Ghid Simplificat: Concepte Curs 3

Probabilități & Statistică

21 octombrie 2025

1 Probabilitatea Condiționată: $P(A|B)$

1.1 Ce este?

Probabilitatea condiționată răspunde la întrebarea: "Care este șansa să se întâmple evenimentul A, **știind deja** că evenimentul B s-a întâmplat?".

Se notează $P(A|B)$ și se citește "probabilitatea lui A condiționat de B".

1.2 Cum o gândim?

Gândiți-vă că evenimentul B, odată întâmplat, **restrânge universul** posibilităților. Nu ne mai uităm la toate rezultatele posibile, ci doar la cele în care B este adevărat.

- **Exemplu (cu zarul):**
- Fie A = "obții un 6". $P(A) = 1/6$.
- Fie B = "obții un număr par". $P(B) = 3/6$.
- Care este $P(A|B)$? Adică, "Care e șansa să obții 6, *știind că* ai obținut un număr par?"
- Noul nostru univers este {2, 4, 6}. În acest univers, "6" este unul din 3 rezultate.
- Deci, $P(A|B) = 1/3$.

1.3 Formula Oficială

Formula este definită ca raportul dintre probabilitatea intersecției (șansa ca A și B să se întâmple simultan) și probabilitatea evenimentului care s-a întâmplat deja (B):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{dacă } P(B) \neq 0$$

---

2 Formula Probabilității Totale

2.1 Ce este?

Această formulă ne ajută să calculăm probabilitatea totală a unui eveniment (X), atunci când acel eveniment depinde de mai multe "scenarii" sau "cauze" inițiale ($A_1, A_2, \dots, A_n$).

Condiția este ca aceste "scenarii" A_i să fie o **partiție**:

- Acoperă toate posibilitățile (sunt exhaustive).
- Nu se suprapun (sunt reciproc exclusive).

2.2 Cum o gândim?

Este, practic, o **medie ponderată** a probabilităților. Probabilitatea totală $P(X)$ este suma șanselor ca X să se întâmple în fiecare scenariu posibil.

Formula oficială:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(X|A_i)$$

Sau, scrisă pe larg pentru 3 scenarii:

$$P(X) = P(A_1) \cdot P(X|A_1) + P(A_2) \cdot P(X|A_2) + P(A_3) \cdot P(X|A_3)$$

Exemplu (cu urnele din curs): Vrem să aflăm $P(X) =$ "Probabilitatea de a extrage o bilă neagră". Scenariile (partiția) sunt: A_1 (alegerea urnei 1), A_2 (alegerea urnei 2), A_3 (alegerea urnei 3).

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A_1) \cdot P(X|A_1) + P(A_2) \cdot P(X|A_2) + P(A_3) \cdot P(X|A_3) \\ &= (\text{șansa să aleg U1}) \cdot (\text{șansa de neagră din U1}) + \dots \end{aligned}$$

---

3 Formula lui Bayes

3.1 Ce este?

Formula lui Bayes este "formula detectivului". Ea **inversează** probabilitatea condiționată. Ne ajută să aflăm probabilitatea unei **cauze**, știind **efectul**.

- **Normal:** Știm cauza → Aflăm efectul. (Ex: Știu că programul e C++. Care e șansa să compileze? → $P(\text{Compilare}|\text{C++})$)
- **Bayes:** Știm efectul → Aflăm cauza. (Ex: Știu că programul a compilat. Care e șansa să fi fost C++? → $P(\text{C++}|\text{Compilare})$)

3.2 Concepte: Apriori vs. Aposteriori

- **Probabilitate "Apriori"**: $P(A_k)$. Șansa inițială a cauzei A_k, *înainte* de a afla efectul X.
- **Probabilitate "Aposteriori"**: $P(A_k|X)$. Șansa *actualizată* a cauzei A_k, *după* ce am aflat că efectul X s-a întâmplat.

3.3 Formula Oficială

Formula lui Bayes pentru o cauză specifică A_k, știind efectul X, este:

$$P(A_k|X) = \frac{P(A_k) \cdot P(X|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(X|A_i)}$$

3.4 Interpretarea Formulei

Formula poate fi "tradusă" mai simplu:

$$P(\text{Cauza } k|\text{Efect}) = \frac{\text{Șansa scenariului care ne interesează (Cauza k ȘI Efectul)}}{\text{Suma șanselor tuturor scenariilor posibile (Probabilitatea Totală a Efectului)}}$$

- **Numărătorul (partea de sus):** Este $P(A_k \cap X)$, adică șansa scenariului care ne interesează (să fi fost cauza A_k ȘI să se fi produs efectul X).
- **Numitorul (partea de jos):** Este chiar **Formula Probabilității Totale** $P(X)$. Este șansa totală ca efectul X să se fi întâmplat, indiferent de cauză.

Exemplu (C++ vs Java din curs): Vrem $P(C++|\text{Compilare})$:

$$P(C++|\text{Comp}) = \frac{P(C++) \cdot P(\text{Comp}|C++)}{P(C++) \cdot P(\text{Comp}|C++) + P(J) \cdot P(\text{Comp}|J)}$$

Aici, numitorul este probabilitatea totală $P(\text{Comp})$.