CURS 6

Def: (Repartiția unei variabile aleatoare)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. Se numește repartiția lui X sa măsura de probabilitate pe $\mathbb{R}$ definită prin

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$
$$= \mathbb{P}(X^{-1} \in (A)) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A), \ \forall A \subseteq \mathbb{R}$$

Repartiția: $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$

Def: (Funcția de repartiție)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ + v.a. S.n. funcția de repartiție a lui X (funcția cumulativă) funcția $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ definită prin $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Obs}}$: Dacă $A = (-\infty, x]$ atunci $F(x) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A)$

Proprietăți ale funcției de repartiție

a) F e crescătoare $(x < y \Rightarrow F(x) < F(y))$

$$\{X \in (-\infty, x]\} \subseteq \{X \in (-\infty, y]\}$$

b) F e continuă la dreapta.

$$F(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x)$$

c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$\boxed{\text{Obs}}$: O fct. cu a), b), c) e o fct. de repartiție

$\boxed{\text{Obs}}$:

d) $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \le x) = 1 - F(x)$

e) $\mathbb{P}(X < x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} F(y) = F(x-)$

f) $\mathbb{P}(x < X \le y) = \mathbb{P}(X \le y) - \mathbb{P}(X \le x) = F(y) - F(x)$

g) $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \le x) - \mathbb{P}(X < x)$
$= F(x) - F(x-)$

Def: (Fct de masă asociată unei v.a. discrete)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. discretă.

S.n. funcție de masă a lui X (PMF) funcția

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} f(x)$$

$\boxed{\text{Obs}}$: Dacă $A = (-\infty, x]$ atunci $F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \sum_{\substack{y \le x \\ y \in X(\Omega)}} f(y)$

Proprietăți

a) $f(x) \ge 0$

b) Masa totală este egală cu 1

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1$$

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \mathbb{R}\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\mathbb{R} = \{X \in \bigcup \{x\}, x \in X(\Omega)\} = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}$$