

# Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

De aici începe adevărata Analiză numerică

Radu Trîmbițaș

UBB

10 mai 2021

# Ecuatii neliniare I

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- Problema discutată în acest capitol se poate scrie generic sub forma

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

dar admite diverse interpretări, depinzând de semnificația lui  $x$  și  $f$ .

- Cel mai simplu caz este cel al unei singure ecuații cu o singură necunoscută, caz în care  $f$  este o funcție dată de o variabilă reală sau complexă și încercăm să găsim valorile acestei variabile pentru care  $f$  se anulează. Astfel de valori se numesc *rădăcini* ale ecuației (1) sau *zerouri* ale funcției  $f$ .
- Dacă  $x$  din (1) este un vector, să zicem  $x = [x_1, x_2, \dots, x_d]^T \in \mathbb{R}^d$  și  $f$  este de asemenea un vector ale cărui componente sunt funcții de cele  $d$  variabile  $x_1, x_2, \dots, x_d$ , atunci (1) reprezintă un *sistem de ecuații*.



# Ecuații neliniare III

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuații neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuații algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- Cazul special al ecuațiilor algebrice, unde  $f$  din (1) este un polinom, este de importanță considerabilă și merită un tratament special.





## Ordinul de convergență II

- ▶ De fapt, strict vorbind, marginea  $e_n$  converge liniar, însemnând că, în final (pentru  $n$  suficient de mare) fiecare din aceste margini ale erorii este aproximativ o fracție constantă din precedentă.

## Definiția 2

Se spune că  $x_n$  converge către  $\alpha$  (cel puțin) cu ordinul  $p \geq 1$  dacă (3) are loc cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = c, \quad c > 0 \quad (5)$$

- ▶ Astfel convergența de ordinul 1 coincide cu convergența liniară, în timp ce convergența de ordinul  $p > 1$  este mai rapidă.





# Ordinul de convergență IV

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- Este instructiv să examinăm comportarea lui  $e_n$ , dacă în loc de relația la limită avem egalitate pentru un anumit  $n$ , să zicem

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = c, \quad n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots \quad (6)$$

- Pentru  $n_0$  suficient de mare, relația (6) este aproape adevărată. Printr-o simplă inducție se obține că

$$e_{n_0+k} = c^{\frac{p^k-1}{p-1}} e_{n_0}^{p^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

care desigur are loc pentru  $p > 1$ , dar și pentru  $p = 1$  când  $p \downarrow 1$ :

$$e_{n_0+k} = c^k e_{n_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (p = 1) \quad (8)$$



# Ordinul de convergență VI

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

unde  $c_1 = \log \frac{1}{c} > 0$ , dacă  $p = 1$  și

$$c_p = \frac{1}{p-1} \log \frac{1}{c} + \log \frac{1}{e_{n_0}}$$

(presupunem că  $n_0$  este suficient de mare și deci  $e_{n_0}$  suficient de mic, pentru a avea  $c_p > 0$ ).

- Aceasta ne arată că numărul de cifre zecimale corecte crește liniar odată cu  $k$  când  $p = 1$ , dar exponențial când  $p > 1$ . În ultimul caz  $\delta_{k+1}/\delta_k \sim p$  înseamnă că (pentru  $k$  mare) numărul de cifre zecimale corecte crește, pe iterație, cu un factor  $p$ .

# Ordinul de convergență VII

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- ▶ Dacă fiecare iterație necesită  $m$  unități de lucru (o „unitate de lucru” este efortul necesar pentru a calcula o valoare a funcției sau a unei anumite derivate a sa), atunci *indicele de eficiență* al iterației poate fi definit prin

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\delta_{k+1}/\delta_k]^{1/m} = p^{1/m}.$$

- ▶ Aceasta ne dă o bază comună de comparare între diversele metode iterative. Metodele liniare au indicele de eficiență 1.

# Criteriul de oprire I

- ▶ Calculele practice necesită o regulă de oprire care să termine iterația atunci când s-a obținut (sau se crede că s-a obținut) precizia dorită.
- ▶ Ideal, ne oprim atunci când  $\|x_n - \alpha\| < tol$ ,  $tol$  dat.
- ▶ Deoarece  $\alpha$  nu este cunoscut se obișnuiește să se înlocuiască  $x_n - \alpha$  cu  $x_n - x_{n-1}$  și se impune cerința ca

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq tol \quad (10)$$

unde

$$tol = \|x_n\| \varepsilon_r + \varepsilon_a \quad (11)$$

cu  $\varepsilon_r, \varepsilon_a$  valori date ale erorii.

- ▶ Ca o măsură de siguranță, am putea cere ca (10) să aibă loc pentru mai multe valori consecutive ale lui  $n$ , nu doar pentru una singură.

# Criteriul de oprire II

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- ▶ Alegând  $\varepsilon_r = 0$  sau  $\varepsilon_a = 0$  se obține un test de eroare absolută sau relativă. Este totuși prudent să utilizăm un test mixt, cum ar fi, să zicem  $\varepsilon_r = \varepsilon_a = \varepsilon$ . Atunci, dacă  $\|x_n\|$  este mic sau moderat de mare, se controlează efectiv eroarea absolută, în timp ce pentru  $\|x_n\|$  foarte mare se controlează eroarea relativă.
- ▶ Testele de mai sus se pot combina cu  $\|f(x)\| \leq \varepsilon$ . În algoritmiile din acest capitol vom presupune că avem o funcție *crit\_oprire* care implementează testul de oprire.

# Metoda falsei poziții

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuații neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuații algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- ▶ Ca în metoda înjumătățirii, presupunem că avem două numere  $a < b$  astfel încât

$$f \in C[a, b], \quad f(a)f(b) < 0 \quad (12)$$

și generăm un șir descendent de intervale  $[a_n, b_n]$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  cu  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$  astfel încât  $f(a_n)f(b_n) < 0$ .

