CURS 2

Prop: a) $\Omega \in \mathcal{F}$

b) $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i\geq 1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ și $\bigcap_{i\geq 1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

c) $(A_n)_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

d) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$ $(A \cap B^c \in \mathcal{F})$

Def 8 Perechea $(\Omega, \mathcal{F})$ s.n. spațiu probabilizabil / sp. măsurabil

$\mathcal{F}$
$\cup$
$A \to p$

- Fie $H(A)$ numărul de realizări ale evenimentului A

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{H\to\infty} \underbrace{\frac{H(A)}{H}}_{\text{frecvență relativă}} \quad \text{(ex: de câte ori a apărut cap)}$$

1) $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$

2) $A = \emptyset \Rightarrow H(\emptyset) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$A = \Omega \Rightarrow H(\Omega) = H \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1$

3) $A \cap B = \emptyset$

$H(A \cup B) = H(A) + H(B) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

- $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ disjuncte 2 câte 2 a.î.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Def: $(\Omega, \mathcal{F})$ sp probabilizabil

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$

Dacă prop: $\mathbb{P}(\emptyset)=0$ și $\mathbb{P}(\Omega)=1$

dacă $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ disjuncte at. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

$\Rightarrow$ măsură de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$

Def: Tripletul $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s.n. câmp de probabilitate.

Formula lui Poincaré:

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots A_n)$$

Formula lui Boole:

$(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ atunci $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Formula sumei

Dacă A și B mult. finite, $A \cap B \neq \emptyset$ at. $|A \cup B| = |A| + |B|$

Formula produsului

Dacă A și B mult. finite și considerăm $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

at. $A \times B$ este finit. și $|A \times B| = |A| \cdot |B|$