הרצאה 1 --- קינמטיקה: תיאור תנועה

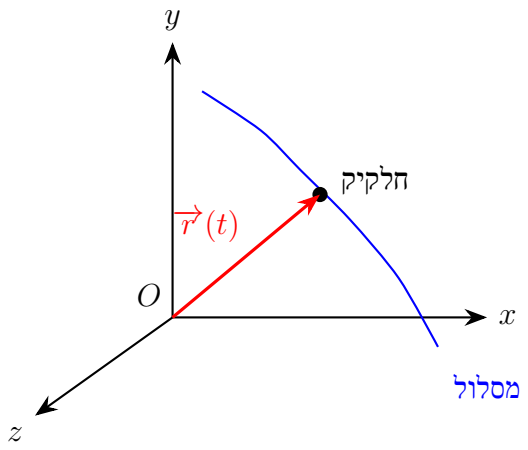
1. מבוא: מערכת ייחוס ותיאור תנועה

כדי לתאר תנועה של חלקיק במרחב נדרשים שני אלמנטים בסיסיים:

מערכת ייחוס

1. **ראשית צירים** O --- נקודה ממנה מודדים את המיקום.
2. **מערכת צירים** $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ --- שלושה כיווני יחידה אורתוגונליים.

תנועה תמיד מתוארת **ביחס למערכת ייחוס**. אותה תנועה תיראה שונה במערכות שונות --- לדוגמה, כדור הנופל ברכבת ייראה נע אנכית מנקודת מבטו של נוסע, אך בפרבולה מנקודת מבטו של צופה על הקרקע.



2. וקטור המיקום $\vec{r}(t)$

וקטור המיקום הוא וקטור מראשית הצירים אל החלקיק. הוא מתאר את **מקומו** של החלקיק בכל רגע t, ולכן הוא פונקציה של הזמן.

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

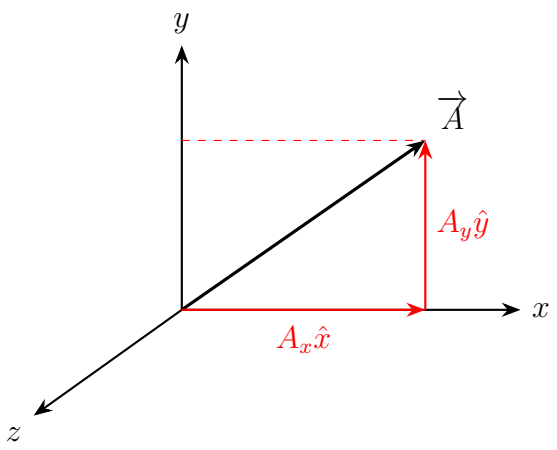
ככל ש-t משתנה, קצה הוקטור מתאר במרחב עקומה הנקראת **מסלול התנועה** (*trajectory*).

3. רכיבי וקטור במערכת קרטזית

כל וקטור $\vec{A}$ ניתן לפרק לסכום של שלושה רכיבים בכיווני הצירים:

$$\vec{A} = A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y} + A_z\,\hat{z}$$

A_x, A_y, A_z הם **סקלרים** המבטאים את ההיטלים של הוקטור על כל ציר.



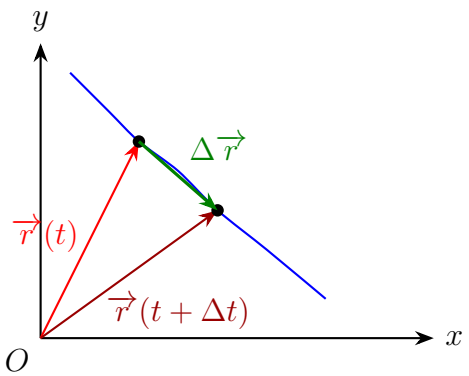
מקרה פרטי --- וקטור המיקום:

$$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$

4. וקטור המהירות $\vec{v}(t)$

וקטור ההעתק הוא ההפרש בין שני וקטורי מיקום בזמנים סמוכים:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$



וקטור המהירות הממוצעת בקטע זמן Δt:

$$\vec{v}_{\text{avg}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

וקטור המהירות הרגעית --- גבול כאשר $\Delta t \to 0$:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$$

תכונה גיאומטרית חשובה

וקטור המהירות $\vec{v}(t)$ תמיד **משיק למסלול** בנקודה בה נמצא החלקיק. ככל ש-$\Delta t \to 0$, וקטור ההעתק $\Delta\vec{r}$ שואף לכיוון המשיק.

גזירת וקטור נעשית רכיב-רכיב ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ קבועים):

$$\vec{v} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + \dot{z}\,\hat{z}$$

5. סקלר מול וקטור

סקלר

גודל המתואר **במספר אחד בלבד**. דוגמאות: זמן, מסה, טמפרטורה, אנרגיה, מטען חשמלי.

וקטור

גודל הדורש **גודל וכיוון**. דוגמאות: מיקום, מהירות, תאוצה, כוח, תנע.

שים לב --- בלבול נפוץ

מהירות סקלרית (speed) אינה אותו דבר כמו **וקטור המהירות (velocity)**.