- ▶ Spre deosebire de metoda înjumătățirii, pentru a determina următorul interval nu luăm mijlocul lui  $[a_n, b_n]$ , ci soluția  $x = x_n$  a ecuației liniare

$$(L_1 f)(x; a_n, b_n) = 0.$$

- ▶ Aceasta pare să fie o alegere mai flexibilă decât în metoda înjumătățirii deoarece  $x_n$  va fi mai apropiat de capătul în care  $|f|$  este mai mic (Vezi figura 1)

# Metoda falsei poziții - algoritmul

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Procedura decurge după cum urmează:

```
for  $n := 1, 2, \dots$  do  
   $x_n := a_n - \frac{a_n - b_n}{f(a_n) - f(b_n)} f(a_n);$   
  if  $f(a_n)f(x_n) > 0$  then  
     $a_{n+1} := x_n; b_{n+1} := b_n;$   
  else  
     $a_{n+1} := a_n; b_{n+1} := x_n;$   
  end if  
end for
```

Iterația se poate termina când  $\min(x_n - a_n, b_n - x_n) \leq tol$ ,  
unde  $tol$  este o valoare dată.

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie







# Metoda falsei poziții - convergența III

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuații neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuații algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- ▶ Dacă  $f$  nu este convexă sau concavă pe  $[a, b]$ , ci  $f \in C^2[a, b]$  și  $f''(\alpha) \neq 0$ ,  $f''$  are semn constant pe o vecinătate a lui  $\alpha$  și pentru un  $n$  suficient de mare  $x_n$  ajunge în acea vecinătate și se poate proceda ca mai sus.
- ▶ Dezavantaje. (i) Convergența lentă; (ii) Faptul că unul din capete poate rămâne fix. Dacă  $f$  este turtită în vecinătatea rădăcinii și  $a$  este apropiat de  $\alpha$  și  $b$  depărtat convergența poate fi foarte lentă.

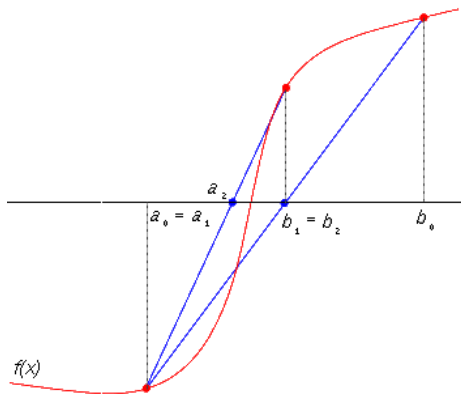


Figura: Metoda falsei poziții

# Metoda secantei I

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

- ▶ Este o variantă a metodei falsei poziții, în care nu se mai cere ca  $f$  să aibă valori de semne contrare, nici măcar la capetele intervalului inițial.
- ▶ Se aleg două valori arbitrare de pornire  $x_0, x_1$  și se continuă cu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (16)$$

- ▶ Aceasta preîntâmpină apariția unei false poziții și sugerează o convergență mai rapidă.
- ▶ Din păcate, nu mai are loc convergența „globală” pe  $[a, b]$  ci doar convergența „locală”, adică numai dacă  $x_0$  și  $x_1$  sunt suficient de apropiate de rădăcină.
- ▶ Vom avea nevoie de o relație între trei erori consecutive

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

# Metoda secantei II

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

**Metoda secantei**

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

$$\begin{aligned}x_{n+1} - \alpha &= x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]} \\&= (x_n - \alpha) \left( 1 - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{(x_n - \alpha)f[x_{n-1}, x_n]} \right) \\&= (x_n - \alpha) \left( 1 - \frac{f[x_n, \alpha]}{f[x_{n-1}, x_n]} \right) \\&= (x_n - \alpha) \frac{f[x_{n-1}, x_n] - f[x_n, \alpha]}{f[x_{n-1}, x_n]} \\&= (x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha) \frac{f[x_n, x_{n-1}, \alpha]}{f[x_{n-1}, x_n]}.\end{aligned}$$

► Deci

$$(x_{n+1} - \alpha) = (x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha) \frac{f[x_n, x_{n-1}, \alpha]}{f[x_{n-1}, x_n]}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (17)$$

- Din (17) rezultă imediat că dacă  $\alpha$  este o rădăcină simplă ( $f(\alpha) = 0$ ,  $f'(\alpha) \neq 0$ ) și  $x_n \rightarrow \alpha$  și dacă  $f \in C^2$  pe o vecinătate a lui  $\alpha$ , convergența este superliniară.

# Ordinul de convergență I

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

- ▶ Înlocuim raportul diferențelor divizate din (17) cu o constantă, ceea ce este aproape adevărat când  $n$  este mare. Punând  $e_k = |x_k - \alpha|$ , avem

$$e_{n+1} = e_n e_{n-1} C, \quad C > 0$$

- ▶ Înmulțind ambii membri cu  $C$  și punând  $E_n = C e_n$  obținem

$$E_{n+1} = E_n E_{n-1}, \quad E_n \rightarrow 0.$$

- ▶ Logaritmand și punând  $y_n = \frac{1}{E_n}$  obținem

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1}, \tag{18}$$

care este recurența pentru șirul lui Fibonacci.

