עבודה ואנרגיה (Work & Energy II)

בהרצאה הקודמת הגדרנו עבודה כאינטגרל מסלולי של הכוח, וראינו את משפט עבודה--אנרגיה. בהרצאה זו נגלה ש**העבודה תלויה במסלול** עבור כוחות מסוימים אך **אינה תלויה במסלול** עבור אחרים. הבחנה זו תוביל אותנו אל מושג **הכוח המשמר**, אל **האנרגיה הפוטנציאלית**, ואל אחד העקרונות החשובים בפיזיקה --- **שימור האנרגיה המכנית**.

0. חזרה --- עבודה, אנרגיה והספק

לפני שנמשיך, נסכם את הכלים שהוגדרו בהרצאה הקודמת.

תקציר ההרצאה הקודמת

- **אנרגיה קינטית:** $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.
- **עבודה (הגדרה):** אינטגרל מסלולי של הכוח,

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \big(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz\big).$$

- **הספק:** $W = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt = \int \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
- **משפט עבודה--אנרגיה:** עבודת הכוח השקול שווה לשינוי האנרגיה הקינטית,

$$W_{\text{שקול}} = \Delta E_k = E_{k,2} - E_{k,1}.$$

1. תלות העבודה במסלול --- דוגמה מרכזית

1.1 הצגת הבעיה

נתון כוח התלוי במיקום:

$$\boxed{\vec{F}(x,y,z) = \alpha\,x^2 y\,\hat{x} + \beta\,x\,\hat{y}, \qquad \alpha = 1\ \tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}, \quad \beta = 1\ \tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.}$$

מבקשים לחשב את עבודת הכוח בין הנקודות

$$\vec{r}_1 = \vec{0}, \qquad \vec{r}_2 = 1 \cdot \hat{x} + 1 \cdot \hat{y}\ \ [\mathrm{m}].$$

על פי ההגדרה,

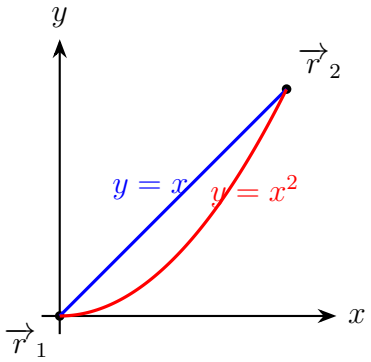
$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \alpha\,x^2 y\,dx + \int_0^1 \beta\,x\,dy.$$

מה עושים עם זה?

ללא ידיעת המסלול לא ניתן להמשיך בחישוב. באינטגרל הראשון (לפי x) מופיעה הקואורדינטה y, ובשני (לפי y) מופיעה x. כדי לבצע את האינטגרציה חייבים **משוואת מסלול** --- ביטוי של y כתלות ב-x (ולהפך) --- ולהציבה.

נדגים שני מסלולים שונים המחברים בין אותן שתי נקודות:

1. הקו הישר $y = x$.
2. הפרבולה $y = x^2$.



1.2 מסלול 1 --- הקו הישר $y = x$

בקו הישר $y = x$: באינטגרל לפי x נציב $y = x$, ובאינטגרל לפי y נציב $x = y$:

$$W_1 = \int_0^1 x^2\,(x)\,dx + \int_0^1 (y)\,dy = \int_0^1 x^3\,dx + \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{W_1 = \frac{3}{4}\ \mathrm{J}}$$

1.3 מסלול 2 --- הפרבולה $y = x^2$

בפרבולה $y = x^2$: באינטגרל לפי x נציב $y = x^2$, ובאינטגרל לפי y נציב $x = \sqrt{y} = y^{1/2}$:

$$W_2 = \int_0^1 x^2\,(x^2)\,dx + \int_0^1 (y^{1/2})\,dy = \int_0^1 x^4\,dx + \int_0^1 y^{1/2}\,dy = \frac{1}{5} + \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{W_2 = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}\ \mathrm{J}}$$

1.4 מסקנה

$$W_1 = \frac{3}{4} = \frac{45}{60}, \qquad W_2 = \frac{13}{15} = \frac{52}{60} \qquad \Longrightarrow \qquad W_1 \neq W_2.$$

תלות במסלול

עבור כוח זה **העבודה תלויה במסלול**: אותן נקודות קצה נתנו עבודות שונות. זוהי תכונה של חלק מהכוחות --- ומכאן ההבחנה היסודית:

- יש כוחות שעבורם העבודה **אינה תלויה במסלול** --- **כוחות משמרים** (conservative).
- יש כוחות שעבורם העבודה **תלויה במסלול** --- **כוחות אי-משמרים** (non-conservative).

