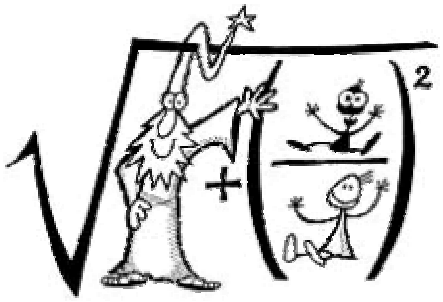
DUMITRU BUŞNEAG

FLORENTINA CHIRTEŞ DANA PICIU

PROBLEME

de

ALGEBRĂ



Dumitru BUŞNEAG

Florentina CHIRTEŞ **Dana PICIU**

PROBLEME de ALGEBRĂ

Dumitru BUŞNEAG

Florentina CHIRTEŞ **Dana PICIU**

PROBLEME

de

ALGEBRĂ

Editura UNIVERSITARIA
CRAIOVA
2002

Referenți ştiințifici:
Prof.univ.dr.Constantin Năstăsescu,Universitatea Bucuresti
Membru corespondent al Academiei Române
Prof.univ.dr. Constantin Niță,Universitatea Bucureşti
Prof.univ.dr. Alexandru Dincă,Universitatea Craiova

Tehnoredactare computerizată : Dana Piciu, Florentina Chirteş
Copertă: Cătălin Buşneag

Descrierea CIP a Bibliotecii Na ionale

Dumitru Buşneag (coordonator),

Probleme de Algebră

Bun de tipar: 20.02.2002
Tipografia Universității din Craiova, Strada, Al. Cuza, nr.13
Craiova, România

Published in Romania by:
EDITURA UNIVERSITARIA CRAIOVA

ISBN: 973 – 8043 – 189 – 9

CUPRINS

Prefață

Lucrarea de față este destinată în principal seminarizării cursurilor de algebră legate de structurile algebrice fundamentale (grup, inel, corp). Ea cuprinde probleme legate de grupuri, inele, corpuri şi inele de polinoame.

Această lucrare este utilă în primul rând studenților de la facultățile de matematică - informatică dar şi celor de la facultățile tehnice. Ea poate fi însă utilă în egală măsură atât profesorilor de matematică din învățământul preuniversitar (în procesul didactic şi de perfecționare), ca şi elevilor din ultima clasă de liceu participanți la tradiționalele concursuri de matematici de la noi.

Pentru anumite aspecte teoretice recomandăm cititorilor lucrările [4, 12, 13, 18, 19, 20, 21].

Atât tehnoredactarea cât şi corectura aparțin autorilor.

Craiova, 20.02.2002 Autorii

Index de notaţii şi abrevieri

a.î.	: astfel încât
$\Rightarrow(\Leftrightarrow)$	: implicaţia (echivalenţa) logică
$(\forall)$ $((\exists))$	: cuantificatorul universal (existenţial)
$x \in A$	: elementul x aparţine mulţimii A
$A \subseteq B$	: mulţimea A este inclusă în mulţimea B
$A \subsetneq B$	: mulţimea A este inclusă strict în mulţimea B
$A \cap B$	: intersecţia mulţimilor A şi B
$A \cup B$	: reuniunea mulţimilor A şi B
$A \setminus B$	: diferenţa mulţimilor A şi B
$A \Delta B$	: diferenţa simetrică a mulţimilor A şi B
$P(M)$	: familia submulţimilor mulţimii M
$C_M A$	: complementara în raport cu M a mulţimii A
$A \times B$	: produsul cartezian al mulţimilor A şi B
$\|M\|$ (sau card M)	: cardinalul mulţimii M (dacă M este finită $\|M\|$ reprezintă numărul elementelor lui M)
1_A	: funcţia identică a mulţimii A
$\mathbb{N}(\mathbb{N}^*)$	: mulţimea numerelor naturale (nenule)
$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}^*)$	: mulţimea numerelor întregi (nenule)
$\mathbb{Q}(\mathbb{Q}^*)$	: mulţimea numerelor raţionale (nenule)
$\mathbb{Q}_+^*$	: mulţimea numerelor raţionale strict pozitive
$\mathbb{R}(\mathbb{R}^*)$	: mulţimea numerelor reale (nenule)
$\mathbb{R}_+^*$	: mulţimea numerelor reale strict pozitive
$\mathbb{C}(\mathbb{C}^*)$	: mulţimea numerelor complexe (nenule)
δ_{ij}	: simbolul lui Kronecker (adică 1 pentru i = j şi 0 pentru $i \neq j$)
$\|z\|$	: modulul numărului complex z
U_n	: mulţimea rădăcinilor complexe de ordin n ale unităţii
T	: mulţimea numerelor complexe de modul 1
m | n	: numărul întreg m divide numărul întreg n
[m,n]	: cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale m şi n
c.m.m.m.c.	: cel mai mic multiplu comun
(m,n)	: cel mai mare divizor comun al numerelor naturale m şi

	n
c.m.m.d.c.	: cel mai mare divizor comun
$m \equiv n \pmod p$	: m este congruent cu n modulo p (adică p | m-n)
$\mathbb{Z}_n$	: mulțimea claselor de resturi modulo numărul natural n ($n \geq 2$)
$M_n(K)$	: mulțimea matricelor pătratice de ordin n cu elemente din mulțimea K
$M_{m,n}(K)$	: mulțimea matricelor cu m linii şi n coloane, cu elemente din mulțimea K
$I_n(O_n)$	: matricea unitate (nulă) de ordin n ($n \geq 2$)
Tr(M)	: urma matricei pătratice M
det(M)	: determinantul matricei pătratice M
$U(M, \circ)$	: mulțimea elementelor inversabile din monoidul $(M, \circ)$
$\varphi(n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	: numărul numerelor naturale mai mici decât n şi prime cu n (φ poartă numele de *indicatorul lui Euler*)
$GL_n(K)$	: grupul liniar de grad n peste corpul K
$SL_n(K)$	: grupul special de grad n peste corpul K
$\Sigma(X)$	: grupul simetric al mulțimii X (adică grupul funcțiilor bijective $f : X \to X$ relativ la compunerea funcțiilor)
S_n	: grupul simetric al unei mulțimi cu n elemente
A_n	: grupul altern de grad n
D_n	: grupul diedral de grad n
DI_n	: grupul diciclic de grad n
Q	: grupul quaternionilor
Q_n	: grupul generalizat al quaternionilor
o(g)	: ordinul elementului g din grupul G
$H \leq G$	: H este subgrup al grupului G
$H \trianglelefteq G$	: H este subgrup normal al grupului G
|G:H|	: indicele subgrupului H în grupul G
$(G/H)_d$	: mulțimea claselor la dreapta ale grupului G relative la subgrupul H al grupului G
$(G/H)_s$	: mulțimea claselor la stânga ale grupului G relative la subgrupul H al grupului G
G/H	: grupul factor al grupului G prin subgrupul său normal H
L(G)	: mulțimea subgrupurilor grupului G
$L_0(G)$	: mulțimea subgrupurilor normale ale grupului G
<X>	: subgrupul generat de mulțimea X în grupul G ($X \subseteq G$)
$H \vee K$	: subgrupul generat de $H \cup K$ în grupul G ($H,K \leq G$)
$H \cdot K$	: mulțimea elementelor de forma $h \cdot k$ cu $h \in H$ şi $k \in K$ ($H,K \leq G$)
$H \approx K$	: grupurile H şi K sunt izomorfe

$H \not\approx K$	: grupurile H şi K nu sunt izomorfe
$Hom(G_1,G_2)$	: mulțimea morfismelor de grup de la grupul G_1 la grupul G_2
$Aut(G)$	: mulțimea automorfismelor grupului G
$Inn(G)$	: mulțimea automorfismelor interioare ale grupului G
$C_M(x)$	: centralizatorul în monoidul M al elementului x (adică mulțimea elementelor lui M ce comută cu x)
$Z(M)$	: centrul monoidului M (mulțimea elementelor lui M ce comută cu oricare element al lui M)
$N_G(H)$	: normalizatorul lui H în G (adică mulțimea elementelor $x \in G$ pentru care $xH = Hx$, $H \subseteq G$)
$[x,y]$	: $x^{-1}y^{-1}xy$ (comutatorul elementelor x şi y din grupul G)
$ch\ a = (e^a + e^{-a}) / 2$	: cosinus hiperbolic
$sh\ a = (e^a - e^{-a}) / 2$	: sinus hiperbolic
$Car(A)$	: caracteristica inelului A
$U(A)$	: grupul unităților inelului A
$Z(A)$	: centrul inelului A
$N(A)$	: mulțimea elementelor nilpotente ale inelului A
$Id(A)$	: mulțimea idealelor inelului comutativ A
A / I	: inelul factor al lui A prin idealul I
$J(A)$	: radicalul Jacobson al inelului comutativ A
$r(I)$	: radicalul idealului I
$Ann(I)$	: anulatorul idealului I
(M)	: idealul generat de submulțimea M din inelul A
$[x,y]$	: comutatorul elementelor x şi y din inelul A (adică xy – yx)
$A[[X]]$	:inelul seriilor formale peste inelul A
$A[X]$	:inelul polinoamelor într-o nedeterminată cu coeficienți în inelul comutativ A
$A[X_1,\ldots,X_n]$	: inelul polinoamelor în nedeterminatele $X_1,\ldots,X_n$ ($n \geq 2$) cu coeficienți din inelul comutativ A
$\widetilde{f}$	: funcția polinomială ataşată polinomului $f \in A[X]$

Partea 1: Enunțurile problemelor

§1. Operații algebrice.Semigrupuri. Monoizi. Morfisme de monoizi.

1.1. Fie M o mulțime cu n elemente.
(i) Câte operații algebrice se pot defini pe M ?
(ii) Câte dintre acestea sunt comutative?
(iii) Câte dintre acestea admit element neutru?
(iv) Să se arate că numărul operațiilor algebrice ce se pot defini pe M care sunt în acelaşi timp comutative şi cu element neutru este $n^{\frac{n^2-n+2}{2}}$.

1.2. Pe $\mathbb{R}$ considerăm operația algebrică :

$$x \circ y = xy + ax + by + c \ (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

(i) Pentru ce valori ale lui a,b,c operația " $\circ$ " este asociativă?

(ii) Să se demonstreze că operația " $\circ$ " este asociativă $\Leftrightarrow$ are element neutru ;
(iii) În ipoteza că operația " $\circ$ " este asociativă, să se pună în evidență $U(\mathbb{R},\circ)$.

1.3. Pe $\mathbb{Z}$ considerăm operația algebrică :

$$x \circ y = axy + b(x + y) + c \ \ (a, b, c \in \mathbb{Z}).$$

Să se demonstreze că:
(i) Operația " $\circ$ " este asociativă $\Leftrightarrow b^2\text{-}b\text{-}ac = 0$;
(ii) Dacă $b^2\text{-}b\text{-}ac = 0$, atunci operația " $\circ$ " are element neutru dacă şi numai dacă $b \mid c$.

1.4. Fie M o mulțime nevidă iar " $\circ$ " o operație algebrică asociativă pe M. Să se demonstreze că :

$$H = \{a \in M: (x \circ a) \circ y = x \circ (a \circ y), \text{ pentru orice } x,y \in M\}$$

este parte stabilă a lui M în raport cu operația dată.

1.5. Fie M o mulțime nevidă. Pe M se defineşte o operație algebrică asociativă. Arătați că dacă M este finită şi există $a \in M$ a.î. funcția $f: M \to M$, $f(x) = axa$ este injectivă, atunci $(M,\cdot)$ este monoid.

1.6. Fie S un semigrup finit şi $a \in S$. Să se arate că există $m \in \mathbb{N}^*$ a.î. a^m este idempotent.

1.7. Fie A o mulțime nevidă şi o operație algebrică asociativă pe A cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x^n y^n = yx$, pentru orice $x,y \in A$. Arătați că operația dată este comutativă.

1.8. Fie $M \neq \emptyset$ şi o operație algebrică asociativă cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(xy)^n = yx$, pentru orice $x,y \in M$. Atunci operația algebrică este comutativă.

1.9. Pe mulțimea M se defineşte o operație algebrică cu proprietățile:

1) $x^2 = x$, pentru orice $x \in M$;
2) $(xy)z = (yz)x$, pentru orice $x,y,z \in M$.

Să se arate că operația este asociativă şi comutativă.

1.10. Pe mulțimea S se defineşte o operație algebrică asociativă cu următoarele proprietăți:

1) $x^3 = x$, pentru orice $x \in S$
2) $xy^2x = y\, x^2y$, pentru orice $x,y \in S$.

Să se arate că operația este comutativă.

1.11. Fie $\mathbb{Z}[i]=\{x+yi : x,y \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{C}, i^2 = -1\}$. Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}[i],\cdot)$ este monoid comutativ.

Să se determine $U(\mathbb{Z}[i], \cdot)$.

1.12. Fie d un număr natural liber de pătrate ($d \geq 2$) iar $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,] = \{x+y\sqrt{d} \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$. Definim $N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,] \to \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ prin $N(x+y\sqrt{d}\,) = x^2 - dy^2$, pentru orice $x,y \in \mathbb{Z}$. Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,],\cdot)$ este monoid comutativ iar $z \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,],\cdot) \Leftrightarrow N(z) \in \{\pm 1\}$.

1.13. Să se demonsteze că $U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,],\cdot)$ este o mulțime infinită.

1.14. Fie n un număr natural, $n \geq 2$ şi $M_n = \{x \in \mathbb{Z} : (n,x) \neq 1\}$.

Să se demonstreze că M_n este parte stabilă a lui $(\mathbb{Z},+) \Leftrightarrow$ n este o putere naturală a unui număr prim.

1.15. Fie $M \subseteq \mathbb{C}$ parte stabilă a lui $(\mathbb{C},+)$ a.î. $\{z\in\mathbb{C}: |z| = 1\}\subseteq M$. Să se demonstreze că $M = \mathbb{C}$.

1.16. Pe mulțimea $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definim operația algebrică :

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1x_2, x_2y_1 + y_2).$$

Să se demonstreze că $(M, \circ)$ este monoid iar apoi să se determine $U(M, \circ)$.

1.17. Fie $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in\mathbb{Z}$ şi $a + b = c + d\}$.

Să se demonstreze că M împreună cu înmulțirea matricelor este monoid iar apoi să se pună în evidență unitățile monoidului M.

1.18. Fie $A = \{f : \mathbb{N}^*\to \mathbb{C}\}$. Pe A definim operația algebrică $*$ astfel: $(f*g) = \sum_{d|n} f(n)g(n/d)$.

Să se demonsteze că $(A, *)$ este monoid comutativ şi $f \in U(A, *) \Leftrightarrow f(1) \neq 0$.

Observație. Funcțiile din A se numesc *funcții aritmetice* iar operația algebrică $*$ poartă numele de *produs de convoluție* sau *produs Dirichlet*.

1.19. Fie $(M, \cdot)$ un monoid şi 1 elementrul său neutru.

(i) Să se arate că dacă M este mulțime finită, atunci nu există $a,b\in M$ a.î. $ab = 1$ şi $ba \neq 1$;

(ii) Să se dea un exemplu de două aplicații $f,g : \mathbb{N} \to\mathbb{N}$ a.î. $f\circ g = 1_{\mathbb{N}}$ şi $g\circ f \neq 1_{\mathbb{N}}$;

(iii) Fie a şi b în M a.î. $ab = 1$ şi $ba \neq 1$. Să se arate că dacă $b^n a^m = b^q a^p$ cu $m,n,p,q\in\mathbb{N}^*$, atunci $n = q$ şi $m = p$.

1.20. Să se demonstreze că dacă $M \subseteq \mathbb{C}$ este parte stabilă relativ la operațiile de adunare şi înmulțire a numerelor complexe şi $\mathbb{R} \subseteq M \subseteq \mathbb{C}$, atunci $M = \mathbb{R}$ sau $M = \mathbb{C}$.

1.21. Pentru monoidul $(M, \cdot)$ definim

$$Z(M) = \{x\in M \mid xy = yx, \text{ pentru orice } y\in M\}.$$

Să se demonstreze că Z(M) este submonoid al lui M.

Observație. Z(M) poartă numele de *centrul* monoidului M.

1.22. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Să se demonstreze că

$$Z(M_n(\mathbb{C}), \cdot) = \{a \cdot I_n \mid a \in \mathbb{C}\}.$$

1.23. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

(i) Să se determine $X \in M_2(\mathbb{C})$ a.î. $AX = XA$;

(ii) Să se rezolve în $M_2(\mathbb{C})$ ecuația $X^n = A$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

1.24. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ a.î. $a+d > 2$ şi $\det(A) = 1$.

Să se demonstreze că $A^n \neq I_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

1.25. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ a.î. $A + B = AB$.
Să se demonstreze că $AB = BA$.

1.26. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.
Să se demonstreze că

$$I_n - AB \in U(M_n(\mathbb{C}), \cdot) \Leftrightarrow I_n - BA \in U(M_n(\mathbb{C}), \cdot).$$

1.27. Fie S un semigrup. Să se arate că există un monoid M şi un morfism injectiv de semigrupuri $f : S \to M$.

1.28. Fie M_1, M_2 monoizi, $f, g : M_1 \to M_2$ două morfisme de monoizi, $M_{f,g} = \{x \in M_1 : f(x) = g(x)\}$ iar $i : M_{f,g} \to M_1$ morfismul incluziune.

Să se demonstreze că :

(i) $M_{f,g}$ este submonoid al lui M_1 iar $f \circ i = g \circ i$;

(ii) Dacă M' este un alt monoid iar $i' : M' \to M_1$ este un morfism de monoizi a.î. $f \circ i' = g \circ i'$, atunci există un unic morfism de monoizi $u : M' \to M_{f,g}$ a.î. $i \circ u = i'$.

Observație. Dubletul $(M_{f,g}, i)$ îl notăm cu $\mathrm{Ker}(f,g)$ şi poartă numele de *nucleul perechii de morfisme de monoizi (f,g)*.

Dacă g este morfismul nul ($g(x) = 1$, $(\forall)\ x \in M_1$), notăm $\mathrm{Ker}(f) = M_{f,1} = \{x \in M_1 : f(x) = 1\}$ şi îl numim *nucleul* lui f.

1.29. Fie M_1, M_2 monoizi, $f : M_1 \to M_2$ un morfism de monoizi.

Considerăm următoarele afirmații :

(i) f este aplicație injectivă ;

(ii) $\mathrm{Ker}(f) = \{1\}$.

Să se demonstreze că (i) $\Rightarrow$ (ii) însă în general (ii) $\not\Rightarrow$(i).

1.30. Fie M_1, M_2 monoizi, $f : M_1 \to M_2$ un morfism de monoizi.

Considerăm următoarele afirmații :

(i) f este aplicație injectivă ;

(ii) Dacă M_0 este un alt monoid iar $g,h : M_0 \to M_1$ sunt morfisme de monoizi a.î. $f \circ g = f \circ h$, atunci $g = h$;

(iii) $\mathrm{Ker}(f) = \{1\}$.

Să se demonstreze că (i) $\Rightarrow$ (ii) şi (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Observație. Un morfism ce verifică (ii) se numeşte *monomorfism de monoizi*.

1.31. Fie M_1, M_2 monoizi, $f : M_1 \to M_2$ un morfism de monoizi.

Considerăm următoarele afirmații :

(i) f este aplicație surjectivă ;

(ii) Dacă M_3 este un alt monoid iar $g,h : M_2 \to M_3$ sunt morfisme de monoizi a.î. $g \circ f = h \circ f$, atunci $g = h$.

Să se demonstreze că (i) $\Rightarrow$ (ii) însă în general (ii) $\not\Rightarrow$(i).

Observație. Un morfism ce verifică (ii) se numeşte *epimorfism de monoizi*.

§2. Grup. Subgrup. Subgrup generat de o mulțime.

Calcule într-un grup. Grupuri de permutări.

2.1. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim operația algebrică:

$$x \circ y = xy + 2(x + y + 1).$$

(i) Să se arate că dubletul $(\mathbb{Z}, \circ)$ nu este grup ;

(ii) Să se determine cea mai mare submulțime $G \subseteq \mathbb{Z}$ (față de incluziune) a.î. dubletul $(G, \circ)$ să fie grup comutativ.

2.2. Pe mulțime a $\mathbb{Q}$ se defineşte operația algebrică :

$$x \circ y = x + y - kxy$$

($k \in \mathbb{Q}^*$ fixat). Să se arate că există $a \in \mathbb{Q}$ a.î. $(\mathbb{Q} \setminus \{a\}, \circ)$ să fie grup abelian.

2.3. Fie $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ şi operația algebrică : $x \circ y = xy + ax + by + c$.

Ce condiție trebuie să îndeplinească a,b şi c pentru ca $((d,\infty), \circ)$ să fie grup abelian ?

2.4. Fie G = $\left\{\begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a \in R, a > 0\right\}$.

Să se demonstreze că G împreună cu înmulțirea matricelor este grup comutativ.

2.5. Fie G = $\left\{\begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} : x \in R - \{\frac{1}{2}\}\right\}$.

Să se demonstreze că G împreună cu înmulțirea matricelor este grup comutativ.

