CURS 8

Def. Fie X o v.a. discretă. Definim media lui X prin

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x f(x)$$ unde $f(x)$ e o fct. de masă

suma ponderată

Ori de câte ori seria $\sum_x |x| f(x) < \infty$

Dacă seria asta e divergentă atunci spunem că media nu e definită

Proprietăți de mediei

a) Dacă X este constantă $X = c$ atunci $\mathbb{E}[X] = c$

b) Dacă X este o v.a. pozitivă $X \geq 0$ at. $\mathbb{E}[X] \geq 0$

c) Dacă X și Y sunt 2 v.a. a.î. $X \geq Y$ at. $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$

d) Dacă X și Y sunt 2 variabile aleatoare discrete și $a, b \in \mathbb{R}$ at. $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$

e) Fie $A \subseteq \Omega$ un event. și $\mathbb{P}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$ at. $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$

f) Dacă X și Y sunt 2 v.a. independente at. $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

Def: X v.a. discretă $\begin{cases} \text{moment de ordin } k = \text{media } \mathbb{E}[X^k] \\ \text{moment centrat de ordin } k = \text{media } \mathbb{E}[(X-a)^k] \end{cases}$

Dacă $a = \mathbb{E}[X]$ at. $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^k]$ s.n. moment centrat de ordin k

Def: Momentul centrat de ordin 2 s.n. dispersia (varianta) v.a. X și se not

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Definim abaterea standard a unei v.a. X prin $SD(X) = \sqrt{Var(X)}$

standard deviation

Prop ale variației

a) Dacă X este o v.a. const at. $Var(X)=0$

b) Dacă X este o v.a. (discretă), at. $Var(X) \geq 0$

c) Dacă X este o v.a. și $a \in \mathbb{R}$ atunci $Var(X+a) = Var(X)$

d) Dacă X este o v.a. și $a \in \mathbb{R}$ at. $Var(aX) = a^2 Var(X)$

Obs: $a=1 \Rightarrow Var(-X) = Var(X)$

Obs: $a, b \in \mathbb{R}$ at. $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

e) Dacă X este o v.a. (discretă) atunci $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

f) Dacă X și Y sunt 2 v.a. independente at. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Variabile aleatoare continue (absolut continue)

Def Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probab și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a.

Spunem că v.a. X este continuă dacă există o fct. pozitivă $f(x) \geq 0$ cu prop că $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ (intervale sau reuniuni cel mult numărabile de intervale).

Funcția f se n. densitate de repartiții

Prop. a) $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$