невых деревьев на рис. 7 (а также из табл. 3) получается бесконечная серия неизоморфных пар деревьев с тождественными вероятностями связности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Харари.* Теория графов. М., «Мир», 1973.
2. *А. К. Кельманс.* Связность графов со случайно выпадающими вершинами.— АиТ, 1972, № 4, с. 98—106.
3. *Е. А. Диниц, М. А. Зайцев.* Алгоритмы генерации неизоморфных деревьев, АиТ, 1977, № 4, с. 121—126.
4. *Е. А. Диниц, М. А. Зайцев.* Линейное упорядочение и порождение деревьев.— В наст. сб.
5. *E. A. Dinic, A. K. Kel'mans, M. A. Zaitsev.* Non-isomorphic trees with the same T-polynomials.— Inform. Process. Letters, 1977, 6, N 3, p. 73—76.

КОНСТРУКТИВНОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ БЛОК-СХЕМ

А. В. ИВАНОВ, И. А. ФАРАДЖЕВ

1. Комбинаторные блок-схемы в последнее время сделались объектом пристального внимания исследователей, что можно объяснить двумя причинами. С одной стороны, блок-схемы находят важные практические применения (планирование экспериментов [1], теория кодирования [2]) и связаны с бурно развивающимися областями современной математики (алгебраическая топология, комбинаторная теория чисел, конечная геометрия [3, 4], теория конечных групп [5] и т. д.). Уместно отметить тесную связь блок-схем с другими комбинаторными объектами — сильно-регулярными графами, проективными плоскостями, латинскими квадратами, матрицами Адамара и т. д. С другой стороны, многие теоретические вопросы, связанные с блок-схемами, до сих пор не поддаются решению.

Главными из таких вопросов являются вопросы существования блок-схем с заданными параметрами. Известны различные необходимые условия существования блок-схем, которые формулируются в терминах арифметических свойств параметров. Коннор [6] установил некоторые необходимые условия существования блок-схемы в терминах ее структуры. Ханани [7, 8] показал, что для некоторых классов блок-схем необходимые условия существования являются достаточными. Положение в настоящее время в общем таково: для одних наборов параметров известны все неизоморфные блок-схемы (тройки Штейнера на $v \leqslant 15$ элементах, проективные и афинные плоскости порядка $n \leqslant 8$), для других параметров известны одна или несколько схем и, наконец, для некоторых наборов параметров существование схем неизвестно (например, проективная плоскость порядка 10).

Известные методы построения блок-схем (см. [4]) можно разбить на две группы: алгебраические, позволяющие построить схему, допускающую заданные автоморфизмы, и рекурсивные, связанные с использованием при построении схем меньшего размера. Прямой комбинаторный метод построения блок-схем, использованный в работе [9] для перечисления всех неизоморфных троек Штейнера на 15 элементах, настолько трудоемок, что реализация подобных методов представляется возможной только с использованием ЭВМ. Вычислительные машины для построения и исследования блок-схем применены в работах [10, 11].

В настоящей статье описывается алгоритм построения неполных уравновешенных блок-схем с заданными параметрами, позволяющий в принципе сгенерировать все попарно-неизоморфные блок-схемы, и приводятся первые результаты машинных экспериментов с использованием этого алгоритма.

2. Рассмотрим множество элементов $X = \{x_i\}$, $|X| = v$ и систему $\mathfrak{B} = \{B_j\}$, $B_j \subseteq X$, $|\mathfrak{B}| = b$ подмножеств множества X (блоков). Пара $(X, \mathfrak{B})$ называется системой инциденций. Системе инциденций поставим в соответствие булевскую $(v \times b)$ матрицу инциденций $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \{0, 1\}$, определяемую условием $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_i \in B_j$. Системы $(X, \mathfrak{B})$ и $(X', \mathfrak{B}')$ называются изоморфными, если они переводятся друг в друга подстановками на множествах элементов и блоков: $(X, \mathfrak{B}) \sim (X', \mathfrak{B}') \Leftrightarrow \exists \alpha : X \leftrightarrow X', \exists \beta : \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{B}'$: $(\forall ij\ x_i \in B_j \Leftrightarrow \alpha x_i \in \beta B_j)$. В терминах матриц инциденций это означает, что $A \sim A' \Leftrightarrow \forall g \in S_v$, $\forall h \in S_b : gAh^{-1} = A'$, где S_p — симметрическая группа матриц-подстановок степени p. Система инциденций $(X, \mathfrak{B})$ называется неполной уравновешенной блок-схемой (BIB-схемой) с параметрами (v, b, r, k, λ), если выполнены условия