2.6. Să se determine x$\in \mathbb{R}$ a.î. mulțimea :

$$M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & x & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in R, ad - bc = 1\right\}$$

să fie grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

2.7. Să se determine numerele reale a şi b a.î.:

$$G = \left\{\begin{pmatrix} x + ay & y - bx \\ y + bx & x - ay \end{pmatrix} : x, y \in R, x^2 - 4y^2 = 1\right\}$$

să formeze un grup în raport cu înmulțirea matricelor.

2.8. Fie n natural, n ≥ 2 dat. Să se arate că mulțimea :

$$G = \left\{A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in C, A^n = I_2, n \geq 2\right\}$$

este un grup în raport cu înmulțirea matricelor.

Câte elemente are grupul G ?

2.9. Să se arate că mulțimea :

$$G = \left\{\begin{pmatrix} x + 4y & 2y \\ -2y & x - 4y \end{pmatrix} : x, y \in R, x^2 - 12y^2 = 1\right\}$$

împreună cu înmulțirea matricelor formează grup comutativ.

2.10. Fie G mulțimea matricelor de forma M(a,b) = $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ cu proprietatea că det M(a,b) = 1. Să se arate că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

2.11. Considerăm mulțimea M = $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in R, \ \ iar \ \ f = a + bX + cX^2 \ \ si \ \ g = X^3 - 1 \ \ sunt \ \ prime \ \ intre \ \ ele \right\}$.

Să se arate că M este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

2.12. Fie E = $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ iar pentru t$\in\mathbb{R}$, funcția f_t:E$\to$E,
$f_t(x,y) = (x+ ty + t^2/2, y + t)$, oricare ar fi (x,y) $\in$E.

Să se demonstreze că mulțimea G = $\{f_t : t\in\mathbb{R}\}$ formează grup comutativ în raport cu compunerea funcțiilor.

2.13. Se consideră mulțimea :

G = $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \in M_4(R) \middle| (a-c)^2 + (b-d)^2 \neq 0, |a+c| \neq |b+d| \right\}$.

(i) Să se arate că (G,·) este grup abelian ;

(ii) Pentru n$\in\mathbb{N}$ şi X$\in$G, să se arate că există a_n, b_n, c_n, $d_n \in \mathbb{R}$ şi H = {A,B,C,D}, H $\subset$ G, a.î. (H, ·) să fie grup abelian şi $X^n = a_nA + b_nB + c_nC + +d_nD$ pentru orice n număr natural.

(iii) Pentru n$\in\mathbb{N}$* calculați : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}^n$.

2.14. Fie A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ -8 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ şi

$M_A = \{ x\cdot I_3 + y\cdot A \mid (x,y)\in\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$.

Să se arate că :

(i) det X nu depinde de y, pentru orice $X \in M_A$;

(ii) $(M_A, \cdot)$ este un grup abelian ;

(iii) $(X^*)^n + (X^*)^{-n} \in M_A$ şi det $((X^*)^n + (X^*)^{-n}) \geq 8$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $X \in M_A$, unde X^* este adjuncta lui X.

2.15. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \middle| a,b \in Q, a \neq 0, a \neq -b \right\}$.

(i) Să se arate că $(M,\cdot)$ este grup ;

(ii) Să se determine toate matricele $X \in M$ a.î. $X \cdot X^t = I_2$;

(iii) Ecuația $Y^t \cdot Y = I_2$ are soluții în M ?

2.16. Să se demonstreze că $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\}$ şi $T = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$ este subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ $(n \in \mathbb{N})$.

2.17. Fie K o mulțime cu patru elemente $K = \{1,a,b,c\}$.
Pe K considerăm operația de înmulțire a cărei tabelă este:

·	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

Să se demonstreze că dubletul $(K,\cdot)$ este grup comutativ.
Observație. Grupul K poartă numele de *grupul lui Klein*.

2.18. Determinați $a,b,c \in \mathbb{R}$ a.î.

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid a \cos x + b \sin x + c = 0 \}$$

să fie subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$.

2.19. Determinați matricele $A \in M_n(\mathbb{R})$, $(n \geq 3)$, pentru care mulțimea $G(A) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) | \det(A+B) = \det(A)+\det(B)\}$ este grup în raport cu adunarea matricelor din $M_n(\mathbb{R})$.

2.20. Să se demonstreze că orice grup cu cel mult cinci elemente este comutativ.

2.21. Să se demonstreze că pe orice mulțime finită se poate defini o structură de grup comutativ.

2.22. Să se demonstreze că un grup nu se poate scrie ca reuniunea a două subgrupuri proprii ale sale.

2.23. Să se demonstreze că există grupuri ce se pot scrie ca reuniunea a trei subgrupuri proprii ale sale.

2.24. Să se arate că nu există nici un grup care să fie reuniunea a trei subgrupuri proprii ale sale, dintre care două au câte trei elemente.

2.25. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $H = \{x^2 \mid x \in G\}$. Să se arate că dacă G este comutativ, atunci H este subgrup al lui G. Reciproca este adevărată?

2.26. Fie $(G, \cdot)$ un dublet format dintr-o mulţime şi o operaţie algebrică asociativă. Să se arate că dacă oricare ar fi $a,b,c \in G$ există $x \in G$ a.î. $axb = c$, atunci $(G,\cdot)$ este grup.

2.27. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $a,b \in G$ a.î. $ab = c^n$, cu $c \in G$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că există $d \in G$ a.î. $ba = d^n$.

2.28. Fie $p \geq 3$ un număr natural impar. Construiţi un grup $(G,\cdot)$ cu p^3 elemente, unde $p > 2$ este număr impar, cu proprietatea că pentru orice $x \in G$, $x^p = 1$.

2.29. Fie G o mulţime finită pe care este definită o operaţie algebrică asociativă, notată multiplicativ. Dacă operaţia are proprietatea că :

$$xy = xz \Rightarrow y = z,$$

$$yx = zx \Rightarrow y = z, \text{ pentru orice } x, y, z \in G,$$

atunci $(G,\cdot)$ este un grup.

2.30. Fie $(G,\cdot)$ un grup în care are loc implicaţia $xy^n = z^n x \Rightarrow y = z$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

2.31. Fie $(G.\cdot)$ un grup şi $a,b \in G$ a.î. $aba = bab$. Să se arate că $a^n = 1$ dacă şi numai dacă $b^n = 1$.

2.32. Fie $(G,+)$ un grup abelian finit cu r elemente şi să considerăm două elemente fixate a şi b din acest grup. Pentru m şi n numere naturale date,

notăm cu $M_{m,n}(G)$ mulțimea matricelor cu m linii şi n coloane având elementele din grupul G, iar cu M(a,b) notăm submulțimea lui $M_{m,n}(G)$ formată din acele matrice cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare linie este a, iar suma elementelor de pe fiecare coloană este b.

Să se demonstreze că :

(i) $(M_{m,n}(G), +)$ este grup abelian având r^{mn} elemente;

(ii) Dacă $ma \neq nb$, atunci M(a,b) este mulțimea vidă ;

(iii) Dacă $ma = nb$, atunci M(a,b) are $r^{(m-1)(n-1)}$ elemente.

2.33. Fie G un grup iar $A,B,C \leq G$ a.î. $A \subseteq B$, $A \cap C = B \cap C$ şi $AC = BC$. Să se demonstreze că $A = B$ (unde $AC = \{ac \mid a \in A \text{ şi } c \in C\}$).

2.34. Fie G un grup, $H,K \leq G$ iar $x,y \in G$ a.î. $H \cdot x = K \cdot y$.
Să se demonstreze că $H = K$.

2.35. Fie G un grup iar $A,B \leq G$.
Să se demonstreze că $|AB| \cdot |A \cap B| = |A| \cdot |B|$.

2.36. Fie G un grup finit iar $A,B \subseteq G$ a.î. $|A| + |B| > |G|$.
Să se demonstreze că $G = AB$.

2.37. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietățile:
1) Dacă $x^2 = 1$, atunci $x = 1$;
2) $(xy)^2 = (yx)^2$, oricare ar fi $x,y \in G$.
Să se demonstreze că grupul G este abelian.

2.38. Fie G un grup a.î. $x^2 = 1$, pentru orice $x \in G$.
Să se demonstreze că G este comutativ iar dacă G este finit, atunci |G| este o putere naturală a lui 2.

2.39. Fie G un grup finit şi p un număr prim care divide ordinul lui G. Atunci numărul soluțiilor ecuației $x^p = 1$ este un multiplu nenul al lui p.

2.40. Dacă G este un grup, să se demonstreze că $Z(G) \leq G$ (vezi problema. **1.21.**).

2.41. Fie G un grup iar $x,y \in G$ a.î. $xy \in Z(G)$.
Să se demonstreze că $xy = yx$.

2.42. Fie $(G, \cdot)$ un grup, $x, y \in G$ şi $m, n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(m,n) = 1$.
Să se arate că dacă x comută cu y^m şi y^n, atunci x comută şi cu y.

2.43. Fie G un grup iar $H \leq G$ un subgrup propriu al său.
Să se demonstreze că $< G \setminus H > = G$.

2.44. Fie $(G,\cdot)$ un grup care are un subgrup H a.î. $G \setminus H$ are un număr finit de elemente. Să se arate că grupul G este finit.

2.45. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian finit. Spunem că subgrupul H al lui G are proprietatea (A) dacă $G \neq H$ şi produsul elementelor lui H este egal cu produsul elementelor din $G \setminus H$. Să se arate că dacă G are un subgrup cu proprietatea (A), atunci orice subgrup al lui G, diferit de G are proprietatea (A).

2.46. Pentru un grup finit G notăm cu s(G) numărul de subgrupuri ale sale.
Să se arate că:
(i) Pentru orice număr real $a > 0$ există grupuri finite G a.î. $\frac{|G|}{s(G)} < a$;
(ii) Pentru orice număr real $a > 0$ există grupuri finite G a.î. $\frac{|G|}{s(G)} > a$.

2.47. Fie $''\cdot''$ o operaţie algebrică asociativă pe mulţimea M. Să se demonstreze că $(M,\cdot)$ este grup dacă şi numai dacă oricare ar fi $a \in M$, există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $f_a: M \to M$, $f_a(x) = axa^n$ să fie surjectivă.

2.48. Să se demonstreze că grupul aditiv $(\mathbb{Q},+)$ nu este finit generat.

2.49. Fie H un subgrup al grupului aditiv $(\mathbb{Q}, +)$.
Să se arate că dacă $\mathbb{Q} = H + \mathbb{Z}$, atunci $H = \mathbb{Q}$.

2.50. Fie $(G,\cdot)$ un grup (abelian), G' o mulţime pentru care există o bijecţie $f : G \to G'$. Pentru $x,y \in G'$ definim $x \circ y = f(f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(y))$. Să se arate că în felul acesta $(G', \circ)$ devine grup (abelian).

2.51. Să se demonstreze că pe orice interval deschis şi mărginit de numere reale se poate defini o operaţie algebrică ce determină pe intervalul respectiv o structură de grup.

2.52. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente :
(i) Orice parte stabilă a lui G este subgrup al său ;
(ii) Pentru orice $x \in G$, există $k \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x^k = 1$.

2.53. Fie $(G,\cdot)$ un grup, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ şi $H_1, H_2,\ldots,H_n$ subgrupuri ale lui G a.î. :

1) $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = G$

2) $H_i \not\subset \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} H_i$.

Să se arate că pentru orice $x\in G$, există $k\in\mathbb{N}^*$, $k \leq (n-1)!$ a.î. $x^k \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i$.

2.54. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ considerăm $H_n = \{ \frac{k}{n!} \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Să se demonstreze că:

(i) H_n este subgrup al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ şi că $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in N^*} H_n$;

(ii) Dacă $G_1,G_2,\ldots,G_m$ sunt subgrupuri ale grupului $(\mathbb{Q},+)$ şi $G_i \neq \mathbb{Q}$, pentru orice $1 \leq i \leq m$ atunci $\bigcup_{i=1}^{m} G_i \neq \mathbb{Q}$.

2.55. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ iar $U_n = \{z\in\mathbb{C}^* : z^n=1\}$.

Să se demonstreze că $U_n \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$, $|U_n| = n$ iar U_n este grup ciclic (vezi problema **2.16.**).

2.56. Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu elementul unitate 1 şi $m, n \in\mathbb{N}^*$.
Să se arate că :

$$H_mH_n = H_{[m,n]},$$

unde am notat $H_n = \{x \in G \mid x^n = 1\}$, $H_mH_n = \{xy \mid x \in H_m, y \in H_n\}$, iar $[m,n] = c.m.m.m.c\ (m,n)$.

2.57. Fie $(G, \cdot)$ un grup iar $L(G)$ mulțimea subgrupurilor lui G. Să se arate că $(L(G),\subseteq)$ este latice completă.

2.58. Să se arate că în laticea $L(\mathbb{Z})$ pentru $H = m\mathbb{Z}$ şi $K = n\mathbb{Z}$, cu $m, n\in\mathbb{N}$, $H \wedge K = [m,n]\mathbb{Z}$ iar $H \vee K = (m,n)\mathbb{Z}$. Să se deducă de aici faptul că $(L(\mathbb{Z}), \subseteq)$ este latice distributivă.

2.59. Fie G un grup cu proprietatea că $(xy)^2 = x^2 y^2$, pentru orice $x,y\in G$.
Să se demonstreze că G este comutativ.

2.60. Fie G un grup cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(xy)^k = x^k y^k$, pentru k = n, n+1, n+2, oricare ar fi $x,y \in G$.

Să se demonstreze că G este comutativ.

2.61. Fie G un grup cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(xy)^k = x^k y^k$, pentru k = n, n+2, n+4, oricare ar fi $x,y \in G$.

Să se demonstreze că G este comutativ.

2.62. Fie G un grup cu proprietatea că există $m,n \in \mathbb{N}^*$, (m,n)=1 a.î. oricare ar fi $x,y \in G$, $(xy)^n = (yx)^n$ şi $(xy)^m = (yx)^m$.

Să se demonstreze că G este comutativ.

2.63. Fie G un grup cu proprietatea că $x^3 = 1$ şi $x^2 y^2 = y^2 x^2$, oricare ar fi $x,y \in G$. Să se demonstreze că G este comutativ.

2.64. Fie G un grup iar $x,y \in G$. Notăm $[x,y] = x^{-1} y^{-1} xy$. Să se demonstreze că dacă $x,y,z \in G$, atunci:

(i) $xy = yx \Leftrightarrow [x,y] = 1$;

(ii) $[xy,z] = y^{-1} [x,z] y [y,z]$;

(iii) $[x,yz] = [x,z] z^{-1} [x,y] z$;

(iv) $y^{-1} [[x,y^{-1}],z] y z^{-1}[[y,z^{-1}],x] z x^{-1}[[z,x^{-1}],y] x = 1$.

Observaţie. [x,y] poartă numele de *comutatorul* lui x şi y.

2.65. Fie X o mulţime nevidă iar $F(X) = \{f : X \to X\}$.

Să se demonstreze că relativ la compunerea funcţiilor, F(X) este un monoid iar $U(F(X), \circ) = \{f \in F(X) : f \text{ este o bijecţie}\}$.

Observaţie. Vom nota $U(F(X), \circ) = \Sigma(X)$; grupul $(\Sigma(X), \circ)$ poartă numele de *grupul de permutări asupra mulţimii X*. Dacă X este o mulţime finită cu n elemente, vom nota $\Sigma(X)$ prin S_n.

2.66. În grupul permutărilor $\Sigma(\mathbb{R})$ considerăm elementele σ,τ definite astfel: $\sigma(x) = x + 1$ şi $\tau(x) = 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ iar $G = <\sigma,\tau> \leq \Sigma(\mathbb{R})$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, fie $\sigma_n = \tau^{-n} \sigma \tau^n \in G$ şi $H_n = <\sigma_n> \leq G$.

Să se demonstreze că pentru orice $n \geq 1$, $H_n \leq H_{n+1}$ iar $H = \bigcup_{n \geq 1} H_n$ nu este subgrup finit generat al lui G.

2.67. Să se determine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitive pe $\mathbb{R}$, cu proprietatea că mulţimea primitivelor lui f este subgrup al grupului bijecţiilor lui $\mathbb{R}$ (în raport cu compunerea funcţiilor).

2.68. Fie (X,d) un spațiu metric iar
Izom(X) = {f∈ Σ(X) : d(f(x), f(y)) = d(x,y), pentru orice x,y∈X}.
Să se demonstreze că Izom(X) ≤ Σ(X).
Observație. Elementele lui Izom(X) se numesc *izometrii* ale lui X.

2.69. Fie $X = E^2$ planul euclidian înzestrat cu funcția distanță uzuală. Vom nota prin $Tr(E^2)$ = mulțimea translațiilor lui E^2 iar pentru un punct fixat $O \in E^2$, $Rot(O,E^2)$ = mulțimea rotațiilor lui E^2 în jurul lui O. Să se demonstreze că :
(i) $Tr(E^2) \leq Izom(E^2)$, $Rot(O,E^2) \leq Izom(E^2)$;
(ii) Pentru orice $f \in Izom(E^2)$, există $\rho \in Rot(O,E^2)$, $\tau \in Tr(E^2)$ a.î. $f = \rho \circ \tau$, cu $O \in E^2$.

2.70. Fie (X,d) un spațiu metric, $Y \subseteq X$ iar
$$S_X(Y) = \{f \in Izom(X) \mid f(Y) = Y\}.$$
Să se demonstreze că $S_X(Y) \leq Izom(X)$.
Observație. $S_X(Y)$ poartă numele de *grupul de simetrie al lui Y în raport cu X.*

2.71. Pentru un număr natural n şi P_n un poligon regulat cu n laturi, definim $D_n = S_{E^2}(\overline{P})$ ($\overline{P}$ fiind conturul lui P_n). Fie O centru lui P_n, ρ rotația în jurul lui O de unghi $2\pi/n$ iar ε simetria față de una din axele de simetrie ale lui P_n. Să se demonstreze că $D_n = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{n-1}, \varepsilon, \rho\varepsilon, \dots, \rho^{n-1}\varepsilon\}$.
Observație. Grupul D_n de ordin 2n poartă numele de *grupul diedral de grad n* .

2.72. Să se demonstreze că grupul simetric S_n este generat de transpozițiile $\tau_i = (i,i+1)$, i = 1,2,…,n-1.

2.73. Să se demonstreze că grupul simetric S_n este generat de transpozițiile $\tau_i = (1,i)$, i = 1,2,…,n.

2.74. Să se demonstreze că pentru orice $1 \leq k \leq n$, grupul simetric S_n este generat de transpozițiile (1,k), (2,k),…,(k-1,k), (k+1,k),…, (n,k).

2.75. Să se demonstreze că grupul simetric S_n este generat de transpoziția $\tau = (1,2)$ şi ciclul $\sigma = (1,2,\dots,n)$.

2.76. Să se demonstreze că grupul altern A_n este generat de ciclii de lungime 3.

2.77. Să se demonstreze că grupul altern A_n este generat de ciclii (1,2,3), (1,2,4), …,(1,2,n).

2.78. Să se demonstreze că în S_n avem :
(1,2, … ,r) = (2,3, … ,r,1) = …= (r,1,2, … ,r-1) ($r \le n$).

2.79. Să se demonstreze că dacă α este un r-ciclu în S_n , atunci $\alpha^r = e$ ($r \le n$) şi r este cel mai mic număr natural cu această proprietate.

2.80. Fie α şi β doi r-ciclii în S_n ($r \le n$).
Să se demonstreze că dacă există $i \in S_n$ a.î. $\alpha(i) \neq i$ şi $\beta(i) \neq i$ iar $\alpha^k(i) = \beta^k(i)$ pentru orice k natural , atunci $\alpha = \beta$.

2.81. Două permutări $\alpha,\beta \in S_n$ se zic *disjunct*e dacă atunci când una din ele schimbă un element, cealaltă îl fixează.
Să se demonstreze că dacă $\alpha = (i_1,i_2, \dots ,i_r)$, $\beta = (j_1,j_2, \dots, j_s)$, r, $s \le n$, atunci α şi β sunt disjuncte $\Leftrightarrow$ $\{i_1,i_2, \dots ,i_r\} \cap \{j_1,j_2, \dots, j_s\} = \varnothing$.

2.82. Să se demonstreze că dacă permutările $\alpha,\beta \in S_n$ sunt disjuncte, atunci $\alpha\beta = \beta\alpha$.

2.83. Să se demonstreze că S_n poate fi privit ca subgrup al lui A_{n+2}.

2.84. Să se demonstreze că pentru $n \ge 4$, $Z(A_n) = \{e\}$.

2.85. Să se demonstreze că pentru $n \ge 3$, $Z(S_n) = \{e\}$.

2.86. Să se demonstreze că în S_n două permutări sunt conjugate dacă şi numai dacă au aceeaşi structură ciclică.

2.87. Să se rezolve în S_n ecuația $x^2 = (1,2, \dots ,n)$.

2.88. Fie p un număr prim iar $\sigma \in S_n$ un ciclu de lungime m ($m \le n$).
Să se demonstreze că :

(i) Dacă $p \nmid m$, atunci σ^p este un ciclu de lungime m, având aceeaşi orbită ca şi σ ;

(ii) Dacă $p \mid m$, atunci σ^p este un produs de p cicli disjuncți de lungime m/p.

2.89. Fie p un număr prim. Să se demonstreze că :

(i) Dacă $\sigma \in S_n$ este un ciclu de lungime m , unde $p \nmid m$, atunci există $\tau \in S_n$ un ciclu de lungime m a.î. $\tau^p = \sigma$;

(ii) Dacă $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p \in S_n$ sunt ciclii disjuncți de aceeaşi lungime k , atunci există $\tau \in S_n$ un ciclu de lungime m=kp a.î. $\tau^p = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_p$.

