# Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare De aici începe adevărata Analiză numerică

Radu Trîmbiţaş

**UBB** 

10 mai 2021

#### Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

## Radu Trîmbiţaș



$$f(x) = 0, (1)$$

dar admite diverse interpretări, depinzând de semnificația lui x și f.

- Cel mai simplu caz este cel al unei singure ecuații cu o singură necunoscută, caz în care f este o funcție dată de o variabilă reală sau complexă și încercăm să găsim valorile acestei variabile pentru care f se anulează. Astfel de valori se numesc rădăcini ale ecuației (1) sau zerouri ale funcției f.
- Dacă x din (1) este un vector, să zicem  $x = [x_1, x_2, \dots, x_d]^T \in \mathbb{R}^d$  și f este de asemenea un vector ale cărui componente sunt funcții de cele d variabile  $x_1, x_2, \dots, x_d$ , atunci (1) reprezintă un sistem de ecuatii.

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

Ecuatii neliniare

Ordin de onvergență

aisa poziție

/letoda secante

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

uații algebrice

isteme neliniare

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

nterpolare invers



alsa poziție

Metoda Iui Newtor

Metoda aproximațiil succesive

Rădăcini multiple

Ecuații algebric

isteme nelinia

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

nternolare inv

ivietode nibri

Se spune că sistemul este *neliniar* dacă cel puțin una dintre componentele lui f depinde neliniar de cel puțin una din variabilele  $x_1, x_2, \ldots, x_d$ . Dacă toate componentele lui f sunt funcții liniare de  $x_1, \ldots, x_d$  avem de-a face cu un sistem de ecuații algebrice liniare.

- Mai general (1) ar putea reprezenta o ecuație funcțională, dacă x este un element al unui spațiu de funcții și f este un operator (liniar sau neliniar) ce acționează pe acest spațiu. În fiecare din aceste situații zeroul din dreapta lui (1) poate avea diverse interpretări: numărul zero în primul caz, vectorul nul în al doilea și funcția identic nulă în cel de-al treilea.
- Mare parte din acest capitol este consacrată unei ecuații neliniare scalare. Astfel de ecuații apar frecvent în analiza sistemelor în vibrație, unde rădăcinile corespund frecvențelor critice (rezonanță).



## Ecuații neliniare III

► Cazul special al ecuațiilor algebrice, unde *f* din (1) este un polinom, este de importanță considerabilă și merită un tratament special.

Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbiţaș

Ecuații neliniare

Ordin de convergență

Metoda secante

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

... . . . .

teme neliniare

Metode quasi-Newton

Internolare invers

merpolare mvers

Ribliografie

Ü



## Iterații, convergență și eficiență

- Nici chiar cele mai simple ecuații de exemplu cele algebrice - nu admit soluții care să fie exprimabile prin expresii rationale sau radicali.
- Din acest motiv este imposibil, în general, să calculăm rădăcinile ecuațiilor neliniare printr-un număr finit de operații aritmetice. Este nevoie de o metodă iterativă, adică de o procedură care generează o secvență infinită de aproximații  $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha,\tag{2}$$

unde  $\alpha$  este o rădăcină a ecuației.

- In cazul unui sistem  $x_k$  și  $\alpha$  sunt vectori de dimensiune adecvată, iar convergența trebuie înțeleasă în sensul convergenței pe componente.
- În practică, ceea ce se dorește este o convergență rapidă.

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaș

Ecuatii neliniare

# Ordin de convergență

Falsa poziție

.....

Metoda iui Newton

succesive

(adacını multiple

cuații aigebrice

steme neliniar

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

nterpolare inve

Wictode IIIbrit

raisa poziție

Metoda aproximațiilor

Rădăcini multiple

cuații algebrice

teme neliniare

Metode quasi-Newton

Interpolare liniară Metode de modificare

nterpolare inve

Dibliografic

Conceptul de bază pentru măsurarea vitezei de convergență este ordinul de convergență.

## Definiția 1

Spunem că  $x_n$  converge către  $\alpha$  (cel puțin) liniar dacă

$$|x_n - \alpha| \le e_n \tag{3}$$

unde  $\{e_n\}$  este un șir pozitiv ce satisface

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = c, \quad 0 < c < 1. \tag{4}$$

Dacă (3) și (4) au loc cu egalitate în (3) atunci c se numește eroare asimptotică.

Expresia ,,cel puţin " în această definiţie se leagă de faptul că avem doar inegalitate în (3), ceea ce dorim în practică. ▶ De fapt, strict vorbind, marginea e<sub>n</sub> converge liniar, însemnând că, în final (pentru n suficient de mare) fiecare din aceste margini ale erorii este aproximativ o fracţie constantă din precedenta.

## Definiția 2

Se spune că  $x_n$  converge către  $\alpha$  (cel puțin) cu ordinul  $p \ge 1$  dacă (3) are loc cu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n^p}=c,\quad c>0\tag{5}$$

Astfel convergența de ordinul 1 coincide cu convergența liniară, în timp ce convergența de ordinul p>1 este mai rapidă.

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

Ecuatii neliniare

Ordin de convergență

ivietoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

uații algebric

teme neliniar

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

nterpolare inve

ivietode nibr

### Ordin de convergență

Vletoda secantei

Metoda lui Newton

### aproximațiilor succesive

Kādācini multiple

### cuații algebric

Sisteme neliniare

### Metode quasi-Newton

Interpolare liniară Metode de modificare

nterpolare inver

Metode hibrid

- De notat că în acest ultim caz nu se pune nici o restricție asupra constantei c: odată ce e<sub>n</sub> este suficient de mic, exponentul p va avea grijă de convergență. Şi în acest caz, dacă avem egalitate în (3), c se numește eroare asimptotică.
- Aceleași definiții se aplică și șirurilor vectoriale, cu modulul înlocuit cu orice normă vectorială.
- Clasificarea convergenței în raport cu ordinul este destul de rudimentară, deoarece sunt tipuri de convergență la care definițiile (1) și (2) nu se aplică. Astfel, un șir  $\{e_n\}$  poate converge către zero mai încet decât liniar, de exemplu dacă c=1 în (4). Acest tip de convergență se numește subliniară. La fel, c=0 în (4) conduce la convergență superliniară, dacă (5) nu are loc pentru nici un p>1.

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = c, \quad n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$$
 (6)

Pentru  $n_0$  suficient de mare, relația (6) este aproape adevărată. Printr-o simplă inducție se obține că

$$e_{n_0+k} = c^{\frac{p^k-1}{p-1}} e_{n_0}^{p^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$
 (7)

care desigur are loc pentru p>1, dar și pentru p=1 când  $p\downarrow 1$ :

$$e_{n_0+k} = c^k e_{n_0}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad (p = 1)$$
 (8)

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

Ecuatii neliniare

Ordin de convergentă

-alsa pozi

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda iproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

uații algebrice

teme neliniare

Metode quasi-Newton

Interpolare liniară

nterpolare inversa

Metode hibride

- Presupunând că en este suficient de mare astfel încât aproximarea  $x_{n_0}$  are un număr de zecimale corecte, scriem  $e_{n_0+k} = 10^{-\delta_k} e_{n_0}$ .
- Atunci  $\delta_k$ , în conformitate cu (3) reprezintă numărul suplimentar de cifre zecimale corecte din aproximația  $x_{n_0+k}$  (în contrast cu  $x_{n_0}$ ). Logaritmând (7) și (8) obţinem

$$\delta_k = \left\{ \begin{array}{ll} k\log\frac{1}{c}, & \text{dacă } p = 1 \\ p^k \left[\frac{1-p^{-k}}{p-1}\log\frac{1}{c} + (1-p^{-k})\log\frac{1}{e_{n_0}} \right], & \text{dacă } p > 1 \end{array} \right.$$

Deci când  $k \to \infty$ 

$$\delta_k \sim c_1 k \quad (p=1), \quad \delta_k \sim c_p p^k \quad (p>1), \qquad (9)$$

i aisa poziție

Wietoda secanter

Metoda lui Newton

succesive

Kădăcini multiple

uații algebric

isteme nelinia

Metode

Interpolare liniar

netode de modificar

nterpolare inve

B.... 6

unde  $c_1 = \log \frac{1}{c} > 0$ , dacă p = 1 și

$$c_p = \frac{1}{p-1}\log\frac{1}{c} + \log\frac{1}{e_{n_0}}$$

(presupunem că  $n_0$  este suficient de mare și deci  $e_{n_0}$  suficient de mic, pentru a avea  $c_p > 0$ ).

