

Interpolare spline

Interpolare polinomială pe porțiuni

Radu Trîmbițaș

UBB

7 mai 2020

Convergența interpolării polinomiale I

- Să definim ce înțelegem prin convergență.
- Presupunem că se dă un tablou triunghiular de noduri de interpolare $x_i = x_i^{(m)}$, având exact $m + 1$ noduri distincte pentru orice $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & x_0^{(0)} \\ & & & & & & x_0^{(1)} & x_1^{(1)} \\ & & & & & & x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & & & & x_0^{(m)} & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \dots & x_m^{(m)} \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \quad (1)$$

- Presupunem că toate nodurile sunt conținute într-un interval finit $[a, b]$.

Convergența interpolării polinomiale II

- Atunci pentru orice m definim

$$p_m(x) = L_m(f; x; x_0^{(m)}, x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}), \quad x \in [a, b]. \quad (2)$$

- Spunem că interpolarea Lagrange bazată pe tabelul de noduri (1) converge dacă

$$p_m(x) \Rightarrow f(x), \text{ când } n \rightarrow \infty \text{ pe } [a, b]. \quad (3)$$

- În general, procedeul interpolării Lagrange diverge.

Exemplul 1 (Contraexemplul lui Runge)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5],$$
$$x_k^{(m)} = -5 + 10\frac{k}{m}, \quad k = \overline{0, m}. \quad (4)$$

Nodurile sunt echidistante pe $[-5, 5]$, deci asimptotic uniform distribuite. Observăm că f are doi poli în $z = \pm i$. Se poate demonstra că

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |f(x) - p_m(f; x)| = \begin{cases} 0 & \text{dacă } |x| < 3.633\dots \\ \infty & \text{dacă } |x| > 3.633\dots \end{cases} \quad (5)$$

Graficul pentru $m = 10, 13, 16$ apare în figura 1.

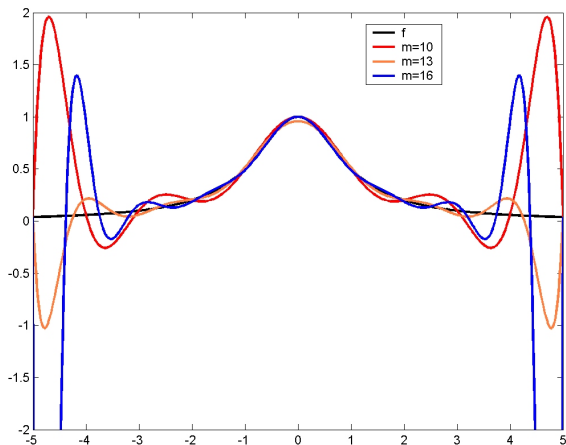


Figura: O ilustrare grafică a contraexemplului lui Runge

Exemplul 2 (Contraexemplul lui Bernstein)

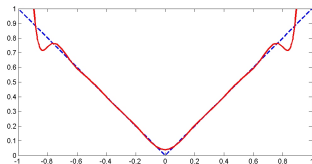
$$f(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1]$$

$$x_k^{(m)} = -1 + \frac{2k}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

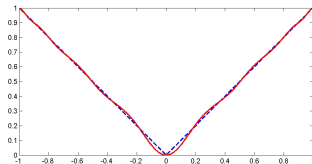
Problema analiticității nu se pune, deoarece f nu este derivabilă în $x = 0$. Se obține că

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |f(x) - L_m(f; x)| = \infty \quad \forall x \in [-1, 1]$$

exceptând punctele $x = -1$, $x = 0$ și $x = 1$. Vezi figura 7, pentru $m = 20$. Convergența în $x = \pm 1$ este trivială deoarece acestea sunt noduri de interpolare și deci eroarea în aceste puncte este 0. Același lucru este adevărat pentru $x = 0$, când n este impar, dar nu și când n este par. Eșecul convergenței pentru aceste noduri se explică doar parțial prin insuficiența regularității a lui f . Un alt motiv este distribuția uniformă a nodurilor. Există exemple mai bune de distribuții ale nodurilor (noduri Cebîșev). În figura 7 se dă graficul pentru $m = 17$.