2.90. Fie un număr prim, $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$. Să presupunem că în descompunerea în ciclii disjuncți a lui σ apar α_1 ciclii de lungime m_1, α_2 ciclii de lungime m_2, … , α_t ciclii de lungime m_t ($m_1, m_2, \ldots, m_t$ fiind distincte două câte două) iar $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ($k \leq t$) sunt divizibile cu p.

Să se demonstreze că ecuația $x^p = \sigma$ are soluție în $S_n \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sunt divizibile prin p.

Aplicație. Să se studieze compatibilitatea ecuațiilor:

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 11 & 12 & 19 & 13 & 16 & 4 & 15 & 17 & 9 & 18 & 14 & 10 \end{pmatrix} \text{ în } S_{19};$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 5 & 9 & 1 & 7 & 8 & 2 & 10 & 4 \end{pmatrix} \text{ în } S_{10}.$$

2.91. Dacă p este un număr prim, $p \geq n$, să se demonstreze că ecuația $x^p = \sigma$ are soluție pentru orice $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$.

2.92. Fie p un număr prim. Să se demonstreze că $x \in S_n$ este soluție a ecuației $x^p = e \Leftrightarrow$ x este un produs de ciclii disjuncți de lungime p din S_n.

2.93. Fie G un grup comutativ cu n elemente. Să se demonstreze că orice subgrup al lui G poate fi generat de cel mult n elemente.

2.94. Să se demonstreze că grupul $(\mathbb{Q},+)$ nu admite un sistem de generatori minimal.

2.95. Să se demonstreze că orice subgrup finit generat al lui $(\mathbb{Q},+)$ este ciclic (un astfel de grup se numeşte *local ciclic*).

§3. Teorema lui Lagrange. Ordinul unui element.

Indicele unui subgrup. Subgrupuri normale.

3.1. Fie G un grup finit a.î. $|Z(G)| > \frac{1}{2}\cdot|G|$. Să se demonstreze că grupul G este comutativ.

3.2. Fie G un grup finit comutativ a.î. $x^2 = 1$ pentru mai mult de jumătate din elementele lui G. Să se demonstreze că $x^2 = 1$, oricare ar fi $x \in G$.

3.3. Să se demonstreze că într-un grup G cu 2n elemente, unde n este număr impar, există cel mult n elemente de ordin 2.

3.4. Fie G un grup iar $x \in G$ un element de ordin finit. Să se demonstreze că :

$$o(x^n) \mid o(x), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

3.5. Să se arate că într-un grup abelian G există un element al cărui ordin este egal cu c.m.m.d.c al ordinelor tuturor elementelor $x \neq 1$ ale lui G.

3.6. Fie G un grup, $x,y \in G$ a.î. $xy = yx$ iar $x^m = y^n = 1$ $(m,n \in \mathbb{N})$.
Să se demonstreze că $(xy)^k = 1$, unde $k = [m,n]$.
Putem avea $o(xy) < k$?

3.7. Fie G un grup iar $x,y \in G$.
Să se demonstreze că $o(xy) = o(yx)$ şi $o(x) = o(x^{-1})$.

3.8. Fie G un grup iar $x \in G$ un element de ordin finit n.
Să se demonstreze că pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, $o(x^m) = n/(m,n)$.

3.9. Fie G un grup şi $x,y \in G$ cu $o(x) = n_1$, $o(y) = n_2$ finite, $(n_1,n_2) = 1$ iar $xy = yx$. Să se demonstreze că $o(xy) = o(x) \cdot o(y)$.
Dacă condiția $(n_1,n_2) = 1$ se înlocuieşte cu $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$, să se arate că $o(xy) = [n_1,n_2]$.

3.10. Fie G un grup, $x \in G$ a.î. $o(x) = n_1n_2$ cu $n_1,n_2 \in \mathbb{N}^*$, $(n_1,n_2)=1$.
Să se demonstreze că există şi sunt unic determinate elementele $y,z \in G$ a.î. $x = yz = zy$ şi $o(y) = n_1$, $o(z) = n_2$.

3.11. Fie G un grup iar $x,y \in G$ a.î. $o(x) = m$, $o(y) = n$, $(m,n \in \mathbb{N}^*)$.

Să se demonstreze că dacă x şi y comută cu [x, y], atunci $[x,y]^d = 1$, unde $d = (m,n)$.

3.12. Fie $(G,\cdot)$ un grup comutativ de ordin finit.

Sunt echivalente :

(i) G este de ordin impar ;

(ii) Pentru orice $a \in G$ ecuaţia $x^2 = a$ are soluţie unică în G.

3.13. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit. Dacă m şi n sunt divizori ai ordinului grupului, atunci ecuaţiile $x^m = 1$ şi $x^n = 1$ au o singură soluţie comună dacă şi numai dacă $(m,n) = 1$.

3.14. Fie G un grup cu 10 elemente în care există $a,b \in G \setminus \{1\}$ distincte a.î $a^2 = b^2 = 1$. Să se arate că G nu este abelian.

3.15. În monoidul multiplicativ $M_2(\mathbb{Z})$ considerăm matricele:

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Să se demonstreze că $o(A) = 4$, $o(B) = 3$ iar $o(AB) = \infty$.

3.16. Fie G un grup , $H \leq G$ şi $x \in G$ a.î. $o(x) = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Să se demonstreze că dacă $x^m \in H$ pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(m, n) = 1$, atunci $x \in H$.

3.17. Fie G un grup comutativ de ordin n.

Arătaţi că produsul celor n elemente ale lui G este egal cu produsul tuturor elementelor de ordin cel mult 2.

Aplicând acest rezultat grupului multiplicativ $(\mathbb{Z}_p^*,\cdot)$ cu p prim, să se demonstreze că $p \mid (p-1)!+1$.

Observaţie. Consecinţa de la problema **3.17.** este datorată lui *Wilson.*

3.18. Fie p un număr prim iar $n \geq 2$ un număr natural.

Să se demonstreze că:

(i) Dacă $p = 2$ şi $n > 2$, atunci în grupul $U(\mathbb{Z}_{2^n},\cdot)$ numai elementele $-\hat{1}, \hat{1}, \overbrace{2^{n-1}-1}, \overbrace{2^{n-1}+1}$ au ordinul cel mult 2 ;

(ii) Dacă p > 2, atunci în grupul $U(\mathbb{Z}_{p^n},\cdot)$ numai elementele $\hat{1}$ şi $-\hat{1}$ au ordinul cel mult 2 ;

(iii) Să se deducă de aici următoarele variante de generalizare pentru *teorema lui Wilson*:

a) Dacă p este un număr prim, p > 2 şi n ≥ 1 un număr natural, atunci : $p^n \mid \left(\prod_{\substack{1\le a<p^n\\(a,p)=1}} a\right)+1$

b) Dacă p = 2 şi n >2, atunci : $2^n \mid \left(\prod_{\substack{1\le a<2^n\\(a,2)=1}} a\right) + 1$.

c) Dacă p = 2 şi n = 2, atunci : $2^2 \mid \left(\prod_{\substack{1\le a<2^2\\(a,2)=1}} a\right) + 1$.

3.19. Fie p un număr prim, $n\in\mathbb{N}^*$ şi $U_{p^n}=\{z\in\mathbb{C}^* : z^{p^n}=1\}$.

Să se demonstreze că:

(i) $U_{p^0}\subset U_{p^1}\subset\ldots\subset U_{p^n}\subset U_{p^{n+1}}\subset\ldots\subset\mathbb{C}^*$;

(ii) Dacă notăm $U_{p^\infty}=\bigcup_{n\ge 0} U_{p^n}$, atunci $U_{p^\infty}\le(\mathbb{C}^*,\cdot)$;

(iii) Dacă $H\le(U_{p^\infty},\cdot)$ este propriu, atunci există $n\in\mathbb{N}$ a.î. $H = U_{p^n}$.

3.20. Fie A un inel unitar, $n\in\mathbb{N}$, n ≥ 2. Notăm $GL_n(A) = =\{M\in M_n(A): \det(M) \in U(A,\cdot)\}$ şi $SL_n(A) = \{M\in M_n(A): \det(M)=1\}$.

Să se demonstreze că $GL_n(A)$ este un grup relativ la înmulțirea matricelor iar $SL_n(A) \trianglelefteq GL_n(A)$.

Observație. Grupurile $GL_n(A)$ şi $SL_n(A)$ poartă numele de *grupul liniar general* (respectiv *special*) de grad n peste inelul A.

3.21. Dacă K este un corp finit cu q elemente, să se demonstreze că:

$$|GL_n(K)| = (q^n - 1)(q^n - q)\ldots(q^n - q^{n-1}).$$

3.22. Fie $U,V\in M_2(\mathbb{Z})$, $U=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Să se demonstreze că $U,V\in SL_2(\mathbb{Z})$ iar $<\{U,V\}> = SL_2(\mathbb{Z})$.

3.23. Fie $U,V,W\in M_2(\mathbb{Z})$, $U=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Să se demonstreze că $U,V,W \in GL_2(\mathbb{Z})$ iar $< \{U,V,W\} > = GL_2(\mathbb{Z})$.

3.24. Fie $(G,\cdot)$ un grup iar $L_0(G)$ mulțimea subgrupurilor normale ale lui G. Să se arate că $L_0(G)$ este sublatice modulară a lui L(G).

3.25. Dacă M este un A-modul, atunci laticea $(L_A(M),\subseteq)$ a submodulelor lui M este modulară.

3.26. Fie G un grup, $H \leq G$ a.î. $H \subseteq Z(G)$.
Să se demonstreze că $H \trianglelefteq G$.

3.27. Fie G un grup iar $H \trianglelefteq G$. Să se demonstreze că $Z(H) \trianglelefteq G$.

3.28. Fie G un grup şi $H \trianglelefteq G$ cu $|H| = 2$. Să se demonstreze că $H \leq Z(G)$.

3.29. Fie G un grup, $H \leq G$ a.î. $|G:H| = 2$ .Să se demonstreze că $H \trianglelefteq G$.

3.30. Fie G un grup finit şi $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(n, |G|) = 1$.
Să se demonstreze că oricare ar fi $x \in G$ există şi este unic $y \in G$ a.î. $y^n = x$.
Să se deducă de aici că dacă $y,z \in G$ şi $y^n = z^n$, atunci $y = z$.

3.31. Fie G un grup a.î. $|G:Z(G)| = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
Să se demonstreze că oricare ar fi $x,y \in G$ avem:
$$[x,y]^{n+1} = [x,y^2] \cdot [y^{-1}xy, y]^{n-1}.$$

3.32. Dacă orice subgrup propriu al unui grup G este comutativ, rezultă că grupul G este comutativ ?

3.33. Fie G un grup finit cu n elemente. Să se demonstreze că $x^n = 1$, pentru orice $x \in G$.
Să se deducă de aici că dacă $a,n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(a,n) = 1$, atunci $n \mid a^{\varphi(n)}-1$.

Observație. Consecința acestui rezultat este datorat lui *Euler*

3.34. Fie $G = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ şi $k \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că :
(i) $G = U_n$;
(ii) Există relația :

$$a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k \text{ nu este multiplu de } n \\ n, & \text{dacă } k \text{ este multiplu de } n \end{cases}.$$

3.35. Fie G un grup a.î. există $A \subset G$ finită şi nevidă cu proprietatea că $G \setminus A$ este un subgrup al lui G.

(i) Să se arate că G este finit şi $|G| \leq 2|A|$;

(ii) Dacă |A| este prim, atunci $|G| = 2|A|$ sau $|G| = |A| + 1$.

3.36. Să se demonstreze că cel mai mic subgrup normal al lui G ce conţine pe H este subgrupul lui G generat de elementele de forma $g^{-1}hg$ cu $g \in G$ şi $h \in H$.

Observaţie. Cel mai mic subgrup normal al lui G ce conţine pe H se notează prin $N_G(H)$ şi poartă numele de *închiderea normală* a lui H în G (sau *normalizatorul* lui H în G).

3.37. Fie A,B,C subgrupuri ale grupului G. Să se demonstreze că :

(i) Dacă $A \leq B$, atunci $| B : A | \geq | (C \cap B) : (C \cap A) |$;

(ii) $| G : (A \cap B) | \leq | G : A | \cdot | G : B |$;

(iii) $| (A \vee B) : B | \geq | A : (A \cap B) |$.

3.38. Fie A,B subgrupuri ale unui grup G a.î. $| G : A |$ şi $| G : B |$ sunt finite şi prime între ele.

Să se demonstreze că :

(i) $| G : (A \cap B) | = | G : A | \cdot | G : B |$;

(ii) Dacă în plus G este finit, atunci $G = AB$.

3.39. Fie G un grup finit iar A,B subgrupuri ale lui G.

Să se demonstreze că dacă $|A : (A \cap B)| > \frac{1}{2} \cdot |G : B|$, atunci $A \vee B = G$.

3.40. Fie G un grup finit generat.

Să se demonstreze că orice subgrup de indice finit în G este finit generat.

3.41. Să se demonstreze că într-un grup G intersecţia unui număr finit de subgrupuri de indice finit este un subgrup de indice finit.

3.42. Fie G un grup, $x \in G$ iar $C_G(x) = \{ y \in G : xy = yx \}$. Să se demonstreze că $C_G(x) \leq G$ iar mulţimea conjugaţilor lui x (adică a elementelor de forma axa^{-1} cu $a \in G$) are cardinalul egal cu $| G : C_G(x) |$.

Observaţie. $C_G(x)$ poartă numele de *centralizatorul* lui x în G; în general, dacă M este o submulţime a lui G, definim $C_G(M)$ ca fiind intersecţia centralizatoarelor tuturor elementelor lui M.

3.43. Fie G un grup iar $K \leq G$. Să se demonstreze că $C_G(K) = \{1\} \Leftrightarrow Z(H) = \{1\}$, oricare ar fi H a.î. $K \leq H \leq G$.

3.44. Fie n un număr natural, $n \geq 2$, K un corp, $K \neq \mathbb{Z}_2$ iar D mulţimea matricelor diagonale din $GL_n(K)$.

(i) Arătaţi că $C_G(D) = D$. Deduceţi de aici că

$$Z(GL_n(K)) = \{aI_n : a \in K\};$$

(ii) Presupunând în plus că $n \geq 3$ sau $K \neq \mathbb{Z}_3$ să se demonstreze că $C_{GL_n(K)}(D \cap SL_n(K)) = D$ şi deduceţi de aici că

$$Z(SL_n(K)) = SL_n(K) \cap Z(GL_n(K)).$$

3.45. Să se demonstreze că pentru $n \geq 3$, D_n are un singur subgrup de ordin n.

3.46. Fie $n \geq 3$. Să se demonstreze că dacă n este impar, atunci $|Z(D_n)| = 1$ iar dacă n este par, atunci $| Z(D_n) | = 2$.

3.47. Să se demonstreze că grupul altern A_4 (care are ordinul 12) nu are subgrupuri de ordin 6.

Observaţie. Acest exerciţiu ne arată că *reciproca teoremei lui Lagrange* nu este adevărată.

§4. Morfisme şi izomorfisme de grupuri. Grup factor. Teorema lui Cauchy. Teoremele de izomorfism pentru grupuri.

4.1. Fie G_1, G_2 două grupuri, $f,g : G_1 \to G_2$ morfisme de grupuri, $G = \{x \in G_1 : f(x) = g(x)\}$ iar $i : G \to G_1$ incluziunea canonică.

Să se demonstreze că $G \leq G_1$ şi că dubletul (G,i) verifică următoarea proprietate de universalitate:

(i) $f \circ i = g \circ i$;

(ii) Dacă G' este un alt grup, $i' : G' \to G_1$ un morfism de grupuri a.î. $f \circ i' = g \circ i'$, atunci există un unic morfism de grupuri $u : G' \to G$ a.î. $i \circ u = i'$.

Observaţie. Dubletul (G,i) se notează prin Ker(f,g) şi poartă numele de *nucleul* perechii de morfisme (f,g).

Dacă g este morfismul nul (adică $g(x) = 1$, pentru orice $x \in G_1$), convenim să notăm $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f,1) = \{x \in G_1 : f(x) = 1\}$ (fără a mai specifica morfismul incluziune).

4.2. Fie G_1, G_2 două grupuri, $f : G_1 \to G_2$ un morfism de grupuri.
Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:
(i) f este aplicație injectivă;
(ii) $\mathrm{Ker}(f) = \{1\}$.

4.3. Fie G_1, G_2 două grupuri, $f : G_1 \to G_2$ un morfism de grupuri.
Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:
(i) f este aplicație injectivă;
(ii) Dacă G_0 este un alt grup şi $g,h : G_0 \to G_1$ sunt morfisme de grupuri a.î. $f \circ g = f \circ h$, atunci $g = h$.

Observație. Acest exercițiu ne arată că în categoria grupurilor, *monomorfismele* sunt exact morfismele injective.

4.4. Fie G_1, G_2 două grupuri, $f : G_1 \to G_2$ un morfism de grupuri.
Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:
(i) f este aplicație surjectivă;
(ii) Dacă G_3 este un alt grup şi $g,h : G_2 \to G_3$ sunt morfisme de grupuri a.î. $g \circ f = h \circ f$, atunci $g = h$.

Observație. Acest exercițiu ne arată că în categoria grupurilor, *epimorfismele* sunt exact morfismele surjective.

4.5. Fie M un monoid comutativ cu proprietatea că dacă $x,y \in M$ şi $xy = xz$ atunci $y = z$.

Să se demonstreze că există un grup G_M şi un morfism injectiv de monoizi $i_M : M \to G_M$ a.î. pentru orice grup abelian G şi orice morfism de monoizi $u : M \to G$ există un unic morfism de grupuri $u' : G_M \to G$ a.î. $u' \circ i_M = u$.

Observație. Acest rezultat este datorat lui *Malțev*.

4.6. Fie $M = (1,\infty)$ şi o operație algebrică pe M, $\circ : M \times M \to M$, definită astfel: $x \circ y = xy + ax + by + c$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$. Să se determine a,b,c ştiind că (M, $\circ$) este grup şi să se arate că (M, $\circ$) este izomorf cu $(\mathbb{R},+)$.

4.7. Fie G un subgrup nenul al lui grupului $(\mathbb{R},+)$ cu proprietatea că $G \cap (-a,a)$ este mulțime finită, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Să se arate că grupul $(G,+)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z},+)$.

4.8. Într-un grup $(G,\cdot)$ se consideră submulțimile:

$$H_n = \{x \in G \mid x^n = 1\},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că:

(i) H_2 este subgrup al lui $G \Leftrightarrow xy = yx$ pentru orice $x,y \in H_2$;

(ii) Dacă p este un număr prim cu proprietatea că H_p are cel mult p elemente, atunci $H_p = \{1\}$ sau H_p este subgrup al lui G izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_p, +)$.

4.9. Fie $G = (0,\infty) \setminus \{1\}$ şi $a \in G$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Definim pe G operația algebrică: $x \circ y = x^{\alpha \log_a y}$ şi notăm cu $G_{a,\alpha} = (G, \circ)$. Să se arate că :

(i) $G_{a,\alpha}$ este grup abelian;

(ii) Dacă $b \in G$, $\beta \in \mathbb{R}^*$ atunci grupurile $G_{a,\alpha}$ şi $G_{b,\beta}$ sunt izomorfe.

4.10. Arătați că mulțimea M a matricelor de forma $A=\begin{pmatrix} cha & sha \\ sha & cha \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, formează un grup multiplicativ izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$.

4.11. Fie mulțimile:

$$M = \left\{ A \in M_2(Q) \mid \begin{pmatrix} a+2b & 3b \\ 2b & a-2b \end{pmatrix}, a^2 - 10b^2 = 1, a, b \in Q \right\} \text{ şi}$$

$$G = \{ x \in \mathbb{Q}(\sqrt{10}) \mid x = a + b\sqrt{10},\ a^2 - 10b^2 = 1,\ a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Să se arate că :

(i) $(M,\cdot)$ şi $(G,\cdot)$ sunt grupuri în raport cu operațiile de înmulțire obişnuite ;

(ii) Avem izomorfismul de grupuri $(M,\cdot) \approx (G,\cdot)$.

4.12. Fie T mulțimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ unde x şi y parcurg mulțimea $\mathbb{Z}_3$ a claselor de resturi modulo 3.

(i) Determinați numărul elementelor mulțimii T;

(ii) Să se determine mulțimea G a matricelor $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ din T a.î. $x^2 + y^2 = \hat{1}$;

(iii) Arătați că mulțimea G formează un grup față de operația de înmulțire a matricelor ;

(iv) Arătați că grupul G este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbb{Z}_4,+)$ al claselor de resturi modulo 4.

4.13. (i) Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & ib \\ 0 & 0 & 0 \\ ib & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in R, a^2 + b^2 \neq 0, i^2 = -1 \right\}$.

Arătați că M este un grup în raport cu înmulțirea matricelor, izomorf cu grupul $(\mathbb{C}^*,\cdot)$;

(ii) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculați A^{2002} (folosind eventual izomorfismul dintre grupurile $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ și $(M,\cdot)$) .