Aceasta ne arată că numărul de cifre zecimale corecte crește liniar odată cu k când p=1, dar exponențial când p>1. În ultimul caz  $\delta_{k+1}/\delta_k\sim p$  înseamnă că (pentru k mare) numărul de cifre zecimale corecte crește, pe iterație, cu un factor p.

raisa poziție

Metoda lui Newton

ivietoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

uatii algebrice

teme neliniar

Metode quasi-Newton

Interpolare liniar Metode de modi

terpolare inver

metode mbi

Bibliografie

Dacă fiecare iterație necesită m unități de lucru (o "unitate de lucru" este efortul necesar pentru a calcula o valoare a funcției sau a unei anumite derivate a sa), atunci indicele de eficiență al iterației poate fi definit prin

$$\lim_{k\to\infty} [\delta_{k+1}/\delta_k]^{1/m} = p^{1/m}.$$

Aceasta ne dă o bază comună de comparare între diversele metode iterative. Metodele liniare au indicele de eficiență 1.

- Calculele practice necesită o regulă de oprire care să termine iterația atunci când s-a obținut (sau se crede că s-a obținut) precizia dorită.
- ▶ Ideal, ne oprim atunci când  $||x_n \alpha|| < tol$ , tol dat.
- Deoarece  $\alpha$  nu este cunoscut se obișnuiește să se înlocuiască  $x_n \alpha$  cu  $x_n x_{n-1}$  și se impune cerința ca

$$||x_n - x_{n-1}|| \le tol \tag{10}$$

unde

$$tol = \|x_n\|\varepsilon_r + \varepsilon_a \tag{11}$$

cu  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_a$  valori date ale erorii.

Ca o măsură de siguranță, am putea cere ca (10) să aibă loc pentru mai multe valori consecutive ale lui n, nu doar pentru una singură. Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

Ecuații neliniare

Ordin de convergență

i aisa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

letoda proximațiilor uccesive

Rădăcini multiple

uatii algebrice

steme neliniare

Motodo

quasi-Newton
Interpolare liniară

Interpolare invers

Metode hibride

Falsa poziție

metoda secanter

Metoda lui Newton

aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

uații algebri

steme neliniare

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

ternolare inver

Metode hibrid

- Alegând  $\varepsilon_r = 0$  sau  $\varepsilon_a = 0$  se obține un test de eroare absolută sau relativă. Este totuși prudent să utilizăm un test mixt, cum ar fi, să zicem  $\varepsilon_r = \varepsilon_a = \varepsilon$ . Atunci, dacă  $\|x_n\|$  este mic sau moderat de mare, se controlează efectiv eroarea absolută, în timp ce pentru  $\|x_n\|$  foarte mare se controlează eroarea relativă.
- ► Testele de mai sus se pot combina cu  $||f(x)|| \le \varepsilon$ . În algoritmii din acest capitol vom presupune că avem o funcție *crit\_oprire* care implementează testul de oprire.

$$f \in C[a,b], \quad f(a)f(b) < 0 \tag{12}$$

și generăm un șir descendent de intervale  $[a_n,b_n]$ ,  $n=1,2,3,\ldots$  cu  $a_1=a$ ,  $b_1=b$  astfel încât  $f(a_n)f(b_n)<0$ .

Spre deosebire de metoda înjumătățirii, pentru a determina următorul interval nu luăm mijlocul lui  $[a_n, b_n]$ , ci soluția  $x = x_n$  a ecuației liniare

$$(L_1f)(x;a_n,b_n)=0.$$

Aceasta pare să fie o alegere mai flexibilă decât în metoda înjumătățirii deoarece x<sub>n</sub> va fi mai apropiat de capătul în care |f| este mai mic (Vezi figura 1) Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

cuatii neliniare

Ordin de convergență

Falsa poziție

1etoda secant

Metoda lui Newton

/letoda proximațiilor uccesive

Rădăcini multiple

iații algebric

teme neliniar

Metode quasi-Newton

Interpolare liniară Metode de modificare

nterpolare inv

/letode hibride



Aetoda secant

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor

Rădăcini multiple

ruatii algebrice

steme neliniare

Metode quasi-Newton

Interpolare liniari Metode de modi

nterpolare inv

Bibliografie

Procedura decurge după cum urmează:

for 
$$n := 1, 2, ...$$
 do  
 $x_n := a_n - \frac{a_n - b_n}{f(a_n) - f(b_n)} f(a_n);$   
if  $f(a_n) f(x_n) > 0$  then  
 $a_{n+1} := x_n; \ b_{n+1} := b_n;$   
else  
 $a_{n+1} := a_n; \ b_{n+1} := x_n;$   
end if

Iterația se poate termina când  $min(x_n - a_n, b_n - x_n) \le tol$ , unde tol este o valoare dată.

 Convergența se analizează mai ușor dacă presupunem că f este convexă sau concavă pe [a, b]. Dacă f este convexă, avem

$$f''(x) > 0$$
,  $x \in [a, b]$ ,  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ . (13)

Şirul

$$x_{n+1}=x_n-rac{x_n-b}{f(x_n)-f(b)}f(x_n),\quad n\in\mathbb{N}^*,\quad x_1=a$$
 (14 este monoton crescător și mărginit superior de  $lpha$ , deci

convergent către o limită x, iar f(x) = 0.

ightharpoonup Viteza de convergență se determină scăzând  $\alpha$  din ambii membri ai lui (14) și utilizând faptul că  $f(\alpha) = 0$ :

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)} [f(x_n) - f(\alpha)].$$

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=1-\frac{x_n-b}{f(x_n)-f(b)}\frac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha}.$$

▶ Făcând  $n \to \infty$  și utilizând faptul că  $x_n \to \alpha$ , obținem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=1-(b-\alpha)\frac{f'(\alpha)}{f(b)}.$$
 (15)

Deci metoda converge liniar, cu eroarea asimptotică

$$c=1-(b-a)rac{f'(lpha)}{f(b)}.$$

- Datorită ipotezei convexității avem  $c \in (0, 1)$ .
- ► Analog se face demonstrația în cazul când *f* este concavă.

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

Ecuatii neliniare

Ordin de convergență

Falsa poziție

Metoda secante

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebrice

steme neliniare

Metode quasi-Newton

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride



Dezavantaje. (i) Convergența lentă; (ii) Faptul că unul din capete poate rămâne fix. Dacă *f* este turtită în vecinătatea rădăcinii și *a* este apropiat de *α* și *b* depărtat convergența poate fi foarte lentă.

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaș

Ecuatii neliniare

Ordin de convergenți

Falsa poziție

Metoda secar

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiil succesive

adăcini multiple

cuatii algebrice

isteme neliniar

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

ternolare inver

mecipolare mve



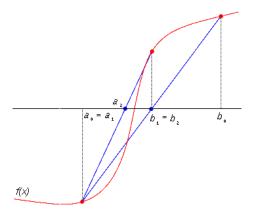


Figura: Metoda falsei poziții

Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

#### Radu Trîmbiţaş

Ecuații neliniar

Ordin de convergență

### Falsa poziție

Metoda secar

Metoda lui Newtor

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

.....

teme neliniare

Metode

Interpolare liniară

sternolare inv

nterpolare inve



r dibd poziți

Metoda secantei

Metoda lui Newto

aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebric

isteme nelinia

Metode quasi-Newton Interpolare liniară Metode de modificare

Interpolare inversă

Diblia anadia

Este o variantă a metodei falsei poziții, în care nu se mai cere ca f să aibă valori de semne contrare, nici măcar la capetele intervalului inițial.