מכונית הנוסעת במהירות סקלרית קבועה של 60 קמ"ש סביב מסלול מעגלי --- וקטור המהירות שלה **משתנה** כל הזמן (הכיוון מתחלף), ולכן יש תאוצה.

6. וקטור התאוצה $\vec{a}(t)$

באופן מקביל למהירות, נגדיר את התאוצה כקצב שינוי וקטור המהירות:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}}$$

ברכיבים:

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} + \ddot{z}\,\hat{z}$$

מתי יש תאוצה?

תאוצה קיימת **בכל פעם שוקטור המהירות משתנה** --- בגודל, בכיוון, או בשניהם.

זו הסיבה שתנועה מעגלית במהירות סקלרית קבועה היא תנועה **מואצת**.

7. אינטגרציה: שחזור מהירות ומיקום

על-פי המשפט היסודי של החדו"א, אם $F' = f$ אזי:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

מכאן, אם נדע את **וקטור המהירות** כפונקציה של זמן, נוכל לחשב את שינוי המיקום:

$$\boxed{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\,dt}$$

ובאופן דומה, מתאוצה למהירות:

$$\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\, dt$$

לפעמים נוח לרשום זאת ביחס לרגע $t = 0$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(\tau)\, d\tau, \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(\tau)\, d\tau$$

8. משוואת התנועה

משוואת התנועה

משוואה (בדרך כלל דיפרנציאלית) שמקשרת בין התאוצה לבין הכוחות הפועלים על החלקיק --- חוק שני של ניוטון:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$$

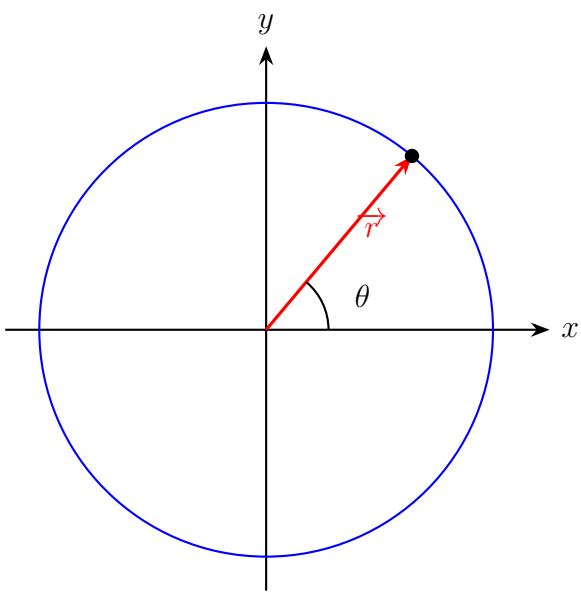
פתרון המשוואה בהינתן **תנאי התחלה** ($\vec{r}(0)$ ו-$\vec{v}(0)$) נותן את $\vec{r}(t)$ --- כלומר את **המסלול המלא**.

מבנה כללי של בעיה בקינמטיקה

1. מציאת התאוצה (מכוחות, או נתונה).
2. אינטגרציה של $\vec{a}$ כדי לקבל $\vec{v}(t)$.
3. אינטגרציה של $\vec{v}$ כדי לקבל $\vec{r}(t)$.
4. שימוש בתנאי התחלה לקביעת קבועי האינטגרציה.

9. דוגמה: תנועה מעגלית

חלקיק נע על מעגל ברדיוס R במישור xy, כאשר מרכז המעגל בראשית הצירים. נסמן את הזווית בין וקטור המיקום לציר x ב-$\theta = \theta(t)$.



וקטור המיקום:

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta\,\hat{x} + R\sin\theta\,\hat{y}, \qquad \theta = \theta(t)$$

9.1 וקטור המהירות בתנועה מעגלית

נגזור את $\vec{r}$ לפי t (כלל השרשרת על $\cos\theta(t)$):

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -R\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{x} + R\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{y}$$

נגדיר את **המהירות הזוויתית**:

$$\omega \equiv \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{[יחידות: rad/s]}$$

ולכן:

$$\vec{v}(t) = -R\omega\sin\theta\,\hat{x} + R\omega\cos\theta\,\hat{y}$$

גודל המהירות:

$$|\vec{v}|^2 = R^2\omega^2\sin^2\theta + R^2\omega^2\cos^2\theta = R^2\omega^2$$

$$|\vec{v}| = R\omega$$

9.2 וקטור התאוצה בתנועה מעגלית קצובה

עבור תנועה מעגלית **קצובה** --- $\omega =$ קבועה ($\dot{\omega} = 0$) --- נגזור את $\vec{v}$ שוב:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -R\omega^2\cos\theta\,\hat{x} - R\omega^2\sin\theta\,\hat{y}$$