4.14. Să se arate că :

(i) Mulțimea $M = \left\{ D_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in Z \right\}$ formează grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor, grup izomorf cu grupul $(\mathbb{Z},+)$;

(ii) Mulțimea $M = \left\{ M_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in Z \right\}$ este grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor, izomorf cu $(\mathbb{Z},+)$;

(iii) Mulțimea $M = \left\{ A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in R \right\}$ este subgrup al grupului matricelor inversabile din $M_2(\mathbb{R})$, izomorf cu $(\mathbb{R},+)$.

4.15. Fie $M = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 \\ 2(1-a) & 2a-1 \end{pmatrix}, a \in R^* \right\}$.

(i) Să se arate că $(M,\cdot)$ este grup izomorf cu $(\mathbb{R}^*, \cdot)$;

(ii) Să se calculeze $[M(a)]^n$, $a \in \mathbb{R}^*$.

4.16. Să se demonstreze că mulțimea:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in R \right\}$$

este grup în raport cu înmulțirea matricelor, iar grupul automorfismelor lui G este infinit.

4.17. Pentru $n \geq 1$ fixat, se notează cu M mulțimea matricelor $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ de forma :

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & \ldots & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & \ldots & x & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & \ldots & .. & .. & .. \\ 0 & x & 0 & \ldots & 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \text{ cu } x \neq 0.$$

Să se arate că :

(i) M este grup abelian față de înmulțirea matricelor ;

(ii) Grupurile $(M,\cdot)$ şi $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ sunt izomorfe.

4.18. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Să se calculculeze A^3;

(ii) Pentru $x \in \mathbb{R}$ definim $A_x = I_3 + xA + \frac{1}{2}x^2A^2$. Să se arate că $G = \{ A_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor;

(iii) $(G,\cdot) \approx (\mathbb{R},+)$.

4.19. Fie $M_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} \middle\| a,b \in R, a^2 - db^2 \neq 0 \right\}$, unde $d \in \mathbb{R}$ este un număr real fixat. Să se determine valorile lui d pentru care $(M_d, \cdot)$ este grup izomorf cu grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

4.20. Fie G_n mulțimea matricelor pătratice de ordin n având pe fiecare linie câte un element egal cu 1 şi celelalte elemente egale cu 0 şi acelaşi lucru valabil şi pe coloane.

Să se demonstreze că G_n este grup relativ la operația de înmulțire a matricelor iar $G_n \approx S_n$.

4.21. Se consideră $(G, \circ)$ şi $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ unde $G = (3,\infty)$ şi

$$x \circ y = xy - 3x - 3y + 12, \text{ oricare ar fi } x,y \in G.$$

Să se arate că :

(i) $(G, \circ)$ este un grup abelian ;

(ii) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ a.î. $f:\mathbb{R}_+^* \to (3,\infty)$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism de grupuri ;

(iii) Să se calculeze x^n, unde $x\in G$ şi $n\in\mathbb{N}^*$.

4.22. $G = (5,\infty)$ şi legea $''\circ''$ definită prin

$$x\circ y = xy - 5x - 5y + 30, \text{ oricare ar fi } x,y\in G.$$

Să se arate că :

(i) $(G, \circ)$ este un grup abelian;

(ii) $(G, \circ) \approx (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$;

(iii) $(G, \circ) \approx (\mathbb{R},+)$;

(iv) Să se calculeze x^n , unde $x\in G$ şi $n\in\mathbb{N}^*$.

4.23. Fie $S = \{ A\in M_2(\mathbb{R}) \mid A + I_2 \text{ este inversabilă}\}$. Pe S definim $\circ$ astfel: $A\circ B = A + B + AB$. Să se arate că $(S, \circ)$ este grup izomorf cu grupul matricelor de ordin 2 cu elemente reale, inversabile.

4.24. Spunem că grupul $(G,\cdot)$ are proprietatea g(n) dacă conține cel puțin n+1 elemente şi oricare ar fi $x_1, x_2,\ldots,x_n \in G \setminus \{1\}$ există $x_{n+1} \in G$ a.î. $x_1x_2\ldots x_n = x_{n+1}^n$.

Să se arate că:

(i) Dacă $(G,\cdot)$ are proprietatea g(n), atunci, pentru orice $x\in G$, există $y\in G$ a.î. $x = y^n$;

(ii) Grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ are proprietatea g(n);

(iii) $(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \not\approx (\mathbb{R}^*,\cdot)$.

4.25. Fie G un grup pentru care $f : G\to G$, $f(x) = x^3$ este un morfism de grupuri. Să se arate că :

(i) Dacă f este un morfism injectiv, atunci $(G,\cdot)$ este abelian ;

(ii) Dacă f este un morfism surjectiv, atunci $(G,\cdot)$ este abelian.

4.26. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi H un subgrup propriu al său. Să se arate că funcția $f : G\to G$, $f(x) = \begin{cases} x, & x\in H \\ 1, & x\in G\setminus H \end{cases}$ are proprietatea că duce subgrupuri în subgrupuri, dar nu este morfism de grupuri.

4.27. Fie G_1,G_2 grupuri, $f:G_1\to G_2$ morfism de grupuri şi $x\in G_1$.

Să se demonstreze că :

(i) Dacă $o(x) = n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow o(f(x)) \mid n$;

(ii) Dacă f este izomorfism de grupuri, atunci o(f(x))=o(x).

4.28. Fie G_1,G_2 două grupuri, (G_2 comutativ) iar

$$\mathrm{Hom}(G_1,G_2) = \{ f: G_1 \to G_2 \mid f \text{ morfism de grupuri}\}.$$

Pentru $f,g \in \mathrm{Hom}(G_1,G_2)$ definim $fg: G_1 \to G_2$ prin $(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)$.
Să se demonstreze că :

(i) Dubletul $(\mathrm{Hom}(G_1,G_2),\cdot)$ este grup comutativ ;

(ii) Dacă $G_1 = (\mathbb{Z},+)$, atunci $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},G_2) \approx G_2$;

(iii) Dacă $G_1 = (\mathbb{Z}_m,+)$, $G_2 = (\mathbb{Z}_n,+)$, atunci $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \approx \mathbb{Z}_d$, unde $d = (m,n)$, $(m,n \in \mathbb{N}^*)$.

4.29. Fie mulțimea $G = \{ f_n : (2,\infty) \to (2,\infty),\ f_n(x) = 2+(x-2)^{2n},\ n \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că $(G, \circ)$ este grup abelian izomorf cu grupul abelian $(\mathbb{Z},+)$.

4.30. Fie grupul $(\mathbb{Z},+)$. Să se arate că :

(i) Funcțiile $f_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definite prin $f_m(x) = mx$ sunt morfisme de grup ;

(ii) Orice morfism de la $(\mathbb{Z},+)$ la $(\mathbb{Z},+)$ este de acest tip ;

(iii) Să se determine automorfismele grupului $(\mathbb{Z},+)$.

4.31. Fie $k>0$. Pe mulțimea $G = (-k,k)$ se definește operația algebrică $a \circ b = \dfrac{k^2(a+b)}{k^2+ab}$. Să se arate că:

(i) $(G, *)$ este grup abelian;

(ii) Funcția $f : G \to \mathbb{R}$, $f(t) = \int_0^t \frac{1}{k^2-x^2}dx$ este un izomorfism de grupuri de la $(G, \circ)$ la $(\mathbb{R},+)$.

4.32. Pe $\mathbb{R}$ considerăm operația algebrică

$$x \circ y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\ .$$

Să se arate că $(\mathbb{R},\circ)$ este grup comutativ, izomorf cu $(\mathbb{R},+)$.

4.33. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ fixat, $M = \{ -\mathrm{arctg}\ \frac{1}{a} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, grupurile $G = (\mathbb{R},+)$ şi $H = (\mathbb{R}^*,\cdot)$ iar $f : G \to H$ o funcție definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} tgx, & x \in M \\ a\sin x + \cos x, & x \in G \setminus M \end{cases}\ .$$

(i) Arătați că există un subgrup G' al lui G pentru care restricția $f_{G'}$ a lui f la G' este morfism de grupuri ;

(ii) Determinați reuniunea subgrupurilor G' cu proprietatea de la (i).

4.34. Să se demonstreze că grupul $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ este nul.

4.35. Să se demonstreze că dacă $n \geq 2$, atunci grupul $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})$ este nul.

4.36. Fie G un grup finit iar $f:G\to G$ un morfism de grupuri ce nu are puncte fixe netriviale (adică $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$) şi $f \circ f = 1_G$.

Să se demonstreze că G este comutativ.

4.37. Fie G un grup comutativ a.î. singurul automorfism al său este cel identic.

Să se arate că $x^2 = 1$, oricare ar fi $x \in G$.

4.38. Fie G un grup cu proprietatea că aplicațiile $f(x) = x^4$ şi $g(x) = x^8$ sunt automorfisme ale lui G. Să se arate că G este abelian.

4.39. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $f \in \mathrm{End}(G)$.

(i) Dacă aplicațiile $x \to xf(x)$ şi $x \to x^2f(x)$ sunt endomorfisme ale lui G, atunci G este abelian;

(ii) Dacă aplicațiile $x \to x^2f(x)$ şi $x \to x^4f(x)$ sunt endomorfisme ale lui G, atunci G este abelian.

4.40. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit şi $f \in \mathrm{Aut}(G)$. Să se demonstreze că f are un singur punct fix dacă şi numai dacă funcția $F : G \to G$, $F(x) = x^{-1} f(x)$ este bijectivă.

4.41. Fie $(G,\cdot)$ un grup, $f,g : G\to G$ endomorfisme şi $H \subset G$ un subgrup propriu. Dacă $f = g$ pe $G \setminus H$, atunci $f = g$ pe G.

4.42. Fie G un grup şi presupunem că există $n \in N$, $n \geq 2$ a.î. $f : G \to G$, $f(x) = x^n$, pentru orice $x \in G$ este un automorfism al lui G.

Să se demonstreze că pentru orice $x \in G \Rightarrow x^{n-1} \in Z(G)$.

4.43. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât funcțiile $f, g : G \to G$, $f(x) = x^n$, $g(x) = x^{n+1}$ să fie morfisme surjective de grup, atunci grupul G este abelian.

4.44. Să se demonstreze că singurul morfism de grupuri de la grupul $(\mathbb{Q},+)$ la grupul simetric $(S_n, \circ)$ este cel nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

4.45. Fie p un număr prim, $p \geq 2$. Să se demonstreze că singurul morfism de grupuri de grupul $(\mathbb{Z}_p,+)$ la grupul $(\mathbb{Z}_p^*,\cdot)$ este cel nul.

4.46. . Definiți pe $(1,2) \subset \mathbb{R}$ o operație care să confere acestei mulțimi structură de grup izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive $((0,\infty),\cdot)$.

4.47. Să se determine toate morfismele de grupuri de la grupul $(\mathbb{Q},+)$ la grupul $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$.

4.48. Să se arate că grupul $(\mathbb{Q}, +)$ nu este izomorf cu nici un subgrup propriu al său.

4.49. Fie G un grup şi pentru $a \in G$, $\varphi_a : G \to G$, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$.

(i) Să se demonstreze că pentru orice $a \in G$, $\varphi_a \in Aut(G)$;

(ii) Aplicația $\varphi: G \to Aut(G)$, $\varphi(a) = \varphi_a$, este morfism de grupuri iar $Ker(\varphi) = Z(G)$;

(iii) Dacă notăm $Im(\varphi) = Inn(G)$, să se arate că $|Inn(G)| = 1 \Leftrightarrow$ G este comutativ.

Observație. φ_a poartă numele de *automorfism interior* al lui G.

4.50. Fie G un grup. Să se demonstreze că dacă $Z(G) = \{1\}$, atunci şi $Z(Aut(G)) = \{1\}$.

4.51. Să se determine toate grupurile care admit un singur automorfism.

4.52. Să se determine toate grupurile comutative şi finite care au un număr impar de automorfisme.

4.53. Să se demonstreze că un grup ciclic este izomorf cu $(\mathbb{Z},+)$ sau cu $(\mathbb{Z}_n,+)$, după cum grupul respectiv este infinit sau are n elemente.

4.54. Să se demonstreze că dacă un grup are un număr finit de subgrupuri, atunci şi el este finit.

4.55. Arătați că orice grup infinit are o infinitate de subgrupuri distincte.

4.56. Să se demonstreze că un grup cu 4 elemente este izomorf cu $\mathbb{Z}_4$ sau cu grupul lui Klein, iar $\mathbb{Z}_4 \not\approx K$.

4.57. Fie G un grup cu proprietatea că G se scrie ca reuniune de trei subgrupuri diferite de G, dintre care două au câte două elemente. Să se arate că G este izomorf cu grupul lui Klein.

4.58. Să se demonstreze că un grup cu 6 elemente este izomorf cu $\mathbb{Z}_6$ sau cu S_3, iar $\mathbb{Z}_6 \not\approx S_3$ (vezi problema **4.75.**).

4.59. Să se demonstreze că grupurile aditive $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ şi $(\mathbb{R},+)$ nu sunt izomorfe două câte două.

4.60. Să se demonstreze că grupurile aditive $(\mathbb{R},+)$ şi $(\mathbb{C},+)$ sunt izomorfe.

4.61. Să se demonstreze că grupurile multiplicative $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ nu sunt izomorfe două câte două.

4.62. Fie $\mathbb{Q}_+^* = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ şi $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
Să se demonstreze că:
(i) $\mathbb{Q}_+^* \leq (\mathbb{Q}^*.\cdot)$ şi $\mathbb{R}_+^* \leq (\mathbb{R}^*,\cdot)$;
(ii) $(\mathbb{R}_+^*,\cdot) \approx (\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Q}_+^*,\cdot) \not\approx (\mathbb{Q},+)$.

4.63. Să se demonstreze că grupurile $(\mathbb{Z},+)$ şi $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ nu sunt izomorfe.

4.64. Să se arate că $(\mathbb{Q},+)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Q}[i],+)$ $(\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a,b \in \mathbb{Q}\})$.

4.65. Să se demonstreze că grupurile $(\mathbb{Z},+)$ şi $(\mathbb{Z}[X],+)$ nu sunt izomorfe.

4.66. Să se demonstreze că grupurile aditive $(\mathbb{Q},+)$ şi $(\mathbb{Q}[X],+)$ nu sunt izomorfe .

4.67. Să se demonstreze că grupurile aditive $(\mathbb{Z}[X],+)$ şi $(\mathbb{Q}[X],+)$ nu sunt izomorfe.

4.68. Determinaţi endomorfismele grupului $(\mathbb{R},+)$ integrabile pe $[-b,b]$, unde $b>0$ este un număr real fixat.

4.69. Să se arate că orice grup de matrice din $M_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor, al cărui element neutru este diferit de I_2, este izomorf cu un subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

4.70. Fie $(K,+,\cdot)$ un corp netrivial $(0 \neq 1)$. Să se demonstreze că grupurile $(K,+)$ şi $(K^*,\cdot)$ nu sunt izomorfe.

4.71. Fie G un grup a.î. G/Z(G) este ciclic. Să se arate că G este grup abelian.

4.72. Fie G un grup, $H \trianglelefteq G$ şi presupunem că $|H| = m \in \mathbb{N}^*$.

Considerăm de asemenea $x \in G$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(m,n) = 1$.

Să se demonstreze că:

(i) Dacă $o(x) = n$, atunci $o(xH) = n$ (xH privit ca element în G/H);

(ii) Dacă $o(xH) = n$ (în G/H), atunci există $y \in G$ a.î. $o(y) = n$ şi $xH = yH$.

4.73. Fie G un grup comutativ iar H subgrupul elementelor de ordin finit.

Să se demonstreze că în G/H orice element diferit de 1 are ordinul infinit.

4.74. Fie G un grup finit, p un număr prim, $p \geq 2$ a.î. $p \mid |G|$. Să se demonstreze că există $x \in G$ a.î. $o(x) = p$ (echivalent cu există $H \leq G$ a.î. $|H| = p$).

Observaţie. Acest rezultat este datorat lui *Cauchy*.

4.75. Fie p un număr prim, $p \geq 2$. Să se demonstreze că orice grup necomutativ cu 2p elemente este izomorf cu grupul diedral $\mathbf{D}_p$.

4.76. Fie G un grup finit iar p un număr prim, $p \geq 2$.

Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Ordinul oricărui element al lui G este o putere naturală a lui p;

(ii) $|G|$ este o putere naturală a lui p.

Observaţie. Un grup în care ordinul oricărui element este o putere naturală a lui p se zice *p-grup.*

4.77. Fie p un număr prim, $p \geq 2$. Să se demonstreze că dacă G este un p-grup finit, atunci $|Z(G)| \geq p$.

4.78. Fie p un număr prim, $p \geq 2$. Să se demonstreze că orice grup finit cu p^2 elemente este comutativ.

4.79. Să se determine toate grupurile G cu proprietatea că orice automorfism, diferit de cel identic, admite un punct fix.

4.80. Considerăm $\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Q},+)$.

(i) Să se descrie grupul cât $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ şi să se demonstreze că orice element din acest grup are ordin finit ;

(ii) Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 2$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ are un singur subgrup de ordin n iar acesta este ciclic.

4.81. Fie G un p – grup finit cu $|G| = p^m$ ($m \in \mathbb{N}$). Să se demonstreze că există subgrupurile normale $G_0, G_1, \ldots, G_m$ ale lui G a.î. $1 = G_0 < G_1 < \ldots < G_m = G$ şi $|G_i| = p^i$ pentru orice $0 \leq i \leq m$.

4.82. Caracterizaţi grupurile finite cu proprietatea că toate subgrupurile sale proprii au acelaşi număr de elemente.

4.83. Considerăm $\mathbb{Z} \leq (\mathbb{R},+)$ şi $T = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$.
Să se demonstreze că:

(i) $T \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$ şi $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx T$;

(ii) $\mathbb{C}^*/T \approx (\mathbb{R}_+^*,\cdot)$;

(iii) $\mathbb{R}_+^* \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$ şi $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^* \approx T$;

(iv) $\mathbb{R} \leq (\mathbb{R},+)$ şi $\mathbb{C}/\mathbb{R} \approx (\mathbb{R},+)$.

4.84. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A = \{1,2,\ldots,n^2\}$. Construiţi un izomorfism între grupurile $(P(A), \Delta)$ şi $(M_n(\mathbb{Z}_2), +)$.

4.85. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ iar $\mathbf{Q}_n$ un grup de ordin 2^n generat de două elemente a şi b ce verifică relaţiile:

$$a^{2^{n-2}} = b^2 = (ab)^2.$$

Să se demonstreze că dacă G este un grup de ordin 2^n generat de două elemente a şi b ce verifică relaţiile $a^{2^{n-1}} = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$ şi $b^2 = a^{2^{n-2}}$, atunci $G \approx \mathbf{Q}_n$.

Observaţie. $\mathbf{Q}_3$ (care se mai notează şi prin $\mathbf{Q}$ sau $\mathbf{C}_8$) poartă numele de *grupul quaternionilor* iar $\mathbf{Q}_n$ ($n \geq 4$) de *grupul generalizat al quaternionilor*.

4.86. În monoidul multiplicativ $M_2(\mathbb{C})$ considerăm matricele:

$$j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ iar } G = \langle j,k \rangle, \; J = \langle j \rangle, \; K = \langle k \rangle.$$

Să se demonstreze că $|G| = 8$, $|J| = |K| = 4$, $J, K \trianglelefteq G$ iar $G \approx \mathbf{Q}_3$.

4.87. În monoidul multiplicativ $M_2(\mathbb{C})$ considerăm matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ iar } G = \langle A,B \rangle.$$

Să se demonstreze că $G \approx \mathbf{Q}_3$.

4.88. Considerăm mulţimea $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ cu următoarea regulă de multiplicare: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$, -1 şi 1 fiind supuse multiplicării obişnuite.

Să se demonstreze că $G \approx \mathbf{Q}_3$.

4.89. Să se caracterizeze $Z(\mathbf{Q}_3)$.

4.90. Să se demonstreze că $\mathbf{Q}_3/Z(\mathbf{Q}_3)$ este comutativ.

4.91. Să se demonstreze că $\mathbf{Q}_3 \not\approx \mathbf{D}_4$.

4.92. Să se demonstreze că un grup necomutativ cu 8 elemente este izomorf cu $\mathbf{Q}_3$ sau cu $\mathbf{D}_4$.

4.93. Să se demonstreze că dacă G este un grup, atunci $G/Z(G) \approx Inn(G)$.

4.94. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi K un corp.

Să se arate că aplicaţia $\alpha : GL_n(K) \to GL_n(K)$, $\alpha(A) = (A^t)^{-1}$, oricare ar fi $A \in GL_n(K)$ este corect definită şi că $\alpha \in Aut(GL_n(K))$.

Demonstraţi de asemenea că dacă K nu este $\mathbb{Z}_2$ sau $\mathbb{Z}_3$, atunci α nu este automorfism interior al lui $GL_n(K)$.

4.95. Să se demonstreze că numărul structurilor de grup ce se pot defini pe o multime cu n elemente, izomorfe cu o structură de grup fixat $(G,\cdot)$ este egal cu $n!/ |\mathrm{Aut}(G,\cdot)|$.

4.96. Să se demonstreze că numărul structurilor de grup ciclic ce se pot defini pe o mulțime cu n elemente este egal cu $n! / \varphi(n)$, unde φ este indicatorul lui Euler.

Să se deducă de aici că numărul structurilor de grup ciclic ce se poate defini pe o mulțime cu n elemente (n prim) este egal cu $(n-2)!\cdot n$.