2. כוחות משמרים --- הגדרה ותכונה

2.1 הגדרה

כוח משמר (Conservative Force)

כוח משמר הוא כוח שעבודתו **אינה תלויה במסלול** שבין שתי נקודות, אלא רק בנקודות הקצה.

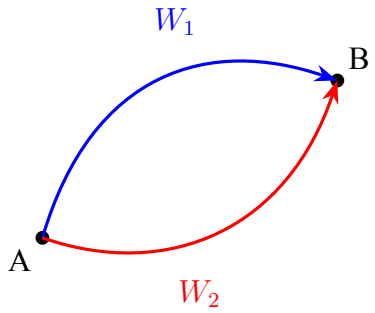
2.2 תכונה: עבודה על מסלול סגור

תכונת הכוח המשמר

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad \text{(כוח משמר)}$$

העבודה של כוח משמר על **מסלול סגור** שווה לאפס.

הוכחה. נתבונן בשתי נקודות A ו-B ובשני מסלולים המחברים ביניהן: מסלול 1 (עבודה W_1) ומסלול 2 (עבודה W_2).



מאחר שהכוח משמר, העבודה אינה תלויה במסלול, ולכן

$$W_1 = W_2.$$

כעת נבנה **מסלול סגור**: נלך מ-A ל-B דרך מסלול 1, ונחזור מ-B ל-A דרך מסלול 2 **בכיוון ההפוך**. עבודת החזרה היא $W_3 = -W_2$ (היפוך כיוון התנועה הופך את סימן העבודה). לכן העבודה על המסלול הסגור:

$$W_{\text{סגור}} = W_1 + W_3 = W_1 - W_2 = 0.$$

■

3. אנרגיה פוטנציאלית ומשפט עבודה--אנרגיה II

3.1 פירוק הכוח השקול

נמיין את הכוח השקול לרכיב משמר ולרכיב אי-משמר:

$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_{NC}$$

כאשר $\vec{F}_C$ הוא סך הכוחות המשמרים ו-$\vec{F}_{NC}$ סך הכוחות האי-משמרים.
נציב במשפט עבודה--אנרגיה (כרגיל):

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{F}_C + \vec{F}_{NC}) \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1,$$

ולכן

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = (K_2 - K_1) - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_C \cdot d\vec{r}.$$

3.2 הגדרת האנרגיה הפוטנציאלית

נגדיר את האנרגיה הפוטנציאלית של הרכיב המשמר באמצעות העבודה שלו:

אנרגיה פוטנציאלית (Potential Energy)

$$U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_C \cdot d\vec{r}$$

הערה

ההגדרה תקפה **רק עבור כוח משמר**: היות שהעבודה אינה תלויה במסלול, הביטוי $U(\vec{r})$ מוגדר היטב כפונקציה של המיקום בלבד. עבור כוח אי-משמר אין אנרגיה פוטנציאלית. כמו כן U מוגדרת עד כדי **קבוע** (בחירת נקודת הייחוס), שכן רק **הפרשי** פוטנציאל הם בעלי משמעות פיזיקלית.

3.3 משפט עבודה--אנרגיה II ושימור האנרגיה

נציב את הגדרת U (כך ש-$-\int \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = U_2 - U_1$):

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = (K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1).$$

נגדיר את **האנרגיה המכנית**:

אנרגיה מכנית

$$E = K + U$$

ומתקבל משפט עבודה--אנרגיה בנוסחה השנייה:

משפט עבודה--אנרגיה II

$$W_{NC} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = E_2 - E_1 = \Delta E$$

עבודת הכוחות **האי-משמרים** שווה לשינוי האנרגיה המכנית.

מקרה פרטי חשוב ביותר --- שימור האנרגיה

אם **אין כוחות אי-משמרים** (או שאינם עושים עבודה), אזי $W_{NC} = 0$, ולכן

$$\Delta E = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E = K + U = \text{const.}$$

האנרגיה המכנית נשמרת. זו בדיוק הסיבה לשם ``כוח משמר": כוח משמר *שומר* על האנרגיה המכנית --- כאשר האנרגיה הקינטית יורדת, הפוטנציאלית עולה באותו השיעור (והפוך).