$$
\begin{aligned}
&\forall j\ |B_j| = k,\\
&\forall i\ |\{j : x_i \in B_j\}| = r,\\
&\forall i, i'\ |\{j : x_i \in B_j \,\&\, x_{i'} \in B_j\}| = \lambda \quad \text{при } i \neq i'.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Параметры BIB-схемы связаны очевидными условиями: $bk = vr$, $r(k-1) = \lambda(v-1)$. Обозначая через a_i и a_j^T i-ю строку и j-й столбец матрицы A, перепишем условия (1) в терминах матрицы инциденций блок-схемы:

$$
\begin{aligned}
&\forall j\ (a_j^T, a_j^T) = k,\\
&\forall i, i'\ (a_i, a_{i'}) = \begin{cases} r & \text{при } i = i',\\ \lambda & \text{при } i \neq i'. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Задача конструктивного перечисления BIB-схем с параметрами (v, b, r, k, λ) заключается в нахождении всех попарно-неизоморфных булевских $(v \times b)$-матриц, удовлетворяющих условиям (2).

3. Следуя [12], определим на множестве булевских матриц одинакового размера линейный порядок $(a_{ij}) = A > A' = (a'_{ij}) \Leftrightarrow (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1b}, \ldots, a_{v1}, \ldots, a_{vb}) > (a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{1b}, \ldots \ldots, a'_{v1}, \ldots, a'_{vb})$, где порядок vb-мерных векторов лексикографический. Максимальный (в смысле введенного порядка) элемент в множестве изоморфных матриц назовем каноническим и введем предикат каноничности C, истинный только на канонических матрицах $C(A) \equiv \forall (g, h) \in S_v \oplus S_b \quad A \geqslant gAh^{-1}$. Очевидно, что две различные канонические матрицы неизоморфны.

Таким образом, для решения задачи конструктивного перечисления системы инциденций достаточно генерировать только канонические матрицы.

Утверждение 1. $C(A) \Rightarrow \forall w < v \;\; C(A^w)$, где A^w — $(w \times b)$-матрица, состоящая из первых w строк матрицы A.

Утверждение 2. а) $C(A) \Rightarrow (\forall i, i' \quad i < i' \Rightarrow a_i \geqslant a_{i'})$; б) $C(A) \Rightarrow (\forall j, j' j < j' \Rightarrow a_j^T \geqslant a_{j'}^T$, где порядки на множествах b-мерных векторов a_i и v-мерных векторов a_j^T лексикографические.

Доказательство утверждений 1 и 2 непосредственно следует из определения каноничности.

Вследствие утверждения 2б в канонической матрице инциденций столбцы расположены в порядке лексикографического убывания (вообще говоря, не строгого). Столбцы j и j' будем называть w-эквивалентными, если j-й и j'-й столбцы матрицы A^w равны $j \underset{w}{\sim} j' \Leftrightarrow a_j^{wT} = a_{j'}^{wT}$. Относительно введенной эквивалентности множество $\{1, \ldots, b\}$ распадается на классы $\mathfrak{Y}^w = (Y_s^w)$, причем порядок на классах Y_s^w индуцируется порядком на векторах a_j^{wT}, $j \in Y_s^w$. Связь разбиений $\mathfrak{Y}^w$ и $\mathfrak{Y}^{w+1}$ устанавливает следующее

Утверждение 3. В канонической матрице A для любого $1 \leqslant s \leqslant |\mathfrak{Y}^w|$ либо $Y_s^w = Y_{s'}^{w+1} \in \mathfrak{Y}^{w+1}$, либо $Y_s^w = Y_{s'}^{w+1} \cup Y_{s'+1}^{w+1}$, где $Y_{s'}^{w+1}, Y_{s'+1}^{w+1} \in \mathfrak{Y}^{w+1}$.