4.97. Să se demonstreze că $(\mathbb{Q},+)$ este divizibil.

4.98. Să se demonstreze că dacă p este un număr prim, atunci grupul $(U_{p^\infty},\cdot)$ este divizibil (vezi problema **3.19.**).

4.99. Să se demonstreze că orice grup comutativ divizibil conține un subgrup izomorf cu $(\mathbb{Q},\cdot)$ sau cu un grup de forma $(U_{p^\infty},\cdot)$ cu p prim (vezi problema **3.19.**).

4.100. Să se demonstreze că orice grup factor al unui grup divizibil este divizibil.

4.101. Să se demonstreze că în categoria grupurilor abeliene obiectele injective sunt exact grupurile divizibile

§5. Produse directe de grupuri

5.1. Dacă H,K sunt grupuri, să se demonstreze că $H \times \{1\} \trianglelefteq H \times K$ şi $\{1\} \times K \trianglelefteq H \times K$.

5.2. Să se demonstreze că dacă $\{G_i\}_{i\in I}$ este o famile finită de grupuri, atunci $Z(\underset{i\in I}{\times} G_i) = \underset{i\in I}{\times} Z(G_i)$.

Să se deducă de aici că un produs direct de grupuri este comutativ dacă şi numai dacă fiecare din factorii produsului este comutativ.

5.3. Fie G un grup iar $\hat{G} = \Delta_G = \{(x,x) : x\in G\}$.

Să se demonstreze că :

(i) $\hat{G} \leq G \times G$, $\hat{G} \approx G$;

(ii) $\hat{G} \trianglelefteq G \times G \Leftrightarrow$ G este comutativ;

(iii) $N_{G\times G}(\hat{G}) = \hat{G} \Leftrightarrow Z(G) = 1$.

5.4. Fie G un grup iar $H,K \trianglelefteq G$ a.î. $G = H\cdot K$.
Să se demonstreze că $G/(H\cap K) \approx G/H \times G/K$.

5.5. Fie H,K două grupuri, $J \trianglelefteq H$, $L \trianglelefteq K$.
Să se demonstreze că
$(J \times L) \trianglelefteq H \times K$ şi $(H \times K) / (J \times L) \approx H/J \times K/L$.

5.6. Să se demonstreze că $(\mathbb{C}^*,\cdot) \approx (\mathbb{R}^*,\cdot) \times (T,\cdot)$.

5.7. Să se demonstreze că $(\mathbb{Q}^*,\cdot) \approx (\mathbb{Q}^*_+,\cdot) \times (\{-1,1\},\cdot)$.

5.8. Să se demonstreze că $(\mathbb{R}^*,\cdot) \approx (\mathbb{R}^*_+,\cdot) \times (\{-1,1\},\cdot)$.

5.9. Să se demonstreze că $(\mathbb{C}^*,\cdot) \approx (\mathbb{R},+) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$.

5.10. Să se demonstreze că $(\mathbb{C},+) \approx (\mathbb{R},+) \times (\mathbb{R},+)$.

5.11. Să se demonstreze că :
(i) $(\mathbb{R},+) \approx (\mathbb{R},+) \times (\mathbb{R},+)$;
(ii) $(\mathbb{Q},+) \not\approx (\mathbb{Q},+) \times (\mathbb{Q},+)$.

5.12. Să se demonstreze că $(\mathbb{Q}^*,\cdot) \approx (\mathbb{Z}_2,+) \times (\mathbb{Z}[X],+)$.

5.13. Să se demonstreze că grupul $(\mathbb{Z},+) \times (\mathbb{Z},+)$ nu este ciclic.

5.14. Să se descrie subgrupurile grupului $(\mathbb{Z},+) \times (\mathbb{Z},+)$.

5.15. Să se demonstreze că dacă n este un număr natural, $n \geq 2$, atunci grupul $(\mathbb{Z},+) \times (\mathbb{Z}_n,+)$ nu este ciclic.

5.16. Fie K un corp iar $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in K \right\}$.
Să se demonstreze că :
$H \leq GL_3(K)$, $Z(H) \approx (K,+)$ şi $H/Z(H) \approx (K,+) \times (K,+)$.

5.17. Să se caracterizeze :

(i) grupurile abeliene finite cu p^n elemente (p prim, $p \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$);

(ii) grupurile abeliene finite cu $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}$ elemente ($p_1,\ldots, p_s$ numere prime distincte două câte două iar $n_1,\ldots,n_s \in \mathbb{N}^*$).

5.18. Să se caracterizeze grupurile comutative cu 8 elemente.

5.19. Să se demonstreze că un grup cu 9 elemente este izomorf cu $\mathbb{Z}_9$ sau cu $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

5.20. Să se demonstreze că un grup cu 10 elemente este izomorf cu $\mathbb{Z}_{10}$ sau cu $\mathbf{D}_5$.

5.21. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ cu det(A) = -1 sau 1. Să se demonstreze că funcția $t_A: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definită prin $t_A(x,y) = (ax + by, cx + dy)$, este un automorfism al lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ şi că oricare alt automorfism al lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ este de forma t_A.

5.22. Fie p,q numere prime distincte, p > q şi G un grup abelian a.î. |G| = pq.

Să se arate că :

(i) Dacă $q \nmid p-1$, atunci G este ciclic ;

(ii) Dacă $q \mid p-1$, atunci G este generat de două elemente a şi b satifăcând condițiile $a^q = b^p = 1$, $a^{-1}ba = b^r$, cu $r \not\equiv 1 \pmod p$ însă $r^q \equiv 1 \pmod q$.

5.23. Să se demonstreze că un grup cu 15 elemente este ciclic (deci izomorf cu $(\mathbb{Z}_{15},+)$).

5.24. Să se caracterizeze grupurile finite de ordin p^3 (p prim).

5.25. Să se caracterizeze grupurile cu 12 elemente.

5.26. Să se facă un tabel de caracterizare a grupurilor cu cel mult 15 elemente.

§6. Inel. Subinel. Exemple. Calcule în inele. Caracteristica unui inel. Elemente inversabile. Divizori ai lui zero.Elemente idempotente. Elemente nilpotente. Produse directe de inele.

6.1. Să se determine toate legile de compoziție $*$ de pe $\mathbb{Z}$ pentru care $(\mathbb{Z}, *,+)$ este inel.

6.2. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel. Definim pe A operația algebrică $*$ prin:

$$x*y = x + y - xy, \text{ oricare ar fi } x, y\in A.$$

Să se arate că $*$ este asociativă şi are element neutru. Mai mult, dacă inelul A este unitar şi 1-x este inversabil ($x\in A$), atunci şi x este inversabil față de operația $*$.

6.3. Notăm cu A mulțimea funcțiilor aritmetice, adică $A=\{f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{C}\}$. Pe mulțimea A introducem operația algebrică $*$ definită astfel $(f, g)\to f*g$, unde $(f*g)(n)=\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$ (vezi problema **1.18.**). Se cere:

(i) Să se demonstreze că $(A, *)$ este monoid comutativ;

(ii) Notând cu $(U(A), *)$ grupul elementelor inversabile din monoidul $(A, *)$, să se demonstreze echivalența: $f\in U(A) \Leftrightarrow f(1)\neq 0$;

(iii) Notând cu M mulțimea funcțiilor aritmetice multiplicative nenule, adică $M = \{f\in A \mid f(nm)=f(n)f(m)$ dacă $(n, m) = 1$ şi există $k\in\mathbb{N}^*$ cu $f(k)\neq 0\}$, să se demonstreze că $(M, *)$ este subgrup al lui $(U(A), *)$;

(iv) Să se demonstreze că tripletul $(A, +, *)$ este domeniu de integritate.

6.4. Să se arate că mulțimea

$$A=\left\{ M(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a\in C \right\}$$

împreună cu operațiile obişnuite de adunare şi înmulțire a matricelor este un domeniu de integritate.

6.5. Pe mulțimea $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{(x, y) \mid x, y\in\mathbb{Z}\}$ definim operațiile algebrice:

$(x, y)+(x', y') = (x+x', y+ y')$

$(x, y)\cdot(x', y') = (xx', xy'+x'y)$, oricare ar fi $(x, y), (x', y')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Să se arate că $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +, \cdot)$ devine inel unitar şi comutativ.

6.6. Fie $M_2(\mathbb{C})$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul al doilea cu elemente din $\mathbb{C}$. Dacă $A, B\in M_2(\mathbb{C})$, notăm $[A, B] = AB-BA$. Să se arate că:

(i) $[A, B]^2$ comută cu orice matrice din $M_2(\mathbb{C})$;

(ii) Dacă $A, B, C, D\in M_2(\mathbb{C})$, atunci matricea

$$[A, B]\cdot[C, D]+[C, D]\cdot[A, B]$$

comută cu orice matrice din $M_2(\mathbb{C})$.

6.7. Să se determine

(i) Matricele $X\in M_2(\mathbb{Z}_2)$ a.î. $X^2+I_2 = O_2$;

(ii) Matricele $X\in M_2(\mathbb{Z}_3)$ a.î. $X^2 = I_2$.

6.8. Fie A un inel care conţine nondivizori ai lui zero atât la stânga cât şi la dreapta. Dacă A are un număr finit de elemente, să se demonstreze că inelul A este unitar.

6.9. Fie A un inel cu 5 elemente. Să se arate că A este de caracteristică 5 şi pe baza acestui rezultat să se demonstreze că A este comutativ.

6.10. Fie A un inel.

(i) Dacă $car(A) = 2$ şi $x\in A$, să se exprime $(x+1)^n$ ca sumă de puteri ale lui x pentru $n\in\{2, 3, 4, 5\}$;

(ii) Dacă există $n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $x^{n+1} = x^n$ pentru orice $x\in A$, să se arate că $car(A) = 2$ şi $x^2 = x$, pentru orice $x\in A$.

6.11. Fie A un inel de caracteristică 2 a.î. pentru orice $x\in A$, $x^2 = 0$ sau $x^2 = 1$.

(i) Să se demonstreze că A este comutativ;

(ii) Să se dea exemplu de inel cu 4 elemente având proprietăţile de mai sus.

6.12. Fie A un inel cu proprietatea că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$ ecuaţia $x^n = 0$ are în A numai soluţia $x = 0$. Să se arate că:

(i) Dacă $ab=0$ (cu $a, b\in A$), atunci $ba=0$ şi $axb=0$ pentru orice $x\in A$;

(ii) Dacă $a_1a_2a_3=0$ (cu $a_1, a_2, a_3 \in A$), atunci $a_2a_3a_1 = a_3a_1a_2 = 0$;

(iii) Dacă $a_1a_2\ldots a_n = 0$ (cu $a_k \in A$, $1 \le k \le n$), atunci $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n} = 0$ oricare ar fi permutarea $(i_1, \ldots, i_n)$ a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.

6.13. Fie A un inel cu proprietatea că dacă $x^2 = 0$ atunci $x = 0$. Notăm $M = \{a \in A | a^2 = a\}$. Să se arate că:

(i) Dacă $a, b \in M$ rezultă $a+b-2ab \in M$;

(ii) Dacă M este finită atunci numărul elementelor lui M este o putere naturală a lui 2.

6.14. Fie A un inel necomutativ unitar iar $a, b \in A$. Să se arate că dacă 1-ab este inversabil, atunci şi 1-ba este inversabil.

6.15. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel unitar şi $a, b \in A$ cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}^*$ a. î. $(aba)^n = 0$. Să se demonstreze că elementele $1-a^2b$ şi $1-ba^2$ sunt inversabile.

6.16. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu elementul unitate 1. Spunem că elementul $x \in A$ are proprietatea (P) dacă există $a, b \in A$ care comută cu x, cu b inversabil, a. î. $x^2-ax+b = 0$.

(i) Să se arate că în inelul $(M_2(\mathbb{C}),+,\cdot)$ o matrice X are proprietatea (P) dacă şi numai dacă ea este nesingulară;

(ii) Dacă x are proprietatea (P), atunci oricare putere a lui x are această proprietate.

6.17. Fie A un inel unitar şi $a, b \in A$ a.î. a, b şi ab-1 sunt inversabile. Să se arate că elementele $a-b^{-1}$ şi $(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}$ sunt inversabile.

Mai mult, are loc egalitatea $((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})^{-1} = aba-a$.

6.18. Fie A un inel şi $a \in A$ a.î. există $b \in A$ cu proprietatea că $a \cdot b = 1$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $\text{card}\{ x \in A \,|\, a \cdot x = 1\} > 1$;

(ii) a nu este inversabil;

(iii) există $c \in A$, $c \neq 0$, a.î. $a \cdot c = 0$.

6.19. Fie A un inel şi $a \in A$, a neinversabil.

Fie $X = \{x \in A | ax = 1\}$.

Dacă $X \neq \emptyset$, atunci X este o mulțime infinită.

6.20. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu un număr finit de divizori ai lui zero. Dacă $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ este mulțimea acestor divizori demonstrați că $d_1 + d_2 + \ldots + d_n \in D \cup \{0,1\}$.

6.21. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu $1+1 \neq 0$, iar D mulțimea divizorilor lui zero. Considerăm mulțimea $G = \{x \in D \mid 2x = 0\} \cup \{0\}$.

Demonstrați că $(G, +)$ este grup abelian.

6.22. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ numărul elementelor inversabile este egal cu cel al celor neinversabile dacă şi numai dacă $n = 2^k$, cu $k \in \mathbb{N}^*$.

6.23. Fie A mulțimea tuturor funcțiilor continue $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$.

(i) Arătați că A formează inel comutativ în raport cu operațiile de adunare şi înmulțire a funcțiilor;

(ii) Un element $f \in A$, $f \neq 0$, este divizor al lui zero dacă şi numai dacă mulțimea punctelor x pentru care $f(x) = 0$ conține un interval;

(iii) Să se determine elementele $f \in A$ a.î. $f^2 = f$;

(iv) Să se determine elementele inversabile ale inelului A.

6.24. Să se demonstreze că dacă A este un inel atunci:

(i) Z(A) este subinel comutativ al lui A;

(ii) Dacă $x^2 - x \in Z(A)$, oricare ar fi $x \in A$, atunci A este comutativ.

6.25. Fie A un inel şi funcția $f: A \times A \to A$, definită prin

$$f(x,y) = (xy)^2 - x^2y^2.$$

(i) Să se calculeze valoarea expresiei

$$E(x, y) = f(1+x, 1+y) - f(1+x, y) - f(x, 1+y) + f(x, y),$$

unde $1 \in A$ este elementul unitate al inelului A;

(ii) Dacă inelul A are proprietatea că $x+x = 0$ implică $x = 0$ şi dacă $(xy)^2 - (yx)^2 = x^2y^2 - y^2x^2$ oricare ar fi $x, y \in A$, atunci A este comutativ.

6.26. Să se demonstreze că orice inel unitar cu pq elemente, unde p, q sunt numere prime nu neapărat distincte, este comutativ.

6.27. Fie A un inel unitar. Arătați că dacă x, y∈A sunt a.î. $x^n y = 0 = (x+1)^m y$ pentru anumiți m, n∈ℕ , atunci y = 0.

6.28. Fie A un inel unitar şi n≥2 un întreg fixat. Presupunem că $(xy)^n = x^n y^n$ şi $(xy)^{n+1} = x^{n+1} y^{n+1}$, pentru orice x, y∈A.

Arătați că $y(xy)^n = (xy)^n y$, oricare ar fi x, y∈A.

6.29. Fie A un inel unitar, n≥1 un număr natural fixat. Presupunem că $(xy)^n = x^n y^n$, $(xy)^{n+1} = x^{n+1} y^{n+1}$ şi $(xy)^{n+2} = x^{n+2} y^{n+2}$, pentru orice x, y∈A.

Atunci A este comutativ.

6.30. Fie n≥2 un număr natural fixat şi A un inel integru care verifică următoarele două condiții:

1) $x^n - x \in Z(A)$, pentru orice x∈A;

2) centrul Z(A) al lui A conține cel puțin n elemente.

Să se demonstreze că inelul A este comutativ.

6.31. Fie A un inel unitar şi x∈A un element fixat. Presupunem că pentru orice y∈A există întregii relativ primi n = n(y)≥1 şi m = m(y)≥1 a.î. $[x,y^n] = 0 = [x,y^m]$. Atunci x∈Z(A).

6.32. Fie inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{m+n\sqrt{2} \mid m, n\in\mathbb{Z}\}$ (împreună cu adunarea şi înmulțirea obişnuite).

Definim funcția $\varphi:\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{N}$, $\varphi(m+n\sqrt{2})=|m^2-2n^2|$.

Să se arate că:

(i) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

(ii) $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$, oricare ar fi $z, z'\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;

(iii) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ are o infinitate de elemente inversabile.

6.33. Fie $d\in\mathbb{Z}\setminus\{0, 1\}$ un întreg liber de pătrate. Definim funcția normă: $N:\mathbb{Z}[\sqrt{d}]\to\mathbb{Z}$ prin $N(a+b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$, pentru orice a, b∈ℤ.

Să se demonstreze că:

(i) $N(z_1z_2) = N(z_1)\cdot N(z_2)$, oricare ar fi $z_1, z_2\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$;

(ii) Elementul $z\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ este inversabil în inelul $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}],+,\cdot)$ dacă şi numai dacă $N(z)\in\{\pm1\}$;

(iii) Notând cu $U(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ grupul multiplicativ al elementelor inversabile din inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, avem pentru d = -1, $U(\mathbb{Z}[i])=\{1,-1, i, -i\}$, respectiv pentru $d\leq -2$, $U(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) = \{-1, 1\}$.

6.34. Fie inelul $(\mathbb{Z}[i] = \{m+ni|m, n\in\mathbb{Z}\}, +, \cdot)$.

Definim funcția $\varphi:\mathbb{Z}[i]\to\mathbb{N}$, $\varphi(m+ni) = m^2+n^2$.

Să se arate că:

(i) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

(ii) $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$, oricare ar fi $z, z'\in\mathbb{Z}[i]$;

(iii) Dacă $z, z'\in\mathbb{Z}[i]$, $z'\neq 0$, există $q, r\in\mathbb{Z}[i]$ a.î. $z=z'q+r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$;

(iv) $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow$ z este inversabil $\Leftrightarrow z\in\{\pm 1, \pm i\}$.

Observație. Inelul $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ poartă numele de *inelul întregilor lui Gauss*.

6.35. Fie inelul $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]=\{m+ni\sqrt{2} \mid m, n\in\mathbb{Z}\}$ (împreună cu operațiile de adunare şi înmulțire obişnuite).

Definim funcția $\varphi:\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]\to\mathbb{N}$, $\varphi(m+ni\sqrt{2}) = m^2+2n^2$.

Să se arate că:

(i) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

(ii) $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$, oricare ar fi $z, z'\in\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$;

(iii) Dacă $z, z'\in\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, $z'\neq 0$, există $q, r\in\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ a.î. $z=z'q+r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$;

(iv) $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow$ z este inversabil $\Leftrightarrow z\in\{\pm 1\}$.

6.36. Fie A un inel unitar şi comutativ.

Să se arate că suma dintre un element inversabil şi un element nilpotent este element inversabil în A.

Observație. Un element $x\in A$ se numeşte *nilpotent* dacă există $n\in\mathbb{N}$ a.î. $x^n = 0$.

6.37. Fie $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \text{ numere reale}\right\}$. Să se arate că (A, +, ·) este un inel unitar necomutativ în care orice element este inversabil sau nilpotent.

6.38. Fie $n = p_1^{r_1}...p_k^{r_k} \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $\hat{m} \in \mathbb{Z}_n$ este element nilpotent dacă şi numai dacă $p_1 \ldots p_k$ divide m.

6.39. Fie $n = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$ descompunerea în factori primi distincți a numărului natural n. Să se arate că există o bijecție între mulțimea elementelor idempotente ale lui $\mathbb{Z}_n$ ((Idemp($\mathbb{Z}_n$)) şi mulțimea A a părților mulțimii $\{p_1, \ldots, p_r\}$.

În particular, să se arate că $\mathbb{Z}_n$ are 2^r elemente idempotente şi pentru n=12 să se găsească elementele idempotente ale lui $\mathbb{Z}_{12}$.

6.40. In inelul ($\mathbb{Z}_n$, +, ·) al claselor de resturi modulo n, să se determine mulțimea $N=\{\hat{x} \mid \hat{x} \in \mathbb{Z}_n$ a.î. există $k \in \mathbb{N}$ şi $\hat{x}^k = \hat{0}\}$.

Fie de asemenea, $I=\{\hat{x} \mid \hat{x} \in \mathbb{Z}_n$ a.î. există $k \in \mathbb{N}$ şi $\hat{x}^k = \hat{x}\}$.

Să se arate că $N \cap I = \{\hat{0}\}$.

6.41. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este inversabil $\Leftrightarrow$ (a, n) =1.

6.42. Fie ecuația $\hat{a}\hat{x} = \hat{b}$, cu $\hat{a}$, $\hat{b} \in \mathbb{Z}_n$. Să se arate că:

(i) Dacă (a, n) = d > 1 şi d$\nmid$b ecuația nu are nici o soluție;
(ii) Dacă (a, n) = d >1 şi d|b atunci ecuația are d soluții distincte;
(iii) Dacă (a, n) = 1 ecuația are soluție unică.

