כוח גרר (Drag Force)

עד כה עסקנו בכוחות שאינם תלויים במהירות (כבידה, נורמל, מתח). כעת נכיר כוח שכן תלוי במהירות --- **כוח הגרר** --- ונפתור באמצעותו שתי בעיות תנועה, אנליטית ונומרית.

1. כוח גרר --- הגדרה וקירובים

1.1 הגדרה

כוח גרר (Drag Force)

כוח התנגדות התווך --- הכוח הנגדי לכיוון התנועה, הנובע מהמדיום שבו הגוף נע.

- **תווך** --- החומר שממלא את הסביבה שבה הגוף נע (אוויר, מים וכו').
- הכוח **מנוגד** לכיוון המהירות.
- כאשר המהירות ביחס לתווך היא 0 --- הכוח הוא 0.
- ככל שהמהירות גדלה, הכוח גדל.

פונקציית כוח הגרר מורכבת; לכן בתחום מהירויות נמוכות נעשה בה **קירוב ליניארי**:

קירוב ליניארי

$$\vec{f} = -b\,v\,\hat{v} = -b\vec{v}$$

כאשר b הוא קבוע התלוי ב:

- **הגוף** --- שטח החתך הניצב למהירות, וצורת הגוף.
- **התווך** --- צפיפות וצמיגות.

1.2 יחידות המידה של b

מאחר ש-$[b]\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{N}$:

$$[b] = \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

1.3 קירוב ריבועי (קירוב עדין יותר)

במהירויות גבוהות יותר נוסיף איבר ריבועי:

$$\vec{f} = -\left(b\,v + c\,v^2\right)\hat{v}$$

אזורי תקפות

- אם $cv^2 \ll bv$, כלומר $v \ll \frac{b}{c}$ --- שולט האיבר הליניארי: $\vec{f} \approx -b\vec{v}$ (קירוב ליניארי).
- אם $v \gg \frac{b}{c}$ --- שולט האיבר הריבועי: $\vec{f} \approx -cv^2\hat{v}$ (קירוב ריבועי).

יחידות המידה של c: מאחר ש-$[b] = [c] \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,

$$[c] = \frac{\mathrm{kg/s}}{\mathrm{m/s}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$$

הקבוע c מוגדר פיזיקלית גם כ:

$$c = \tfrac{1}{2}\,\rho\,A\,C_d$$

כאשר ρ --- צפיפות התווך, A --- שטח החתך, C_d --- מקדם הגרר.

1.4 מסקנה --- ביטוי הכוח לפי אזורי מהירות

אזור מהירות	ביטוי כוח הגרר
מהירויות נמוכות	$\vec{f} = -b\vec{v}$
מהירויות בינוניות	$\vec{f} = -(bv + cv^2)\hat{v}$
מהירויות גבוהות	$\vec{f} = -cv^2\hat{v}$

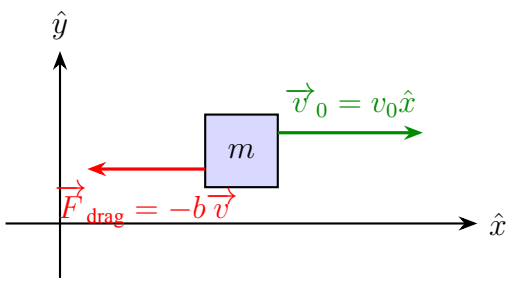
2. בעיה ראשונה --- גוף עם כוח גרר בלבד

2.1 הגדרת הבעיה

גוף נע בתווך, והכוח **היחיד** הפועל עליו הוא כוח הגרר (אין כבידה ואין כוחות נוספים). תנאי התחלה:

$$\vec{v}(0) = v_0\,\hat{x}$$

2.2 דיאגרמת כוחות



2.3 חוק שני של ניוטון

$$-b\vec{v} = m\vec{a} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{a} = -\frac{b}{m}\vec{v}$$

מאחר ש- $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, מתקבלת משוואה דיפרנציאלית. כל המהירות ההתחלתית בכיוון $\hat{x}$, ולכן התנועה נשארת על ציר x:

$$\boxed{\dot{v}_x = -\frac{b}{m}\,v_x}$$

2.4 פתרון אנליטי

אופי המשוואה

זוהי משוואה דיפרנציאלית **ליניארית מסדר ראשון**. נפתור אותה בשיטת **ניחוש פתרון**: ננסה $v_x = At$ --- אינו מקיים את המשוואה. ננסה צורה מעריכית $v_x(t) = Ae^{kt}$.