Доказательство. Столбец $a_j^{(w+1)T}$ получается из столбца a_j^{wT} добавлением последней координаты a_{w+1}, которая в силу булевости матрицы A может иметь два значения: 0 или 1. Если для всех $j \in Y_s^w$ значения $a_{w+1, j}$ совпадают, то разбиения класса Y_s^w не происходит, в противном случае Y_s^w разбивается на два последовательных класса.

Для $i > w$ обозначим через x_{is}^w количество единиц в пересечении i-й строки и столбцов из Y_s^w в матрице A и поставим в соответствие i-й строке вектор $X_i^w = (x_{is}^w)$, $s = 1, \ldots, |\mathfrak{Y}^w|$.

Утверждение 4. Если A — каноническая матрица, то X_{w+1}^w однозначно определяет ее $(w+1)$-ю строку.

Доказательство. Действительно, если $x_{w+1, s}^w = 0$ $(x_{w+1, s}^w = |Y_s^w|)$, то все элементы в пересечении $(w+1)$-й строки и столбцов из Y_s^w равны нулю (единице). Если же $0 < x_{w+1, s}^w <$

$< | Y_s^w |$, то в силу утверждения 3 все $x_{w+1,s}^w$ единиц в пересечении $(w+1)$-й строки и столбцов из Y_s^w должны быть расположены левее (в столбцах с младшими номерами) всех $| Y_s^w | - x_{w+1,s}^w$ нулей.

Утверждение 5. $C(A) \Rightarrow \forall w, \ \forall i > w+1 \quad X_i^w \leqslant X_{w+1}^w$.

Доказательство. Пусть $X_i^w > X_{w+1}^w$ при $i > w+1$. Тогда можно i-ю строку переставить на $(w+1)$-е место и выполнить такие подстановки внутри множеств Y_s^w (от таких подстановок A^w не меняется), что $(w+1)$-я строка увеличится. Это приведет к увеличению матрицы A. Следовательно, матрица A не каноническая.

4. Утверждения 4 и 5 дают некоторые необходимые условия каноничности матрицы инциденций в терминах количества единиц в пересечениях строк и классов эквивалентности столбцов матрицы. Сформулируем в тех же терминах условие для того, чтобы матрица A представляла BIB-схему.

Пусть $\mathfrak{Y}_i^w \subset \mathfrak{Y}^w$ при $i \leqslant w$ — классы эквивалентности столбцов, такие, что $\forall j \in Y_s^w \in \mathfrak{Y}_i^w \ \ a_{ij} = 1$. Тогда второе из условий (2) при $i' > w$ принимает вид

$$\begin{gathered}\sum_{Y_s^w \in \mathfrak{Y}^w} x_{i',s}^w = r, \\ \sum_{Y_s^w \in \mathfrak{Y}_i^w} x_{i',s}^w = \lambda, \qquad i = 1, \ldots, w.\end{gathered} \tag{3}$$

Целочисленные решения системы (3) вместе с условием

$$0 \leqslant x_{i',s}^w \leqslant | Y_s^w | \tag{4}$$

определяют все возможные векторы $X_{i'}^w$, $i' > w$ для матриц инциденций BIB-схем с заданными первыми w строками. Множество этих решений (сами решения, очевидно, не зависят от номера строки i') обозначим $\mathfrak{X}^w$. В силу утверждения 4 вектор X_{w+1}^w однозначно определяет $(w+1)$-ю строку канонической матрицы. Таким образом, все канонические матрицы инциденций BIB-схем с заданными параметрами содержатся среди матриц, порождаемых back-track процедурой, один шаг которой состоит в следующем. Пусть уже определены w строк матрицы A и построены множества $\mathfrak{Y}^w$ и $\mathfrak{Y}_i^w$ для $i \leqslant w$. Решением системы (3)—(4) определяем множество векторов $\mathfrak{X}^w = \{X^w\}$. Если $\mathfrak{X}^w = \varnothing$, то матрицу A^w нельзя пополнить до матрицы инциденций BIB-схемы. В противном случае выбираем из $\mathfrak{X}^w$ лексикографически младшее решение и, используя его в качестве X_{w+1}^w, определяем $(w+1)$-ю строку. После вычисления множеств $\mathfrak{Y}^{w+1}$ и $\mathfrak{Y}_i^{w+1}$ в соответствии с утверждением 3 мы готовы к выполнению следующего шага перебора. Когда все возможности достройки матрицы A^{w+1} исчерпаны, изменяем $(w+1)$-ю строку, взяв в качестве X_{w+1}^{w} очередное решение из $\mathfrak{X}^{w}$.

