Time Series

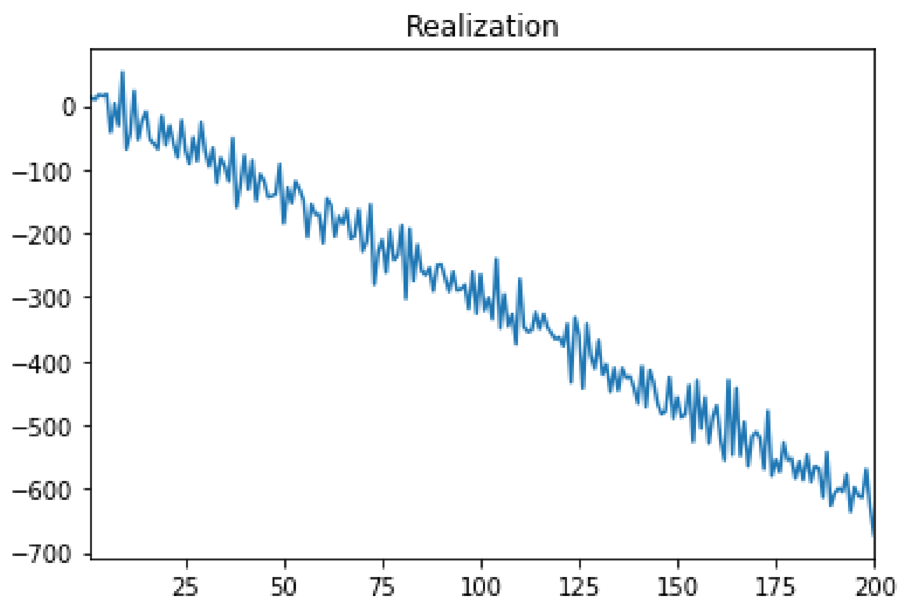
Исаев Андрей

March 2019

1 Введение

Временной ряд: в файле "input.csv". Количество наблюдений $N = 200$

Нарисуем реализацию



Модель ВР

$$X_t = \mu + bt + \alpha_1 X_{t-1} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

$$X_t = \mu + bt + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j X_{t-1} + (X_{t-1} - X_{t-2})(-\alpha_2 - \ldots - \alpha_p)$$

$$= \mu + bt + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j X_{t-1} + \theta_1 \Delta X_{t-1} + \ldots + \theta_p \Delta X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

$$\theta = -\alpha_{j+1} - \ldots - \alpha_p,$$

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \mu + bt + (\sum_{j=1}^{p} \alpha_j - 1) X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \theta_j \Delta X_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$\Delta X_t = \mu + bt + \gamma X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \theta_j \Delta X_{t-j} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Где

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$
$$p <= N^{1/3}$$

Нужно вычислить какое количество запаздываний являются значимыми и уточнить формулу (1). Количество запаздываний $p <= 5.8$. Для этого посчитаем $p - value$ на уровне значимости $\alpha = 0.05$ для коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ модели с $p = 5$ запаздываниями.

$$\alpha_1 = 0.000,$$
$$\alpha_2 = 0.005,$$
$$\alpha_3 = 0.421,$$
$$\alpha_4 = 0.558,$$
$$\alpha_5 = 0.855$$

Таким образом, значимые только α_1, α_2. Модели принимает вид:

$$\Delta X_t = \mu + bt + \gamma X_{t-1} + \theta_1 \Delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

Используем Процедуру Dolado-Jenkinson-Sosvilla-Rivero для того, чтобы определить к какому типу относится ВР - TSP или DSP. Процедура состоит из пяти шагов.