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie





# Convergența metodei secantei I

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

## Teorema 3

*Fie  $\alpha$  un zero simplu al lui  $f$  și fie*

*$I_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| < \varepsilon\}$  și presupunem că  $f \in C^2[I_\varepsilon]$ .*

*Definim pentru  $\varepsilon$  suficient de mic*

$$M(\varepsilon) = \max_{\substack{s \in I_\varepsilon \\ t \in I_\varepsilon}} \left| \frac{f''(s)}{2f'(t)} \right|. \quad (19)$$

*Presupunem că*

$$\varepsilon M(\varepsilon) < 1 \quad (20)$$

*Atunci metoda secantei converge către rădăcina unică  $\alpha \in I_\varepsilon$  pentru orice valoare de pornire  $x_0 \neq x_1$  cu  $x_0 \in I_\varepsilon$ ,  $x_1 \in I_\varepsilon$ .*

# Convergența metodei secantei II

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

## Observația 4

*Se observă că  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(\varepsilon) = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| < \infty$ , deci (20) poate fi satisfăcută pentru  $\varepsilon$  suficient de mic. Natura locală a convergenței este cuantificată prin cerința ca  $x_0, x_1 \in I_\varepsilon$ .*



# Demonstrație - pasul II

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

Să arătăm că  $x_n \in I_\varepsilon$  pentru orice  $n$ , în afară de cazul când  $f(x_n) = 0$ , în care  $x_n = \alpha$  și metoda converge într-un număr finit de pași. Vom demonstra aceasta prin inducție:

presupunem că  $x_{n-1}, x_n \in I_\varepsilon$  și  $x_n \neq x_{n-1}$ . Acest lucru este adevărat pentru  $n = 1$  din ipoteză.

Deoarece  $f \in C^2[I_\varepsilon]$

$$f[x_{n-1}, x_n] = f'(\xi_1), \quad f[x_{n-1}, x_n, \alpha] = \frac{1}{2}f''(\xi_2), \quad \xi_i \in I_\varepsilon, \quad i = 1, 2,$$

din (17) rezultă

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \varepsilon^2 \left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_1)} \right| \leq \varepsilon M(\varepsilon) < \varepsilon,$$

adică  $x_{n+1} \in I_\varepsilon$ .

# Demonstrație - pasul III

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

**Convergența.** Mai mult, din relația între trei erori consecutive, (17), rezultă  $x_{n+1} \neq x_n$  în afară de cazul când  $f(x_n) = 0$  (și atunci  $x_n = \alpha$ ). Utilizând (17) avem

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq |x_n - \alpha| \varepsilon M(\varepsilon)$$

care aplicată repetat ne dă

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq |x_n - \alpha| \varepsilon M(\varepsilon) \leq \dots \leq [\varepsilon M(\varepsilon)]^{n-1} |x_1 - \alpha|.$$

Cum  $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$ , rezultă că metoda este convergentă și  $x_n \rightarrow \alpha$  când  $n \rightarrow \infty$ .

# Algoritmul

Deoarece este nevoie de o singură evaluare a lui  $f$  pe pas, indicele de eficiență este  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803\dots$

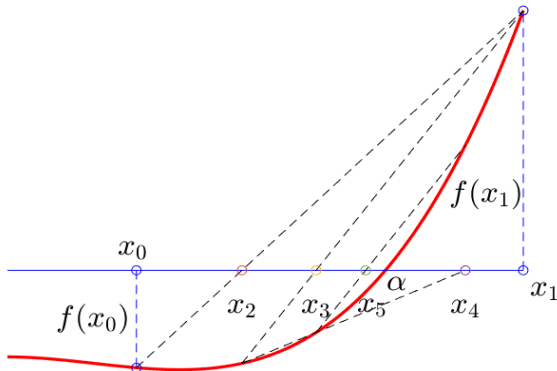


Figura: Ilustrarea metodei secantei

# Algoritmul în pseudocod

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

**Intrare:** Funcția  $f$ , valorile de pornire  $x_0$  și  $x_1$ , numărul maxim de iterații,  $Nmax$ , informații de toleranță  $tol$

**Ieșire:** O aproximație a rădăcinii sau un mesaj de eroare

```
1:  $x_c := x_1$ ;       $x_v = x_0$ ;  
2:  $f_c := f(x_1)$ ;     $f_v := f(x_0)$ ;  
3: for  $k := 1$  to  $Nmax$  do  
4:    $x_n := x_c - f_c * (x_c - x_v) / (f_c - f_v)$ ;  
5:   if  $crit\_oprire(tol)$  then  
6:     return  $x_n$ ; {Succes}  
7:   end if  
8:    $x_v := x_c$ ;    $f_v := f_c$ ;    $x_c := x_n$ ;    $f_c = f(x_n)$ ;  
9: end for  
10:  $error("S-a depășit numărul de iterații")$ .
```

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie



# Metoda lui Newton I

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

**Metoda lui Newton**

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- Poate fi privită ca un caz la limită al metodei secantei, când  $x_{n-1} \rightarrow x_n$ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (21)$$

- Altă interpretare: liniarizarea ecuației  $f(x) = 0$  în  $x = x_n$  (vezi figura 3)

$$f(x) \approx (T_1 f)(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) = 0.$$

- Astfel, metoda lui Newton se poate generaliza la ecuații neliniare de toate tipurile (sisteme neliniare, ecuații funcționale, caz în care  $f'$  trebuie înțeleasă ca derivată Fréchet), iar iterația este

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}f(x_n). \quad (22)$$



# Interpretarea geometrică a metodei lui Newton

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

**Metoda lui Newton**

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

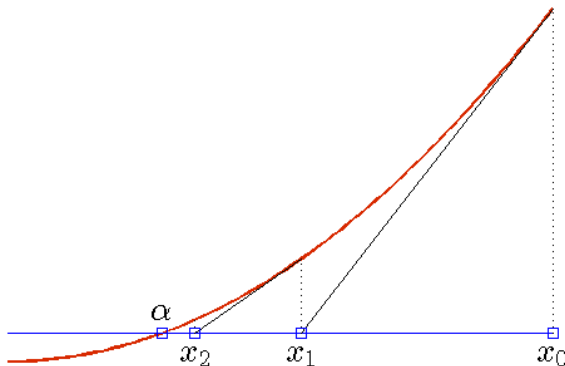


Figura: Metoda lui Newton

Referitor la convergența locală a metodei lui Newton avem

## Teorema 5

*Fie  $\alpha$  o rădăcină simplă a ecuației  $f(x) = 0$  și  $I_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| \leq \varepsilon\}$ . Presupunem că  $f \in C^2[I_\varepsilon]$ .*