Noduri echidistante



Noduri Cebîşev

Fie Δ o diviziune a lui $[a, b]$

$$\Delta : a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \quad (7)$$

Vom utiliza un polinom de grad mic pe subintervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n-1}$. Motivul este acela că pe intervale suficient de mici funcțiile pot fi approximate arbitrar de bine prin polinoame de grad mic, chiar 0 sau 1. Am introdus deja spațiul

$$S_m^k(\Delta) = \{s : s \in C^k[a, b], s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, i = 1, 2, \dots, n-1\} \quad (8)$$

$m \geq 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, numit **spațiul funcțiilor spline polinomiale de grad m și clasă de netezime k** . Dacă $k = m$, atunci funcțiile $s \in S_m^m(\Delta)$ sunt polinoame de grad m .

Spline liniare I

Pentru $m = 1$ și $k = 0$ se obțin **spline liniare**.

Dorim să găsim $s \in \mathbb{S}_1^0(\Delta)$ astfel încât

$$s(x_i) = f_i, \text{ unde } f_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Soluția este trivială, vezi figura 2. Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$

$$s(f; x) = f_i + (x - x_i)f[x_i, x_{i+1}], \quad (9)$$

iar

$$|f(x) - s(f(x))| \leq \frac{(\Delta x_i)^2}{8} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f''(x)|. \quad (10)$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

Rezultă că

$$\|f(\cdot) - s(f, \cdot)\|_\infty \leq \frac{1}{8} |\Delta|^2 \|f''\|_\infty. \quad (11)$$

Spline liniare II

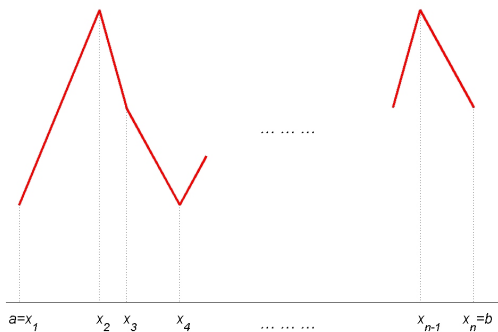


Figura: Spline liniare

Spline liniare III

Dimensiunea lui $S_1^0(\Delta)$ se calculează astfel: deoarece avem $n - 1$ porțiuni și pe fiecare 2 coeficienți (2 grade de libertate) și fiecare condiție reduce numărul de grade de libertate cu 1, avem în final

$$\dim S_1^0(\Delta) = 2n - 2 - (n - 2) = n.$$

O bază a spațiului este dată de așa-numitele funcții *B-spline*:

Punem $x_0 = x_1$, $x_{n+1} = x_n$, pentru $i = \overline{1, n}$

$$B_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{pentru } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{pentru } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (12)$$

Pentru $i = 1$ prima și pentru $i = n$ a doua ecuație se ignoră.

Funcția B_i se numește *pălărie chinezească*. Graficul funcțiilor B_i apare în figura 3.

Spline liniare IV

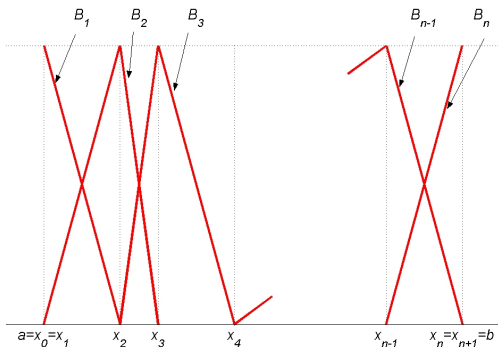


Figura: Funcții B-spline de grad 1

Ele au proprietatea

$$B_i(x_j) = \delta_{ij},$$

sunt liniar independente, deoarece

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i B_i(x) = 0 \wedge x \neq x_j \Rightarrow c_j = 0.$$

și

$$\langle B_i \rangle_{i=\overline{1,n}} = S_1^0(\Delta),$$

B_i joacă același rol ca polinoamele fundamentale Lagrange ℓ_i .

Interpolare cu spline cubice I

Funcțiile spline cubice sunt cele mai utilizate.