 Se aleg două valori arbitrare de pornire x<sub>0</sub>, x<sub>1</sub> și se continuă cu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (16)$$

- Aceasta preîntâmpină apariția unei false poziții și sugerează o convergență mai rapidă.
- Din păcate, nu mai are loc convergenţa "globală" pe [a, b] ci doar convergenţa "locală", adică numai dacă x<sub>0</sub> şi x<sub>1</sub> sunt suficient de apropiate de rădăcină.
- ▶ Vom avea nevoie de o relație între trei erori consecutive

### Metoda secantei II

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \alpha &= x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]} \\ &= (x_n - \alpha) \left( 1 - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{(x_n - \alpha)f[x_{n-1}, x_n]} \right) \\ &= (x_n - \alpha) \left( 1 - \frac{f[x_n, \alpha]}{f[x_{n-1}, x_n]} \right) \\ &= (x_n - \alpha) \frac{f[x_{n-1}, x_n] - f[x_n, \alpha]}{f[x_{n-1}, x_n]} \\ &= (x_n - \alpha) (x_{n-1} - \alpha) \frac{f[x_n, x_{n-1}, \alpha]}{f[x_{n-1}, x_n]}. \end{aligned}$$

Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

#### Radu Trîmbiţaş

cuatii neliniare

onvergentă

r diba poziți

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

--cuptii algebrice

steme neliniare

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

iterpolare inv

Metode hibride

alsa poziţ

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebrice

steme neliniar

Metode quasi-Newton

Metode de modifica

terpolare inver

Metode hibride

Bibliografie

Deci

$$(x_{n+1} - \alpha) = (x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha) \frac{f[x_n, x_{n-1}, \alpha]}{f[x_{n-1}, x_n]}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$
(17)

Din (17) rezultă imediat că dacă  $\alpha$  este o rădăcină simplă  $(f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0)$  și  $x_n \to \alpha$  și dacă  $f \in C^2$  pe o vecinătate a lui  $\alpha$ , convergența este superliniară.

Falsa po

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode quasi-Newton Interpolare liniară Metode de modificare

nterpolare inv

Dilli C

▶ Înlocuim raportul diferențelor divizate din (17) cu o constantă, ceea ce este aproape adevărat când n este mare. Punând  $e_k = |x_k - \alpha|$ , avem

$$e_{n+1} = e_n e_{n-1} C$$
,  $C > 0$ 

ightharpoonup Înmulțind ambii membri cu C și punând  $E_n=Ce_n$  obținem

$$E_{n+1}=E_nE_{n-1}, \quad E_n\to 0.$$

▶ Logaritmând și punând  $y_n = \frac{1}{E_n}$  obținem

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1}, (18)$$

care este recurența pentru șirul lui Fibonacci.

# Ordinul de convergență II

Soluţia este

$$y_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n$$
,

 $c_1$ ,  $c_2$  constante și

$$t_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad t_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

Deoarece  $y_n \to \infty$ , avem  $c_1 \neq 0$  și  $y_n \sim c_1 t_1^n$ , căci  $|t_2| < 1$ . Revenind la substituție  $\frac{1}{E_n} \sim e^{c_1 t_1^n}$ ,  $\frac{1}{a} \sim C e^{c_1 t_1^n}$  și deci

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^{t_1}} \sim \frac{C^{t_1}e^{c_1t_1''t_1}}{Ce^{c_1t_1^{n+1}}} = C^{t_1-1}, \quad n \to \infty.$$

Ordinul de convergență este

$$t_1=rac{1+\sqrt{5}}{2}pprox 1.61803\ldots$$
 (secțiunea de aur).

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

cuatii neliniar

Ordin de convergență

-alsa pozi

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebrice

steme neliniare

Metode quasi-Newton

Interpolare liniar Metode de modi

nterpolare inv

Wictode Mibrie



# Convergența metodei secantei I

### Teorema 3

Fie α un zero simplu al lui f și fie  $I_{\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| < \varepsilon\}$  și presupunem că  $f \in C^2[I_{\varepsilon}]$ . Definim pentru  $\varepsilon$  suficient de mic

$$M(\varepsilon) = \max_{\substack{s \in I_{\varepsilon} \\ t \in I_{\varepsilon}}} \left| \frac{f''(s)}{2f'(t)} \right|. \tag{19}$$

Presupunem că

$$\varepsilon M(\varepsilon) < 1$$
 (20)

Atunci metoda secantei converge către rădăcina unică  $\alpha \in I_{\varepsilon}$ pentru orice valoare de pornire  $x_0 \neq x_1$  cu  $x_0 \in I_{\varepsilon}$ ,  $x_1 \in I_{\varepsilon}$ .

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbitas

Metoda secantei

# Convergența metodei secantei II

### Observația 4

Se observă că  $\lim_{\varepsilon \to 0} M(\varepsilon) = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| < \infty$ , deci (20) poate fi satisfăcută pentru  $\varepsilon$  suficient de mic. Natura locală a convergenței este cuantificată prin cerința ca  $x_0, x_1 \in I_{\varepsilon}$ .

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

custii nelinisre

Ordin de convergent

Falsa poz

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilo succesive

Rădăcini multiple

eme neliniar

steme neimia

quasi-Newton
Interpolare liniară

ivietode de modificar

terpolare inver

metode mar



## Demonstrație - pasul I

Se observă că  $\alpha$  este *singurul zero* al lui f în  $I_{\varepsilon}$ . Aceasta rezultă din formula lui Taylor pentru  $x = \alpha$ :

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2}{2}f''(\xi)$$

unde  $f(\alpha)=0$  și  $\xi\in(x,\alpha)$  (sau  $(\alpha,x)$ ). Astfel dacă  $x\in I_{\varepsilon}$ , atunci și  $\xi\in I_{\varepsilon}$  și avem

$$f(x) = (x - \alpha)f'(\alpha) \left[ 1 + \frac{x - \alpha}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\alpha)} \right]$$

Aici, dacă  $x \neq \alpha$ , toți trei factorii sunt diferiți de 0, căci

$$\left|\frac{x-\alpha}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(\alpha)}\right| \le \varepsilon M(\varepsilon) < 1.$$

Deci f se poate anula pe  $I_{\varepsilon}$  numai în  $x = \alpha$ .

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

cuatii neliniar

Ordin de convergență

Faisa pozi

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda proximațiilor uccesive

Rădăcini multiple

cuații algebrice

teme neliniare

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

nterpolare invers

Dibliannella



Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniar

isteme neimar

Metode

Interpolare linia

nterpolare inv

nterpolare inve

Dilli 6

Să arătăm că  $x_n \in I_{\varepsilon}$  pentru orice n, în afară de cazul când  $f(x_n)=0$ , în care  $x_n=\alpha$  și metoda converge într-un număr finit de pași. Vom demonstra aceasta prin inducție: presupunem că  $x_{n-1}, x_n \in I_{\varepsilon}$  și  $x_n \neq x_{n-1}$ . Acest lucru este adevărat pentru n=1 din ipoteză.

Deoarece  $f \in C^2[I_{\varepsilon}]$ 

$$f[x_{n-1},x_n]=f'(\xi_1),\ f[x_{n-1},x_n,\alpha]=\frac{1}{2}f''(\xi_2),\ \xi_i\in I_{\varepsilon},\ i=1,2,$$

din (17) rezultă

$$|x_{n+1} - \alpha| \le \varepsilon^2 \left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_1)} \right| \le \varepsilon \varepsilon M(\varepsilon) < \varepsilon,$$

adică  $x_{n+1} \in I_{\varepsilon}$ .

Metoda secantei

Metoda

Rădăcini multinle

Nadaciiii ilidicipie

cuații aigebrio

steme neliniar

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

terpolare inve

Bibliografie

*Convergența*. Mai mult, din relația între trei erori consecutive, (17), rezultă  $x_{n+1} \neq x_n$  în afară de cazul când  $f(x_n) = 0$  (și atunci  $x_n = \alpha$ ). Utilizând (17) avem

$$|x_{n+1} - \alpha| \le |x_n - \alpha| \varepsilon M(\varepsilon)$$

care aplicată repetat ne dă

$$|x_{n+1} - \alpha| \le |x_n - \alpha| \varepsilon M(\varepsilon) \le \cdots \le [\varepsilon M(\varepsilon)]^{n-1} |x_1 - \alpha|.$$

Cum  $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$ , rezultă că metoda este convergentă și  $x_n \to \alpha$  când  $n \to \infty$ .