*Definim*

$$M(\varepsilon) = \max_{\substack{s \in I_\varepsilon \\ t \in I_\varepsilon}} \left| \frac{f''(s)}{2f'(t)} \right| \quad (24)$$

*Dacă  $\varepsilon$  este suficient de mic astfel încât*

$$2\varepsilon M(\varepsilon) < 1, \quad (25)$$

*atunci pentru orice  $x_0 \in I_\varepsilon$ , metoda lui Newton este bine definită și converge pătratic către singura rădăcină  $\alpha \in I_\varepsilon$ .*

*Demonstrația: ca la secantă.*

Ecuații neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuații algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie



# Criteriul de oprire II

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Utilizând teorema lui Lagrange,

$f(\alpha) - f(x_n) = f'(\xi)(\alpha - x_n)$ , cu  $\xi \in (\alpha, x_n)$  (sau  $(x_n, \alpha)$ ).

Din relațiile  $f(\alpha) = 0$  și  $|f'(x)| \geq m_1$  pentru  $x \in (a, b)$

rezultă că  $|f(x_n)| \geq m_1|\alpha - x_n|$ , adică chiar (26).

Pe baza formulei lui Taylor avem

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1})f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})^2 f''(\mu), \quad (27)$$

cu  $\mu \in (x_{n-1}, x_n)$  sau  $\mu \in (x_n, x_{n-1})$ .

Ținând cont de modul de obținere a unei aproximații în metoda lui Newton, avem

$f(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1})f'(x_{n-1}) = 0$  și din (27) se obține

$$|f(x_n)| = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})^2 |f''(\mu)| \leq \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})^2 \|f''\|_\infty,$$

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

# Criteriul de oprire III

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

iar pe baza formulei (26) rezultă că

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Cum am presupus că metoda este convergentă, există un  $n_0$  natural cu proprietatea că

$$\frac{\|f''\|_\infty}{2m_1}(x_n - x_{n-1}) < 1, \quad n > n_0$$

și deci

$$|x_n - \alpha| \leq |x_n - x_{n-1}|, \quad n > n_0.$$



Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie





# Algoritmul în pseudocod

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

**Intrare:** Funcția  $f$ , derivata  $f'$ , valoarea de pornire  $x_0$ ,  
numarul maxim de iterații,  $Nmax$ , informații de  
toleranță  $tol$

**Ieșire:** O aproximație a rădăcinii sau un mesaj de eroare

```
1: for  $k := 0$  to  $Nmax$  do  
2:    $x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ ;  
3:   if  $crit\_oprire(tol)$  then  
4:     return  $x_{k+1}; \{Succes\}$   
5:   end if  
6: end for  
7:  $error("S-a depășit numărul de iterații")$ .
```

# Metoda aproximațiilor succesive I

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- ▶ Adesea, în aplicații, ecuațiile neliniare apar sub forma unei *probleme de punct fix*: să se determine  $x$  astfel încât

$$x = \varphi(x). \quad (28)$$

- ▶ Un număr  $\alpha$  ce satisface această ecuație se numește *punct fix* al lui  $\varphi$ .
- ▶ Orice ecuație  $f(x) = 0$  se poate scrie (în multe moduri diferite) în forma echivalentă (28). De exemplu, dacă  $f'(x) \neq 0$ , în intervalul de interes putem lua

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (29)$$

# Metoda aproximațiilor succesive II

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

- ▶ Dacă  $x_0$  este o aproximație inițială a unui punct fix  $\alpha$  a lui (28), atunci metoda aproximațiilor succesive generează un șir de aproximații

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \quad (30)$$

- ▶ Dacă acest șir converge și  $\varphi$  este continuă, atunci șirul converge către un punct fix a lui  $\varphi$ .
- ▶ De notat că (30) este chiar metoda lui Newton dacă  $\varphi$  este dată de (29). Astfel metoda lui Newton poate fi privită ca o iterație de tip punct fix, dar nu și metoda secantei.
- ▶ Pentru o iterație de forma (30), presupunând că  $x_n \rightarrow \alpha$  când  $n \rightarrow \infty$ , ordinul de convergență este ușor de determinat.

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

# Metoda aproximațiilor succesive III

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

- ▶ Să presupunem că în punctul fix  $\alpha$  avem

$$\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \dots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0 \quad (31)$$

- ▶ Presupunem că  $\varphi \in C^p$  pe o vecinătate  $V$  a lui  $\alpha$ .  
Avem atunci, conform teoremei lui Taylor

$$\begin{aligned} \varphi(x_n) &= \varphi(\alpha) + (x_n - \alpha)\varphi'(\alpha) + \dots + \frac{(x_n - \alpha)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(\alpha) \\ &\quad + \frac{(x_n - \alpha)^p}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n) = \varphi(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^p}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n), \end{aligned}$$

unde  $\xi_n \in (\alpha, x_n)$  (sau  $(x_n, \alpha)$ ).

