Calcul Numeric - Setul 2

Andrei Iacob

June 2024

1 Problema 3

1.1 Subpunctul a

Se consideră problema cu valori pe frontieră:

$$y'' = g(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{1}$$

(a) Ea poate fi discretizată notând $u_k = y(x_k)$ și înlocuind derivata întâi și a doua prin formulele:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \tag{2}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \tag{3}$$

relative la o grilă de puncte echidistante $x_k = a + k\frac{h}{n+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$, $h = \frac{b-a}{n+1}$.

Se ajunge la un sistem neliniar în necunoscutele u_k, $k = 1, \ldots, n$. Concepți o metodă de rezolvare aproximativă a problemei (2) bazată pe metoda lui Newton.

Sistemul discretizat

Utilizând aproximările pentru derivata întâi și a doua, ecuația diferențială devine:

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} = g\left(x_k, u_k, \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

Metoda lui Newton

Formula metodei lui Newton este data de

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Pentru a rezolva acest sistem neliniar, vom folosi metoda lui Newton. Sistemul discretizat poate fi scris ca $F(U) = 0$, unde $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ și $F : R^n \to R^n$ este definit de:

$$F_k(U) = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} - g\left(x_k, u_k, \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{5}$$

Metoda lui Newton necesită calculul jacobianului J_F, ale cărui elemente sunt derivatele parțiale ale lui F_k față de u_j:

$$(J_F)_{k,j} = \frac{\partial F_k}{\partial u_j} \tag{6}$$

Jacobianul aproximativ se poate calcula folosind:

$$\frac{\partial F_k}{\partial u_{k-1}} = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} g_{y'}\left(x_k, u_k, \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial u_k} = -\frac{2}{h^2} + g_y\left(x_k, u_k, \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}\right) \tag{8}$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial u_{k+1}} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} g_{y'}\left(x_k, u_k, \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}\right) \tag{9}$$

Iterativ, metoda lui Newton se exprimă prin:

$$U^{(m+1)} = U^{(m)} - J_F(U^{(m)})^{-1} F(U^{(m)}) \tag{10}$$

unde $U^{(m)}$ este aproximația la pasul m.

1.2 Subpunctul b

Rezolvarea se gaseste in fisierele newton.m si examen_6iun.mlx.

2 Problema 4

2.1 Subpunctul a

Se poate observa ca formula de cuadratura are 4 necunoscute (i.e. A_1, A_2, t_1, t_2), deci formula va fi exacta pentru orice polinoame de grad ≤ 3. Pentru a gasi nodurile si coeficientii pentru functia pondere $w(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$ se vor utiliza polinoamele $1, t, t^2, t^3$.

1. **Integrala din** 1**:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt = 1$$

2. **Integrala din** t**:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt = 0$$

3. **Integrala din** t^2**:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt = \frac{\pi^2}{3}$$

4. **Integrala din** t^3**:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^3\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt = 0$$

Sistemul de ecuatii

Conform integralelor din sectiunea 2.1, avem sistemul:

1. Pentru 1:

$$A_1 + A_2 = 1$$

2. Pentru t:

$$A_1 t_1 + A_2 t_2 = 0$$

3. Pentru t^2:

$$A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 = \frac{\pi^2}{3}$$

4. Pentru t^3:

$$A_1 t_1^3 + A_2 t_2^3 = 0$$

Rezolvand sistemul 2.1, obtinem:

$$A_1 = A_2 = 1/2$$

,

$$t1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

si

$$t2 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Restul $R(f)$ va fi calculat dupa formula:

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} \, dt$$

unde:

$$t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad t_2 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Prin calcule simple, se poate ajunge la rezultatul

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \frac{16\pi^4}{45}$$

, care poate fi adus la forma

$$R(f) = \frac{2 f^{(4)}(\xi) \pi^4}{135}$$

Deci, formula de cuadratura va fi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} f(t) \, dt = \frac{A_1}{2} f(\frac{\pi}{\sqrt{(3)}}) + \frac{A_2}{2} f(-\frac{\pi}{\sqrt{(3)}}) + \frac{2 f^{(4)}(\xi) \pi^4}{135}$$

2.2 Subpunctul b

Pentru a obtine un rezultat cu 6 zecimale exacte pentru integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}(t + cos(t) + 1)\, dt$$

trebuie sa o aducem la forma cuadraturii Gauss-Laguerre

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)\, dx$$

, unde ponderea este $t^{\alpha}e^{-t}$, cu $\alpha > -1$

Putem imparti integrala in doua, si avem

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}(t + cos(t) + 1)\, dt + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}(t + cos(t) + 1)\, dt$$

, unde

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}(t + cos(t) + 1)\, dt$$

si

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}(t + cos(t) + 1)\, dt$$

Pentru I_1, aplicam substitutia

$$x = -t \;\; dx = -dt$$

si asa intoarcem capetele intervalului de la $[-\infty, 0]$ la $[0, \infty]$ pentru a putea aplica cuadratura Gauss-Laguerre, iar pentru I_2 facem substitutia

$$x = t \;\; dx = dt$$

.

Astfel, obtinem

$$I_1 = -\int_{0}^{\infty} \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}(-x + cos(-x) + 1)\, dx$$

si

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}(x + cos(x) + 1)\, dx$$

Insa $cos(-x) = cos(x)$, deci putem scrie I_1 si sub forma:

$$I_1 = -\int_{0}^{\infty} \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}(1 + cos(x) - x)\, dx$$

In examen_6iun.mlx se poate gasi si aproximarea Gauss-Laguerre.