6.43. Fie a, b$\in \mathbb{Z}_n$, a $\neq$ 0, b $\neq$ 0. Dacă ecuația ax = b are soluții, atunci numărul soluțiilor ei este egal cu numărul de soluții ale ecuației ax = 0.

6.44. Să se rezolve în $\mathbb{Z}_{12}$ urmatoarele sisteme de ecuații:

(i) $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2} \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} \hat{7}x + \hat{3}y = \hat{2} \\ \hat{4}x + \hat{6}y = \hat{3} \end{cases}$.

6.45. Fie A un *inel boolean* (adică un inel cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$). Să se arate că:

(i) Inelul A este de caracteristică 2 (deci $x+x = 0$, pentru orice $x \in A$);
(ii) A este comutativ.

6.46. Demonstrați că fiind dat un inel comutativ A, el este boolean dacă şi numai dacă nu are elemente nilpotente nenule şi pentru orice a, $b \in A$ are loc egalitatea $(a+b)ab = 0$.

6.47. Fie A un inel cu proprietatea că pentru orice $a \in A$ avem $a^3+a = 0$. Arătați că inelul A este boolean.

6.48. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietățile:

1) Pentru orice $x \in A$, $x+x = 0$;

2) Pentru orice $x \in A$, există $k = k(x) \in \mathbb{N}^*$ a. î. $x^{2^k+1} = x$. Demonstrați că $x^2 = x$, pentru orice $x \in A$.

6.49. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel boolean şi $x, a, b \in A$ a.î. $a = xab$. Atunci $a = xa$. De asemenea, dacă $x = a+b+ab$ atunci $a = xa$ şi $b = xb$.

Pentru $a_1, \ldots, a_n \in A$ găsiți un element $x \in A$ a.î. $a_i = xa_i$, oricare ar fi $1 \leq i \leq n$.

6.50. Fie A un inel unitar a.î. $x^6 = x$, oricare ar fi $x \in A$. Demonstrați că $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in A$.

6.51. Fie A un inel unitar cu proprietatea că $x^{12} = x$, pentru orice $x \in A$. Demonstrați că $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in A$.

6.52. Fie A un inel a.î. $x^3 = x$, oricare ar fi $x \in A$.

(i) Să se calculeze $(x^2yx^2-x^2y)^2$ şi $(x^2yx^2-yx^2)^2$ unde $x, y \in A$;
(ii) Să se arate că inelul A este comutativ.

6.53. Fie A un inel finit. Să se arate că există două numere naturale m, p, $m > p \geq 1$ a.î. $a^m = a^p$, oricare ar fi $a \in A$.

6.54. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel şi $a, b \in A$, a inversabil. Să se arate că dacă relația:

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

este satisfăcută pentru k = m, m+1, m+2 (m∈ℕ), atunci ab = ba.

6.55. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel cu proprietatea că există $n\in\mathbb{N}$ $n\geq 2$ a.î. $x^{n+1} = x^n$, oricare ar fi $x\in A$. Să se arate că:

(i) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$;

(ii) $x^2 = x$, oricare ar fi $x\in A$.

6.56. Fie $p\geq 2$ un număr prim. Un inel A se zice *p-inel* dacă sunt verificate următoarele două condiții:

1) $px = \underbrace{x + \ldots + x}_{de\ p\ ori} = 0$, pentru orice $x\in A$,

2) $x^p = x$, pentru orice $x\in A$.

Să se demonstreze că orice p-inel unitar este comutativ.

6.57. Fie A un inel unitar cu proprietatea că $(xy)^2 = x^2y^2$, pentru orice x, $y\in A$. Atunci A este comutativ.

6.58. Fie A un inel care nu are elemente nilpotente nenule. Arătați că orice element idempotent din A aparține lui Z(A).

6.59. Fie A un inel cu element unitate $1\neq 0$ și $M=\{x\in A \mid x^2=x\}$ mulțimea elementelor sale idempotente. Să se demonstreze că dacă M este mulțime finită, atunci M are un număr par de elemente.

6.60. Fie A un inel comutativ finit cu $1\neq 0$. Să se calculeze produsul elementelor idempotente nenule din inelul A.

6.61. Pentru un inel A de caracteristică 2, notăm

$$O_A=\{x\in A \mid x^2=0\},$$
$$E_A=\{x\in A \mid x^2=1\},$$
$$I_A=\{x\in A \mid x^2=x\}.$$

Arătați că:

(i) Dacă $x\in O_A$, atunci $1+x\in E_A$;

Dacă $x\in E_A$, atunci $1+x\in O_A$;

Dacă $x\in I_A$, atunci $1+x\in I_A$.

(ii) $|O_A| = |E_A|$.

6.62. Fie d >1 un întreg liber de pătrate.

(i) Să se determine inelele A cu proprietatea $\mathbb{Z}\subseteq A\subseteq\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, operațiile din A fiind cele induse de adunarea şi înmulțirea din $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$;

(ii) Să se determine inelele B cu proprietatea $\mathbb{Q}\subseteq B\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, operațiile din B fiind cele induse de adunarea şi înmulțirea din $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

6.63. Fie A un inel. Dacă

$T=\{(a_{ij})\in M_n(A) \mid a_{ij}=0$, oricare ar fi $i, j\in\{1, .., n\}, i > j\}$

este o mulțime de matrice, atunci T este subinel al lui $(M_n(A),+,\cdot)$.

6.64. Fie A un inel şi S o submulțime oarecare a lui A. Mulțimea C(S) a elementelor din A care comută cu elementele lui S formează un subinel al lui A. Dacă $A=M_n(R)$, R fiind un inel unitar oarecare şi mulțimea $S\subset A$ este formată doar din matricea (a_{ij}) definită prin $a_{ij}=\delta_{j,i+1}$, atunci să se determine C(S).

6.65. Fie p un număr prim. Arătați că mulțimea $\mathbb{Z}_{(p)}$ a numerelor raționale de forma $\frac{a}{b}$, cu $a, b\in\mathbb{Z}$ iar p nu divide numitorul b, formează un subinel al inelului $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale.

6.66. (i) Aflați subinelele inelului $\mathbb{Z}$ al numerelor întregi;

(ii) Arătați că mulțimea $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ a numerelor raționale de forma $\frac{a}{2^n}$, cu $a\in\mathbb{Z}$ şi $n\in\mathbb{N}$, formează un subinel al inelului $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale.

6.67. Este $\{m+n\sqrt[3]{5} \mid m, n\in\mathbb{Z}\}$ subinel al lui $\mathbb{C}$?

6.68. Fie A_1 şi A_2 două inele unitare şi fie adunarea şi înmulțirea pe $A_1\times A_2$ definite astfel:

$$(x_1, x_2)+(y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+ y_2)$$

$$(x_1, x_2)\cdot(y_1, y_2) = (x_1\cdot y_1, x_2\cdot y_2).$$

Să se arate că $A_1\times A_2$ cu aceste operații este un inel unitar care are divizori ai lui zero.

Să se determine elementele inversabile ale acestui inel în funcție de elementele inversabile ale inelelor A_1 şi A_2.

Aplicație: a) $A_1 = A_2 = \mathbb{Z}$

b) $A_1 = \mathbb{Z}$, $A_2 = \mathbb{Q}$

c) $A_1 = \mathbb{Z}_m$, $A_2 = \mathbb{Z}_n$.

6.69. Calculați caracteristica inelelor $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}$, End($\mathbb{Z}$) și End($\mathbb{Z}_3$).

6.70. Pentru m, n$\in\mathbb{N}^*$ demonstrați că car($\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$) =[m,n]. Generalizare.

6.71. Dați exemplu de un inel unitar, comutativ, care nu este corp având caracteristica un număr prim.

6.72. Arătați că $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ are exact trei subinele unitare.

6.73. Fie A un inel cu 4 elemente, de caracteristică 2.

(i) Arătați că există a$\in$A, a $\neq$ 0, a $\neq$ 1 a.î.:

1) A = {0, 1, a, 1+a} şi $a^2 = 0$ sau

2) A = {0, 1, a, 1+a} şi $a^2 = a$ sau

3) A = {0, 1, a, 1+a} şi $a^2 = 1+a$.

(ii) Dați câte un exemplu de inel pentru fiecare din tipurile de la punctul (i).

6.74. (i) Fie A şi B două inele (comutative). Determinați elementele nilpotente ale inelului A×B;

(ii) Aflați numărul elementelor nilpotente din inelul $\mathbb{Z}_n$.

§7. Morfisme de inele. Izomorfisme de inele.

7.1. Să se dea un exemplu de inel neunitar.

Dacă A este un inel neunitar, există un inel unitar B ce conține pe A ca subinel.

7.2. Fie A un inel, S o mulțime şi f : A→S o aplicație bijectivă. Să se arate că există o unică structură de inel pe S a.î. f să devină morfism de inele.

Dacă g : S→C este o aplicație, cu C inel oarecare, să se demonstreze că g este morfism de inele pentru structura introdusă pe S dacă şi numai dacă g$\circ$f este morfism de inele.

7.3. Să se determine numărul structurilor de inel neizomorfe care pot fi definite pe o mulțime cu 4 elemente.

7.4. Dacă p este un număr prim, să se demonstreze că există doar două tipuri de inel cu p elemente.

7.5. Să se arate că pe grupul aditiv $G = (\mathbb{Z}_n, +)$ există $\varphi(n)$ operații de înmulțire care înzestrează pe G cu o structură de inel unitar (φ fiind indicatorul lui Euler). Sunt ele izomorfe?

Să se descrie toate operațiile de înmulțire care se pot defini pe grupul aditiv $H=(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$, operații pentru care H devine inel unitar.

7.6. Să se caracterizeze morfismele de inele de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Z}_n$ ($n\geq 2$).

7.7. Fie m, n numere naturale $m, n\geq 2$. Să se caracterizeze morfismele de inele de la $\mathbb{Z}_m$ la $\mathbb{Z}_n$.

7.8. Fie A un inel comutativ şi unitar şi $f, g : \mathbb{Q}\to A$ două morfisme de inele unitare ($f(1) = g(1) = 1_A$). Dacă $f(n) = g(n)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$, atunci $f = g$.

7.9. Fie A, A′ două inele unitare iar $f:A\to A'$ un morfism de inele unitare.

Să se arate că f duce elemente inversabile în elemente inversabile, elemente nilpotente în elemente nilpotente iar în ipoteza că este injecție şi divizori ai lui zero în divizori ai lui zero.

7.10. Fie $I=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$ şi $I'=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f \text{ derivabilă}\}$. Să se demonstreze că inelele $(I, +, \cdot)$ şi $(I', +, \cdot)$ nu sunt izomorfe (unde + şi $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare şi înmulțire a funcțiilor reale).

7.11. Fie $f:A\to A'$ un morfism surjectiv de inele unitare şi comutative. Analizați afirmația: „f(a) este divizor al lui zero dacă şi numai dacă a este divizor al lui zero”.

7.12. Fie A un inel unitar şi comutativ.

Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) A conține cel puțin un element idempotent diferit de 0 şi 1;

(ii) A este izomorf cu produsul direct $B\times C$ a două inele comutative, unitare (nenule).

7.13. Arătați că:

(i) Inelul $T_2(\mathbb{Z})$ al matricelor de ordinul doi, triunghiulare (adică au sub diagonala principală toate elementele zero), cu componente întregi, nu este comutativ ; determinați centrul acestui inel ;

(ii) Funcția $\varphi : T_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ce asociază unei matrice triunghiulare oarecare $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ din $T_2(\mathbb{Z})$ perechea (a, c) din $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ formată din elementele de pe diagonala principală, este morfism de inele.

7.14. Pentru fiecare $k\in\mathbb{Z}$ se consideră mulțimea de matrice $A_k = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in Z \right\}$.

(i) Să se demonstreze că A_k este inel comutativ (față de adunarea şi înmulțirea matricelor) ;

(ii) Pentru ce valori ale lui k, inelul A_k are divizori ai lui zero ?

(iii) Să se demonstreze că inelele A_k şi A_p sunt izomorfe dacă şi numai dacă k=p.

7.15. Fie $d\in\mathbb{Z}$ un întreg liber de pătrate.

Să se arate că:

(i) Mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,] = \{m+n\sqrt{d}\,|m, n\in\mathbb{Z}\}$ împreună cu adunarea şi înmulțirea numerelor este un inel unitar şi comutativ izomorf cu inelul A_d (definit la problema **7.14**.) ;

(ii) Dacă $d'\in\mathbb{Z}$ este un alt număr liber de pătrate, atunci inelele $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ şi $\mathbb{Z}[\sqrt{d'}\,]$ sunt izomorfe dacă şi numai dacă $d = d'$.

7.16. Dacă M este o mulțime nevidă, atunci $(P(M), \Delta, \cap)$ este inel boolean. În cazul în care $M=\{1, 2, .., m\}$ cu $m\geq 1$, atunci inelul $(P(M), \Delta, \cap)$ este izomorf cu inelul $(\underbrace{Z_2 \times \ldots \times Z_2}_{de\ m\ ori}, +, \cdot)$.

7.17. Fie A un inel boolean a.î. $|A| = n > 1$. Arătați că există $m\geq 1$ a.î. $n = 2^m$ şi $(A, +, \cdot) \simeq (\underbrace{Z_2 \times \ldots \times Z_2}_{de\ m\ ori}, +, \cdot)$.

7.18. Să se arate că:

(i) Pe o mulțime finită A cu $n\geq 2$ elemente se poate introduce o structură de inel boolean dacă şi numai dacă $n = 2^k$, $k\in\mathbb{N}^*$;

(ii) Pe mulțimea numerelor naturale se poate introduce o structură de inel boolean.

7.19. Fie E o mulțime şi $\mathbb{Z}_2^E$ inelul funcțiilor definite pe E cu valori în $\mathbb{Z}_2$, cu adunarea şi înmulțirea induse de adunarea şi înmulțirea din $\mathbb{Z}_2$. Să se arate că $\mathbb{Z}_2^E$ este izomorf cu inelul părților mulțimii E ale cărui operații sunt: $E_1+E_2=E_1\Delta E_2$ şi $E_1\cdot E_2=E_1\cap E_2$.

Să se arate că toate elementele din aceste inele sunt idempotente.

În particular, deduceți că pentru două mulțimi disjuncte M şi N are loc următorul izomorfism de inele $P(M\cup N)\simeq P(M)\times P(N)$ (unde P(M) desemnează inelul părților lui M relativ la operațiile Δ şi $\cap$).

7.20. Fie A un inel. Să se arate că există o corespondență bijectivă între mulțimea morfismelor de inele definite pe $\mathbb{Z}$ cu valori în A şi mulțimea idempotenților lui A. Câte morfisme de inele există de la $\mathbb{Z}$ într-un domeniu de integritate? Dacă A este un inel unitar să se arate că există un singur morfism de inele unitare de la $\mathbb{Z}$ în A.

7.21. (i) Fie (G, +) un grup comutativ. Arătați că mulțimea

$$End(G)=\{f:G\to G \mid f \text{ este morfism de grupuri}\}$$

este un inel în raport cu adunarea şi compunerea morfismelor;

(ii) Fie (A, +) grupul aditiv subiacent al unui inel (unitar) şi comutativ, (A, +, $\cdot$). Arătați că inelul (End(A), +, $\circ$) este comutativ dacă şi numai dacă este izomorf cu (A, +, $\cdot$).

7.22. Fie G grupul subiacent inelului produs direct $(\underbrace{Z\times\ldots\times Z}_{de\ n\ ori}, +, \cdot)$. Arătați că inelul End(G) (definit la problema **7.21.**) este izomorf cu inelul de matrice $M_n(\mathbb{Z})$.

7.23. Să se arate că grupul aditiv al unui inel integru nu este izomorf cu grupul multiplicativ al elementelor sale inversabile.

7.24. Fie A şi B două inele necomutative şi $f:A\to B$ cu proprietățile:

1) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, oricare ar fi $x, y\in A$;

2) Pentru orice $x, y\in A$ avem $f(xy)=f(x)f(y)$ sau $f(xy)=f(y)f(x)$.

Să se demonstraze că f este morfism de inele sau antimorfism de inele.

Observaţie. Reamintim că f : A→B se numeşte *antimorfism* de inele dacă pentru orice x, y∈A avem f(x+y)=f(x)+f(y) şi f(xy)=f(y)f(x).

§8. Ideale. Laticea idealelor unui inel comutativ. Anulatorul şi radicalul unui inel. Factorizarea unui inel printr-un ideal bilateral. Ideale prime. Ideale maximale.

8.1. Să se dea exemplu de un inel în care care există subinele ce nu sunt ideale.

8.2. Să se dea exemplu de inel în care reuniunea a două ideale ale sale nu este ideal.

8.3. Arătaţi că mulţimea idealelor Id(A) ale unui inel comutativ A formează o latice completă.

8.4. Fie inelul comutativ A={f:[-1, 1]→ℝ} împreună cu operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire a funcţiilor. Care din următoarele submulţimi ale lui A sunt ideale şi care doar subinele:

(i) P = {f∈A | f este funcţie polinomială};

(ii) P_n = {f∈P | grad(f) ≤ n};

(iii) Q_n = {f∈P_n | grad(f) = n};

(iv) B = {f∈A | f(0) = 0};

(v) C = {f∈A | f(0) = 1}?

8.5. Să se arate că există inele în care divizorii lui zero nu formează un ideal.

8.6. Daţi exemplu de un morfism de inele f:A→A′ şi de un ideal I al lui A a.î. f(I) să nu fie ideal în A′.

8.7. Fie A un inel unitar şi comutativ a.î. să existe u∈A, u≠0 şi u≠1 cu u^2 = u. Fie A_1 = {ux | x∈A}.

(i) Să se demonstreze că A_1 este un subinel al lui A care are unitate.

(ii) Să se arate apoi că există un subinel A_2 al lui A a.î.:

a) A_2 este unitar;

b) Fiecare element al lui A se exprimă ca x_1+x_2 cu $x_1∈A_1$ şi $x_2∈A_2$;

c) Dacă $x_1 \in A_1$ şi $x_2 \in A_2$ atunci $x_1 x_2 = 0$;

d) $A_1 \cap A_2 = \{0\}$.

(iii) Să se arate că funcţia $f: A \to A_1 \times A_2$, $f(x) = (x_1, x_2)$, unde $x = x_1 + x_2$ este un izomorfism de inele.

8.8. Arătaţi că inelul $M_2(\mathbb{R})$ nu are ideale bilaterale netriviale.

8.9. Să se dea exemplu de inel necomutativ şi de ideale stângi (drepte) care nu sunt ideale drepte (stângi).

8.10. Fie n un număr natural $n \geq 1$. Să se arate că asocierea $d \rightsquigarrow \hat{d}\,\mathbb{Z}_n$ constituie un antiizomorfism de latici între laticea divizorilor (pozitivi) ai lui n cu ordinea $d \prec d'$ dacă $d \mid d'$ şi laticea idealelor lui $\mathbb{Z}_n$.

8.11. Să se determine forma generală a numerelor naturale $n \geq 1$ pentru care laticea idealelor lui $\mathbb{Z}_n$ este total ordonată.

8.12. Există pentru orice latice cu un număr finit de elemente, un număr natural n a.î. ea să fie izomorfă (ca latice) cu laticea idealelor lui $\mathbb{Z}_n$?

8.13. Să se stabilească o corespondenţă bijectivă între mulţimea idealelor bilaterale ale unui inel unitar A şi mulţimea idealelor bilaterale ale lui $M_n(A)$, $n \geq 1$.

8.14. Să se arate că dacă $m, n \in \mathbb{Z}$ atunci $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = D\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = M\mathbb{Z}$, unde prin D şi M am notat cel mai mare divizor comun respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor m şi n.

8.15. Fie I, J, K ideale în inelul comutativ A. Arătaţi că dacă $I \subseteq K$ atunci

$$(I+J) \cap K = I + (J \cap K).$$

8.16. Fie A un inel I, J, L ideale bilaterale în A a.î. $I + J = A$ şi $I \supseteq JL$. Să se arate că $L \subseteq I$.

8.17. Demonstraţi că într-un inel boolean orice ideal finit generat este principal.

8.18. Fie A un inel comutativ şi I un ideal finit generat al lui A a.î. $I = I^2$. Să se găsească un element idempotent $e \in A$ a.î. $I = Ae$.

8.19. Dați exemplu de un morfism de inele comutative $f:A\to A'$ şi de un ideal maximal M al lui A' a.î. $f^{-1}(M) \neq A$ şi $f^{-1}(M)$ nu este ideal maximal în A.

8.20. Se pot pune în evidență un număr infinit de ideale prime în inelul $\mathbb{Z}$?

8.21. Să se dea exemplu de un inel în care nu orice ideal prim este maximal.

8.22. Să se arate că pentru orice număr natural $n\geq 1$ există un inel care are n ideale.

8.23. Demonstrați că $R=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a,b \in Q\right\}$ este un subinel necomutativ al lui $M_2(\mathbb{Q})$. Dacă $I=\{A\in R|A^2=O_2\}$ atunci I este ideal şi $R/I \simeq \mathbb{Q}$.

8.24. Fie $f:A\to A'$ un morfism de inele, I un ideal în A. Arătați că
$$f^{-1}(f(I)) = I + Ker(f).$$

8.25. În $\mathbb{Z}[i]$, inelul întregilor lui Gauss, arătați că (3) şi (1+i) sunt ideale prime dar (2) nu este ideal prim.