- ▶ Deoarece  $\varphi(x_n) = x_{n+1}$  și  $\varphi(\alpha) = \alpha$  obținem

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n).$$

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

# Metoda aproximațiilor succesive IV

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

- ▶ Când  $x_n \rightarrow \alpha$ , deoarece  $\xi_n$  este între  $x_n$  și  $\alpha$ , deducem pe baza continuității că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0. \quad (32)$$

- ▶ Aceasta ne arată că ordinul de convergență este exact  $p$  și eroarea asimptotică este

$$c = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(\alpha). \quad (33)$$

- ▶ Combinând aceasta cu condiția uzuală de convergență locală se obține:

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

# Metoda aproximațiilor succesive V

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

## Teorema 7

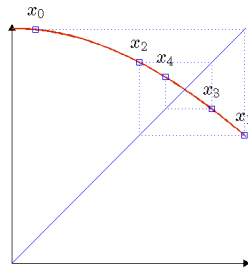
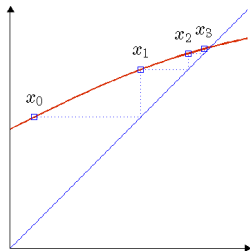
*Fie  $\alpha$  un punct fix al lui  $\varphi$  și  $I_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| \leq \varepsilon\}$ . Presupunem că  $\varphi \in C^p[I_\varepsilon]$  și satisface (31). Dacă*

$$M(\varepsilon) := \max_{t \in I_\varepsilon} |\varphi'(t)| < 1 \quad (34)$$

*atunci iterația (30) converge către  $\alpha$ ,  $\forall x_0 \in I_\varepsilon$ . Ordinul de convergență este  $p$ , iar eroarea asimptotică este dată de (33).*

# Interpretarea geometrica a metodei aproximațiilor succesive

## Convergența



Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

**Metoda  
aproximațiilor  
succesive**

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

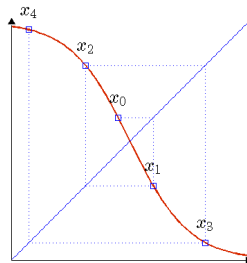
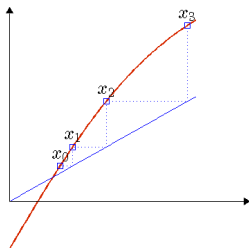
Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

# Interpretarea geometrica a metodei aproximațiilor succesive

Divergența



Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuații neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

**Metoda  
aproximațiilor  
succesive**

Rădăcini multiple

Ecuații algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie



# Metoda lui Newton pentru rădăcini multiple I

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

**Rădăcini multiple**

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- ▶ Dacă  $\alpha$  este o rădăcină multiplă de ordinul  $m$ , atunci ordinul de convergență a metodei lui Newton este doar 1. Într-adevăr, fie

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

- ▶ Deoarece

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

procesul va fi convergent dacă  $\varphi'(\alpha) = 1 - 1/m < 1$ .





# Metoda lui Newton pentru rădăcini multiple IV

- Eficiența variantei (37) a metodei lui Newton depinde de utilizarea unei valori de aproximare bune pentru  $m$ , dacă această valoare nu este cunoscută din alte surse. În ipoteza

$$|x_k - \alpha| < |x_{k-1} - \alpha| \wedge |x_k - \alpha| < |x_{k-2} - \alpha|$$

putem înlocui în (36)  $\alpha$  prin  $x_k$

$$f(x_{k-1}) \approx (x_{k-1} - x_k)^m \cdot c$$

$$f(x_{k-2}) \approx (x_{k-2} - x_k)^m \cdot c.$$

- În continuare se obține  $m$ :

$$m \approx \frac{\log [f(x_{k-1}) / f(x_{k-2})]}{\log [(x_{k-1} - x_k) / (x_{k-2} - x_k)]}.$$

Această valoare poate fi utilizată în (37).

# Ecuații algebrice I

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

- ▶ Există multe metode special concepute pentru a rezolva ecuații algebrice.
- ▶ Aici vom descrie numai metoda lui Newton aplicată în acest context, concentrându-ne asupra unui mod eficient de a evalua simultan valoarea polinomului și a primei derivate.
- ▶ Considerăm o ecuație algebrică de grad  $d$

$$f(x) = 0, \quad f(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0, \quad (38)$$

în care coeficientul dominant se presupune (fără a restrânge generalitatea) a fi egal cu 1 și unde putem presupune, fără a restrânge generalitatea că  $a_0 \neq 0$ .

- ▶ Pentru simplitate vom presupune că toți coeficienții sunt reali.

Ecuații neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuații algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

## Ecuatii algebrice II

## Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

## Ecuatii algebrice

### Interpolare liniară

Metode de modificare

## Interpolare inversă

## Metode hibride

## Bibliografie

- Pentru a aplica metoda lui Newton ecuației (38) este nevoie de o metodă bună de evaluare a polinomului și derivatei. Schema lui Horner este potrivită pentru așa ceva:

$$bd := 1; \quad cd := 1;$$
**for**  $k = d - 1$  **downto** 1 **do**
$$b_k := tb_{k+1} + a_k;$$
$$c_k := tc_{k+1} + b_k;$$
**end for**
$$b_0 := tb_1 + a_0;$$

- Atunci  $f(t) = b_0$ ,  $f'(t) = c_1$ .

- Deci procedăm astfel:

- ▶ Se aplică metoda lui Newton, calculând simultan  $f(x_n)$  și  $f'(x_n)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

# Ecuații algebrice III

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

- ▶ Se aplică apoi metoda lui Newton polinomului  $\frac{f(x)}{x-\alpha}$ .
- ▶ Pentru rădăcini complexe se începe cu  $x_0$  complex și toate calculele se fac în aritmetică complexă.
- ▶ Este posibil să se împartă cu factori pătratici și să se folosească aritmetica reală – metoda lui Bairstow.
- ▶ Folosind metoda aceasta de scădere a gradului erorile pot fi mari.
- ▶ O modalitate de îmbunătățire este de a utiliza rădăcinile astfel calculate ca aproximații inițiale și a aplica metoda lui Newton polinomului original.