## Algoritmul

Deoarece este nevoie de o singură evaluare a lui f pe pas, indicele de eficiență este  $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.61803\ldots$ 

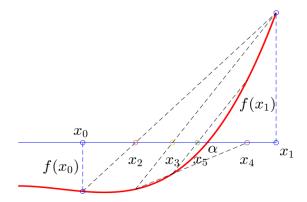


Figura: Ilustrarea metodei secantei

Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

Ecuatii neliniare

Ordin de convergență

Metoda secantei

Metoda lui Newto

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

anakii alaabaiaa

steme neliniar

Metode quasi-Newton

Interpolare linia Metode de mod

Interpolare inve

NAME OF TAXABLE





Metoda secantei

Metoda lui Newtor

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuatii algebrice

steme neliniar

isteme neiiniar

Metode quasi-Newton

Interpolare lini Metode de mo

Interpolare in

Bibliografie

```
Intrare: Funcția f, valorile de pornire x<sub>0</sub> și x<sub>1</sub>, numarul maxim de iterații, Nmax, informații de toleranță tol leșire: O aproximație a rădăcinii sau un mesaj de eroare
```

```
1: xc := x_1; xv = x_0;

2: fc := f(x_1); fv := f(x_0);

3: for k := 1 to Nmax do

4: xn := xc - fc * (xc - xv) / (fc - fv);

5: if crit\_oprire(tol) then

6: return xn;{Succes}

7: end if

8: xv := xc; fv := fc; xc := xn; fc = f(xn);

9: end for
```

10: error("S-a depășit numărul de iterații").

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

uatii naliniara

Ordin de convergență

raisa poziție

Metoda secantei

### Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebrice

isteme neliniare

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

nterpolare inve

Bibliografie

Poate fi privită ca un caz la limită al metodei secantei, când  $x_{n-1} \rightarrow x_n$ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
 (21)

Altă interpretare: liniarizarea ecuației f(x) = 0 în  $x = x_n$  (vezi figura 3)

$$f(x) \approx (T_1 f)(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) = 0.$$

Astfel, metoda lui Newton se poate generaliza la ecuații neliniare de toate tipurile (sisteme neliniare, ecuații funcționale, caz în care f' trebuie înțeleasă ca derivată Fréchet), iar iterația este

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n).$$
 (22)

### Metoda lui Newton II

Studiul erorii în metoda lui Newton este la fel ca cel al erorii în metoda secantei

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= (x_n - \alpha) \left[ 1 - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{(x_n - \alpha)f'(x_n)} \right]$$

$$= (x_n - \alpha) \left( 1 - \frac{f[x_n, \alpha]}{f[x_n, x_n]} \right)$$

$$= (x_n - \alpha)^2 \frac{f[x_n, x_n, \alpha]}{f[x_n, x_n]}$$
(23)

**D**e aceea, dacă  $x_n \to \alpha$ , atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2}=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

și ordinul de convergență al metodei lui Newton este 2 dacă  $f''(\alpha) \neq 0$ .

Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

cuații neliniar

Ordin de convergență

aisa poziție

Metoda lui Newton

Metoda

aproximațiilor succesive

Kādācini multiple

cuații aigebrice

steme neliniare

Metode quasi-Newton

Metode de modifie

nterpolare inve

ivietode nibride

# Interpretarea geometrică a metodei lui Newton

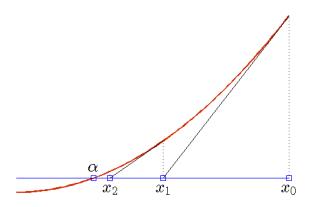


Figura: Metoda lui Newton

Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbiţaș

cuatii neliniare

Ordin de convergent

r dibd poziție

.....

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

rustii algebrice

steme neliniar

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

iterpolare inve

Metode hibride



#### Metoda lui Newton

Referitor la convergența locală a metodei lui Newton avem

### Teorema 5

Fie  $\alpha$  o rădăcină simplă a ecuației f(x) = 0 și  $I_{\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| \le \varepsilon\}$ . Presupunem că  $f \in C^2[I_{\varepsilon}]$ . Definim

$$M(\varepsilon) = \max_{\substack{s \in I_{\varepsilon} \\ t \in I_{\varepsilon}}} \left| \frac{f''(s)}{2f'(t)} \right| \tag{24}$$

Dacă ε este suficient de mic astfel încât

$$2\varepsilon M(\varepsilon) < 1, \tag{25}$$

atunci pentru orice  $x_0 \in I_{\varepsilon}$ , metoda lui Newton este bine definită și converge pătratic către singura rădăcină  $\alpha \in I_{\varepsilon}$ .

Demonstrația: ca la secantă.

## Criteriul de oprire I

Criteriul de oprire pentru metoda lui Newton

$$|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$$

se bazează pe următoarea propoziție:

## Propoziția 6

Fie  $(x_n)$  șirul de aproximante generat prin metoda lui Newton. Dacă  $\alpha$  este o rădăcină simplă din [a,b],  $f \in C^2[a,b]$  și metoda este convergentă, atunci există un  $n_0 \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$|x_n-\alpha|\leq |x_n-x_{n-1}|, \qquad n>n_0.$$

Demonstrație. Vom arăta întâi că

$$|x_n - \alpha| \le \frac{1}{m_1} |f(x_n)|, \qquad m_1 \le \inf_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$
 (26)

4 □ ト 4 ∰ ト 4 厘 ト 4 厘 ト

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

cuatii neliniare

Ordin de onvergentă

i aisa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebrice

teme neliniare

Metode quasi-Newton

Interpolare liniara Metode de modif

terpolare inve

Metode hibride

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebric

steme neliniare

Motodo

Metode quasi-Newton

Interpolare liniară Metode de modific

nterpolare in

vietode ilibi

Bibliografie

Utilizând teorema lui Lagrange,

$$f(\alpha) - f(x_n) = f'(\xi)(\alpha - x_n)$$
, cu  $\xi \in (\alpha, x_n)$  (sau  $(x_n, \alpha)$ ). Din relațiile  $f(\alpha) = 0$  și  $|f'(x)| \ge m_1$  pentru  $x \in (a, b)$  rezultă că  $|f(x_n)| \ge m_1 |\alpha - x_n|$ , adică chiar (26).

Pe baza formulei lui Taylor avem

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1})f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})^2 f''(\mu),$$
(27)

cu  $\mu \in (x_{n-1}, x_n)$  sau  $\mu \in (x_n, x_{n-1})$ .

Ținând cont de modul de obținere a unei aproximații în metoda lui Newton, avem

$$f(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1})f'(x_{n-1}) = 0$$
 și din (27) se obține

$$|f(x_n)| = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})^2 |f''(\mu)| \le \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})^2 ||f''||_{\infty},$$

## Criteriul de oprire III

iar pe baza formulei (26) rezultă că

$$|\alpha - x_n| \le \frac{\|f''\|_{\infty}}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Cum am presupus că metoda este convergentă, există un  $n_0$  natural cu proprietatea că

$$\frac{\|f''\|_{\infty}}{2m_1}(x_n-x_{n-1})<1, \qquad n>n_0$$

și deci

$$|x_n-\alpha|\leq |x_n-x_{n-1}|, \qquad n>n_0.$$

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaș

cuatii neliniare

Ordin de convergentă

---- -----

Metoda secantei

#### Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

....

Sisteme neliniare

Metode quasi-Newton

Interpolare liniară Metode de modifi

terpolare inver

microolare mve

500



i alsa poziție

Wietoda secantei

#### Metoda lui Newton

aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

isteme nelinia

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

Internolare inve

Metode IIIbi

Bibliografie

- ► Alegerea valorii de pornire este, în general, o problemă dificilă.
- ▶ În practică, se alege o valoare, iar dacă după un număr maxim fixat de iterații nu s-a obținut precizia dorită, testată prin unul din criteriile uzuale, se încearcă cu altă valoare de pornire.
- Criterii

Criteriul 1 dacă rădăcina este izolată într-un interval [a,b] și  $f''(x) \neq 0$ ,  $x \in (a,b)$ , un criteriu de alegere este  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ .

Criteriul 2 dacă f este convexă sau concavă pe [a,b], f(a)f(b) < 0 și tangentele în capete intersectează Ox în (a,b), orice valoare  $x_0$  se poate alege ca valoare de pornire.