נציב את הניחוש המעריכי:

$$\dot{v}_x = kAe^{kt} = -\frac{b}{m}\,Ae^{kt} \qquad \Longrightarrow \qquad k = -\frac{b}{m}$$

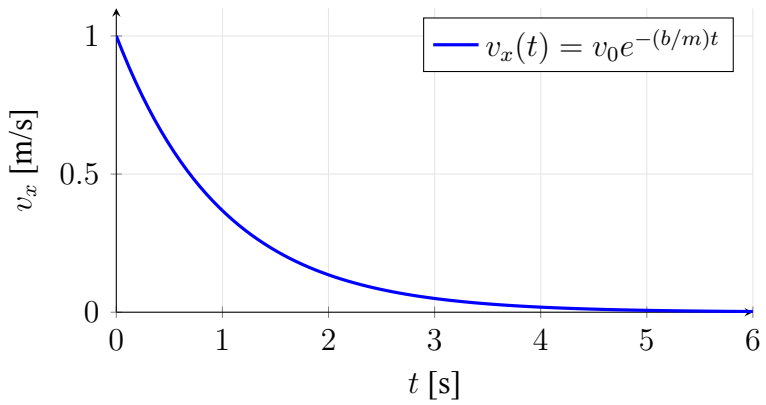
הפתרון הכללי הוא $v_x(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t}$. נציב תנאי התחלה $v_x(0) = v_0$:

$$v_x(0) = A \quad \Longrightarrow \quad A = v_0$$

דעיכת מהירות תחת גרר

$$\boxed{v_x(t) = v_0\,e^{-\frac{b}{m}t}}$$

המהירות דועכת אקספוננציאלית לאפס (אך מתאפסת רק בגבול $t \to \infty$):



2.5 שיטה נומרית --- שיטת אוילר

כאשר אין פתרון אנליטי נוח, פותרים נומרית. מהגדרת הנגזרת:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} \approx \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

נבודד את המהירות בצעד הבא:

צעד אוילר

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \vec{a}\,\Delta t$$

2.6 מימוש בפייתון --- גרר בלבד

אינטגרציית אוילר עבור תנועה תחת גרר בלבד, מול הפתרון האנליטי:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def zero_cross(ar):
    """Return indices where the array changes sign."""
    H1t = np.sign(ar)
    H1s = np.abs(H1t[:-1] - H1t[1:])
    return np.nonzero(H1s)[0]


# Parameters
b = 1.0     # drag coefficient [kg/s]
m = 1.0     # mass [kg]
v0 = 1.0    # initial velocity [m/s]

stop = 10   # simulation end time [s]
dt = 0.01   # time step [s]

# Arrays
t = np.arange(0, stop, dt)
v = np.zeros_like(t)
v[0] = v0

# Euler integration
for i in range(1, len(t)):
    a = -(b / m) * v[i - 1]     # a = -b/m * v
    v[i] = v[i - 1] + a * dt    # Euler step

# Analytical solution (for comparison)
v_exact = v0 * np.exp(-(b / m) * t)
```

```python

# Plot
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(t, v, label='Numerical (Euler)', linewidth=2)
plt.plot(t, v_exact, label='Analytical',
         linestyle='--', linewidth=2, color='red')
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel(r'$v_x$ [m/s]')
plt.title(r'Drag Force: $v_x(t) = v_0 e^{-(b/m) t}$')
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.4)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

3. בעיה שנייה --- זריקה אנכית עם כבידה וגרר

3.1 הגדרת הבעיה

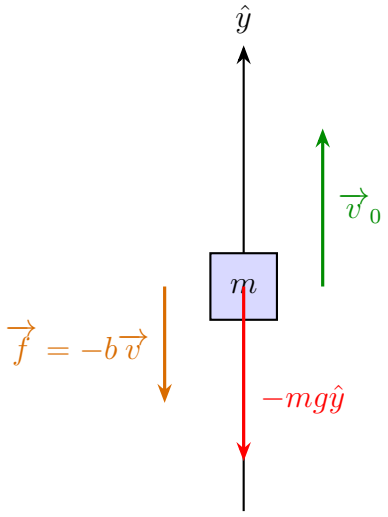
גוף נזרק אנכית כלפי מעלה. עליו פועלים **שני** כוחות: כוח הכבידה וכוח הגרר. נבחר את ציר $\hat{y}$ כלפי מעלה. הנתונים:

$$m = 1\ \text{kg}, \quad v_0 = 2\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}, \quad b = 0.3\ \tfrac{1}{\text{s}}, \quad g = 9.8\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

מה נחשב

1. דיאגרמת הכוחות.
2. חוק שני $\rightarrow$ המשוואה הדיפרנציאלית.
3. מהירות הגוף כפונקציה של הזמן.
4. הזמן בנקודה הגבוהה ביותר.
5. מהירות הגבול (terminal velocity) של הגוף.