Vom discuta întâi problema interpolării pentru $s \in \mathbb{S}_3^1(\Delta)$. Continuitatea derivatei de ordinul I pentru $s_3(f; \cdot)$ se poate realiza impunând valorile primei derivate în fiecare punct x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Astfel fie m_1, m_2, \dots, m_n numere arbitrare date și notăm

$$s_3(f; \cdot)|_{[x_i, x_{i+1}]} = p_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (13)$$

Realizăm $s'_3(f; x_i) = m_i$, $i = \overline{1, n}$, luând fiecare bucată ca soluție unică a problemei de interpolare Hermite, și anume

$$\begin{aligned} p_i(x_i) &= f_i, & p_i(x_{i+1}) &= f_{i+1}, & i &= \overline{1, n-1}, \\ p'_i(x_i) &= m_i, & p'_i(x_{i+1}) &= m_{i+1} \end{aligned} \quad (14)$$

Interpolare cu spline cubice II

Vom rezolva problema folosind interpolarea Newton. Diferențele divizate sunt

$$\begin{array}{ccccccc} x_i & f_i & m_i & \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} & \frac{m_{i+1} + m_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2} \\ x_i & f_i & f[x_i, x_{i+1}] & \frac{m_{i+1} - f[x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i} & & & \\ x_{i+1} & f_{i+1} & m_{i+1} & & & & \\ x_{i+1} & f_{i+1} & & & & & \end{array}$$

și deci forma Newton a polinomului de interpolare Hermite este

$$\begin{aligned} p_i(x) = & f_i + (x - x_i)m_i + (x - x_i)^2 \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} \\ & + (x - x_i)^2 (x - x_{i+1}) \frac{m_{i+1} + m_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2}. \end{aligned}$$

Interpolare cu spline cubice III

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \quad (15)$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$c_{i,0} = f_i$$

$$c_{i,1} = m_i$$

$$c_{i,2} = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} - c_{i,3}\Delta x_i = \frac{3f[x_i, x_{i+1}] - 2m_i - m_{i+1}}{\Delta x_i} \quad (16)$$

$$c_{i,3} = \frac{m_{i+1} + m_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2}$$

Deci, pentru a calcula $s_3(f; x)$ într-un punct care nu este nod, trebuie în prealabil să localizăm intervalul $[x_i, x_{i+1}] \ni x$, să calculăm coeficienții cu (16) și să evaluăm spline-ul cu (15).

Vom discuta câteva alegeri posibile pentru m_1, m_2, \dots, m_n .

Interpolare Hermite cubică pe porțiuni

Se alege $m_i = f'(x_i)$ (presupunând că aceste derivate sunt cunoscute). Se ajunge la o schemă strict locală, în care fiecare bucată poate fi determinată independent de cealaltă. Mai mult, eroarea este

$$|f(x) - p_i(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\Delta x_i\right)^4 \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \frac{|f^{(4)}(x)|}{4!}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}. \quad (17)$$

Deci

$$\|f(\cdot) - s_3(f; \cdot)\|_\infty \leq \frac{1}{384} |\Delta|^4 \|f^{(4)}\|_\infty. \quad (18)$$

Pentru puncte echidistante

$$|\Delta| = (b - a)/(n - 1)$$

și deci

$$\|f(\cdot) - s_3(f; \cdot)\|_\infty = O(n^{-4}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Spline cubice de clasă C^2 I

Cerem ca $s_3(f; \cdot) \in S_3^2(\Delta)$, adică continuitatea derivatelor de ordinul al II-lea. Aceasta înseamnă, cu notația (13)

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \quad i = \overline{2, n-1}, \quad (20)$$

care convertită în coeficienți Taylor (15) dă

$$2c_{i-1,2} + 6c_{i-1,3}\Delta x_{i-1} = 2c_{i,2}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Înlocuind cu valorile explicite (16) pentru coeficienți se ajunge la sistemul liniar

$$\Delta x_i m_{i-1} + 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) m_i + (\Delta x_{i-1}) m_{i+1} = b_i, \quad i = \overline{2, n-1} \quad (21)$$

unde

$$b_i = 3\{\Delta x_i f[x_{i-1}, x_i] + \Delta x_{i-1} f[x_i, x_{i+1}]\} \quad (22)$$

Spline cubice de clasă C^2 II

Avem un sistem de $n - 2$ ecuații liniare cu n necunoscute m_1, m_2, \dots, m_n . Odată alese m_1 și m_n , sistemul devine tridiagonal și se poate rezolva eficient prin eliminare gaussiană, prin factorizare sau cu o metodă iterativă. Se dau în continuare câteva alegeri posibile pentru m_1 și m_n .

Spline complete(racordate, limitate)

Luăm $m_1 = f'(a)$, $m_n = f'(b)$. Se știe că pentru acest tip de spline, dacă $f \in C^4[a, b]$

$$\|f^{(r)}(\cdot) - s^{(r)}(f; \cdot)\|_{\infty} \leq c_r |\Delta|^{4-r} \|f^{(n)}\|_{\infty}, \quad r = 0, 1, 2, 3 \quad (23)$$

unde $c_0 = \frac{5}{384}$, $c_1 = \frac{1}{24}$, $c_2 = \frac{3}{8}$, iar c_3 depinde de raportul $\frac{|\Delta|}{\min_i \Delta x_i}$.