Metode de modi

iterpolare inv

Metode hibrid

Bibliografie

**Intrare:** Funcția f, derivata f', valoarea de pornire  $x_0$ , numarul maxim de iterații, Nmax, informații de toleranță tol

leșire: O aproximație a rădăcinii sau un mesaj de eroare

1: for k := 0 to  $N \max_{k \in \mathbb{R}} do$ 

2:  $x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)};$ 

3: **if** crit\_oprire(tol) **then** 

4: **return**  $x_{k+1}$ ; {Succes}

5: end if

6: end for

7: error("S-a depășit numărul de iterații").

raisa poziție

#### aproximațiilor succesive

Metoda

Rădăcini multiple

cuatii algebrice

steme neliniare

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

nternolare inversă

.....

Ribliografie

Adesea, în aplicații, ecuațiile neliniare apar sub forma unei probleme de punct fix: să se determine x astfel încât

$$x = \varphi(x). \tag{28}$$

- Un număr  $\alpha$  ce satisface această ecuație se numește punct fix al lui  $\varphi$ .
- ▶ Orice ecuație f(x) = 0 se poate scrie (în multe moduri diferite) în forma echivalentă (28). De exemplu, dacă  $f'(x) \neq 0$ , în intervalul de interes putem lua

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. (29)$$

generează un șir de aproximații

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \tag{30}$$

- ▶ Dacă acest șir converge și  $\varphi$  este continuă, atunci șirul converge către un punct fix a lui  $\varphi$ .
- De notat că (30) este chiar metoda lui Newton dacă  $\varphi$  este dată de (29). Astfel metoda lui Newton poate fi privită ca o iterație de tip punct fix, dar nu și metoda secantei.
- Pentru o iterație de forma (30), presupunând că  $x_n \to \alpha$  când  $n \to \infty$ , ordinul de convergență este ușor de determinat.

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaș

Ecuatii neliniare

Ordin de convergenti

alsa poziți

Metoda aproximatiilor

succesive

adaciii ilidicipie

cuații algebrice

isteme neliniar

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

terpolare inver

Metode hibrio



Rezolvarea

alsa poziție

Manada Isl North

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

Ecuații algebrice

steme neliniare

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

nternolare inv

Metode IIIbii

Bibliografie

ightharpoonup Să presupunem că în punctul fix  $\alpha$  avem

$$\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \dots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad \varphi^p(\alpha) \neq 0$$
(31)

Presupunem că  $\varphi \in C^p$  pe o vecinătate V a lui  $\alpha$ . Avem atunci, conform teoremei lui Taylor

$$\varphi(x_n) = \varphi(\alpha) + (x_n - \alpha)\varphi'(\alpha) + \ldots + \frac{(x_n - \alpha)^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(\alpha)$$

$$+ \frac{(x_n - \alpha)^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n) = \varphi(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n),$$

unde  $\xi_n \in (\alpha, x_n)$  (sau  $(x_n, \alpha)$ ).

▶ Deoarece  $φ(x_n) = x_{n+1}$  și φ(α) = α obținem

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n).$$

## Metoda aproximațiilor succesive IV

► Când  $x_n \to \alpha$ , deoarece  $\xi_n$  este între  $x_n$  și  $\alpha$ , deducem pe baza continuității că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p} = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$
 (32)

 Aceasta ne arată că ordinul de convergență este exact p și eroarea asimptotică este

$$c = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(\alpha). \tag{33}$$

Combinând aceasta cu condiția uzuală de convergență locală se obține: Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

cuații neliniare

rdin de onvergent

i aisa poziți

vietoda secantei

Metoda lui Newton

#### Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

anakii alaabaiaa

teme neliniare

Metode quasi-Newton

Interpolare liniară
Metode de modifica

nterpolare inve

merpolare mv

500



## Metoda aproximațiilor succesive V

## Teorema 7

Fie  $\alpha$  un punct fix al lui  $\varphi$  și  $I_{\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| \le \varepsilon\}$ . Presupunem că  $\varphi \in C^p[I_{\varepsilon}]$  și satisface (31). Dacă

$$M(\varepsilon) := \max_{t \in I_{\varepsilon}} |\varphi'(t)| < 1$$
 (34)

atunci iterația (30) converge către  $\alpha$ ,  $\forall x_0 \in I_{\varepsilon}$ . Ordinul de convergență este p, iar eroarea asimptotică este dată de (33).

Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

cuatii neliniare

Ordin de onvergență

raisa poziți

Wetour Securiter

Metoda aproximatiilor

succesive

Kadacını multiple

cuații algebrice

steme neliniar

Metode quasi-Newton

Interpolare liniară

terpolare inver

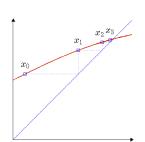
interpolare inve

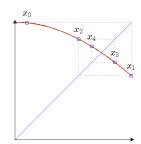
Dibliannatia



# Interpretarea geometrica a metodei aproximațiilor succesive

Convergența





Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

Ecuatii neliniare

Ordin de convergentă

disa poziție

Aetoda secan

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuatii algebrice

steme nelinia

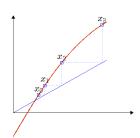
Metode quasi-Newton Interpolare liniară

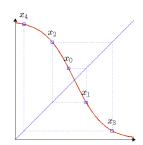
nterpolare invers

Metode hibride

## Interpretarea geometrica a metodei aproximațiilor succesive

Divergența





Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

Ecuații neliniare

Ordin de convergentă

∕letoda secan

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

--cuatii algebrice

teme nelinia

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

nterpolare inver

Metode hibrid

Rezolvarea

i alsa poziție

ivietoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

#### Rădăcini multiple

Ecuații algebric

isteme neliniar

Metode quasi-Newton

Interpolare liniară Metode de modifi

terpolare inve

Metode Hibrio

Bibliografie

 Dacă α este o rădăcină multiplă de ordinul m, atunci ordinul de convergență a metodei lui Newton este doar 1. Într-adevăr, fie

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Deparece

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$$

procesul va fi convergent dacă  $\varphi'(\alpha) = 1 - 1/m < 1$ .

$$u(x) := \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

care are aceleași rădăcini ca și f, dar simple. Metoda lui Newton pentru problema modificată are forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)} = \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}.$$
 (35)

Deoarece  $\alpha$  este o rădăcină simplă a lui u, convergența lui (35) este pătratică. Singurul dezavantaj teoretic al lui (35) este derivata a doua necesară suplimentar și complexitatea mai mare a calculului lui  $x_{k+1}$  din  $x_k$ . În practică aceasta este o slăbiciune, deoarece numitorul lui (35) poate lua valori foarte mici în vecinătatea lui  $\alpha$  când  $x_k \to \alpha$ .

Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

Ecuații neliniare

Ordin de convergenț

alba poziție

vietoda secantei

Metoda lui Newton

letoda proximațiilor uccesive

Rădăcini multiple

cuații algebric

isteme nelinia

letode uasi-Newton

uasi-Newton
Interpolare liniară
Metode de modificare

iterpolare inv

Wetode IIIDII



$$f(x) = (x - \alpha)^m \varphi(x) \approx (x - \alpha)^m \cdot c,$$
 (36)

de unde rezultă

$$\frac{f(x)}{f'(x)} \approx \frac{x - \alpha}{m} \Rightarrow \alpha \approx x - m \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Metoda modificată corespunzătoare

$$x_{k+1} := x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$
 (37)

converge pătratic către rădăcina multiplă de ordinul m când se întrebuințează o valoare corectă a lui m în (37).

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbitas

Rădăcini multiple

## Metoda lui Newton pentru rădăcini multiple IV

► Eficiența variantei (37) a metodei lui Newton depinde de utilizarea unei valori de aproximare bune pentru *m*, dacă această valoare nu este cunoscută din alte surse. În ipoteza

$$|x_k - \alpha| < |x_{k-1} - \alpha| \wedge |x_k - \alpha| < |x_{k-2} - \alpha|$$

putem înlocui în (36)  $\alpha$  prin  $x_k$ 

$$f(x_{k-1}) \approx (x_{k-1} - x_k)^m \cdot c$$
  
$$f(x_{k-2}) \approx (x_{k-2} - x_k)^m \cdot c.$$

▶ În continuare se obține *m*:

$$m \approx \frac{\log [f(x_{k-1})/f(x_{k-2})]}{\log [(x_{k-1}-x_k)/(x_{k-2}-x_k)]}.$$

Această valoare poate fi utilizată în (37).