4. סיווג הכוחות המוכרים

נסווג את הכוחות המוכרים לנו לשלוש קבוצות: **משמרים**, **אי-משמרים**, **וכאלה שאינם עושים עבודה**. עבור כל כוח משמר נחשב את האנרגיה הפוטנציאלית שלו, לפי

$$E_p^{(F)}(\vec{r}_2) - E_p^{(F)}(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{\vec{r}_1 \to \vec{r}_2} = W_{\vec{r}_2 \to \vec{r}_1}.$$

כוח	סיווג	הערה
כוח הכובד	משמר	$E_p = mgh$
מתיחות (חוט)	אינו עושה עבודה	על המערכת / כשגוף נייח
נורמל	אינו עושה עבודה	ניצב למהירות
חיכוך סטטי	אינו עושה עבודה	נקודת המגע במנוחה
חיכוך קינטי	אי-משמר	תלוי במסלול
התנגדות אוויר (גרר)	אי-משמר	תלוי במסלול

4.1 כוח הכובד --- כוח משמר

למה כל כוח קבוע הוא משמר?

כוח הכובד $\vec{F} = -mg\,\hat{y}$ הוא **כוח קבוע**, וכל כוח קבוע הוא משמר: רכיב x של הכוח אינו תלוי ב-y או ב-z, וכך גם יתר הרכיבים --- ולכן העבודה אינה תלויה במסלול.

נחשב את האנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית. נבחר ציר $\hat{y}$ כלפי מעלה ונקודת ייחוס $E_p(\vec{r}_0) = 0$:

$$E_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 - \int_{y_0}^{y} (-mg)\, dy = mg\,(y - y_0).$$

אנרגיה פוטנציאלית כבידתית

$$E_p = mg\,h \qquad (h = y - y_0)$$

4.2 כוחות שאינם עושים עבודה

מתיחות, נורמל וחיכוך סטטי

- **מתיחות החוט** --- בחוט אידאלי הקושר שני גופים, המתיחות פועלת בכיוונים מנוגדים על שני קצותיו ובאותה היסט:

$$W_T = T\,\Delta x + (-T)\,\Delta x = 0.$$

- **נורמל** --- ניצב לכיוון התנועה, ולכן $\vec{N}\cdot d\vec{r} = 0$:

$$W_N = N\,\Delta x + (-N)\,\Delta x = 0.$$

- **חיכוך סטטי** --- בגלגול ללא החלקה נקודת המגע נמצאת **במנוחה רגעית** ($v = 0$), ולכן ההספק שלו מתאפס:

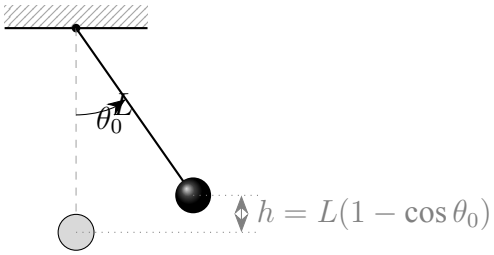
$$P = f_s \cdot v = 0 \quad \Longrightarrow \quad W_{f_s} = 0.$$

חיכוך קינטי והתנגדות אוויר הם כוחות **אי-משמרים**: כיוונם תמיד מנוגד למהירות, ולכן על מסלול סגור העבודה אינה מתאפסת (היא תמיד שלילית) --- ``בורחת" מהמערכת כחום. עבורם **אין** אנרגיה פוטנציאלית.

5. דוגמה --- מהירות מקסימלית של מטוטלת

5.1 הצגת הבעיה

משחררים מטוטלת באורך L **ממנוחה** מזווית θ_0 מהאנך. בהזנחת התנגדות האוויר --- מהי המהירות **המקסימלית** שתשיג המטוטלת במהלך תנועתה?



5.2 הדרך הקשה --- משוואת התנועה

למה לא לפתור ישירות?

שימוש בחוק השני של ניוטון בכיוון המשיק נותן את משוואת התנועה

$$-mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}.$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית **לא ליניארית מסדר שני** (בגלל $\sin\theta$). אין לנו פתרון אנליטי נוח, ולכן **לא נוכל** להמשיך בדרך זו בקלות.

5.3 הדרך הקלה --- שימור אנרגיה

הכוחות הפועלים על המטוטלת הם:

- **כוח הכובד** --- כוח משמר.
- **מתיחות החוט** --- ניצבת תמיד למהירות, **אינה עושה עבודה**.