Шаг1. Проверить гипотезу $H_0 : \sum_{j=1}^{p} \alpha_j - 1 = \gamma = 0$ против альтернативной гипотезы $H_A : \gamma < 0$, с помощью ADF-статистики $DF_t r(\alpha = 0.05)$, если H_0 отвергается, то $\gamma < 0$ и проверяемый ВР можно отнести к типу TSP.

$$\hat{DF}_{tr} = \frac{\hat{\gamma}}{S(\hat{\gamma})}$$

Гипотеза отвергается на уровне значимости $\alpha = 0.05$, если $\hat{DF}_{tr} < DF_t r(\alpha = 0.05)$

ADF Statistic: -10.485569
p-value: 0.000000
usedlags: 2
Critical Values:
1%: -4.005
5%: -3.433
10%: -3.140

Поскольку $-10.485569 < -3.433$ то необходимо отвергнуть H_0. И **временной ряд - типа TSP**.

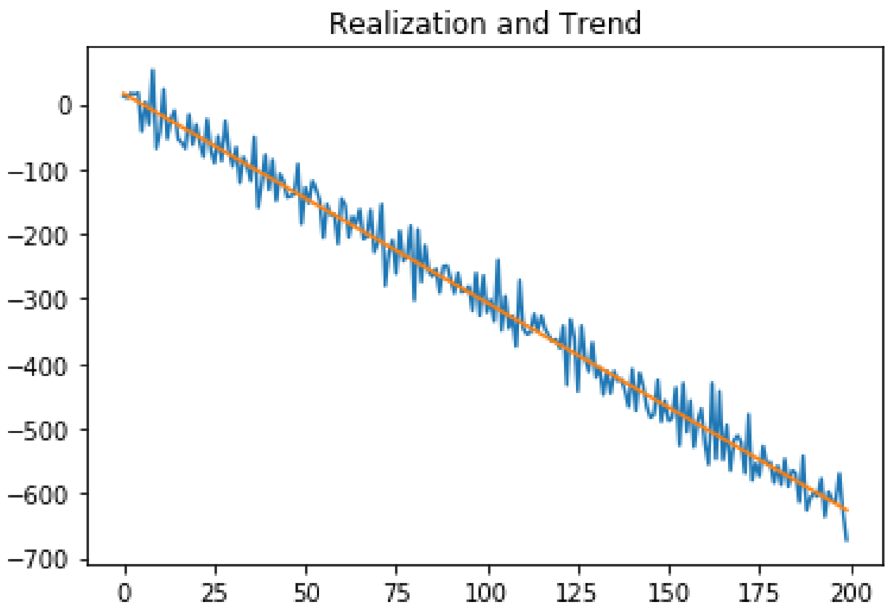
2 Оценка тренда

Рассмотрим аддитивную модель ВР: $x_t = d_t + \varepsilon_t$, $t = 1, \dots, n$
Необходимо оценить детерминированную состовляющую ряда. Для этого нужно использовать Метод Наименьших Квадратов (МНК).
Пусть тренд $f(t) = \theta_0 + \theta_1 t$ - линейный тренд.

И тогда

$$\hat{\theta_0} = \bar{y} - \hat{\theta_1}\bar{x},$$
$$\hat{\theta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

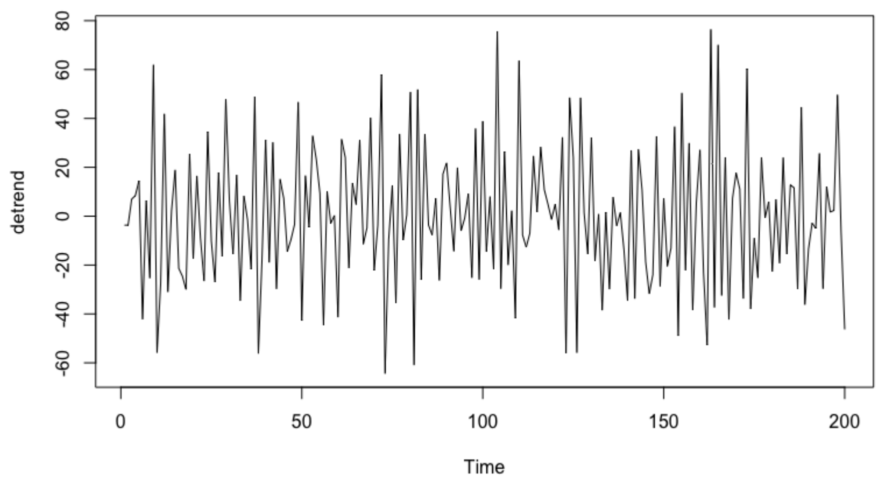
По расчетам $\hat{\theta_0} = 19.70$, $\hat{\theta_1} = -3.227509$



