De ce se pune condiția P de grad minim?
- P se va numi **polinomul lui Taylor** de gradul n , atașat funcției f în punctul a și se va nota cu $(T_n f)(x)$

Formula lui Taylor

- I interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de n ori în punctul $a \in I$.
Polinomul lui Taylor de gradul n , atașat funcției f în punctul a :

$$(T_n f)(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

- **Restul** de ordinul n al formulei lui Taylor în punctul x

$$(R_n f)(x) = f(x) - (T_n f)(x)$$

- **formula lui Taylor** de ordinul n pentru funcția f în vecinătatea punctului a :

$$f(x) = (T_n f)(x) + (R_n f)(x)$$

sau

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (R_n f)(x)$$

Expresii ale restului

- Are loc

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} \omega(x), \text{ cu } \lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0.$$

- Dacă $f \in C^{n+1}(I)$, atunci $\exists \theta \in (0, 1)$ astfel încât

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}$$

(restul în forma Lagrange)

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^{n+1} (1-\theta)^n f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{n!}$$

(restul în forma Cauchy)

$$(R_n f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

(restul în formă integrală)

Demonstrația expresiei restului I

- Pornim de la expresia restului și o integrăm prin părți de n ori

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \Big|_a^x + \int_a^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\&= -f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n-1)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \Big|_a^x + \int_a^x f^{(n-1)}(t) \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} dt \\&\vdots \\&= -f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} - f^{(n-1)}(a) \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} - \dots - f'(a) \frac{x-a}{1!} + \int_a^x f'(t) dt \\&= -f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} - f^{(n-1)}(a) \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} - \dots - f'(a) \frac{x-a}{1!} + f(x) - f(a)\end{aligned}$$

Demonstrația expresiei restului II

- de aici se obține

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{(R_n f)(x)}$$

- Pentru a obține forma Lagrange a restului folosim teorema a doua de medie a calculului integral: fie $u, v : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, u, v continue și u are semn constant pe $[\alpha, \beta]$. Atunci există $\xi \in [\alpha, \beta]$ astfel încât

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(t)v(t) dt = v(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} u(t) dt$$

Demonstrația expresiei restului III

- Alegând $\alpha = a$, $\beta = x$, $u(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$, $v(t) = f^{(n+1)}(t)$ vom obține

$$\begin{aligned}(R_n f)(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right] \Big|_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}\end{aligned}$$

Dacă $f \in C^{n+1}(I)$, dezvoltând $f(x+h)$ în jurul lui x ,

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + (R_n f)(x),$$

iar o formă pentru rest este

$$(R_n f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1},$$

unde ξ este între x și $x+h$.

Formula lui Maclaurin

- Dacă în formula lui Taylor se ia $a = 0$, se obține formula lui Maclaurin

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + (R_nf)(x),$$

unde

$$(R_nf)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x), \quad \theta \in (0, 1).$$

- Exemple de dezvoltări uzuale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x); \quad (4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x); \quad (5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x); \quad (6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(x); \quad (7)$$

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \cdots + \binom{k}{n}x^n + R_n(x), \quad (8)$$

unde

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}.$$



Brook Taylor (1685-1731)



Colin Maclaurin (1698-1768)

Problemă

Să se scrie formula lui MacLaurin pentru funcția $f : [-a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{a+x}$, $a > 0$.

Soluție. Scriem $f(x) = \sqrt{a+x} = \sqrt{a} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; se obține

$$f(x) = \sqrt{a} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{x}{a} + (-1)^1 \frac{1}{2^2} \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + (-1)^2 \frac{1}{2^3} \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{n! 2^n} \left(\frac{x}{a}\right)^n + (R_n f)(x) \right].$$

■

Problemă

Să se determine numărul natural n astfel ca pentru $a = 0$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $T_n f$ să aproximeze f în $[-1, 1]$ cu trei zecimale exacte.

Soluție. Impunem condiția $|(R_n f)(x)| = \left| \frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!} \right| < 10^{-3}$. Deoarece $\theta x < 1$, $e^{\theta x} < e < 3$, avem

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \Rightarrow n = 6.$$

În particular, luând $x = 1$, obținem

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{6!} \right) < \frac{1}{1000}.$$

■

Problemă

Să se aproximeze $\sqrt[3]{999}$ cu 12 zecimale exacte.

Soluție. Avem

$$\sqrt[3]{999} = 10 \left(1 - \frac{1}{1000} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Folosim formula (8) pentru $k = 1/3$, $x = -\frac{1}{1000}$. Într-o serie alternată modulul erorii este mai mic decât modulul primului termen neglijat.

$$|(R_n f)(x)| < \left| \binom{\frac{1}{3}}{n} 10^{-3n} \right|.$$

Pentru $n = 4$, avem

$$|(R_n f)(x)| < \frac{10}{243} 10^{-12} = \frac{1}{2430000000000} = 4.1152 \times 10^{-14}. \blacksquare$$

Formula lui Taylor bidimensională

- Pentru o funcție $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, o expresie a formulei lui Taylor este

$$f(a+h, b+k) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(a, b) + R_n(h, k) \quad (9)$$
$$R_n(h, k) = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(a + \theta h, b + \theta k),$$

cu $\theta \in (0, 1)$. Semnificația termenilor diferențiali este

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^0 f(a, b) = f(a, b)$$

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^1 f(a, b) = \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) (a, b)$$

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) = \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (a, b).$$

Teorema următoare precizează condițiile de aplicabilitate ale formulei (9).

Teoremă

Dacă toate derivatele parțiale de ordinul $n + 1$ ale lui f sunt continue în dreptunghiul definit de $|x - a| \leq |h|$ și $|y - b| \leq k$, atunci există $\theta \in (0, 1)$ pentru care are loc (9).

Problemă

Scriveți dezvoltarea Taylor a lui $f(x, y) = \cos xy$, pentru $n = 1$.

Soluție. Aplicând formula (9) se obține

$$\cos[(a + h)(b + k)] = \cos ab - (hb + ak) \sin ab + R_1(h, k),$$

unde R_1 este suma a trei termeni




$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} h^2 (b + \theta k)^2 \cos [(a + \theta h)(b + \theta k)] \\ & - hk \{ (a + \theta h)(b + \theta k) \cos [(a + \theta h)(b + \theta k)] + \sin [(a + \theta h)(b + \theta k)] \} \\ & - \frac{1}{2} k^2 (a + \theta h)^2 \cos [(a + \theta h)(b + \theta k)]. \end{aligned}$$

■

Exemple

- Exemple Maple `exemplTaylor.html`
- Exemple Maple Taylor 2D `taylor2d.html`
- Exemple MATLAB Symbolic Math Toolbox `extaylor.html`

References I

-  W. Cheney, David Kinkaid, *Numerical Mathematics and Computing*, 6th edition, Brooks/Cole, 2008
-  J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Springer Verlag, 1992.
-  C. Ueberhuber, *Numerical Computation. Methods, Software and Analysis*, vol. I, II, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.