8.26. Fie A un inel (comutativ) şi P un ideal al său. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) P este prim;

(ii) Oricare ar fi idealele I şi J ale inelului A, dacă P conține produsul IJ, atunci P conține pe I sau pe J.

8.27. Fie A un inel unitar şi S un sistem multiplicativ al său (adică $S\neq\emptyset$, $1\in S$, $0\notin S$ şi dacă $s_1, s_2\in S \Rightarrow s_1s_2\in S$). Arătați că dacă I este un ideal maximal relativ la proprietatea $I \cap S = \emptyset$, atunci I este ideal prim.

8.28. Fie A un domeniu de integritate. Arătați că în A[X] intersecția tuturor idealelor maximale este idealul zero.

8.29. Fie A un inel comutativ unitar finit. Atunci demonstrați că orice ideal prim în A este şi ideal maximal în inelul A.

8.30. Fie A un inel comutativ şi unitar a.î. pentru orice $a \in A$ există un $n \geq 1$ cu $a^n = a$. Atunci, orice ideal prim din A este şi maximal.

8.31. Arătați că în inelul $\mathbb{Z}[X,Y]$ idealul (X) este prim dar nu este maximal.

8.32. Fie A un inel comutativ unitar şi $a \in A$. Atunci:

(i) $A[X] / (X,a) \simeq A/(a)$;

(ii) (X, a) este ideal prim (respectiv maximal) în A[X] $\Leftrightarrow$ (a) este ideal prim (respectiv maximal) în A;

(iii) (X) este ideal prim dar nu este maximal în $\mathbb{Z}[X]$.

8.33. Pentru un inel A notăm cu J(A) intersecția tuturor idealelor maximale din A.

Să se arate că:

(i) $J(A) = \{x \in A \mid 1-xy \in U(A), \text{ oricare ar fi } y \in A\}$;

(ii) J(A) este cel mai mare ideal I din A (relativ la incluziune) cu proprietatea că dacă $x \in I$ atunci $1-x \in U(A)$.

8.34. Fie $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in Z \right\}$ subinel în $M_2(\mathbb{Z})$.

Arătați că $J(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| b \in Z \right\}$.

8.35. Dați exemplu de inel (fără unitate) a. î. nu orice ideal al său să fie inclus într-un ideal maximal.

8.36. Dacă A este un inel integru, arătați că J(A[X]) = 0.

8.37. Fie A un inel comutativ. Dacă I este un ideal al lui A, atunci *anulatorul* lui I se defineşte ca fiind

$$Ann(I) = \{x \mid x \in A \text{ şi } i \cdot x = 0, \text{ pentru orice } i \in I\}$$

şi *radicalul* lui I ca fiind

$$r(I) = \{x \mid x \in A \text{ şi există } n \in \mathbb{N} \text{ a.î. } x^n \in I\}.$$

(i) Arătați că Ann(I) şi r(I) sunt ideale ale inelului A;

(ii) Dacă I şi J sunt ideale ale lui A atunci

1) r(r(I)) = r(I),

2) $r(I \cap J) = r(I) \cap r(J)$,
3) $r(I + J) = r(r(I) + r(J))$.

8.38. Arătați că în inelul cât A / r(A) nu există elemente nilpotente nenule.

8.39. Fie $f:A \to A'$ un morfism surjectiv de inele comutative cu unitate, al cărui nucleu Ker(f) este conținut în r(A).

Să se arate că dacă $a' \in A'$ este un element idempotent atunci există un singur element idempotent $a \in A$ a.î. $f(a) = a'$.

Deduceți că f induce o bijecție între mulțimile elementelor idempotente ale celor două inele.

8.40. Să se determine numărul elementelor idealului $r(\mathbb{Z} / n\mathbb{Z})$, $n \geq 2$ în funcție de n. Să se deducă în particular, că $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ este un inel redus dacă şi numai dacă n nu se divide prin pătratul unui număr prim.

Observație. Un inel comutativ A se numeşte *redus* dacă r(A) = 0.

8.41. Fie inelul $A = C([0, 1], \mathbb{R}) = \{f:[0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ este continuă}\}$ (față de adunarea şi înmulțirea definite prin $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ şi $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$). Arătați că $I=\{f \in A \mid f(0) = 0\}$ este un ideal ce nu este principal.

8.42. Fie d un număr întreg nenul liber de pătrate şi $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ subinelul corpului complex $\mathbb{C}$ format din numerele de forma $a+b\sqrt{d}$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$.

Fie $x = a+b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$. Să se determine un generator $t > 0$ al idealului $(x) \cap \mathbb{Z}$ în funcție de a şi b. Să se arate că idealul (x) este nul dacă şi numai dacă $(x) \cap \mathbb{Z}$ este nul.

8.43. Determinați idealele inelului $T_2(\mathbb{Z}_2)$ al matricelor de ordinul doi, triunghiulare, cu componente în $\mathbb{Z}_2$.

8.44. Notăm cu A mulțimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & p \\ 0 & b \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ iar $p \in \mathbb{Q}$ şi cu B mulțimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & p \\ 0 & q \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{Z}$ şi $p, q \in \mathbb{Q}$. Arătați că B este subinel al inelului $T_2(\mathbb{Q})$ iar A este subinel al lui B. Determinați idealele bilaterale ale inelelor A şi B.

8.45. Fie A un inel, J un ideal bilateral al lui A iar I un ideal stâng al lui A. Dacă I şi J sunt nilpotente arătați că I + J este nilpotent.

Observație. Un ideal I se numeşte *nilpotent* dacă există $n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $I^n = 0$, unde $I^n = \underbrace{I\cdot\ldots\cdot I}_{de\ n\ ori}$.

8.46. Arătați că nu există nici o structură de inel unitar care să aibă ca grup subiacent pe $\mathbb{Q} / \mathbb{Z}$.

8.47. Fie I şi J ideale într-un inel comutativ A. Arătați că morfismul canonic de inele $A / I\cap J \to A/I \times A/J$ ($x + I\cap J \to (x+I, x+J)$) este izomorfism dacă şi numai dacă I+J = A.

Observație. Idealele I şi J cu proprietatea că I + J = A se zic *ideale comaximale*.

8.48. Fie A produsul direct $\prod_{i=1}^{n} A_i$ al inelelor unitare $A_1, A_2, .., A_n$. Să se arate că orice ideal stîng (drept sau bilateral) $I\subseteq A$ satisface identitatea $I = \prod_{i=1}^{n} p_i(I)$, unde $p_i:A\to A_i$ reprezintă a i-a proiecție canonică. Observați că identitatea de mai sus nu este satisfăcută în general de subgrupurile unui produs direct de grupuri. Dați exemple de subgrupuri ale grupului aditiv $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ care nu sunt ideale ale inelului $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

8.49. Fie A produsul direct $\prod_{i=1}^{n} A_i$ al inelelor unitare $A_1, A_2, .., A_n$ şi $I = \prod_{i=1}^{n} I_i \subseteq A$ un ideal (vezi problema **8.48**.). Să se arate că $A/I \simeq \prod_{i=1}^{n} A_i / I_i$.

8.50. Fie A şi B două inele comutative. Determinați idealele produsului $A\times B$. Aplicație: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ şi $K\times K$, unde K este un corp necomutativ.

8.51. Fie A un inel unitar şi comutativ şi $a\in A$ un nondivizor al lui zero şi sistemul multiplicativ $S = \{a^n\}_{n\geq 0}$. Să se arate că inelele $S^{-1}A$ şi $A[X] / (aX-1)$ sunt izomorfe.

8.52. Să se arate că $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]/(x)$ este finit dacă şi numai dacă x este un element nenul în $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$.

8.53. Să se arate că grupul unităţilor inelului $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ este izomorf cu grupul aditiv $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$, pentru $n \geq 3$.

Să se arate că pentru n = 1, 2 grupul unităţilor lui $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ este ciclic.

8.54. Să se arate că grupul unităţilor inelului $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ este ciclic pentru orice număr prim $p \neq 2$ şi n număr natural.

§9. Corp. Subcorp. Caracteristica unui corp. Morfisme de corpuri. Izomorfisme de corpuri.

9.1. Să se arate că inelul $\mathbb{Z}_n$ este corp dacă şi numai dacă n este număr prim.

9.2. Să se rezolve în corpul $\mathbb{Z}_7$ sistemul: $\begin{cases} x + y = \hat{0} \\ xy = \hat{5} \end{cases}$.

9.3. Să se arate că orice inel integru finit este corp.

9.4. Să se demonstreze că într-un corp K există doar două ideale, idealul nul şi K care sunt ideale bilaterale.

9.5. Fie K un inel nenul care are numai două ideale (0) şi K. Să se arate că K este corp.

9.6. Pe intervalul real $K = (0,+\infty)$ se definesc operaţiile algebrice:

$$x \oplus y = xy \text{ şi } x \odot y = x^{\ln y}, \text{ oricare ar fi } x, y \in K.$$

Să se arate că:

(i) $(K, \oplus, \odot)$ este corp comutativ;

(ii) Corpul $(K, \oplus, \odot)$ este izomorf cu corpul $(\mathbb{R},+,\cdot)$ al numerelor reale.

9.7. Fie $\otimes$ o operaţie algebrică pe $\mathbb{Q}^*$ astfel încît $(\mathbb{Q}, +, \otimes)$ este inel. Să se arate că $(\mathbb{Q}, +, \otimes)$ este corp şi $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \simeq (\mathbb{Q}^*, \otimes)$.

9.8. (i) Să se demonstreze că cel mai mic subcorp al lui $\mathbb{R}$ ce conține pe $\sqrt{2}$ este format din numerele reale de forma $a+b\sqrt{2}$ cu $a, b\in\mathbb{Q}$;

(ii) Să se arate că mulțimea $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c\in\mathbb{Q}\}$ împreună cu adunarea şi înmulțirea numerelor reale este cel mai mic subcorp (comutativ) al lui $\mathbb{R}$ ce conține pe $\mathbb{Q}$ şi pe $\sqrt[3]{2}$.

9.9. Fie A un inel unitar inclus în corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe şi care include intervalul (0, 1), operațiile inelului A fiind cele induse de operațiile din $\mathbb{C}$. Să se demonstreze că $A = \mathbb{R}$ sau $A = \mathbb{C}$.

9.10. Fie d_1 şi d_2 doi întregi liberi de pătrate, $d_1 \neq d_2$. Să se demonstreze egalitățile:

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{d_2}) = \mathbb{Q}$;

(ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{d_1}] \cap \mathbb{Z}[\sqrt{d_2}] = \mathbb{Z}$.

9.11. Fie $K\subset\mathbb{C}$ un subcorp. Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Ecuația $x^2 = a^2+1$ are soluții în K, pentru orice $a\in K$;

(ii) Ecuația $x^2 = a^2+a+1$ are soluții în K, pentru orice $a\in K$.

Dați exemplu de un corp K pentru care una din cele două afirmații de mai înainte este adevărată.

9.12. Caracterizați subinelele unitare ale lui $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

9.13. Fie K un corp necomutativ. Dacă există $a, b\in K$ şi $n\in\mathbb{Z}$ a.î.

$$a^nb^n-b^{n+1}a^{n+1} = 1 \text{ şi } a^{2n+1}+b^{2n+1} = 0,$$

atunci $b^na^n-a^{n+1}b^{n+1} = 1$.

9.14. Fie K un corp, E o extindere a lui K şi $x\in E\setminus K$. Arătați că pentru orice $a, b\in K$ cu $a \neq 0$ avem $K(ax+b) = K(x)$.

9.15. (i) Fie A un inel cu n elemente, $n>0$ şi 1 elementul unitate al lui A. Dacă ordinul lui 1 în grupul (A,+) este egal cu n, atunci $(A,+,\cdot) \simeq (\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$;

(ii) Fie p un număr prim iar A un inel cu p elemente. Să se arate că A este corp comutativ izomorf cu corpul $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$.

9.16. Fie A un inel cu opt elemente, de caracteristică 2.

Arătați că:

(i) Pentru orice $x\in A$, $x^7+1=(x+1)(x^3+x^2+1)(x^3+x+1)$;

(ii) A este corp dacă şi numai dacă există $a\in A$ a.î. $a^3+a+1=0$.

9.17. Fie A un inel finit cu $0\neq 1$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) A nu este corp;

(ii) Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ ecuația $x^n+y^n=z^n$ are soluții în A^*.

9.18. Fie K un corp comutativ cu 8 elemente. Să se demonstreze că există $a\in K$ a.î. $a^3=a+1$.

9.19. Fie K un inel cu patru elemente. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) K este corp;

(ii) Există $a\in K$ a.î. $a^2=1+a$.

9.20. Fie $O, E, U\in M_3(\mathbb{Z}_2)$, $O=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{1}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}$

$U=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\\ \hat{1}&\hat{0}&\hat{1}\\ \hat{0}&\hat{1}&\hat{0}\end{pmatrix}$.

(i)Arătați că $M_3(\mathbb{Z}_2)$ este inel de caracteristică 2;

(ii) $F_8=\{O, E, U, U^2, U^3, U^4, U^5, U^6\}$ este corp cu 8 elemente în raport cu adunarea şi înmulțirea matricelor;

(iii) Orice corp K cu 8 elemente este izomorf cu F_8.

9.21. Dacă A este un inel a.î. oricare ar fi $a\in A$, $a\neq 0$ există $b\in A$ cu $ba=1$, atunci A este corp.

9.22. Fie K un corp comutativ cu proprietatea că pentru orice $x\in K$ avem $x^2+1\neq 0$. Definim adunarea şi înmulțirea pe $K\times K$ prin:

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$$

$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1),$$

pentru orice $(x_1, y_1), (x_2, y_2)\in K\times K$.

Să se arate că mulțimea K×K împreună cu aceste operații este corp comutativ, corpul K fiind izomorf cu un subcorp al acestuia. Mai mult, în acest corp ecuația $x^2+1 = 0$ are soluții.

Există corpuri K finite cu proprietatea că $x^2+1 \neq 0$, oricare ar fi $x \in K$?

9.23. Fie $H=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \text{ numere complexe} \right\}$.

Arătați că H este subcorp al lui $M_2(\mathbb{C})$.

Observație. Corpul H poartă numele de *corpul quaternionilor.*

9.24. (i) Să se arate că mulțimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ cu a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ formează un subcorp K al lui $M_4(\mathbb{R})$ izomorf cu corpul quaternionilor;

(ii) Determinați centrul lui H .

9.25. Fie K un corp (comutativ sau nu). Dacă K_1, K_2, K_3 sunt subcorpuri ale lui K a.î. $K_i \neq K$, oricare ar fi i=1, 2, 3, atunci $\bigcup_{i=1}^{3} K_i \neq K$.

9.26. (Generalizarea problemei **9.25.**) Să se arate că un corp nu poate fi scris ca reuniune a unui număr finit de subcorpuri proprii ale sale.

9.27. Fie K un corp şi E o matrice din $M_n(K)$. Să se arate că E este divizor al lui zero dacă şi numai dacă E nu este inversabilă. Este necesar să presupunem K corp?

9.28. Să se arate că corpul numerelor reale nu este izomorf cu corpul numerelor complexe.

9.29. Fie K un corp. Demonstrați că orice morfism unitar de la K la un inel unitar A nenul este funcție injectivă.

9.30. Să se determine endomorfismele corpului $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale.

9.31. Fie f un endomorfism al corpului numerelor reale .

(i) Să se determine f(0), f(1) şi f(-1);

(ii) Să se arate că pentru orice număr raţional q avem f(q) = q;

(iii) Să se demonstreze că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, rezultă $f(\alpha) > 0$.

Să se deducă de aici că f este strict crescătoare.

(iv) Folosind rezultatele stabilite la punctele precedente, să se demonstreze că singurul endomorfism al corpului numerelor reale este aplicaţia identică.

9. 32. Fie (K, +, ·) un corp. Pentru fiecare $a \in K$ definim $\lambda_a : K \to K$ prin $\lambda_a(x) = ax - xa$. Să se arate că dacă există un endomorfism $f : K \to K$, $f \neq 1_K$ astfel încît $f \circ \lambda_a = \lambda_a \circ f$ pentru orice $a \in K$, atunci corpul K este comutativ.

9.33. Determinaţi automorfismele corpurilor $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ şi $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

9.34. Să se determine automorfismele f ale corpului $\mathbb{C}$ al numerelor complexe, cu proprietatea că f(x) = x, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

9.35. Fie K un inel unitar şi comutativ cu proprietatea că orice morfism de la K la un inel nenul este injectiv. Atunci K este corp.

9.36. Fie K şi L două corpuri necomutative şi $f : K \to L$ o funcţie neconstantă. Să se demonstreze că funcţia f este morfism sau antimorfism de corpuri (vezi problema **7.24.**) dacă şi numai dacă verifică condiţiile următoare:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in K$

2) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, oricare ar fi $x \in K$, $x \neq 0$

3) $f(1) = 1$.

9.37. Fie K şi L două corpuri comutative de caracteristică zero şi $f : K \to L$ o funcţie. Să se arate că f este morfism de corpuri dacă şi numai dacă are următoarele proprietăţi:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in K$;

2) $f(x^3) = [f(x)]^3$, oricare ar fi $x \in K$;

3) $f(1) = 1$.

9.38. (i) Fie K şi L două corpuri necomutative şi $n \geq 2$ un număr natural. Fie $f : K \to L$ o funcţie cu proprietăţile:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in K$;

2) $f(x^n) = f(x)^n$, oricare ar fi $x \in K$;

3) $f(1) = 1$.

În aceste condiții, dacă L şi K sunt corpuri de caracteristică zero sau de caracteristică p>n, să se demonstreze că: $f(x^2) = f(x)^2$, oricare ar fi $x \in K$;

(ii) În condițiile de la (i), dacă L şi K sunt corpuri comutative, să se demonstreze că f este morfism de corpuri.

9.39. Fie d_1 şi d_2 doi întregi liberi de pătrate şi $f:\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})\to\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ un izomorfism de corpuri.

(i) Să se demonstreze că $d_1 = d_2$;

(ii) Să se determine automorfismele corpului $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, unde d este un întreg liber de pătrate.

9.40. Fie $\mathbb{Z}_p$ corpul claselor de resturi modulo p (p>1, număr prim), $(\mathbb{Z}_p, +)$ grupul aditiv al corpului, iar $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al elementelor sale nenule.

Să se determine morfismele de grupuri de la $(\mathbb{Z}_p, +)$ la $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$.

9.41. Fie $\mathbb{Q}$ corpul numerelor raționale. Să se determine toate morfismele de grupuri de la grupul $(\mathbb{Q}, +)$ la grupul $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

9.42. Fie K un corp comutativ cu proprietatea că există n>0, număr natural a.î. $n\cdot 1_K = 0_K$. Să se arate că:

(i) Dacă p este cel mai mic număr natural pozitiv a.î. $p\cdot 1_K = 0_K$, atunci p este număr prim (p se numeşte *caracteristica* corpului K);

(ii) Oricare ar fi $x, y \in K$, atunci $(x \pm y)^p = x^p \pm y^p$;

(iii) Există un singur morfism de grupuri de la grupul aditiv (K, +) la grupul multiplicativ $(K^*, \cdot)$.

9.43. Definim pe $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ următoarele operații:

$$(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d) \text{ şi } (a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,ad+bc).$$

Verificați că $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ este corp şi calculați-i caracteristica.

9.44. Fie $p\geq 2$ un număr prim şi K un corp cu următoarele proprietăți:

1) $px = 0$, pentru orice $x \in K$;

2) Pentru orice $x \in K$ există un întreg $n = n(x) \geq 0$ (ce depinde de x) a.î. $x^{p^n} \in Z(K)$.

Atunci K este comutativ.

9.45. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp finit. Să se determine toate morfismele de grupuri de la $(K, +)$ la $(K^*, \cdot)$ şi de la $(K^*, \cdot)$ la $(K, +)$.

9.46. Fie K un corp cu $car(K) \neq 2$ şi $a \in K$ a.î. $a^{2n+1} = 1$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Găsiți $f: K \to K$ a.î. $f(x) + f(ax) = 2x$, oricare ar fi $x \in K$.

9.47. Fie K mulțimea matricelor pătratice de ordin doi cu elemente reale formată din matricele de tipul $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

(i) Să se arate că față de operațiile uzuale, K are structură de corp izomorf cu corpul complex $\mathbb{C}$;

(ii) Folosind rezultatul precedent, să se rezolve în K sistemul de ecuații: $\begin{cases} X + Y = M(3,3) \\ X^3 + Y^3 = M(-9,9) \end{cases}$.

9.48. Fie $d \in \mathbb{Z}$ un număr liber de pătrate. Să se arate că:

(i) Mulțimea $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a+b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ împreună cu adunarea şi înmulțirea numerelor complexe este corp comutativ;

(ii) Mulțimea $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in Q \right\}$ împreună cu adunarea şi înmulțirea matricelor este corp comutativ;

(iii) Cele două corpuri de la punctele precedente sunt izomorfe.

9.49. Un corp $K \subseteq \mathbb{C}$ în care operațiile sunt cele obişnuite cu numere complexe satisface ipotezele:

i) Corpul K are exact două endomorfisme f şi g;

ii) $f(x) = g(x) \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$.

Să se demonstreze că există un întreg liber de pătrate $d \neq 1$ a. î. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

9.50. Fie $q\in\mathbb{Q}$ şi $A_q=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ qb & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in Q\right\}$. Demonstraţi că A_q este un subinel al lui $M_2(\mathbb{Q})$ şi este corp (comutativ) dacă q nu este pătratul unui număr raţional.

