Ghid Simplificat: Variabile Aleatoare Discrete

Material Teoretic

21 octombrie 2025

1 Ce este o Variabilă Aleatoare Discretă?

O **variabilă aleatoare** este o modalitate de a asocia un **număr** rezultatului unui experiment care implică șansă.

- **Exemplu:** Arunci un zar. Rezultatul este un eveniment (ex: "a ieșit fața cu 5 puncte"). Variabila aleatoare X ar putea fi "numărul de puncte de pe fața zarului". Deci, X poate lua valoarea 5.

"Discretă" înseamnă că variabila poate lua doar valori specifice, separate (pe care le poți număra), nu orice valoare dintr-un interval.

- **Exemplu din curs:** Se extrag 3 bile dintr-o urnă. Variabila X este "numărul de bile albe". X poate fi doar 0, 1, 2 sau 3. Nu poate fi 1.5 sau 2.7.

---

2 Repartiția (sau Distribuția) unei Variabile Aleatoare

Repartiția este "cartea de identitate" a unei variabile aleatoare. Este un tabel care ne arată două lucruri:

1. **Toate valorile posibile** pe care le poate lua variabila (ex: 0, 1, 2, 3).
2. **Probabilitatea** (șansa) ca variabila să ia fiecare dintre acele valori.

Notăm probabilitatea ca X să ia o anumită valoare x ca $P(X = x)$.
Exemplul cu bilele albe din curs: Repartiția se scrie sub formă de tabel:

$$X : \begin{pmatrix} \text{Valoare (nr. bile albe)} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \text{Probabilitate } (p_i) & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Acest tabel ne spune că $P(X = 0) = 1/8$, $P(X = 1) = 3/8$, etc.
Regulă importantă: Suma tuturor probabilităților trebuie să fie exact 1.

$$\sum p_i = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

---

3 Funcția de Repartiție $F(x)$

Această funcție răspunde la întrebarea: "Care este probabilitatea ca variabila X să ia o valoare **mai mică** decât un număr x?".

$$F(x) = P(X < x)$$

Este o probabilitate **cumulativă**. Se calculează adunând toate probabilitățile valorilor care sunt strict mai mici decât x.

Exemplu (folosind bilele):

- $F(1) = P(X < 1) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$
- $F(2) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$
- $F(3) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

Graficul acestei funcții arată ca o **scară** (o "funcție în trepte").

---

4 Indicatori Numerici

4.1 Valoarea Medie (Media) $M(X)$

Aceasta este "media așteptată" sau valoarea în jurul căreia se "învârt" rezultatele. Este o medie ponderată.

Calcul: Se înmulțește fiecare valoare posibilă (x_i) cu probabilitatea ei (p_i) și se adună toate rezultatele.

$$M(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$$

Exemplu (bilele albe):

$$\begin{aligned} M(X) &= \left(0 \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(1 \cdot \frac{3}{8}\right) + \left(2 \cdot \frac{3}{8}\right) + \left(3 \cdot \frac{1}{8}\right) \\ &= 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = 1.5 \end{aligned}$$

Exemplu (aruncarea unui zar):

$$M(X) = \left(1 \cdot \frac{1}{6}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(6 \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{21}{6} = 3.5$$

Notă: Media (ex: 1.5 sau 3.5) nu trebuie să fie o valoare pe care variabila o poate lua efectiv!

4.2 Dispersia $D^2(X)$ și Abaterea Medie Pătratică $\sigma(X)$

Acești indicatori măsoară cât de **împrăștiate** sunt valorile față de medie.

4.2.1 Dispersia $D^2(X)$

Dispersia este **media pătratelor abaterilor** de la medie. O formulă mai simplă de calcul este:

$$D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Unde $M(X^2)$ este media pătratelor valorilor:

$$M(X^2) = \sum_i x_i^2 \cdot p_i$$

4.2.2 Abaterea Medie Pătratică $\sigma(X)$

Deoarece dispersia are unități de măsură "la pătrat", este mai intuitiv să folosim abaterea medie pătratică. Aceasta este pur și simplu rădăcina pătrată a dispersiei.

$$\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)}$$

$\sigma(X)$ are aceeași unitate de măsură ca și variabila X și este mai ușor de interpretat ca o măsură a împrăștierii.

---

5 Momentele (Pe scurt)

"Momentele" sunt termeni generali care descriu forma distribuției.

5.0.1 Momente Obișnuite (sau inițiale) ν_k

Este media puterii k a lui X.

$$\nu_k = M(X^k) = \sum_i x_i^k \cdot p_i$$

- $\nu_1 = M(X^1) = M(X)$ (aceasta este **Media**)
- $\nu_2 = M(X^2)$ (folosit pentru calculul dispersiei)

5.0.2 Momente Centrate μ_k

Este media puterii k a abaterii de la medie.

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k]$$

- $\mu_1 = M[X - M(X)] = 0$ (abaterea medie de la medie e mereu zero)
- $\mu_2 = M[(X - M(X))^2] = D^2(X)$ (aceasta este **Dispersia**)