3 Детрендирование ряда

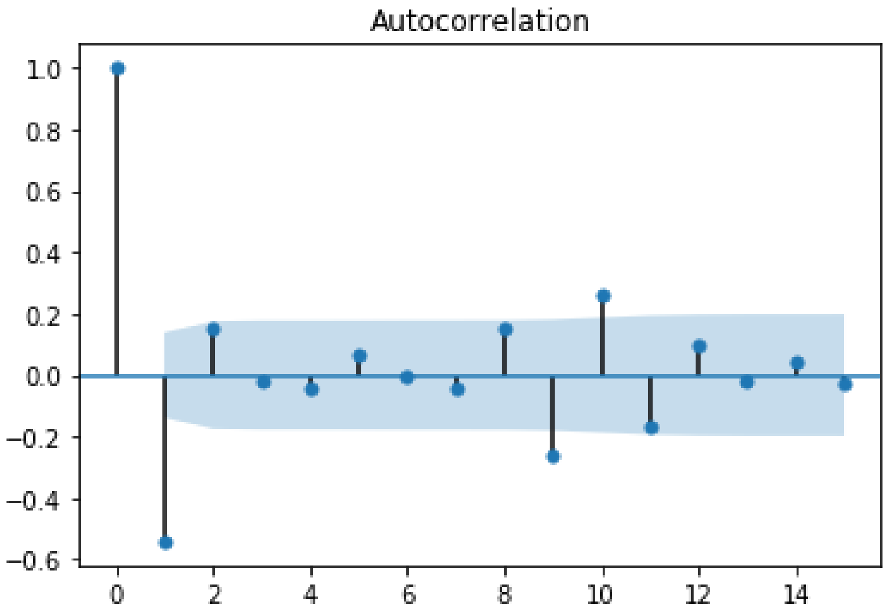
Для того чтобы детренедировать ВР, необходимо посчитать $X_i - (\hat{\theta_0} + \hat{\theta_1} i)$
Детрендированный ряд находится в файле "output.csv"

Нарисуем

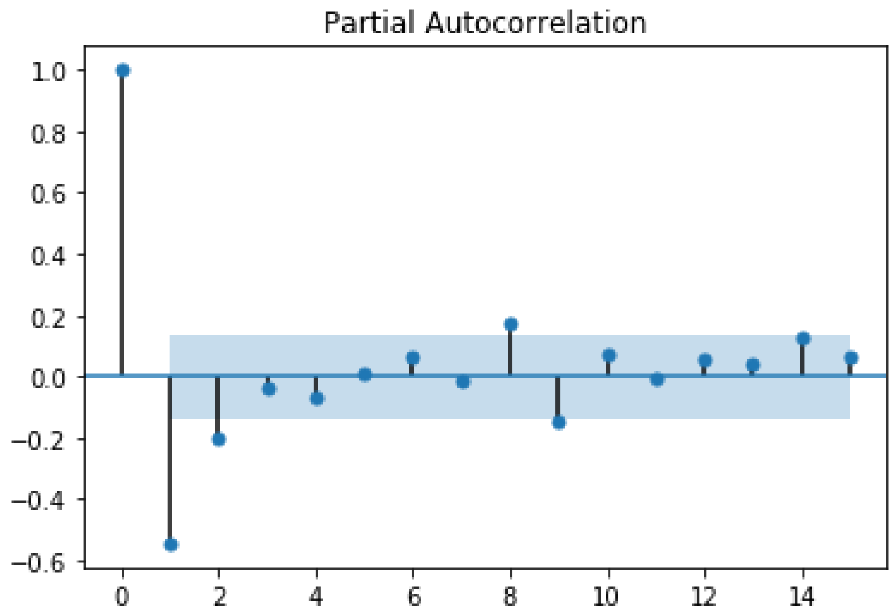


4 Идентификация случайно составляющей ряда

Необходимо построить выборочные Автокорреляционную и Частную Автокорреляционную функции для $X_{notrend}$, и опираясь на характерные свойства этих функций, выбрать наиболее вероятную модель.