Ecuații neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuații algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

# Metoda lui Newton pentru sisteme neliniare I

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

- ▶ Metoda lui Newton este ușor de generalizat la sisteme neliniare

$$F(x) = 0, \quad (39)$$

unde  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , iar  $x, F(x) \in \mathbb{R}^n$ .

- ▶ Sistemul (39) se scrie pe componente

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

- ▶ Fie  $F'(x^{(k)})$  jacobianul lui  $F$  în  $x^{(k)}$ :

$$J := F'(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^{(k)}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^{(k)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^{(k)}) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^{(k)}) \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie



# Metoda lui Newton pentru sisteme neliniare II

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- Cantitatea  $1/f'(x)$  se înlocuiește în acest caz cu inversa jacobianului în  $x^{(k)}$ :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}). \quad (41)$$

- Scriem iterația sub forma

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + w^{(k)}. \quad (42)$$

Se observă că  $w_k$  este soluția sistemului de  $n$  ecuații liniare cu  $n$  necunoscute

$$F'(x^{(k)}) w^{(k)} = -F(x^{(k)}). \quad (43)$$

- Este mai eficient și mai convenabil ca, în loc să inversăm jacobianul la fiecare pas, să rezolvăm sistemul (43) și să folosim iterația în forma (42).

# Metoda lui Newton pentru sisteme neliniare III

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

## Teorema 8

*Fie  $\alpha$  o soluție a ecuației  $F(x) = 0$  și presupunem că în bila închisă  $B(\delta) \equiv \{x : \|x - \alpha\| \leq \delta\}$ , există matricea Jacobi a lui  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , este nesingulară și satisface condiția Lipschitz*

$$\|F'(x) - F'(y)\|_{\infty} \leq c\|x - y\|_{\infty}, \quad \forall x, y \in B(\delta), \quad c > 0.$$

*Punem  $\gamma = c \max \{ \| [F'(x)]^{-1} \|_{\infty} : \|\alpha - x\|_{\infty} \leq \delta \}$  și  $0 < \varepsilon < \min \{ \delta, \gamma^{-1} \}$ . Atunci pentru orice aproximație inițială  $x^{(0)} \in B(\varepsilon) := \{x : \|x - \alpha\|_{\infty} \leq \varepsilon\}$  metoda lui Newton este convergentă, iar vectorii  $e^{(k)} := \alpha - x^{(k)}$  satisfac următoarele inegalități:*

$$(a) \quad \|e^{(k+1)}\|_{\infty} \leq \gamma \|e^{(k)}\|_{\infty}^2$$

$$(b) \quad \|e^{(k)}\|_{\infty} \leq \gamma^{-1} (\gamma \|e^{(0)}\|_{\infty})^{2^k}.$$

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

# Metoda lui Newton pentru sisteme neliniare IV

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

**Demonstrație.** Dacă  $F'$  este continuă pe segmentul ce unește punctele  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , conform teoremei lui Lagrange

$$F(x) - F(y) = J_k(x - y),$$

unde

$$J_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\xi_1) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\xi_n) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\xi_n) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= e^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}(F(x) - F(x^{(k)})) \\ &= e^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}J_k e^{(k)} \\ &= [F'(x^{(k)})]^{-1}(F'(x^{(k)}) - J_k)e^{(k)} \end{aligned}$$

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

# Metoda lui Newton pentru sisteme neliniare V

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

și de aici rezultă imediat (a). Din condiția Lipschitz

$$\|F'(x^{(k)}) - J_k\|_{\infty} \leq c \max_{j=1,n} \|x^{(k)} - \xi^{(j)}\| \leq c \|x^{(k)} - \alpha\|$$

Deci, dacă  $\|\alpha - x^{(k)}\|_{\infty} \leq \varepsilon$ , atunci

$$\|\alpha - x^{(k+1)}\|_{\infty} \leq (\gamma\varepsilon)\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Deoarece (a) este adevărată pentru orice  $k$ , se obține (b) imediat. ■

# Metoda lui Newton - pseudocod

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

**Intrare:** Funcția  $F$ , derivata Fréchet  $F'$ , vectorul de pornire  $x^{(0)}$ , numărul maxim de iterații,  $Nmax$ , informații de toleranță  $tol$

**Ieșire:** O aproximație a rădăcinii sau un mesaj de eroare

```
1: for  $k := 0$  to  $Nmax$  do  
2:   Calculează matricea jacobian  $J = F'(x^{(k)})$ ;  
3:   Rezolvă sistemul  $Jw = -F(x^{(k)})$ ;  
4:    $x^{(k+1)} := x^{(k)} + w$ ;  
5:   if  $crit\_oprire(tol)$  then  
6:     return  $x^{(k+1)}$ ; {Succes}  
7:   end if  
8: end for  
9:  $error("S-a depășit numărul de iterații")$ .
```

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

# Metode quasi-Newton I

- O slăbiciune semnificativă a metodei lui Newton pentru rezolvarea sistemelor de ecuații neliniare este necesitatea ca la fiecare pas să calculăm matricea jacobiană și să rezolvăm un sistem  $n \times n$  cu această matrice.
- Pentru a ilustra dimensiunile unei astfel de slăbiciuni, să evaluăm volumul de calcule asociat cu o iterație a metodei lui Newton. Matricea jacobiană asociată unui sistem de  $n$  ecuații neliniare scris în forma  $F(x) = 0$  necesită evaluarea celor  $n^2$  derivate parțiale ale celor  $n$  funcții componente ale lui  $F$ . În cele mai multe situații, evaluarea exactă a derivatelor parțiale este neconvenabilă și de multe ori imposibilă. Efortul total pentru o iterație a metodei lui Newton va fi de cel puțin  $n^2 + n$  evaluări de funcții scalare ( $n^2$  pentru evaluarea jacobianului și  $n$  pentru evaluarea lui  $F$ ) și  $O(n^3)$  operații aritmetice pentru a rezolva sistemul liniar.