Решения для 1-й и 2-строк канонической матрицы инциденций BIB-схемы единственны: $X_1^0 = (r)$, $X_2^1 = (\lambda, r - \lambda)$.

Недостаток описанного выше алгоритма заключается в том, что неизвестен эффективный способ решения системы (3)—(4). Однако множество решений $\mathfrak{X}^{w}$ этой системы можно получать рекуррентно, используя вычисленное ранее множество решений $\mathfrak{X}^{w-1}$.

Утверждение 6. Множество целочисленных решений системы

$$
\begin{aligned}
&\sum_{Y_l^w \in \mathfrak{Y}_w^w} x_s^w = \lambda, \\
&x_s^w + x_{s+1}^w = \tilde{x}_{s'}^{w-1} \quad \text{при } Y_{s'}^{w-1} = Y_s^w \cup Y_{s+1}^w, \\
&x_s^w = \tilde{x}_{s'}^{w-1} \quad \text{при } Y_{s'}^{w-1} = Y_s^w, \\
&0 \leqslant x_s^w \leqslant |Y_s^w|,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $\tilde{X}^{w-1} = (\tilde{x}_s^{w-1}) \in \mathfrak{X}^{w-1}$ совпадает с множеством $\mathfrak{X}^{w}$ целочисленных решений системы (3) — (4).

Доказательство непосредственно следует из утверждения 3. Очевидно, что если X_i^w удовлетворяет (5) при некотором $\tilde{X}^{w-1} \in \mathfrak{X}^{w-1}$, то $X_i^{w-1} = \tilde{X}_i^{w-1}$.

Утверждение 7. Если матрица A каноническая и X_{w+1}^{w} удовлетворяет (5) при некотором $\tilde{X}^{w-1} \in \mathfrak{X}^{w-1}$, то $X_w^{w-1} \geqslant \tilde{X}^{w-1}$.

Доказательство. Действительно, $X_{w+1}^{w-1} = \tilde{X}^{w-1}$ и из каноничности A в силу утверждения 5 следует $X_w^{w-1} \geqslant \tilde{X}^{w-1}$.

Утверждения 6,7 позволяют реализовать шаг перебора следующим образом. Пусть построены матрица A^{w-1} и множество допустимых решений $\mathfrak{X}^{w-1}$. Фиксируя одно из этих решений в качестве X_w^{w-1}, получаем матрицу A^w и, решая систему (5) при $\tilde{X}^{w-1} \in \mathfrak{X}^{w-1}$ и $\tilde{X}^{w-1} \leqslant X_w^{w-1}$, получаем множество допустимых решений $\mathfrak{X}^{w}$. Еще больше сузить множество допустимых решений позволяет

Утверждение 8. Пусть A^w, для которой $X_w^{w-1} = X^*$ — неканоническая матрица и существует пара $(g, h) \in S_w \oplus S_b$, такая, что $(gA^w h^{-1})^{w-1} > A^{w-1}$. Тогда любая матрица A', такая, что $A'^{w-1} = A^{w-1}$ и для некоторого $i > w$ $X_i^{w-1} = X^*$,— не каноническая.

Доказательство. Пусть $(g', h') \in S_v \oplus S_b$ меняет местами строки w, i и переставляет столбцы в классах Y_s^{w-1} так, чтобы $(g'A'h'^{-1}h^{-1})^w = A^w$. Рассмотрим пару $(gg', hh') \in S_v \oplus S_b$. Очевидно, что $(gg'A'h'^{-1}h^{-1})^{w-1} = (g(g'A'h'^{-1})^w h^{-1})^{w-1} = (gA^w h^{-1}) > A^{w-1} = A'^{w-1}$. Таким образом, по утверждению 1, A' не каноническая.