מאחר שאין כוח אי-משמר העושה עבודה --- **האנרגיה המכנית נשמרת**. האנרגיה הפוטנציאלית מינימלית בנקודה הנמוכה ביותר, ולכן שם תתקבל המהירות המקסימלית. נבחר $E_p = 0$ בנקודה הנמוכה ביותר במסלול.

אנרגיה התחלתית (במנוחה בזווית θ_0, בגובה $h = L(1-\cos\theta_0)$):

$$E_i = E_k + E_p = 0 + mg\,L\,(1-\cos\theta_0).$$

אנרגיה בנקודה הנמוכה ביותר ($E_p = 0$, מהירות מקסימלית):

$$E_f = E_k + E_p = \tfrac{1}{2}mv^2 + 0.$$

משימור האנרגיה $E_i = E_f$:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\,L\,(1-\cos\theta_0).$$

מהירות מקסימלית של מטוטלת

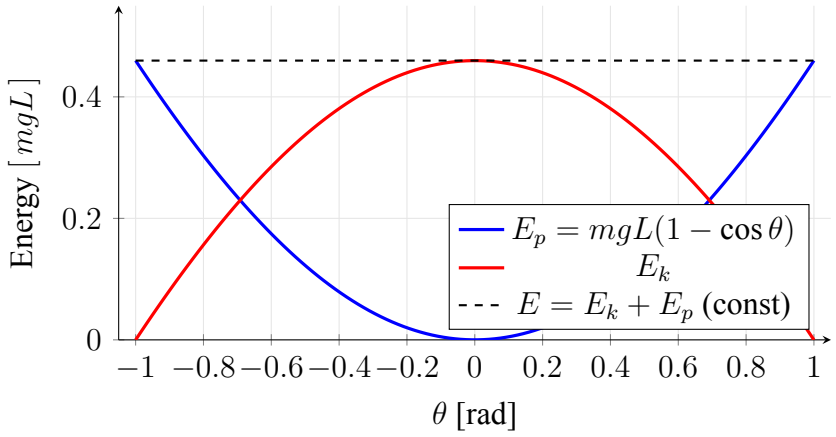
$$v_{\text{max}} = \sqrt{2gL\,(1-\cos\theta_0)}$$

המסר

מה ש``נתקע" בפתרון ישיר של משוואת התנועה נפתר **בשורה אחת** בעזרת שימור אנרגיה. זהו כוחה של גישת האנרגיה: כאשר רוצים גודל *סקלרי* (מהירות בנקודה) ואין צורך בתלות המלאה בזמן --- שימור האנרגיה לרוב הדרך הקצרה.

5.4 החלפת אנרגיה לאורך התנועה

הגרף הבא מראה כיצד האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית מתחלפות זו בזו לאורך הנדנוד, בעוד **הסכום** (האנרגיה המכנית) נשאר קבוע. הציר האנכי במונחי mgL, והדוגמה עבור $\theta_0 = 1\,\text{rad}$:



6. דוגמה --- מהירות מקסימלית של מכונית

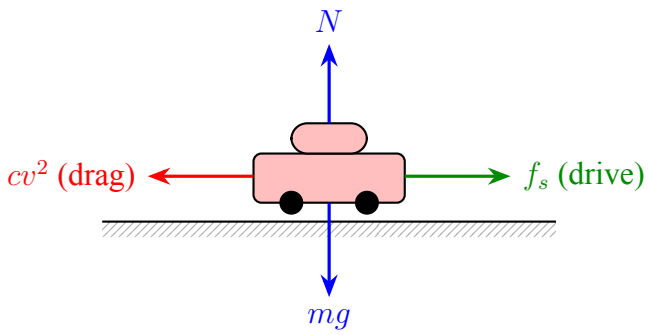
6.1 הצגת הבעיה

מכונית שההספק המקסימלי של מנועה הוא P, נתונה להשפעת התנגדות אוויר מן הצורה $\vec{f} = -cv^2\,\hat{v}$. מהי מהירותה המקסימלית, ומהי צריכת הדלק לק``מ במהירות זו?

נתונים

- הספק מקסימלי: $P = 100\ \text{hp} \approx 74.6\ \text{kW}$.
- מקדם גרר: $c = 0.5\ \frac{\text{kg}}{\text{m}}$.
- תכולת אנרגיה של דלק: $40\ \text{MJ}/\ell$ (מגה-ג'אול לליטר).
- ניצולת המנוע: **20%** (יתר האנרגיה הופכת לחום).