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaș

cuații neliniare

Ordin de convergen

-alsa pozi

letoda secantei

Metoda lui Newton

netoda proximațiilor uccesive

Rădăcini multiple

Luații aigebrice

teme neliniar

/letode uasi-Newton

Interpolare liniari Metode de modif

nterpolare inve



r dibd poziție

Metoda aproximațiile

Rădăcini multiple

## Ecuații algebrice

Sisteme neliniar

Metode

quasi-Newton
Interpolare liniară
Metode de modifica

nterpolare inv

metode mon

Există multe metode special concepute pentru a rezolva ecuații algebrice.

Aici vom descrie numai metoda lui Newton aplicată în acest context, concentrându-ne asupra unui mod eficient de a evalua simultan valoarea polinomului şi a primei derivate.

Considerăm o ecuație algebrică de grad d

$$f(x) = 0$$
,  $f(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_0$ , (38)

în care coeficientul dominant se presupune (fără a restrânge generalitatea) a fi egal cu 1 și unde putem presupune, fără a restrânge generalitatea că  $a_0 \neq 0$ .

Pentru simplitate vom presupune că toți coeficienții sunt reali.

$$bd := 1; \quad cd := 1;$$
  
for  $k = d - 1$  downto 1 do  
 $b_k := tb_{k+1} + a_k;$   
 $c_k := tc_{k+1} + b_k;$   
end for

$$b_0:=tb_1+a_0;$$

- ► Atunci  $f(t) = b_0$ ,  $f'(t) = c_1$ .
- Deci procedăm astfel:
  - Se aplică metoda lui Newton, calculând simultan  $f(x_n)$ si  $f'(x_n)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Radu Trîmbitas

#### Ecuatii algebrice

## Ecuații algebrice III

Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbiţaș

Ecuatii neliniare

Ordin de convergență

raisa poziție

Metoda lui Newtor

aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

Ecuații algebrice

isteme neliniare

Metode quasi-Newton

Interpolare liniari Metode de modi

terpolare inver

Metode hibrid

- Se aplică apoi metoda lui Newton polinomului  $\frac{f(x)}{x-\alpha}$ .
- Pentru rădăcini complexe se începe cu x<sub>0</sub> complex și toate calculele se fac în aritmetică complexă.
- Este posibil să se împartă cu factori pătratici și să se folosească aritmetica reală – metoda lui Bairstow.
- ► Folosind metoda aceasta de scădere a gradului erorile pot fi mari.
- O modalitate de îmbunătățire este de a utiliza rădăcinile astfel calculate ca aproximații inițiale și a aplica metoda lui Newton polinomului original.

$$F(x) = 0, (39)$$

unde  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ , iar  $x, F(x) \in \mathbb{R}^n$ .

► Sistemul (39) se scrie pe componente

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{cases}$$

Fie  $F'^{(k)}$ ) jacobianul lui F în  $x^{(k)}$ :

$$J := F'^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^{(k)}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^{(k)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^{(k)}) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^{(k)}) \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbitas

cuatii neliniare

onvergență

alsa poziție

victoda secantei

Metoda lui Newtor

aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

Sisteme neliniare

Metode quasi-Newton

Interpolare liniară

terpolare inve

Metode hibrid

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}).$$
 (41)

Scriem iterația sub forma

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + w^{(k)}. (42)$$

Se observă că  $w_k$  este soluția sistemului de n ecuații liniare cu n necunoscute

$$F'(x^{(k)}) w^{(k)} = -F(x^{(k)}).$$
 (43)

Este mai eficient şi mai convenabil ca, în loc să inversăm jacobianul la fiecare pas, să rezolvăm sistemul (43) şi să folosim iterația în forma (42). Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

cuații nelinia

Ordin de convergență

aisa poziție

victoda sccaritei

Metoda lui Newtor

proximațiilor uccesive

lădăcini multiple

uații algebric

#### Sisteme neliniare

Metode quasi-Newton

|------

Interpolare inversa



Rezolvarea

Ordin de convergenț

r alsa poziți

Metoda

succesive

. . . . . .

cuații algebri

### Sisteme neliniare

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

Metode de modificare

nterpolare inve

B.I. I.

#### Teorema 8

Fie  $\alpha$  o soluție a ecuației F(x)=0 și presupunem că în bila închisă  $B(\delta)\equiv\{x: \|x-\alpha\|\leq \delta\}$ , există matricea Jacobi a lui  $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ , este nesingulară și satisface condiția Lipschitz

$$||F'(x) - F'(y)||_{\infty} \le c||x - y||_{\infty}, \ \forall \ x, y \in B(\delta), \quad c > 0.$$

Punem  $\gamma = c \max \left\{ \| [F'(x)]^{-1} \|_{\infty} : \| \alpha - x \|_{\infty} \leq \delta \right\}$  și  $0 < \varepsilon < \min \{ \delta, \gamma^{-1} \}$ . Atunci pentru orice aproximație inițială  $x^{(0)} \in B(\varepsilon) := \{ x : \| x - \alpha \|_{\infty} \leq \varepsilon \}$  metoda lui Newton este convergentă, iar vectorii  $e^{(k)} := \alpha - x^{(k)}$  satisfac următoarele inegalități:

(a) 
$$\|e^{(k+1)}\|_{\infty} \le \gamma \|e^{(k)}\|_{\infty}^2$$

(b) 
$$\|e^{(k)}\|_{\infty} \le \gamma^{-1} (\gamma \|e^{(0)}\|_{\infty})^{2^k}$$
.

## Metoda lui Newton pentru sisteme neliniare IV

**Demonstrație.** Dacă F' este continuă pe segmentul ce unește punctele  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , conform teoremei lui Lagrange

$$F(x) - F(y) = J_k(x - y),$$

unde

$$J_{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{1}}{\partial x_{1}}(\xi_{1}) & \dots & \frac{\partial F_{1}}{\partial x_{n}}(\xi_{1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n}}{\partial x_{1}}(\xi_{n}) & \dots & \frac{\partial F_{n}}{\partial x_{n}}(\xi_{n}) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{split} e^{(k+1)} &= e^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} (F(\alpha) - F(x^{(k)})) \\ &= e^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} J_k e^{(k)} \\ &= [F'(x_{(k)})]^{-1} (F'(x^{(k)}) - J_k) e^{(k)} \end{split}$$

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaș

cuații neliniare

Ordin de onvergent

alsa poziție

/letoda secantei

letoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

uații algebric

#### Sisteme neliniare

Metode quasi-Newton

Interpolare linia Metode de mod

terpolare inve

Metode hibride

## Metoda lui Newton pentru sisteme neliniare V

Radu Trîmbiţaş

Rezolvarea

numerică a ecuatiilor neliniare

Ordin de onvergență

alsa poziție

Metoda aproximațiilor

Rădăcini multiple

cuații algebrice

#### Sisteme neliniare

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

nternolare inve

Makada laibuida

Bibliografie

și de aici rezultă imediat (a). Din condiția Lipschitz

$$\|F'(x^{(k)}) - J_k\|_{\infty} \le c \max_{j=\overline{1,n}} \|x^{(k)} - \xi^{(j)}\| \le c \|x^{(k)} - \alpha\|$$

Deci, dacă  $\|\alpha - x^{(k)}\|_{\infty} \leq \varepsilon$ , atunci

$$\|\alpha - x^{(k+1)}\|_{\infty} \le (\gamma \varepsilon)\varepsilon \le \varepsilon.$$

Deoarece (a) este adevărată pentru orice k, se obține (b) imediat.  $\blacksquare$ 

aproximațiilor

Rădăcini multiple

cuații algebrice

#### Sisteme neliniare

Metode quasi-Newton

Interpolare liniari Metode de modif

Interpolare invers

Metode hibrid

Bibliografie

**Intrare:** Funcția F, derivata Fréchet F', vectorul de pornire  $x^{(0)}$ , numarul maxim de iterații, Nmax, informații de tolerantă tol

leșire: O aproximație a rădăcinii sau un mesaj de eroare

1: for k := 0 to Nmax do

2: Calculează matricea jacobian  $J = F'(x^{(k)});$ 

3: Rezolvă sistemul  $Jw = -F(x^{(k)});$ 

4:  $x^{(k+1)} := x^{(k)} + w$ ;

5: **if** crit\_oprire(tol) **then** 

**return**  $x^{(k+1)}$ ; {Succes}

7: end if

6:

8: end for

9: error ("S-a depășit numărul de iterații").

i aisa poziți

Aetoda lui Newton

aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebrice

isteme nelini

#### Metode quasi-Newton

Interpolare liniară

akawa alawa imuu

nterpolare inve

rictode ilibii

O slăbiciune semnificativă a metodei lui Newton pentru rezolvarea sistemelor de ecuații neliniare este necesitatea ca la fiecare pas să calculăm matricea jacobiană și să rezolvăm un sistem n × n cu această matrice.