5. Займемся первым из условий (2): $(a_j^T, a_j^T) = k$. Для каждого класса $Y_s^w \in \mathfrak{Y}^w$ через z_s^w обозначим количество единиц в столбцах a_j^{wT} из этого класса: $z_s^w = | \{i \leqslant w : \forall j \in Y_s^w, \ a_{ij} = 1\} |$ и образуем вектор $Z^w = (z_s^w)$. Очевидно следующее

Утверждение 9. Если A — матрица инциденций BIB-схемы, то

$$\forall w, \ \forall Y_s^w \in \mathfrak{Y}^w \qquad k - v + w \leqslant z_s^w \leqslant k.$$

В случае, если $z_s^w = k$ $(z_s^w = k - v + w)$, для выполнения условия необходимо, чтобы остальные (при $i > w$) элементы столбцов из Y_s^w были нулями (единицами). Поэтому при генерации матриц инциденций BIB-схем из множества $\mathfrak{X}^w$ можно удалить все решения X^w, у которых $x_s^w \neq 0$ при $z_s^w = k$ или $x_s^w \neq | Y_s^w |$ при $z_s^w = k - v + w$. После этого можно выбросить из $\mathfrak{Y}^w$ классы Y_s^w с $z_s^w = k$ или $z_s^w = k - v + w$ и вычеркнуть у оставшихся в $\mathfrak{X}^w$ векторов X^w соответствующие координаты. При этом следует скорректировать первое из уравнений в системе (5):

$$\sum_{Y_s^w \in \mathfrak{Y}_w^w} x_s^w = \lambda - \lambda^w,$$

где

$$\lambda^w = \sum_{u<v} \ \sum_{z_s^u = k - v + u} | Y_s^u |. \tag{6}$$

Возможность дальнейшего сокращения перебора за счет сужения множества $\mathfrak{X}^w$ указывает

Утверждение 10. Пусть для всех $Y_s^w \in \mathfrak{Y}^w$ $z_s^w \neq k$ и $z_s^w \neq k - v + w$, и пусть $X^* \in \mathfrak{X}^w$ такой, что найдется $Y_s^w \in \mathfrak{Y}^w$, так что выполнено одно из двух условий:

$$\text{а) } \forall X \in \mathfrak{X}^w \ \ X \leqslant X^* \Rightarrow x_s^w = 0,$$
$$\text{б) } \forall X \in \mathfrak{X}^w \ \ X \leqslant X^* \Rightarrow x_s^w = | Y_s^w |. \tag{7}$$

Тогда матрица A^{w+1}, полученная из A^w использованием $X_{w+1}^w = X^*$, не достраивается до канонической матрицы инциденций BIB-схемы.

Доказательство. Утверждение 7 показывает, что для получения канонической матрицы в правую часть системы (5) нужно подставить решения $\tilde{X}^w \in \tilde{\mathfrak{X}}^w \subseteq \mathfrak{X}^w$, такие, что $\tilde{X}^w \leqslant X_{w+1}^w$. Но по условию все такие решения удовлетворяют (7). В этом случае вследствие утверждения 3 разбиения класса Y_s^w не произойдет и из системы (5) видно, что для всех $X \in \mathfrak{X}^{w+1}$ будет либо $x_{s'}^{w+1} = 0$, либо $x_{s'}^{w+1} = | Y_{s'}^{w+1} | = | Y_s^w |$. Таким образом, любое решение из $\mathfrak{X}^{w+1}$ удовлетворяет условиям утверждения и по индукции легко получить, что все столбцы из Y_s^w достроятся нулями или единицами. Но так как $z_s^w \neq k$ и $z_s^w \neq k - v + w$, то $z_s^v \neq k$, т. е. полученная матрица не является матрицей инциденций блок-схемы.

6. Приводим подробное описание процедуры построения всех канонических матриц инциденций BIB-схем с параметрами (v, b, r, k, λ), основанной на теоретических рассмотрениях п. 3—5. Состояние перебора характеризуется следующими величинами: w — количество выставленных строк; A^w — булевская $(w \times b)$-матрица; $\mathfrak{Y}^w$ — разбиение недостроенных столбцов на классы эквивалентности; J_0^w и J_1^w — множества столбцов, форсированно достраивающихся нулями и единицами; $\mathfrak{X}^w$ — множество $|\mathfrak{Y}^w|$-мерных векторов допустимых решений, упорядоченных в порядке лексикографического возрастания; t^w — номер очередного решения в $\mathfrak{X}^w$; $\widetilde{\mathfrak{X}}^w$ — допустимые векторы для правой части системы (5); Z^w — $|\mathfrak{Y}^w|$-мерный вектор количества единиц в классах эквивалентности недостроенных столбцов.

