

Condiționarea unei probleme

Radu T. Trîmbițaș

6 martie 2022

1 Probleme

1. Fie sistemul (exemplul este datorat lui Wilson)

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

cu soluția $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

- (a) Ce se obține dacă perturbăm membrul drept astfel încât el să devină $\begin{bmatrix} 32.1 & 22.9 & 33.1 & 30.9 \end{bmatrix}$? Care este eroarea relativă la intrare, la ieșire și raportul lor?
- (b) Aceeași întrebare dacă perturbăm matricea sistemului:

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{bmatrix}.$$

Explicați și analizați fenomenul.

2. Să se studieze condiționarea matricei Hilbert H_n în raport cu norma euclidiană, $n = \overline{10, 15}$.
3. (a) Să se studieze condiționarea matricei Vandermonde $V_n(t)$, pentru $t_k = -1 + k \frac{2}{n}$ (puncte echidistante în $[-1, 1]$) și $n = \overline{10, 15}$ în raport cu norma Cebîșev.

(b) Aceeași întrebare pentru $t_k = \frac{1}{k}$, $k = \overline{1, n}$ și $n = \overline{10, 15}$.

4. Să se studieze teoretic și experimental condiționarea problemei determinării rădăcinilor ecuației polinomiale

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

cunoscându-se coeficienții. Se va scrie o rutină pentru calculul numărului de condiționare al fiecărei rădăcini și se va studia grafic efectul perturbării fiecărui coeficient cu o variabilă aleatoare normală cu media 0 și dispersia 10^{-10} . Aplicație pentru ecuațiile

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n) = 0$$

și (1) pentru $a_k = 2^{-k}$. Se va lua ca exemplu practic pentru testare $n = 20$. Ce se întâmplă dacă perturbația urmează legea uniformă?

5. Fie

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx.$$

Se observă că $E_1 = 1/e$ și $E_n = 1 - nE_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$

Se poate arăta că

$$0 < E_n < \frac{1}{n+1}$$

și dacă $E_1 = c$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \begin{cases} 0, & \text{pentru } c = 1/e \\ \infty & \text{altfel.} \end{cases}$$

Explicați fenomenul, găsiți un remediu și calculați e cu precizia eps.

2 Probleme facultative

1. Să se studieze condiționarea unei rădăcini multiple a unei ecuații algebrice. Scrieți o rutină MATLAB pentru calculul numerelor de condiționare dacă se dau ecuația (coeficienții), rădăcinile și multiplicitățile lor. Repetați experimentul aleator de la problema 4 pentru ecuația

$$(x-1)^2(x-2)^2 \dots (x-n)^2 = 0$$