Pentru a ilustra dimensiunile unei astfel de slabiciuni, să evaluăm volumul de calcule asociat cu o iterație a metodei lui Newton. Matricea jacobiană asociată unui sistem de *n* ecuații neliniare scris în forma F(x) = 0necesită evaluarea celor  $n^2$  derivate parțiale ale celor nfuncții componente ale lui F. În cele mai multe situații, evaluarea exactă a derivatelor partiale este neconvenabilă și de multe ori imposibilă. Efortul total pentru o iterație a metodei lui Newton va fi de cel puțin  $n^2 + n$  evaluări de funcții scalare ( $n^2$  pentru evaluarea jacobianului și n pentru evaluarea lui F) și  $O(n^3)$ operații aritmetice pentru a rezolva sistemul liniar.

Este firesc ca atenția să fie îndreptată spre reducerea numărului de evaluări și evitarea rezolvării unui sistem liniar la fiecare pas.

mici ale lui *n* și funcții scalare ușor de evaluat.

La metoda secantei aproximația următoare  $x^{(k+1)}$  se obține ca soluție a ecuației liniare

$$\bar{\ell}_k = f(x^{(k)}) + (x - x^{(k)}) \frac{f(x^{(k)} + h_k) - f(x^{(k)})}{h_k} = 0.$$

- Aici funcția  $\bar{\ell}_k$  poate fi interpretată în două moduri:
  - 1. ca aproximare a ecuație tangentei

$$\ell_k(x) = f(x^{(k)}) + (x - x^{(k)})f'(x^{(k)});$$

2. ca interpolare liniară între punctele  $x^{(k)}$  și  $x^{(k+1)}$ .

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

annett matters

Ordin de onvergent

i aisa poziți

Metoda secant

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebrice

teme neliniare

#### Metode quasi-Newton

Interpolare liniară
Metode de modificar

Interpolare in



raisa poz

ivietoda secantei

Metoda lui Newtor

succesive

ацасии пинири

isteme neliniar

#### Metode quasi-Newton

Interpolare liniară Metode de modificare

terpolare inve

Metode hibrid

- Se pot obţine diverse generalizări ale metodei secantei la sisteme de ecuaţii neliniare în funcţie de modul în care se interpretează \(\bar{\ell}\_k\).
- Prima interpretare conduce la metode de tip Newton discretizate, iar a doua la metode bazate pe interpolare.
- Metodele de tip Newton discretizate se obțin dacă în metoda lui Newton (41) F'(x) se înlocuiește cu cu o aproximare discretă A(x, h). Derivatele parțiale din matricea jacobiană (40) se vor înlocui prin diferențele divizate

$$A(x,h)e_i := [F(x+h_ie_i) - F(x)]/h_i, \qquad i = \overline{1,n},$$
(44)

## Metode quasi-Newton IV

unde  $e_i \in \mathbb{R}^n$  este al *i*-lea vector al bazei canonice și  $h_i = h_i(x)$  este mărimea pasului de discretizare. O alegere posibilă a pasului este de exemplu

$$h_i := \left\{ egin{array}{ll} arepsilon |x_i|, & ext{dacă} \ x_i 
eq 0; \ arepsilon, & ext{altfel}, \end{array} 
ight.$$

cu  $\varepsilon := \sqrt{\text{eps}}$ , unde eps este epsilon-ul mașinii.

#### Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

#### Radu Trîmbiţaș

Ecuatii neliniare

Ordin de convergență

Turba pozryre

ivietoda secantei

Metoda lui Newton

aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

uatii algebrice

teme neliniare

### Metode quasi-Newton

Interpolare liniară Metode de modifica

nterpolare inve

Metode hibrid

alsa poziție

Metoda lui Newton

succesive

Rădăcini multiple

cuații algebrice

teme neliniar

juasi-Newton
Interpolare liniară

Interpolare liniară Metode de modificare

iterpolare inv

La interpolare fiecare dintre planele tangente se înlocuiește cu un (hiper)plan care interpolează funcțiile componente  $F_i$  ale lui F în n+1 puncte date  $x^{k,j}$ ,  $j=\overline{0,n}$ , într-o vecinătate a lui  $x^{(k)}$ , adică se determina vectorii  $a^{(i)}$  si scalarii  $\alpha_i$ , astfel încât pentru

$$L_i(x) = \alpha_i + a^{(i)T}x, \qquad i = \overline{1, n}$$
 (45)

are loc

$$L_i(x^{k,j}) = F_i(x^{k,j}), \qquad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, n}.$$

Următoarea aproximație  $x^{(k+1)}$  se obține ca punct de intersecție între cele n hiperplane (45) din  $\mathbb{R}^{n+1}$  cu hiperplanul y=0.  $x^{(k+1)}$  rezultă ca soluție a sistemului de ecuații liniare

$$L_i(x) = 0, \qquad i = \overline{1, n}.$$
 (46)

Taisa poziții

Maria de Caracteria de Car

aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebri

steme neliniare

Metode

Interpolare liniară

nterpolare inve

- ▶ În funcție de alegerea punctelor de interpolare se obțin diferite metode, dintre care cele mai cunoscute sunt metoda lui Brown și metoda lui Brent.
- Metoda lui Brown combină aproximarea lui F' şi rezolvarea sistemului prin eliminare gaussiană.
- ▶ În metoda lui Brent se întrebuințează la rezolvarea sistemului metoda QR. Ambele metode aparțin unei clase de metode, care, la fel ca metoda lui Newton, converg pătratic, dar au nevoie doar de  $(n^2 + 3n)/2$  evaluări de funcții pe iterație.
- Într-un studiu comparativ, Moré şi Cosnard [7] au ajuns la concluzia că metoda Brent este adeseori de preferat metodei lui Brown şi că pentru sisteme de ecuații neliniare, la care evaluarea lui f necesită un efort mai mic, metoda lui Newton discretizată este cea mai eficientă metodă de rezolvare.

obține din  $A_{k-1}$  printr-o modificare de rang 1, adică

$$A_{k+1} := A_k + u^{(k)} \left[ v^{(k)} \right]^T$$
,  $u^{(k)}$ ,  $v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $k = 0, 1, 2, ...$ 

▶ Pe baza formulei Sherman-Morrison (vezi [4])

prin adăugarea unei matrice de rang 1:

$$(A + uv^{T})^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + v^{T}A^{-1}u}A^{-1}uv^{T}A^{-1}$$
(47)

pentru  $B_{k+1} := A_{k+1}^{-1}$  are loc relația de recurență

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k u^{(k)} \left[v^{(k)}\right]^T B_k}{1 + \left[v^{(k)}\right]^T B_k u^{(k)}}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

Radu Trîmbitas

Metode de modificare

- Necesitatea rezolvării unui sistem liniar la fiecare pas dispare; aceasta se înlocuiește cu înmulțiri matrice-vector, ceea ce corespunde unei reduceri a efortului de calcul de la  $O(n^3)$  la  $O(n^2)$ .
- Acest avantaj va fi plătit prin aceea că nu vom mai avea o convergentă pătratică ca la metoda lui Newton, ci doar una superliniară:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - \alpha\|}{\|x^{(k)} - \alpha\|} = 0.$$
 (48)

lacktriangleright În metoda lui Broyden alegerea vectorilor  $u^{(k)}$  și  $v^{(k)}$ are loc după principiul aproximației secantei. În cazul scalar aproximarea  $a_k \approx f'\left(x^{(k)}\right)$  se face unic prin

$$a_{k+1}(x^{(k+1)}-x^{(k)})=f(x^{(k+1)})-f(x^{(k)}).$$

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbitas

Metode de modificare

$$A_{k+1}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})$$
 (49)

(așa numita ecuație quasi-Newton) nu mai este unic determinată; orice altă matrice de forma

$$\bar{A}_{k+1} := A_{k+1} + pq^T$$

cu  $p, q \in \mathbb{R}^n$  și  $q^T(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$  verifică de asemenea ecuația (49).