Исходное состояние: $w = 1$; A^1 определяется значением $X_1^0 = (r)$; $\mathfrak{Y}^1 = (Y_1^1, Y_2^1)$, где $Y_1^1 = \{1, \ldots, r\}$, $Y_2^1 = \{r + 1, \ldots, b\}$; $J_0^1 = J_1^1 = \varnothing$; $\mathfrak{X}^1 = \{X^1 = (\lambda, r - \lambda)\}$; $t^1 = 1$; $\widetilde{\mathfrak{X}}^1 = \varnothing$; $Z^1 = (1, 0)$.

1. Из $\mathfrak{X}^w$ выбираем решение с номером t^w и полагаем X_{w+1}^w равным этому решению.

2. Используя A^w, $\mathfrak{Y}^w$, J_0^w, J_1^w и X_{w+1}^w, строим A^{w+1}.

3. Проверяем каноничность A^{w+1} (алгоритм проверки каноничности изложен в работе [13]).

4. Если при проверке каноничности не обнаружено такой пары (g, h), что $(gA^{w+1}h^{-1})^w > A^w$, то присоединяем X_{w+1}^w к $\widetilde{\mathfrak{X}}^w$.

5. Если матрица A^{w+1} не каноническая, то переходим к п. 12.

6. Если $w + 1 = v$, то A^w — каноническая матрица BIB-схемы. Выводим A^w. Переходим к п. 12.

7. По $\mathfrak{Y}^w$, Z^w и X_{w+1}^w вычисляем $\mathfrak{Y}^{w+1}$ и Z^{w+1}.

8. Используя $\mathfrak{Y}^w$, $\mathfrak{Y}^{w+1}$, X_{w+1}^w и $\lambda^w = |J_1^w|$, составляем систему (5) с поправкой (6) и решаем ее, подставляя в правую часть все векторы из $\widetilde{\mathfrak{X}}^w$. Получаем множество решений $\mathfrak{X}^{w+1}$.

9. Производим форсированную достройку столбцов, т. е. для всех $Y_s^{w+1} \in \mathfrak{Y}^{w+1}$, таких что $z_s^{w+1} = k$ (или $z_s^{w+1} = k - v + w + 1$); из $\mathfrak{X}^{w+1}$ удаляем векторы с $x_s^{w+1} \neq 0$ (или с $x_s^{w+1} \neq |Y_s^{w+1}|$), выбрасываем соответствующие классы из $\mathfrak{Y}^{w+1}$ и координаты из $\mathfrak{X}^{w+1}$ и Z^{w+1} и формируем множества J_0^{w+1} и J_1^{w+1} добавлением форсированно достроенных классов к J_0^w и J_1^w.

10. Ищем в $\mathfrak{X}^{w+1}$ минимальное решение X^*, не удовлетворяющее условиям (7) и полагаем t^{w+1} равным номеру этого решения. Если такого решения не нашлось (или $\mathfrak{X}^{w+1} = \varnothing$), переходим к п. 12.

11. Образуем $\tilde{\mathfrak{X}}^{w+1}$ из решений $\mathfrak{X}^{w+1}$ с номерами, меньшими t^{w+1}, увеличиваем w на единицу и переходим к п. 1.

12. Увеличиваем t^w на единицу. Если $t^w \leqslant |\mathfrak{X}^w|$, то переходим к п. 1.

13. Уменьшаем w на 1. Если $w > 1$, переходим к п. 12, иначе — конец работы.

Описанный алгоритм был запрограммирован на языке типа АССЕМБЛЕР для машины ICL 4-70 (быстродействие около 300 000 оп/сек) и использован для составления полных списков BIB-схем с некоторыми наборами параметров. Количество построенных попарно-неизоморфных схем и время их генерации приведено в таблице.