6.2 דיאגרמת כוחות



הכוחות: כוח הכובד, נורמל וחיכוך סטטי **אינם עושים עבודה**. כוח התנגדות האוויר **עושה עבודה**, וההספק שלו $P_{\text{drag}} = \vec{f}\cdot\vec{v} = -cv^2\cdot v = -cv^3$. בנוסף, הכוח הפנימי של המנוע עושה עבודה בהספק מקסימלי נתון P.

6.3 פתרון --- מאזן הספקים

במהירות המקסימלית התאוצה אפס, ולכן אין שינוי באנרגיה הקינטית --- עבודת הכוח השקול אפס, וכך גם סך ההספקים:

$$P_{\text{net}} = P - cv^3 = 0.$$

מהירות מקסימלית

$$v_{\max} = \sqrt[3]{\frac{P}{c}}$$

הצבת הנתונים:

$$v_{\max} = \sqrt[3]{\frac{74600}{0.5}} = \sqrt[3]{1.49 \times 10^5} \approx 53\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}} \ \approx\ 50\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}} \text{ (מעוגל)}.$$

6.4 צריכת דלק לק``מ

לנסיעה של 1000 m במהירות $50\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ דרוש זמן

$$t = \frac{1000}{50} = 20\ \text{s}.$$

העבודה שעושה המנוע בזמן זה:

$$W = P \cdot t = 74600 \times 20 \approx 1.5\ \text{MJ}.$$

האנרגיה הזמינה בליטר דלק (לאחר ניצולת 20%):

$$40\ \text{MJ}/\ell \times 0.20 = 8\ \text{MJ}/\ell.$$

לכן צריכת הדלק לק``מ:

$$\frac{1.5\ \text{MJ}}{8\ \text{MJ}/\ell} \approx 0.2\ \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \approx 5\ \tfrac{\text{km}}{\ell}.$$

המסקנה

$\approx 5\ \text{km}/\ell$ --- **יקר!** הצריכה גדלה כ-v^3 (ההספק נגד הגרר), ולכן **עדיף לנסוע הרבה יותר לאט**: הורדת המהירות חוסכת דלק בקצב חד.

6.5 אימות נומרי בפייתון

חישוב המהירות המקסימלית וצריכת הדלק:

```python
# Maximum speed and fuel economy from a power balance: P = c v^3
P  = 100 * 745.7     # engine power [W]  (100 hp)
c  = 0.5             # drag coefficient [kg/m]
E_fuel = 40e6        # energy content of fuel [J/liter]
eff = 0.20           # engine efficiency

v_max = (P / c) ** (1/3)            # P - c v^3 = 0  ->  v = (P/c)^(1/3)
print(f"v_max = {v_max:.1f} m/s")   # ~ 53 m/s

# Fuel for 1 km at v_max
d = 1000.0                          # distance [m]
t = d / v_max                       # travel time [s]
```

```python
W = P * t                          # engine work over the km [J]
E_per_liter = E_fuel * eff         # usable energy per liter [J]
liters = W / E_per_liter           # liters for 1 km
print(f"t = {t:.1f} s,  W = {W/1e6:.2f} MJ")
print(f"fuel = {liters:.2f} L/km  ->  {1/liters:.1f} km/L")
```

סיכום: מבט-על

נקודות מפתח לזכור

1. **תלות במסלול:** העבודה של חלק מהכוחות תלויה במסלול. דוגמה: $\vec{F} = \alpha x^2 y\hat{x} + \beta x\hat{y}$ נתן $W_1 = \frac{3}{4}$ לעומת $W_2 = \frac{13}{15}$.
2. **כוח משמר:** העבודה אינה תלויה במסלול, ושקולה לתכונה $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.
3. **אנרגיה פוטנציאלית:** $U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_C \cdot d\vec{r}$; כבידה: $E_p = mgh$.
4. **אנרגיה מכנית:** $E = K + U$, ומשפט עבודה--אנרגיה: $W_{NC} = \Delta E$ II.
5. **שימור האנרגיה:** אם אין כוחות אי-משמרים העושים עבודה --- $E = K + U = \text{const}$.
6. **סיווג:** כובד --- משמר; מתיחות/נורמל/חיכוך סטטי --- אינם עושים עבודה; חיכוך קינטי/גרר --- אי-משמרים.
7. **כוח הגישה:** מטוטלת --- $v_{\max} = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$ בשורה אחת; מכונית --- $v_{\max} = \sqrt[3]{P/c}$ ממאזן הספקים.