Spline care utilizează derivatele secunde

Impunem condițiile $s_3''(f; a) = f''(a)$; $s_3''(f; b) = f''(b)$. Aceste condiții conduc la două ecuații suplimentare

$$\begin{aligned} 2m_1 + m_2 &= 3f[x_1, x_2] - \frac{1}{2}f''(a)\Delta x_1 \\ m_{n-1} + 2m_n &= 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{1}{2}f''(b)\Delta x_{n-1} \end{aligned} \quad (24)$$

Prima ecuație se pune la începutul sistemului (21), iar a doua la sfârșitul lui, păstrându-se astfel structura tridiagonală a sistemului.

Impunând $s''(f; a) = s''(f; b) = 0$, se obțin două ecuații noi din (24) luând $f''(a) = f''(b) = 0$.

Avantajul – este nevoie numai de valori ale lui f , nu și ale derivatelor, dar prețul plătit este degradarea preciziei la $O(|\Delta|^2)$ în vecinătatea capetelor (în afară de cazul când $f''(a) = f''(b) = 0$).

"Not-a-knot spline" (C. deBoor) I

Cerem ca $p_1(x) \equiv p_2(x)$ și $p_{n-2}(x) \equiv p_{n-1}(x)$; adică primele două părți și respectiv ultimele două trebuie să coincidă. Într-adevăr, asta înseamnă că primul punct interior x_2 și ultimul x_{n-1} sunt ambele inactive. Se obțin încă două ecuații suplimentare exprimând continuitatea lui $s_3'''(f; x)$ în $x = x_2$ și $x = x_{n-1}$. Condiția de continuitate a lui $s_3(f, \cdot)$ în x_2 și x_{n-1} revine la egalitatea coeficienților dominanți $c_{1,3} = c_{2,3}$ și $c_{n-2,3} = c_{n-1,3}$. De aici se obțin ecuațiile

$$\begin{aligned}(\Delta x_2)^2 m_1 + [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2] m_2 - (\Delta x_1)^2 m_3 &= \beta_1 \\ (\Delta x_2)^2 m_{n-2} + [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2] m_{n-1} - (\Delta x_1)^2 m_n &= \beta_2,\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 2\{(\Delta x_2)^2 f[x_1, x_2] - (\Delta x_1)^2 f[x_2, x_3]\} \\ \beta_2 &= 2\{(\Delta x_{n-1})^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}] - (\Delta x_{n-2})^2 f[x_{n-1}, x_n]\}.\end{aligned}$$

"Not-a-knot spline" (C. deBoor) II

Prima ecuație se adaugă pe prima poziție iar a doua pe ultima poziție a sistemului format din cele $n - 2$ ecuații date de (21) și (22).

Sistemul obținut nu mai este tridiagonal, dar el se poate transforma în unul tridiagonal combinând ecuațiile 1 cu 2 și $n - 1$ cu n . După aceste transformări prima și ultima ecuație devin

$$\Delta x_2 m_1 + (\Delta x_2 + \Delta x_1) m_2 = \gamma_1 \quad (25)$$

$$(\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}) m_{n-1} + \Delta x_{n-2} m_n = \gamma_2, \quad (26)$$

unde

$$\gamma_1 = \frac{1}{\Delta x_2 + \Delta x_1} \left\{ f[x_1, x_2] \Delta x_2 [\Delta x_1 + 2(\Delta x_1 + \Delta x_2)] + (\Delta x_1)^2 f[x_2, x_3] \right\}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}} \left\{ (\Delta x_{n-1})^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}] + [2(\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}) + \Delta x_{n-1}] \Delta x_{n-2} f[x_{n-1}, x_n] \right\}.$$



Figura: Carl-Wilhelm Reinhold de Boor



Figura: Isaac Schoenberg (1903-1990)

Proprietatea de minimalitate a funcțiilor spline cubice I

Funcțiile spline cubice complete și naturale au proprietăți interesante de optimalitate. Pentru a le formula, este convenabil să considerăm nu numai subdiviziunea Δ ci și

$$\Delta' : a = x_0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = b, \quad (27)$$

în care capetele sunt noduri duble. Aceasta înseamnă că ori de câte ori interpolăm pe Δ' , interpolăm valorile funcției pe punctele interioare, iar la capete valorile funcției și ale derivatei. Prima teoremă se referă la funcții spline cubice complete $s_{compl}(f; \cdot)$.