Параметры					Число блок-схем	Время генерации (сек)
v	b	r	k	λ		
6	10	5	3	2	1	0,08
7	7	3	3	1	1	0,14
8	14	7	4	3	4	1,2
9	12	4	3	1	1	0,13
10	18	9	5	4	21	76
11	11	5	5	2	1	0,22
13	13	4	4	1	1	0,07
13	26	6	3	1	2	40
15	15	7	7	3	5	16
16	16	6	6	2	3	20

Быстродействие описанного алгоритма не позволяет использовать его для проверки существования неизвестных схем с параметрами (22, 33, 12, 8, 4) и (33, 44, 12, 9, 3). Однако в алгоритме есть большие резервы сокращения перебора за счет более раннего обнаружения того факта, что рассматриваемая матрица не достраивается до матрицы инциденций BIB-схемы. Для этого, например, можно использовать условия Коннора [6] на уже построенные блоки BIB-схемы, условия Агреваля [14] на число общих элементов в двух блоках и т. д.

Следует отметить, что развитая в статье техника может быть использована для генерации не только BIB-схем, но и других классов систем инциденций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. B. Mann.* Analysis and design of experiment. London, Dover, 1949.
2. *Ф. Дельсарт.* Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М., «Мир», 1976.
3. *М. Холл.* Блок-схемы.— В кн.: Прикладная комбинаторная математика. М., «Мир», 1968, с. 203—242.
4. *М. Холл.* Комбинаторика. М., «Мир», 1970.
5. *М. Холл.* Теория групп и блок-схемы.— В кн.: Комбинаторный анализ, вып. 1. Изд-во МГУ, 1971, с. 10—34.
6. *W. S. Connor.* On the structure of balanced incomplete block design.— Ann. Math. Stat., 1952, N 23, p. 57—71.
7. *H. Hanani.* The exsistance and construction of balanced incomplete block design.— Ann. Math. Stat., 1961, N 32, p. 361—386.
8. *H. Hanani.* On balanced incomplete block design with block having five elements.— J. Comb. Theory, 1972, N 12, p. 184—201.
9. *H. S. White, F. N. Cole, L. D. Cummings.* Complete classification of the triad systems on fifteen elements.— Mem. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1925, 14, p. 1—89.
10. *M. Hall, J. D. Swift.* Determination of Steiner triple systems of order 15.— MTAC, 1955, N 9, p. 146—156.
11. *P. Gibbons.* Computing techniques for the construction and analysis of block designs.— Techn. Rept N 92, Dept Comp. Sci., Univ. Toronto, 1976.
12. *И. А. Фараджев.* Конструктивное перечисление комбинаторных объектов.— В наст. сб.
13. *В. А. Зайченко, И. А. Фараджев.* Алгоритм проверки каноничности системы инциденций.— В наст. сб.
14. *H. L. Agreval.* On the bound of the member of commun treatment between blocks design.— J. Amer. Stat. Assoc., 1964, N 59, p. 867—871.

АЛГОРИТМЫ ПРОВЕРКИ КАНОНИЧНОСТИ СИСТЕМ ИНЦИДЕНЦИЙ

В. А. ЗАЙЧЕНКО, И. А. ФАРАДЖЕВ

1. Пусть $A = (a_{ij})$ — булевская $(n \times m)$-матрица, представляющая систему инциденций, т. е. вхождения элементов конечного множества мощностью n в m его подмножеств. Две системы инциденций называются изоморфными, если соответствующие матрицы переводятся друг в друга перестановкой строк и столбцов $A \sim A' \Leftrightarrow \exists g \in S_n, \exists h \in S_m : gAh^{-1} = A'$, где S_k — симметрическая группа степени k.

Упорядочивая элементы булевских матриц по строкам, введем на множестве матриц одинакового размера линейный порядок: $(a_{ij}) = A > A' = (a'_{ij}) \Leftrightarrow (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nm}) > (a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{1m}, \ldots, a'_{n1}, \ldots, a'_{nm})$, где порядок на nm-мерных векторах — лексикографический.

Максимальную (в смысле введенного порядка) матрицу в классе всех изоморфных между собой матриц будем называть канонической.