Pe de altă parte,

$$y_k := F(x^{(k)}) - F(x^{(k-1)})$$
 și  $s_k := x^{(k)} - x^{(k-1)}$ 

conțin numai informații despre variația lui F în direcția  $s_k$ , dar nici o informație în direcții ortogonale pe  $s_k$ .

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

Ecuatii neliniare

onvergentà

alsa poziție

Mata da

succesive

Kădăcını multiple

teme neliniare

Metode
quasi-Newton
Interpolare liniară
Metode de modificare

Interpolare inv

Metode hibride



Radu Trîmbitas

Metode de modificare

Pe aceste direcții trebuie ca efectul lui  $A_{k+1}$  și  $A_k$  să coincidă

$$A_{k+1}q = A_k q, \quad \forall q \in \{v : v \neq 0, v^T s_k = 0\}.$$
 (50)

- ▶ Pornind de la prima aproximare  $A_0 \approx F'^{(0)}$ ), se generează șirul A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, ... utilizând formulele (49) și (50) (Broyden [2], Dennis și Moré [4]).
- Pentru şirul  $B_0 = A_0^{-1} \approx [F(x^{(0)})]^{-1}$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ , ... cu ajutorul formulei Sherman-Morisson (47) se obține relația de recurență

$$B_{k+1} := B_k + \frac{(s_{k+1} - B_k y_{k+1}) s_{k+1}^T B_k}{s_{k+1}^T B_k y_{k+1}}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

care conține doar înmulțiri matrice vector și a cărei complexitate este doar  $O(n^2)$ .

i alsa poziție

aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebrice

isteme neliniare

Metode Juasi-Newton

Metode de modificare

nterpolare inve

Cu ajutorul matricelor  $B_k$  se poate defini metoda lui Broyden prin

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - B_k F(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Această metodă converge superliniar în sensul lui (48), dacă pașii  $s_k$  se apropie asimptotic (când  $k \to \infty$ ) de pașii metodei lui Newton.
- Se poate recunoaște în aceasta semnificația centrală a principiului linearizării locale la rezolvarea ecuațiilor neliniare.

alsa poziție

letoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebri

steme neliniar

Metode

quasi-Newtor Interpolare liniară

Metode de modificare

Wetode de Illo

iterpolare inve

Bibliografie

```
Intrare: F. vectorul x^{(0)}, Nmax, toleranța tol
lesire: O aproximație a rădăcinii sau un mesaj de eroare
  B_0 := F'(x^{(0)}); \ v := F(x); \ B := B_0^{-1};
  s := -Bv: x := x + s:
  for k := 1 to Nmax do
     w := v; v := F(x); y := v - w;
    z := -By; \{z = -B_{k-1}y_k\}
    p := -s^T z; \{ p = s_k^T B_{k-1} y_k \}
     C := pI + (s+z)s^{T}:
     \{C = s_{k}^{T} B_{k-1}^{-1} y_{k} I + (s_{k} + B_{k-1} y_{k}) s_{k}^{T}\}
     B := (1/p) CB; \{B = B_k\}
    s := -Bv; \{s = -B_k F(x^{(k)})\}
    x := x + s:
     if crit_oprire(tol) then
       return x; {succes}
     end if
  end for
```

error("S-a depășit numărul maxim de iterații")

$$f(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha = g(0).$$

- Interpolarea inversă constă în aproximarea lui g(0) prin valoarea unui polinom de interpolare de grad mic.
- ▶ Dacă aproximăm g prin polinomul său Taylor de grad 1, avem

$$g(y) \approx (T_1 g)(y) = g(y_n) + (y - y_n)g'(y_n).$$

▶ Dacă  $y_n = f(x_n)$ , ținând cont că  $g'(y_n) = \frac{1}{f'(x_n)}$ , se obține

$$g(0) \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =: x_{n+1},$$

adică metoda lui Newton! Încercați să obțineți metoda corespunzătoare pentru  $T_2g$ .

Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

Ecuații neliniare

Ordin de convergență

alsa poziție

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

isteme neliniare

Metode

nterpolare liniară

Interpolare inversă

Metode hibride

## Interpolare inversă II

ightharpoonup Dacă luăm  $g \approx L_1 g$ , avem

$$g(y) \approx (L_1 g)(y) = g(y_n) + g[y_n, y_{n-1}](y - y_n).$$

► Tinând cont că

$$g[y_n, y_{n-1}] = \frac{g(y_n) - g(y_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

se obține

$$g(0) \approx x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n),$$

adică metoda secantei.

Rezolvarea numerică a ecuatiilor neliniare

Radu Trîmbiţaş

Cuatii neliniare

Ordin de convergență

i disa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

cuații algebrice

teme neliniare

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

Interpolare inversă

Metode hibride

raisa poz

motoda socamen

Metoda lui Newtor

aproximațiilor succesive

Kadacını multiple

cuații algebrice

steme neliniare

Aetode

quasi-INewton
Interpolare liniară
Metode de modificare

terpolare inv

Metode hibride

- Aceste metode combină metodele cu convergență globală, dar mai lente, cu metode cu convergență locală (de exemplu, Newton sau secantă).
- De asemenea, se utilizează scheme adaptive de monitorizare a iterațiilor și de testare a condițiilor de oprire.
- Una dintre cele mai cunoscute metode de acest tip este algoritmul lui Dekker, în varianta lui Brent, cunoscut și sub numele de algoritmul Dekker-Brent sau zeroin [6],[8].
- El combină metoda înjumătățirii cu metoda secantei și cu metoda interpolării inverse pătratice (IQI).
- ► Funcția MATLAB fzero se bazează pe acest algoritm.

Metoda aproximațiilor succesive

Rădăcini multiple

Ecuații algebric

isteme neliniare

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

Interpolare inversa

Dibliannella

- Se începe cu a și b astfel încât f(a) și f(b) au semne opuse.
- Se utilizează un pas al metodei secantei pentru a obţine c între a şi b.
- Se repetă pașii următori până când  $|b-a| < \varepsilon |b|$  sau f(b) = 0
  - Se permută a, b, c astfel încât
    - ightharpoonup f(b) și f(a) au semne opuse
    - $|f(b)| \leq |f(a)|$
    - c este valoarea precedentă a lui b.
  - Dacă c ≠ a se realizează un pas IQI, altfel un pas al metodei secantei.
  - Dacă rezultatul pasului IQI sau secantei este în [a, b], se acceptă
  - Dacă nu, înjumătățire.

Metoda ...

succesive

--cuatii algebrice

isteme neimi

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

Interpolare inv

Bibliografie

Octavian Agratini, Ioana Chiorean, Gheorghe Coman, Trîmbiţaş Radu, Analiză numerică şi teoria aproximării, vol. III, Presa Universitară Clujeană, 2002, coordonatori D. D. Stancu şi Gh. Coman.

C. G. Broyden, A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations, *Math. Comp.* 19 (1965), 577–593.

Gheorghe Coman, Analiză numerică, Editura Libris, Cluj-Napoca, 1995.

J. E. Dennis, J. J. Moré, Quasi-Newton Metods, Motivation and Theory, *SIAM Review* **19** (1977), 46–89.

W. Gautschi, *Numerical Analysis*. An Introduction, Birkhäuser, Basel, 1997.

Ordin de convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newtor

succesive

. Easti alaskija

Leadyn algebries

isteme nelinia

Metode quasi-Newton Interpolare liniară

Aetode de modificai

nterpolare inve

netode mon

- C. Moler, Numerical Computing in MATLAB, SIAM, 2004
- J. J. Moré, M. Y. Cosnard, Numerical Solutions of Nonlinear Equations, *ACM Trans. Math. Softw.* **5** (1979), 64–85.
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sidney, 1996, disponibila prin www, http://www.nr.com/.
- J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, 2nd ed., Springer Verlag, 1992.