$\rho = 1.000, -0.541, 0.154, -0.021, -0.046, 0.064, -0.000, -0.045, 0.151, -0.258, 0.261, -0.166, 0.100, -0.019, 0.045, -0.029, 0.030, -0.058, 0.114, -0.187, 0.132, -0.014, -0.021, -0.005, -0.023, 0.031, 0.040, -0.102, 0.118, -0.062, 0.005, -0.067, 0.016, 0.089, -0.139, 0.134, -0.072, -0.062, 0.129, -0.104, 0.119$



$\phi = 1.000, -0.544, -0.199, -0.040, -0.071, 0.007, 0.066, -0.012, 0.170, -0.144, 0$
$.074, -0.004, 0.053, 0.038, 0.129, 0.068, 0.048, -0.002, 0.049, -0.118, -0.099, 0.050$
$, 0.001, -0.025, -0.090, 0.004, 0.052, -0.051, -0.026, 0.066, 0.012, -0.162, -0.135$
$, 0.119, -0.082, 0.062, 0.021, -0.069, 0.042, -0.018, 0.135$

Асимптотическое распредение выборочной ЧАКФ $\hat{\phi}(h)$ модели $AR(p)$ имеет гауссовское распределение начиная с $p+1$ лага ($h > p$), с дисперсией

$$Var(\hat{\phi}(h)) \sim \frac{1}{n}$$

Т.е. с вероятностью 0.95 попадает в доверительный интервал $[-\frac{1.96}{\sqrt{n}}; \frac{1.96}{\sqrt{n}}]$
Если $\hat{\phi}(h)$ для $h > p$ незначимы, то предполагаем, что модель - $AR(p)$

Асимптотическое распредление выборочной АКФ $\hat{\rho}(h)$ модели $MA(q)$ имеет гауссовское распределение начиная с $q+1$ лага ($h > q$), с дисперсией

$$Var(\hat{\rho}(h)) = \frac{1}{n}(1 + 2\sum_{k=1}^{q} \rho^2(k))$$

В общем случае, если $\hat{\rho}(h)$ для $h > p$ незначимы, то предполагаем, что модель - $MA(p)$

Рассмотрев график выборочной ЧАКФ, можно сделать преположение, что искомая модель - AR(2), судя по количеству значимых $\phi(h)$ - значения лагов 1,2,8,9. Однако, следует рассмотреть также модель ARMA(1,1).

5 Оценка параметров модели

5.1 AR(2)

Модель авторегрессии порядка p представляет собой

$$x_n = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{n-j}$$

Параметры для оценки: $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Для оценки параметров AR модели необходимо составить уравнения Юла-Уокера.

$$\begin{cases} \rho(1) = \alpha_1 + \alpha_2\rho(1) + \dots + \alpha_p\rho(p-1) \\ \rho(2) = \alpha_1\rho(2) + \alpha_2 + \dots + \alpha_p\rho(p-2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho(p) = \alpha_1\rho(p-1) + \alpha_2\rho(p-2) + \dots + \alpha_p \end{cases}$$

И тогда $\rho_p = R_p\alpha$ или $\alpha = R_p^{-1}\rho_p$, где α - вектор искомых параметров модели AR.