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie



# Metode quasi-Newton III

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

- ▶ Se pot obține diverse generalizări ale metodei secantei la sisteme de ecuații neliniare în funcție de modul în care se interpretează  $\bar{\ell}_k$ .
- ▶ Prima interpretare conduce la metode de tip Newton discretizate, iar a doua la metode bazate pe interpolare.
- ▶ Metodele de tip Newton discretizate se obțin dacă în metoda lui Newton (41)  $F'(x)$  se înlocuiește cu o aproximare discretă  $A(x, h)$ . Derivatele parțiale din matricea jacobiană (40) se vor înlocui prin diferențele divizate

$$A(x, h)e_i := [F(x + h_ie_i) - F(x)]/h_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (44)$$

Ecuații neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuații algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie



# Metode quasi-Newton IV

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

**Metode  
quasi-Newton**

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

unde  $e_i \in \mathbb{R}^n$  este al  $i$ -lea vector al bazei canonice și  $h_i = h_i(x)$  este mărimea pasului de discretizare. O alegere posibilă a pasului este de exemplu

$$h_i := \begin{cases} \varepsilon |x_i|, & \text{dacă } x_i \neq 0; \\ \varepsilon, & \text{altfel,} \end{cases}$$

cu  $\varepsilon := \sqrt{\text{eps}}$ , unde eps este epsilon-ul mașinii.

# Interpolare liniară I

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

Ecuații neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuații algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- La interpolare fiecare dintre planele tangente se înlocuiește cu un (hiper)plan care interpolează funcțiile componente  $F_i$  ale lui  $F$  în  $n + 1$  puncte date  $x^{kj}$ ,  $j = \overline{0, n}$ , într-o vecinătate a lui  $x^{(k)}$ , adică se determina vectorii  $a^{(i)}$  și scalarii  $\alpha_i$ , astfel încât pentru

$$L_i(x) = \alpha_i + a^{(i)T}x, \quad i = \overline{1, n} \quad (45)$$

are loc

$$L_i(x^{kj}) = F_i(x^{kj}), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, n}.$$

- Următoarea aproximație  $x^{(k+1)}$  se obține ca punct de intersecție între cele  $n$  hiperplane (45) din  $\mathbb{R}^{n+1}$  cu hiperplanul  $y = 0$ .  $x^{(k+1)}$  rezultă ca soluție a sistemului de ecuații liniare

$$L_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (46)$$





## Metode de modificare II

atât timp cât  $1 + \left[ v^{(k)} \right]^T B_k u^{(k)} \neq 0$ .

- Necesitatea rezolvării unui sistem linear la fiecare pas dispare; aceasta se înlocuiește cu înmulțiri matrice-vector, ceea ce corespunde unei reduceri a efortului de calcul de la  $O(n^3)$  la  $O(n^2)$ .
- Acest avantaj va fi plătit prin aceea că nu vom mai avea o convergență pătratică ca la metoda lui Newton, ci doar una superliniară:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - \alpha\|}{\|x^{(k)} - \alpha\|} = 0. \quad (48)$$

- În *metoda lui Broyden* alegerea vectorilor  $u^{(k)}$  și  $v^{(k)}$  are loc după principiul aproximației secantei. În cazul scalar aproximarea  $a_k \approx f'(x^{(k)})$  se face unic prin

$$a_{k+1}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}).$$

# Metode de modificare III

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

- Pentru  $n > 1$ , din contră, aproximarea

$$A_{k+1}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)}) \quad (49)$$

(așa numita ecuație quasi-Newton) nu mai este unic determinată; orice altă matrice de forma

$$\bar{A}_{k+1} := A_{k+1} + pq^T$$

cu  $p, q \in \mathbb{R}^n$  și  $q^T(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$  verifică de asemenea ecuația (49).

- Pe de altă parte,

$$y_k := F(x^{(k)}) - F(x^{(k-1)}) \text{ și } s_k := x^{(k)} - x^{(k-1)}$$

conțin numai informații despre variația lui  $F$  în direcția  $s_k$ , dar nici o informație în direcții ortogonale pe  $s_k$ .

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

# Metode de modificare IV

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

- Pe aceste direcții trebuie ca efectul lui  $A_{k+1}$  și  $A_k$  să coincidă

$$A_{k+1}q = A_k q, \quad \forall q \in \{v : v \neq 0, v^T s_k = 0\}. \quad (50)$$

- Pornind de la prima aproximare  $A_0 \approx F'(x^{(0)})$ , se generează șirul  $A_1, A_2, \dots$  utilizând formulele (49) și (50) (Broyden [2], Dennis și Moré [4]).
- Pentru șirul  $B_0 = A_0^{-1} \approx [F'(x^{(0)})]^{-1}$ ,  $B_1, B_2, \dots$  cu ajutorul formulei Sherman-Morrisson (47) se obține relația de recurență

$$B_{k+1} := B_k + \frac{(s_{k+1} - B_k y_{k+1}) s_{k+1}^T B_k}{s_{k+1}^T B_k y_{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

care conține doar înmulțiri matrice vector și a cărei complexitate este doar  $O(n^2)$ .

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară  
Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- ▶ Cu ajutorul matricelor  $B_k$  se poate defini metoda lui Broyden prin

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - B_k F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ Această metodă converge superliniar în sensul lui (48), dacă pașii  $s_k$  se apropie asimptotic (când  $k \rightarrow \infty$ ) de pașii metodei lui Newton.
- ▶ Se poate recunoaște în aceasta semnificația centrală a principiului linearizării locale la rezolvarea ecuațiilor neliniare.