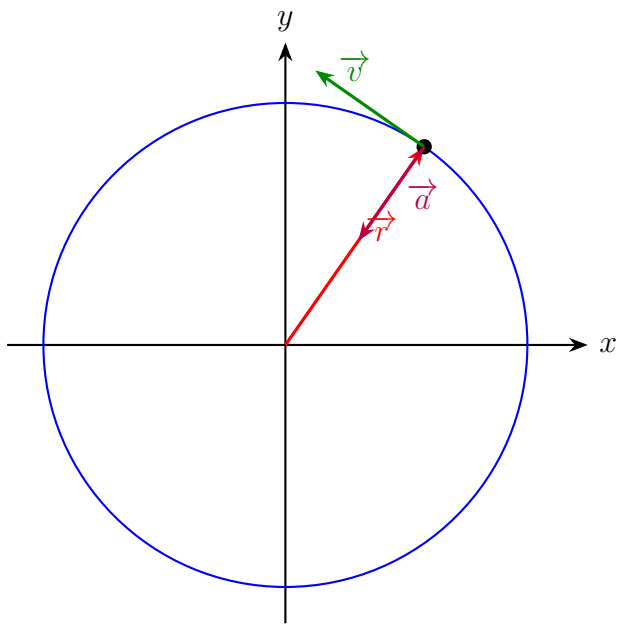
תצפית מרכזית: זה בדיוק $-\omega^2$ כפול $\vec{r}$:

$$\vec{a} = -\omega^2\,\vec{r}, \qquad |\vec{a}| = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

מסקנה גיאומטרית

התאוצה מצביעה **מהחלקיק אל מרכז המעגל** (בגלל סימן המינוס לעומת $\vec{r}$). זו **התאוצה הצנטריפטלית**.

למרות שגודל המהירות **קבוע**, יש תאוצה משום ש**כיוון המהירות משתנה ברציפות**.



10. תנועה מעגלית קצובה: מחזור ותדירות

כאשר ω קבועה, החלקיק מבצע תנועה **מחזורית**. מציאת $\theta(t)$ באינטגרציה:

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \omega \, d\tau = \theta_0 + \omega t$$

מחזור (Period)

T = הזמן הדרוש להשלמת סיבוב מלא (2π רדיאן):

$$\omega T = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

דוגמה: מחוג השניות בשעון

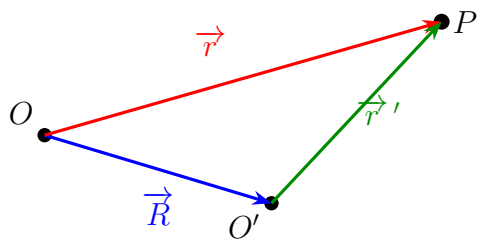
מחוג השניות משלים סיבוב מלא ב-60 שניות. נחשב את המהירות הזוויתית:

$$T = 60\text{s} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60\text{s}} = \frac{\pi}{30}\text{rad/s}$$

11. תנועה יחסית --- מערכות ייחוס נעות

עד עכשיו תיארנו תנועה ביחס למערכת ייחוס יחידה. מה קורה כאשר יש **שתי** מערכות ייחוס?

- O --- מערכת "במנוחה" (לדוגמה, הקרקע).
- O' --- מערכת נוספת הנעה ביחס ל-O (לדוגמה, רכב).



מהגיאומטריה של חיבור וקטורים:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

11.1 טרנספורמציית גלילי --- מהירויות יחסיות

נגזור את שני האגפים לפי הזמן:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,'$$

כאשר $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ היא המהירות של מערכת O' ביחס ל-O,
$\vec{v}\,'$ היא מהירות החלקיק ביחס למערכת O',
ו-$\vec{v}$ היא מהירות החלקיק ביחס למערכת O.

דוגמה אינטואיטיבית --- מטוס ורוח

מטוס נע במהירות 600 קמ"ש ביחס לאוויר. הרוח נעה במהירות 30 קמ"ש ביחס לקרקע. מהי מהירות המטוס ביחס לקרקע?

תשובה (חיבור וקטורי):

- רוח בכיוון התנועה: $600 + 30 = 630$ קמ"ש.
- רוח בכיוון מנוגד: $600 - 30 = 570$ קמ"ש.
- רוח בניצב: $\sqrt{600^2 + 30^2} \approx 600.7$ קמ"ש.

סיכום: מבט-על על הקינמטיקה

מושגי יסוד

גודל	הגדרה	תכונה גיאומטרית
מיקום $\vec{r}(t)$	וקטור מ-O לחלקיק	מצביע על המסלול
מהירות $\vec{v}(t)$	$d\vec{r}/dt$	משיק למסלול
תאוצה $\vec{a}(t)$	$d\vec{v}/dt$	במעגל קצוב: למרכז

נקודות מפתח לזכור

1. תנועה מוגדרת אך ורק **ביחס למערכת ייחוס**.
2. וקטור המהירות **תמיד משיק למסלול**.
3. תאוצה קיימת בכל פעם שוקטור המהירות משתנה --- בגודל **או** בכיוון.
4. בתנועה מעגלית קצובה: $|\vec{v}| = R\omega$, $|\vec{a}| = R\omega^2 = v^2/R$, ה-$\vec{a}$ מצביע למרכז המעגל.
5. טרנספורמציית גלילי לחיבור מהירויות: $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,'$.