Для $p = 2$:

$$x_n = \varepsilon_n + \alpha_1 x_{n-1} + \alpha_2 x_{n-2}$$
$$\alpha = R_2^{-1}\rho_2,$$
$$R_2^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2(1)} \begin{bmatrix} 1 & -\rho(1) \\ -\rho(1) & 1 \end{bmatrix},$$
$$\rho_2 = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \end{pmatrix},$$

По расчетам:

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} -0.647 \\ -0.196 \end{pmatrix}$$

5.2 ARMA(1,1)

Модель авторегрессии-скользящего среднего порядка (p, q) представляет собой

$$x_n - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{n-j} = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{n-j}$$

Для $p = 1, q = 1$:

$$x_n - \alpha_1 x_{n-1} = \varepsilon_n + \beta_1 \varepsilon_{n-1}$$

Параметры для оценки: α_1, β_1

Для оценки параметров α и β модели ARMA необходимо решить систему уравнений:
$\begin{cases} \rho_X(1) = \frac{(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)}{1+\beta^2+2\alpha\beta} \\ \rho_X(2) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)}{1+\beta^2+2\alpha\beta} \end{cases}$

По подсчетам:

$$\hat{\alpha} = -0.285$$
$$\hat{\beta} = 0.3764$$

6 Оценка адекватности модели

6.1 Контроль качества

Для оценки качества модели будут использоваться информационные критериии Акаике(AIC) и Шварца(BIC). Информационные критерии необходимо для того, чтобы предотвратить переобучение с помощью функции потерь для каждого дополнительного парметра в модели.

$$AIC = \ln \hat{\sigma}^2 + \frac{2(p+q)}{n}$$
$$BIC = \ln \hat{\sigma}^2 + (p+q)\frac{\ln n}{n}$$

Для $AR(2)$ модели:

$$AIC = 1843.4$$
$$BIC = 1856.59$$

Для $ARMA(1,1)$ модели:

$$AIC = 1843.19$$
$$BIC = 1856.38$$

Согласно критериям Акаике и Шварца, лучшая модель - $AR(2)$

6.2 Проверка остатков на Белый Шум

Для проверки нормальности остатков на Белый Шум будет использоваться тест Бокса-Пирса. Проверить нулевую гипотезу H_0: $\rho_\varepsilon(1) = \ldots = \rho_\varepsilon(m) = 0$ с тестовой статистикой

$$Q^* = n \sum_{j=1}^{m} \hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}}^2(j)$$

Q^* апроксимируется распределением χ^2. Адекватность модели отвергается на уровне значимости α если

$$Q^* > \chi^2_{1-\alpha}(m-p-q)$$

Для $AR(2)$ модели

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{X}_t = X_t - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2}, t = 2, \ldots, n$$
$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2} \sum_{t=3}^{n} \hat{\varepsilon_t^2}$$

X-squared = 0.019629, df = 1, p-value = 0.8886
Нулевая гипотеза не отвергается, следовательно остатки - белый шум. Для $ARMA(1,1)$ модели:

