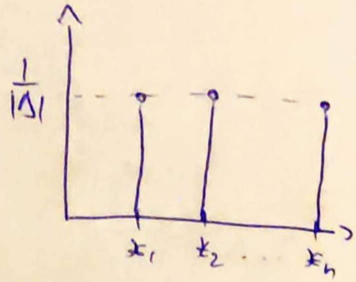
CURS 7

6. Variabile aleatoare repartizate uniform (discret)

- $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și $X : \Omega \to \Delta$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p.
- Spunem că v.a. X este repartizată uniform pe Δ, $X \sim U(\Delta)$ dacă
$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|\Delta|}, \quad x \in \Delta$$
- Dacă $A \subseteq \Delta$ atunci
$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in A} \frac{1}{|\Delta|} = \frac{|A|}{|\Delta|}$$



7. Variabile aleatoare repartizate geometric și negativ binomial.

- Aruncăm cu o monedă a cărei șansă de succes este p $(\mathbb{P}(\{H\}) = p)$ în mod repetat.

Variabila aleatoare X - numărul de aruncări până obținem și inclusiv, primul succes

$X \in \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$

V.a. X este repartizată geometric de parametru p, $X \sim Geom(p)$

$\mathbb{P}(X = k) = ?$, $k \geq 1$.

$$\{X = k\} \qquad \underbrace{T\, T \dots T}_{k-1}\ \underbrace{H}_{k}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k \geq 1}$$

i) $\mathbb{P}(X = k) \geq 0$

ii) serie geometrică
$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{1-p}_{q})^{k-1} = p \sum_{i=0}^{\infty} q^i = p \frac{1}{1-q} =$$
$$= p \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$$
$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$\sum q^i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} q^i = \lim_{n \to \infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1}{1-q}$$

Def: Variabila aleatoare X dată de numărul de aruncări până obținem pentru prima oară $r \geq 1$ succes este o v.a. repartizată <u>negativ binomial</u>, ~~$X \sim NB$~~

$X \sim NB(r,p)$. $\quad \mathbb{P}(X=k) = ?$ $\quad k = \{r, r+1, \dots\}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \underbrace{\quad}_{\text{nr de secvențe}} \times \underbrace{\quad}$$

posibilitatea unei secvențe fixate

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} \cdot p^{r}, \quad k \geq r$$

Obs. Dacă $r=1$ avem o $NB(1,p) = Geom(p)$

(P) Dacă $X \sim NB(r,p)$ atunci scriem $X = X_1 + X_2 + \dots + X_r$, $X_i \sim Geom(p)$ independente

8. V.a. repartizate Poisson

Def: Spunem că v.a. X este repartizată Poisson de parametru $\lambda > 0$ $X \sim P(\lambda)$ (sau $X \sim Pois(\lambda)$) dacă $X \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}}$$

Aproximare Poisson a binomialei

Def: Fie $X \sim B(n,p)$ a.î. n,p să verifice $\boxed{np \to \lambda}$ $\quad \begin{cases} n \text{ este mare} \\ p \text{ este mic} \end{cases}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \dots \quad \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Funcție de variabile aleatoare.

Def Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p., $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. (discretă) și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție. Atunci $g(X): \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "g \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Dacă X v.a. discretă $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $g(X)$ este tot o v.a. discretă.