# Metoda lui Broyden

**Intrare:**  $F$ , vectorul  $x^{(0)}$ ,  $Nmax$ , toleranța  $tol$

**Ieșire:** O aproximație a rădăcinii sau un mesaj de eroare

$B_0 := F'(x^{(0)}); v := F(x); B := B_0^{-1};$

$s := -Bv; x := x + s;$

**for**  $k := 1$  **to**  $Nmax$  **do**

$w := v; v := F(x); y := v - w;$

$z := -By; \{z = -B_{k-1}y_k\}$

$p := -s^T z; \{p = s_k^T B_{k-1}y_k\}$

$C := pl + (s + z)s^T;$

$\{C = s_k^T B_{k-1}^{-1}y_k I + (s_k + B_{k-1}y_k)s_k^T\}$

$B := (1/p)CB; \{B = B_k\}$

$s := -Bv; \{s = -B_k F(x^{(k)})\}$

$x := x + s;$

**if**  $crit\_oprire(tol)$  **then**

**return**  $x; \{succes\}$

**end if**

**end for**

$error("S-a depășit numărul maxim de iterații")$

# Interpolare inversă I

- ▶ Dacă  $f$  este inversabilă pe o vecinătate  $V$  a lui  $\alpha$  și  $g$  este inversa sa ( $g = f^{-1}$ ), atunci

$$f(\alpha) = 0 \implies \alpha = g(0).$$

- ▶ Interpolarea inversă constă în aproximarea lui  $g(0)$  prin valoarea unui polinom de interpolare de grad mic.
- ▶ Dacă aproximăm  $g$  prin polinomul său Taylor de grad 1, avem

$$g(y) \approx (T_1 g)(y) = g(y_n) + (y - y_n)g'(y_n).$$

- ▶ Dacă  $y_n = f(x_n)$ , ținând cont că  $g'(y_n) = \frac{1}{f'(x_n)}$ , se obține

$$g(0) \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =: x_{n+1},$$

adică metoda lui Newton! Încercați să obțineți metoda corespunzătoare pentru  $T_2 g$ .

# Interpolare inversă II

Rezolvarea  
numerică a  
ecuațiilor neliniare

Radu Trîmbițaș

- Dacă luăm  $g \approx L_1 g$ , avem

$$g(y) \approx (L_1 g)(y) = g(y_n) + g[y_n, y_{n-1}](y - y_n).$$

- Ținând cont că

$$g[y_n, y_{n-1}] = \frac{g(y_n) - g(y_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

se obține

$$g(0) \approx x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n),$$

adică metoda secantei.

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă

Metode hibride

Bibliografie

- ▶ Aceste metode combină metodele cu convergență globală, dar mai lente, cu metode cu convergență locală (de exemplu, Newton sau secantă).
- ▶ De asemenea, se utilizează scheme adaptive de monitorizare a iterațiilor și de testare a condițiilor de oprire.
- ▶ Una dintre cele mai cunoscute metode de acest tip este algoritmul lui Dekker, în varianta lui Brent, cunoscut și sub numele de *algoritmul Dekker-Brent* sau *zeroin* [6],[8].
- ▶ El combină metoda înjumătățirii cu metoda secantei și cu metoda interpolării inverse pătratice (IQI).
- ▶ Funcția MATLAB `fzero` se bazează pe acest algoritm.

Ecuatii neliniare

Ordin de  
convergență

Falsa poziție

Metoda secantei

Metoda lui Newton

Metoda  
aproximațiilor  
succesive

Rădăcini multiple

Ecuatii algebrice

Sisteme neliniare

Metode  
quasi-Newton

Interpolare liniară

Metode de modificare

Interpolare inversă


Metode hibride


Bibliografie

# Descrierea algoritmului


- ▶ Se începe cu  $a$  și  $b$  astfel încât  $f(a)$  și  $f(b)$  au semne opuse.
- ▶ Se utilizează un pas al metodei secantei pentru a obține  $c$  între  $a$  și  $b$ .
- ▶ Se repetă pașii următori până când  $|b - a| < \varepsilon|b|$  sau  $f(b) = 0$ 
  - ▶ Se permută  $a, b, c$  astfel încât
    - ▶  $f(b)$  și  $f(a)$  au semne opuse
    - ▶  $|f(b)| \leq |f(a)|$
    - ▶  $c$  este valoarea precedentă a lui  $b$ .
  - ▶ Dacă  $c \neq a$  se realizează un pas IQL, altfel un pas al metodei secantei.
  - ▶ Dacă rezultatul pasului IQL sau secantei este în  $[a, b]$ , se acceptă
  - ▶ Dacă nu, înjumătățire.

## Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

 Octavian Agratini, Ioana Chiorean, Gheorghe Coman, Trîmbițaș Radu, *Analiză numerică și teoria aproximării*, vol. III, Presa Universitară Clujeană, 2002, coordonatori D. D. Stancu și Gh. Coman.

 C. G. Broyden, A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations, *Math. Comp.* **19** (1965), 577–593.

 Gheorghe Coman, *Analiză numerică*, Editura Libris, Cluj-Napoca, 1995.

 J. E. Dennis, J. J. Moré, Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory, *SIAM Review* **19** (1977), 46–89.

 W. Gautschi, *Numerical Analysis. An Introduction*, Birkhäuser, Basel, 1997.

## Interpolare liniară

Metode de modificare

## Metode hibride

## Bibliografie



C. Moler, *Numerical Computing in MATLAB*, SIAM, 2004



J. J. Moré, M. Y. Cosnard, Numerical Solutions of Nonlinear Equations, *ACM Trans. Math. Softw.* **5** (1979), 64–85.



W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sidney, 1996, disponibile prin  
www, <http://www.nr.com/>.



J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Springer Verlag, 1992.

## Interpolare liniară

Metode de modificare

## Interpolare inversă

## Metode hibride

## Bibliografie