$$\hat{\varepsilon_t} = \frac{1 - \hat{\alpha_1} L}{1 + \hat{\beta_1} L} X_t$$

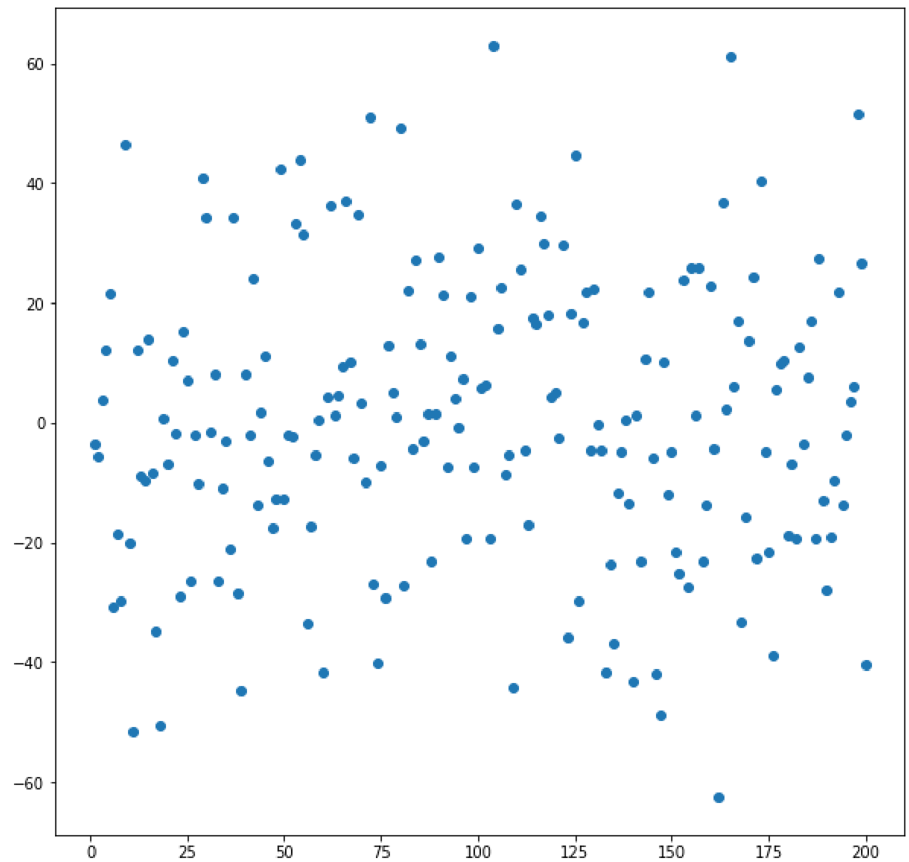
$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2} \sum_{t=3}^{n} \hat{\varepsilon_t^2}$$

X-squared = 0.0085845, df = 1, p-value = 0.9262
Нулевая гипотеза не отвергается, следовательно остатки - белый шум.

7 Диагностика остатков

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{X}_t$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2$$



Для оценка нормальности остатков необходимо выполнить тест Харке-Бера.

$$JB = (n-p-q-1)(\frac{\hat{S}^2}{6} - \frac{\hat{K}^2}{24})$$

$$\hat{K} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^4}{(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2)^2} - 3$$

$$\hat{S} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^3}{(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Где $\hat{S}$ - выборочная ассиметричность, и $\hat{K}$ - выборочный экцесс. Проверить гипотезу $H_0 : \{\varepsilon_t\}$ - i.i.d. ($K = 3$, $S = 0$) против альтернативной гипотезы $H_A : \{\varepsilon_t\}$ - не i.i.d. ($K \neq 3$, $S \neq 0$), с помощью χ^2-статистики ($df = 2$, $\alpha = 0.05$), если H_0 не отвергается, то остатки нормальны.

sample skew of the residuals is 0.066
sample kurtosis of the residuals is 2.739
Jarque-Bera statistic for AR(2) residuals: 0.7115
p-value: 0.7

Т.е. на уровне значимости $\alpha = 0.05$ гипотеза о нормальности остатков не отвергается. Отметим, что тест на Харке-Бера не необходим для прогнозирования, но для тестов Дики-Фулера используется предположение о нормальности остатков.

8 Прогноз на один шаг

$$
\begin{aligned}
X_t &= \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \\
X_{t+1} = E(X_{t+1}|X_t) &= E(\alpha_1 X_t + \varepsilon_t|X_t) + E(\alpha_2 X_{t-1} + \varepsilon_{t-1}|X_{t-1}) \\
&= \alpha_1 X_t + \alpha_2 X_{t-1}
\end{aligned}
$$

По расчетам при $AR(2)$ модели:

$\hat{X}_{200} = -5.951$; real $X_{200} = -46.334$
$\hat{X}_{199} = -33.203$; real $X_{199} = -6.493$
$\hat{X}_{198} = -1.893$; real $X_{198} = 49.608$
$\hat{X}_{197} = -3.620$; real $X_{197} = 2.337$
$\hat{X}_{196} = -1.880$; real $X_{196} = 1.702$