CURS 14.

Th. limită.

① Legea Numerelor Mari

Def. Fie $(X_n)_{n\geq 1}$ un șir de v.a. (independente și identic repartizate) (i.i.d) și X o v.a. Spunem că șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ converge aproape sigur la X notăm $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, dacă $\mathbb{P}(\lim_n X_n = X) = 1$

Def (Convergența în probabilitate: $\xrightarrow{\mathbb{P}}$)

Fie $(X_n)_n$ un șir de v.a. și X o v.a.

Spunem că șirul $(X_n)_n$ converge în probabilitate la X, notăm $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, dacă $\forall\, \varepsilon > 0$ avem $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$

Def: eșantion de volum n din populația Q = un șir $X_1, X_2, \dots X_n$ independent și identic repartizate cu repartiția comună Q ($\mathbb{P} \circ X_i^{-1} = Q$)

Media eșantionului $\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

Legea Numerelor Mari (slabă)

Fie $(X_n)_n$ un șir de v.a. i.i.d cu media $\mu < \infty$. Atunci...

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu = \mathbb{E}[X_1]$$

Legea Numerelor Mari (tare)

$$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu = \mathbb{E}[X_1]$$

② Th. limită centrală.

LMN: $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$

$Z_n = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\right)$ $\quad \mu$ = media lui X_1, σ^2 = var lui X_1

Th limită centrală.

Fie X_1, X_2 un şir de v.a. cu medie $\mu < \infty$ şi variaţie $\sigma^2 < \infty$

At. are loc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \le z) = \Phi(z), \ \forall z \in \mathbb{R} \text{ unde}$$

$$Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\right) \text{ iar } \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\, dx.$$