3.2 דיאגרמת כוחות



3.3 חוק שני $\rightarrow$ משוואה דיפרנציאלית

בציר y, הכבידה כלפי מטה והגרר מנוגד למהירות:

$$ma_y = -mg - bv_y$$

$$\boxed{\dot{v}_y = -g - \frac{b}{m}v_y}$$

3.4 פתרון --- מהירות כפונקציה של הזמן

פתרון כללי. ננחש צורה מעריכית עם קבוע: $v_y(t) = Ae^{kt} + B$. נציב:

$$kAe^{kt} = -\frac{b}{m}\left(Ae^{kt} + B\right) - g$$

השוואת איברים נותנת:

$$k = -\frac{b}{m}, \qquad 0 = -\frac{b}{m}B - g \implies B = -\frac{mg}{b}$$

לכן הפתרון הכללי:

$$v_y^{\text{GEN}}(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}$$

פתרון פרטי. מתנאי ההתחלה $v_y(0) = v_0$:

$$v_y(0) = A - \frac{mg}{b} = v_0 \implies A = v_0 + \frac{mg}{b}$$

מהירות אנכית תחת כבידה וגרר

$$\boxed{v_y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}}$$

3.5 הזמן בנקודה הגבוהה ביותר

בנקודה הגבוהה ביותר המהירות מתאפסת, $v_y = 0$:

$$\left(v_0 + \frac{mg}{b}\right) e^{-\frac{b}{m}t} = \frac{mg}{b}$$

$$\boxed{t_{\max H} = \frac{m}{b} \ln\left(1 + \frac{bv_0}{mg}\right)}$$

מספרית: $t_{\max H} = \frac{1}{0.3} \ln\left(1 + \frac{0.3 \cdot 2}{9.8}\right) \approx 0.20\ \mathrm{s}$.

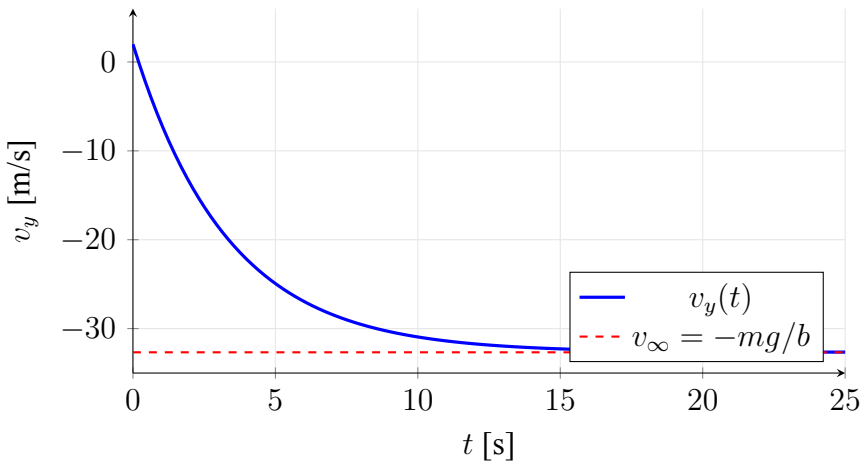
3.6 מהירות הגבול (Terminal Velocity)

כאשר $t \to \infty$ האיבר המעריכי שואף לאפס:

$$\boxed{v_y(t \to \infty) = -\frac{mg}{b}}$$

זוהי **מהירות הגבול**: המהירות הקבועה שבה כוח הגרר מאזן בדיוק את הכבידה, ולכן התאוצה מתאפסת. מספרית $v_\infty = -\frac{1 \cdot 9.8}{0.3} \approx -32.7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (כלפי מטה).

הגרף מתחיל ב-$+2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, חוצה אפס בנקודה הגבוהה, ושואף למהירות הגבול:



3.7 מימוש בפייתון --- כבידה וגרר

אינטגרציית אוילר עבור זריקה אנכית, מול הפתרון האנליטי:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# set values for parameters
m = 1        # kg
v0 = 2       # m/s
g = 9.8      # m/s^2
```

```python
b = 0.3     # kg/s

# choose a time step and last t
T, dt = 25, 1e-4    # s
t = np.arange(0, T, dt)
v = np.zeros_like(t)
v[0] = v0           # set initial velocity

# analytic solution
v_an = (v0 + m * g / b) * np.exp(-t * b / m) - m * g / b

for i in range(len(t) - 1):      # Euler's method
    a = -b / m * v[i] - g
    v[i + 1] = v[i] + a * dt

# plot the results
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(t, v, 'o', label='numeric calculation')
ax.plot(t, v_an, '--', label='analytic result')
ax.set_ylabel('$v$ (m/s)')
ax.set_xlabel('$t$ (s)')
ax.legend(loc='upper right')
```

סיכום: מבט-על

נקודות מפתח לזכור

1. **כוח גרר** מנוגד למהירות ומתאפס במנוחה; הוא גדל עם המהירות.
2. **קירוב ליניארי:** $\vec{f} = -b\vec{v}$, $[b] = \mathrm{kg/s}$. **קירוב ריבועי:** $\vec{f} = -cv^2\hat{v}$, $[c] = \mathrm{kg/m}$; המעבר סביב $v \sim b/c$.
3. **גרר בלבד:** דעיכה אקספוננציאלית $v_x(t) = v_0 e^{-(b/m)t}$.
4. **כבידה + גרר:** $v_y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{b}\right) e^{-(b/m)t} - \frac{mg}{b}$, עם מהירות גבול $v_\infty = -mg/b$.
5. **נקודה גבוהה:** $t_{\max H} = \frac{m}{b} \ln\left(1 + \frac{bv_0}{mg}\right)$.
6. **שיטת אוילר:** $\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \vec{a}\,\Delta t$ --- פתרון נומרי כללי.