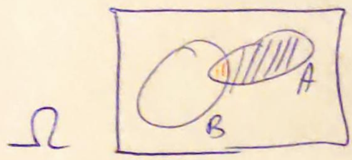
CURS 5

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate, $A \in \mathcal{F}$ și $\mathbb{P}(A) > 0$

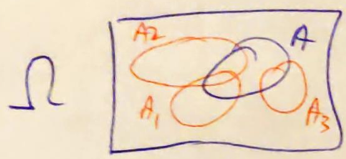
Atunci $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid A)$, $Q : \mathcal{F} \to [0,1]$ este o măsură de probabilitate



Pt. $B \in \mathcal{F}$ $Q(B) = \mathbb{P}(B \mid A) \in [0,1]$

$$Q(A) = \mathbb{P}(A \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$$

$$Q(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \mid A) = 0.$$



$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A)\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \cap A)}{\mathbb{P}A} = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$$

Q măsură de probabilitate pe A.

Formula lui Bayes

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și $A, B, C \in \mathcal{F}$ a.î. $\mathbb{P}(A \cap C) > 0$ și $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$

Atunci $\mathbb{P}(A \mid B, C) = \dfrac{\mathbb{P}(B \mid A, C) \cdot \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}$

Def: $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C) \overset{\text{Bayes}}{\Rightarrow} Q(A \mid B) = \dfrac{Q(B \mid A) \cdot Q(A)}{Q(A)}$, dar $Q(A \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B, C)$

Def: Spunem că A și B sunt independente dacă

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Not: $A \perp\!\!\!\perp B$ (A independent de B)

Obs_1 independența e diferită de evenimente disjuncte.

Obs_2 Dacă A și B sunt independente at. A și B^c, A^c și B, A^c și B^c sunt independente.

Def: Spunem că evenimentele $A_1, A_2, \dots A_n$ sunt independente dacă $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$, $(\forall)\ I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

Mai spunem că evenimentele sunt mutual independente.

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probab. O variabilă aleatoare este o fct. reală $X: \Omega \to \mathbb{R}$ care verif proprietățile

$$\{\omega \mid X(\omega) < x\} \subseteq \mathcal{F}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Def: Spunem că o variabilă aleatoare X e discretă dacă $X(\Omega)$ (mulțimea val pe care le poate lua X) este cel mult măsurabilă

În caz contrar, spunem că e continuă.