Proprietatea de minimalitate a funcțiilor spline cubice II

Teorema 3

Pentru orice funcție $g \in C^2[a, b]$ care interpolează f pe Δ' , are loc

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{\text{compl}}(f; x)]^2 dx, \quad (28)$$

cu egalitate dacă și numai dacă $g(\cdot) = s_{\text{compl}}(f; \cdot)$.

Observația 4

$s_{\text{compl}}(f; \cdot)$ din teorema 3 interpolează f pe Δ' și dintre toți interpolanții de acest tip, derivata sa de ordinul II are norma minimă.

Demonstrație. Folosim notația prescurtată $s_{\text{compl}} = s$. Teorema rezultă imediat, dacă arătăm că

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx = \int_a^b [g''(x) - s''(x)]^2 dx + \int_a^b [s''(x)]^2 dx. \quad (29)$$

Proprietatea de minimalitate a funcțiilor spline cubice III

Aceasta implică imediat (28) și faptul că egalitatea în (28) are loc dacă și numai dacă $g''(x) - s''(x) \equiv 0$, din care integrând de două ori de la a la x și utilizând proprietățile de interpolare ale lui s și g în $x = a$ se obține $g(x) = s(x)$. Relația (29) este echivalentă cu

$$\int_a^b s''(x)[g''(x) - s''(x)]dx = 0. \quad (30)$$

Integrând prin părți și ținând cont că $s'(b) = g'(b) = f'(b)$ și $s'(a) = g'(a) = f'(a)$ se obține

$$\begin{aligned} \int_a^b s''(x)[g''(x) - s''(x)]dx &= \\ &= s''(x)[g'(x) - s'(x)] \Big|_a^b - \int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx = \\ &= - \int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx. \end{aligned} \quad (31)$$

Proprietatea de minimalitate a funcțiilor spline cubice IV

Deoarece s''' este constantă pe porțiuni

$$\begin{aligned}\int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx &= \sum_{\nu=1}^{n-1} s'''(x_\nu + 0) \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} [g'(x) - s'(x)]dx = \\ &= \sum_{\nu=1}^{n-1} s'''(x_{\nu+0}) [g(x_{\nu+1}) - s(x_{\nu+1}) - (g(x_\nu) - s(x_\nu))] = 0\end{aligned}$$

căci atât s cât și g interpolatează f pe Δ . Aceasta demonstrează (30) și deci și teorema. ■

Pentru interpolarea pe Δ , calitatea de a fi optimal revine funcțiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f; \cdot)$.

Proprietatea de minimalitate a funcțiilor spline cubice V

Teorema 5

Pentru orice funcție $g \in C^2[a, b]$ ce interpolează f pe Δ , are loc

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f; x)]^2 dx \quad (32)$$

cu egalitate dacă și numai dacă $g(\cdot) = s_{nat}(f; \cdot)$.

Demonstrația este analoagă cu a teoremei 3, deoarece (29) are loc din nou căci $s''(b) = s''(a) = 0$.

Punând $g(\cdot) = s_{compl}(f; \cdot)$ în teorema 5 se obține

$$\int_a^b [s''_{compl}(f; x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f; x)]^2 dx. \quad (33)$$

Deci, într-un anumit sens, spline-ul cubic natural este cel mai neted interpolant.

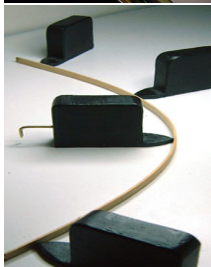
Proprietatea de minimalitate a funcțiilor spline cubice VI

Proprietatea exprimată în teorema 5 stă la originea numelui de spline. Un spline este o vergea flexibilă folosită pentru a desena curbe. Dacă forma sa este dată de ecuația $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ și dacă spline-ul trebuie să treacă prin punctele (x_i, g_i) , atunci se presupune că spline-ul are o formă ce minimizează energia potențială

$$\int_a^b \frac{[g''(x)]^2 dx}{(1 + [g'(x)]^2)^3},$$

pentru toate funcțiile g supuse aceluiași restricții. Pentru variații lente ale lui g ($\|g'\|_\infty \ll 1$) aceasta aproximează bine proprietatea de minim din teorema 5.

Instrumentul spline



spline



spline



florar