9.51. Se consideră K mulţimea matricelor de forma $M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$, cu $a, b\in\mathbb{Q}$. Arătaţi că K împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor formează un corp izomorf cu corpul $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

9. 52. Arătaţi că $K=\left\{\begin{pmatrix} x+2y & 3y \\ 2y & x-2y \end{pmatrix} \middle|\ x,y \text{ numere rationale}\right\}\subseteq M_2(\mathbb{Q})$ este corp comutativ izomorf cu corpul $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$.

9.53. Fie $p>0$ un număr prim şi $K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in Z_p\right\}$. Să se demonstreze că mulţimea K înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire a matricelor este corp dacă şi numai dacă $p\equiv 3(\text{mod}4)$.

9.54. Considerăm mulţimea $K\subset M_2(\mathbb{R})$ formată din toate matricele de forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cu $a\in\mathbb{R}$.

(i) Să se arate că faţă de adunarea şi înmulţirea matricelor K este corp comutativ izomorf cu corpul $\mathbb{R}$;

(ii) Demonstraţi că deşi matricele nenule din K sunt elemente inversabile în K, ele sunt matrice singulare în $M_2(\mathbb{R})$. Explicaţi rezultatul.

9.55. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel unitar cu $0\neq 1$. Să se demonstreze că dacă orice funcţie $f:A\to A$ este polinomială, atunci $(A, +, \cdot)$ este corp.

9.56. Fie $M_2(\mathbb{Q})$ şi pentru d întreg liber de pătrate considerăm submulţimea K_d a lui $M_2(\mathbb{Q})$ formată din matricele de forma $\begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix}$ cu a, $b\in\mathbb{Q}$.

(i) Să se arate că mulțimea K_d este corp față de adunarea şi înmulțirea matricelor şi aplicația $f:\mathbb{Q}(\sqrt{d})\to K_d$, $f(a+b\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix}$ este un izomorfism de corpuri;

(ii) Considerăm grupurile multiplicative $(\mathbb{Q}(\sqrt{d})^*, \cdot)$, $(K_d^*, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ şi aplicațiile $f:\mathbb{Q}(\sqrt{d})^*\to K_d^*$, definită ca la (i), $\Delta:K_d^*\to\mathbb{Q}^*$ definită prin $\Delta(A) = \det(A)$, $N:\mathbb{Q}(\sqrt{d})^*\to\mathbb{Q}^*$ definită prin $N(a+b\sqrt{d}) = a^2-db^2$.

Să se demonstreze că f, Δ, N sunt morfisme de grupuri şi avem egalitatea $\Delta\circ f = N$.

9.57. Dacă K_1 şi K_2 sunt două corpuri, să se arate că inelul produs $K_1\times K_2$ nu este corp.

9. 58. Fie K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 corpuri nu neapărat comutative şi nu neapărat distincte. Să se arate că inelele produs $K_1\times K_2\times K_3$ şi $K_4\times K_5$ nu sunt izomorfe.

§10. Inele de polinoame

10.1. Fie A un inel comutativ şi unitar, I o mulțime nevidă şi A[X;I] inelul polinoamelor cu coeficienți în A în nedeterminatele $\{X_i\}_{i\in I}$. Să se arate că:

(i) Dacă I şi A sunt finite atunci A[X;I] este o mulțime numărabilă;

(ii) Dacă I este finită iar A este infinită atunci A[X;I] are cardinalul lui A;

(iii) Dacă A este finită (chiar numărabilă) şi I este infinită, atunci A[X;I] are cardinalul lui I.

10.2. Se poate defini pe orice mulțime nevidă o structură de inel unitar?

10.3. Fie A un domeniu de integritate şi U(A) grupul elementelor inversabile ale lui A. Să se arate că orice subgrup finit al lui U(A) este ciclic.

10.4. (i) Să se arate că produsul elementelor nenule ale unui corp finit este egal cu –1;

(ii) Să se deducă de aici că pentru orice număr prim p, $p|(p-1)!+1$ (vezi problema **3.17.**).

10.5. Fie A un inel (comutativ), iar $f = a_0 + a_1X +...+ a_nX^n$ un polinom din A[X] de grad $n\geq 0$. Arătați că:

(i) f este inversabil în A[X] dacă şi numai dacă a_0 este inversabil în A şi a_1, ..., a_n sunt nilpotente în A;

(ii) f este nilpotent în A[X] dacă şi numai dacă toţi coeficienţii a_0, a_1, ..., a_n sunt nilpotenţi în A;

(iii) f este divizor al lui zero în A[X] dacă şi numai dacă există $a \in A^*$ a.î. $a \cdot f = 0$.

10.6. Fie p un număr prim, $p \geq 3$. Să se afle numărul soluţiilor ecuaţiei

$$x^{(p-1)/2} + y^{(p-1)/2} = \hat{0},$$

considerată în corpul $\mathbb{Z}_p$, al claselor de resturi modulo p.

10.7. Fie $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ şi $(B_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ două şiruri de matrice pătratice de ordinul n cu elemente din $\mathbb{R}$. Dacă pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, B_k este inversabilă, să se arate că există o infinitate de numere reale α a.î. $A_k + \alpha B_k$ este inversabilă, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.

10.8. Fie A un inel unitar comutativ cu cel puţin două elemente. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) A este corp finit;

(ii) Orice polinom $P \in A[X]$ de grad $n \geq 1$ are cel mult n rădăcini (distincte) în A şi orice funcţie $f: A \to A$ este funcţie polinomială (adică există $Q \in A[X]$ a.î. $f = \tilde{Q}$).

10.9. Fie polinomul $f = \hat{a} + \hat{b}X \in \mathbb{Z}_n[X]$, unde $n = p^r$, cu p prim şi $r \in \mathbb{N}^*$.

(i) Să se arate că $f \in U(\mathbb{Z}_n[X])$ dacă şi numai dacă $p \nmid a$ şi $p \mid b$;

(ii) Câte polinoame de grad cel mult 1 din $\mathbb{Z}_n[X]$ sunt inversabile?

10.10. Fie A un inel comutativ cu $0 \neq 1$, fără divizori ai lui zero, iar A[X] inelul de polinoame asociat. Pentru fiecare număr întreg $n \geq 2$ definim aplicaţia $\varphi_n: A[X] \to A[X]$, $\varphi_n(f) = f^n$ şi presupunem că mulţimea $M = \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 2, \varphi_n$ este endomorfism al inelului $A[X]\}$ este nevidă. Să se demonstreze că există şi este unic un număr prim $p > 0$ a.î. $M = \{p, p^2, p^3, \ldots, p^k, \ldots\}$.

10.11. Să se arate că nu există inele unitare şi comutative A a.î. $A[X] \simeq (\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

10.12. Fie A un inel unitar. Să se demonstreze că inelele A[X] şi $\mathbb{Z}[X]$ sunt izomorfe dacă şi numai dacă inelele A şi $\mathbb{Z}$ sunt izomorfe.

10.13. Fie K un corp comutativ şi A un inel unitar. Să se demonstreze că inelele K[X] şi A[X] sunt izomorfe dacă şi numai dacă inelele K şi A sunt izomorfe.

10.14. Fie k şi K două corpuri a.î. grupurile multiplicative $(k^*, \cdot)$ şi $(K^*, \cdot)$ nu sunt izomorfe. Să se arate că inelele k[X] şi K[X] nu sunt izomorfe.

Folosind acest rezultat, să se demonstreze că inelele $\mathbb{Q}[X]$ şi $\mathbb{R}[X]$ nu sunt izomorfe şi de asemenea inelele $\mathbb{R}[X]$ şi $\mathbb{C}[X]$ nu sunt izomorfe.

10.15. Arătaţi că inelele $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}[X]$ nu sunt izomorfe, dar grupurile lor aditive $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{R}[X], +)$ sunt izomorfe.

10.16. Fie A un inel comutativ integru şi fie A[X] inelul polinoamelor în X cu coeficienţi din A. Determinaţi automorfismele inelului A[X].

10.17. Fie A un domeniu de integritate. Să se arate că o funcţie $\varphi: A[X] \to A[X]$ este un automorfism al lui A[X] care invariază elemenele lui A dacă şi numai dacă există a, $b \in A$, a inversabil, a.î. $\varphi(f(X)) = f(aX + b)$, oricare ar fi $f \in A[X]$.

10.18. (i) Fie polinomul $P = X^5 \in \mathbb{R}[X]$. Arătaţi că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}^*$, polinomul $P(X+\alpha)-P(X)$ nu are rădăcini reale;

(ii) Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de gradul $n \geq 2$ cu rădăcini reale şi distincte Arătaţi că există $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ a.î. polinomul $P(X+\alpha)-P(X)$ să aibă toate rădăcinile reale.

10.19. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ a.î. $f(a + b) = f(a) + f(b)$, oricare ar fi $a,b \in \mathbb{R}$.

10.20. Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$. Să se arate că:

(i) Dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci f(a) divide numărul f(a+f(a));

(ii) Există $a \in \mathbb{Z}$ a.î. f(a) să nu fie număr prim ;

(iii) Nu există $f \in \mathbb{Z}[X]$ neconstant a.î. f(a) să fie număr prim, pentru orice $a \in \mathbb{Z}$.

10.21. Să se determine polinoamele $P \in \mathbb{R}[X]$ a.î. $XP(X)=(X-3)P(X+1)$.

10.22. (i) Pentru ce valori ale lui m polinomul $(X-1)^m-X^m+1$ este divizibil cu X^2-X+1?

(ii) Pentru ce valori ale lui m polinomul $(X-1)^m+X^m+1$ este divizibil cu X^2-X+1?

10.23. Să se arate că restul împărțirii polinomului f din $\mathbb{R}[X]$ prin (X-a)(X-b), unde $b\neq a$, este

$$r=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}X+\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

10.24. Fie f un polinom de gradul doi din $\mathbb{Q}[X]$. Atunci $f(n)\in\mathbb{Z}$ pentru orice $n\in\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă f este de forma $f=\frac{1}{2}\left[cX^2+(2b-c)X+2a\right]$ cu a, b, $c\in\mathbb{Z}$.

10.25. Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor X^n-1 şi X^m-1 $(m, n\in\mathbb{N}^*)$.

10.26. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor X^n+a^n şi X^m+a^m din $\mathbb{R}[X]$ $(m, n\in\mathbb{N}^*, a\in\mathbb{R})$.

10.27. Să se arate că rădăcinile polinomului $f=1+\frac{X}{1!}+\frac{X^2}{2!}+...+\frac{X^n}{n!}$ sunt simple.

10.28. Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ cu proprietatea că $\tilde{f}(\alpha)\geq 0$, pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$. Atunci există două polinoame $f_1, f_2\in\mathbb{R}[X]$ a.î. $f=f_1^2+f_2^2$.

10.29. Fie $\mathbb{Z}[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți întregi, p un număr prim şi $f, g\in\mathbb{Z}[X]$. Dacă $p|fg$, atunci $p|f$ sau $p|g$.

10.30. Fie $f\in\mathbb{Z}[X]$. Notăm cu c(f) = cel mai mare divizor comun al coeficienților lui f. Dacă f , $g\in\mathbb{Z}[X]$ să se arate că $c(fg)=c(f)\cdot c(g)$.

10.31. Determinați $m\in\mathbb{N}$ a.î. X^m-1 este divizibil cu $X^{2n}+X^n+1$,$(n\in\mathbb{N}^*)$.

10.32. Să se arate că dacă m este un număr întreg nedivizibil cu 5, atunci polinomul $P = X^5-X+m$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.33. Studiați reductibilitatea polinoamelor $X^2+\hat{1}$ și $X^3+X+\hat{2}$ în $\mathbb{Z}_3[X]$, respectiv $\mathbb{Z}_5[X]$.

10.34. Există $a\in\mathbb{Z}_5$ a.î. $X^4+aX+\hat{1}$ să fie ireductibil în $\mathbb{Z}_5[X]$?

10.35. Verificați că polinoamele $f = X^5+X^3+X$ și $g = X^5+\hat{2}\,X\in\mathbb{Z}_3[X]$ au aceeași funcție polinomială, deși ca polinoame sunt diferite.

10.36. Fie p un număr prim, p>3.

(i) Să se determine restul împărțirii numărului $\prod_{k=1}^{p}(k^2+k+1)$ la p;

(ii) Să se arate că polinomul $X^2+X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_p[X]$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$ dacă și numai dacă $p\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$.

10.37. Fie K un corp comutativ de caracteristică $p\neq 0$. Să se arate că polinomul $X^{p^n}-x\in K[X]$ (x fiind arbitrar în K) are cel mult o rădăcină.

10.38. Fie K un corp finit. Să se determine mulțimea numerelor naturale $n\geq 2$ care au proprietatea că orice polinom de grad n din K[X] care nu are rădăcini în K este ireductibil în K[X].

10.39. (i) Să se rezolve ecuația $3x^2-4x+1=0$ în $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$, $\mathbb{Z}_{13}$, $\mathbb{Z}_{17}$, $\mathbb{Z}_{19}$;

(ii) Să se rezolve ecuația $x^2-x+5 = 0$ în $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$, $\mathbb{Z}_{17}$, $\mathbb{Z}_{19}$.

10.40. Să se demonstreze că dacă $P\in\mathbb{R}[X]$ de grad n, are n rădăcini reale, atunci oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$ polinomul $Q = P(X+ia) + P(X-ia)$ are, de asemenea, n rădăcini reale.

10.41. Fie $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ un corp finit cu n elemente, iar K[X] inelul polinoamelor de o nedeterminată peste corpul K. Să se arate că în inelul K[X] are loc identitatea: $X^n - X = \prod_{i=1}^{n}(X-k_i)$.

10.42. Să se găsească a, b$\in\mathbb{Z}$ ştiind că ecuaţiile $x^3+2x^2+ax+b = 0$ şi $x^3-x^2+bx+a = 0$ admit o rădăcină întreagă comună.

10.43. Fie $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n\in\mathbb{Z}[X]$ cu a_0, a_n impare. Dacă P(1) este impar să se arate că P nu are rădăcini raţionale.

10.44. Dacă un polinom din $\mathbb{Q}[X]$ admite rădăcina $\sqrt[3]{2}$ să se arate că polinomul este divizibil cu X^3-2.

10.45. Să se arate că polinomul $P = (1+X+\ldots+X^n)^2-X^n$ este reductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.46. Să se arate că polinomul $P = (X^n-2)^n-X-2$ este reductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.47. Fie p un număr prim, iar k un număr natural ≥ 1.

Stabiliţi numărul polinoamelor inversabile, de grad mai mic sau egal cu n, din inelul $\mathbb{Z}_{p^k}[X]$.

10.48. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}_4[X]$ există polinoame inversabile ce au gradul diferit de zero.

10.49. Să se determine a$\in\mathbb{Z}_3$ a.î. polinomul

$$P = \hat{2}X^3 + (a+\hat{2})X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X] \text{ să fie ireductibil.}$$

10.50. Să se arate că polinomul $X^6+aX+\hat{5}\in\mathbb{Z}_7[X]$ este reductibil, pentru orice a$\in\mathbb{Z}_7$.

10.51. Fie polinoamele:

1) $P_1 = X^3+X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_2[X]$

2) $P_2 = X^4+X^3+\hat{1}\in\mathbb{Z}_2[X]$

3) $P_3 = X^5+\hat{1}\in\mathbb{Z}_3[X]$

4) $P_4 = X^4-\hat{1}\in\mathbb{Z}_7[X]$.

Să se decidă dacă polinoamele date sunt sau nu reductibile, iar în caz afirmativ să se descompună în factori primi.

10.52. Fie $f=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n\in\mathbb{Z}[X]$ un polinom de grad ≥ 1 şi să presupunem că există p număr prim, $p\geq 2$, a.î. $p|a_0$, a_1, …, a_{n-1}, $p\nmid a_n$ şi $p^2\nmid a_0$. Atunci f este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

Observaţie. Criteriul de ireductibilitate de mai sus este datorat lui *Eisenstein.*

10.53. Să se arate că dacă p este un număr prim, atunci polinomul $f = X^{p-1}+X^{p-2}+\ldots+X+1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.54. Să se arate că polinomul $X^{52}+X^{51}+X^{50}+\ldots+X^2+X+1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.55. Să se arate că polinomul X^n-120 ($n\geq 1$) este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.56. Fie $p\geq 2$ un număr prim. Să se arate că polinomul $f = X^3 + pX^2 + pX + p$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.57. Să se arate că polinomul $f = X^{2^n}+1$, ($n\in\mathbb{N}$) este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.58. Fie $p\geq 2$ un număr prim şi $n\in\mathbb{N}$. Să se arate că polinomul $f = X^{p^n} + p - 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.59. Fie polinoamele $P=1+X+X^2+\ldots+X^{m-1}$ şi $Q = X^{u_1} + X^{u_2} + \ldots + X^{u_n}$, unde $0<u_1<u_2<\ldots<u_n$ sunt numere întregi. Pentru $k\in\{0, 1, \ldots, m-1\}$ fie n_k numărul acelor i ($1\leq i\leq n$) pentru care restul împărţirii lui u_i la m este k.

Să se demonstreze că P divide Q dacă şi numai dacă $n_0=n_1=\ldots=n_{m-1}$.

10.60. Fie $P = X^n-a_1X^{n-1}+a_2X^{n-2}-\ldots+(-1)^na_n$ un polinom cu coeficienţi reali şi care are toate rădăcinile reale şi conţinute în intervalul [0, 1]. Să se demonstreze inegalitatea:

$$a_k - a_{k+1} + a_{k+2} -\ldots+ (-1)^{n-k}a_n\geq 0, \text{ pentru orice } k,\ 1\leq k\leq n.$$

10.61. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere complexe ($n\geq 2$). Să se arate că ecuaţiile $x^n-1 = 0$ şi $a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots+a_nx^{n-1} = 0$ au cel puţin o rădăcină comună dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

10.62. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că numerele $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt pozitive dacă şi numai dacă numerele $\sum x_1,\ \sum x_1x_2,\ \dots,\ x_1x_2\dots x_n$ sunt pozitive.

10.63. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad cel mult n cu coeficientul dominant a_0, iar $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ numere reale distincte două câte două. Să se demonstreze că:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{P(x_i)}{(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_{n+1})} = \begin{cases} 0, & daca\ grad(P) \le n-1 \\ a_0, & daca\ grad(P) = n \end{cases}.$$

10.64. Fie p un număr prim, $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[X]$ cu $1 \le n < p$, iar a_0 nu se divide la p. Să se demonstreze că printre numerele 0, 1, 2, …, p-1 există cel mult n numere y pentru care p divide pe P(y).

Observaţie. Acest rezultat este datorat lui *Lagrange.*

10.65. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n \ge 2$ care are rădăcinile reale simple $x_1, \dots, x_n$. Să se demonstreze că $\sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(r)}(x_k)}{P'(x_k)} = 0$, pentru orice r natural, $r \ge 2$.

10.66. Dacă $x_1, \dots, x_7$ sunt rădăcinile ecuaţiei $x^7 - 1 = 0$ să se calculeze suma $\sum (x_1 + x_2)^{20}$.

10.67. Fie un polinom de grad n şi $x_1, \dots, x_n$ rădăcinile sale.

Notăm cu $S_k = x_1^k + \dots + x_n^k$, $k \in \mathbb{N}$. Să se arate că:

(i) $\sum_{i \ne j} x_i^p x_j^q = S_p \cdot S_q - S_{p+q}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$;

(ii) $\sum_{i \ne j} x_i^p x_j^p = \frac{1}{2} \cdot [(S_p)^2 - S_{2p}]$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$;

(iii) $\sum_{i \ne j \ne k} x_i^p x_j^q x_k^r = S_p \cdot S_q \cdot S_r - S_{p+q} \cdot S_r - S_{p+r} \cdot S_q - S_{r+q} \cdot S_p + 2S_{p+q+r}$,

$i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

10.68. Să se calculeze suma $\sum_{i\neq j} x_i^3 x_j^2$, unde x_i, x_j sunt rădăcinile ecuației $x^3+3x-5 = 0$.

10.69. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ sistemul: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 8 \\ x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 32 \end{cases}$.

10.70. Fie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 1$) distincte două câte două iar
$P = (X-a_1)^2(X-a_2)^2\ldots(X-a_n)^2+1$ şi $Q = (X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_n)-1$.
Să se arate că P şi Q sunt ireductibile în $\mathbb{Z}[X]$.

10.71. Să se descrie idealele inelului K[[X]] al seriilor formale peste corpul comutativ K.

10.72. Să se exprime ca polinom de polinoamele simetrice fundamentale, polinomul simetric $f = (X_1-X_2)^2(X_1-X_3)^2(X_2-X_3)^2$ cu coeficienți reali.

10.73. Să se exprime ca polinom de polinoamele simetrice fundamentale polinomul simetric
$f=(-X_1+X_2+\ldots+X_n)(X_1-X_2+\ldots+X_n)\ldots(X_1+X_2+\ldots-X_n)\in\mathbb{R}[X_1, X_2,\ldots,X_n]$.

10.74. Să se arate că inelul $K[Y,Z] / (Z^2)$ este izomorf cu un subinel al inelului $K[X,Y,Z] / (X^2, XY-Z)$, K fiind corp comutativ.

10.75. Fie K un corp. Arătați că (X) este ideal maximal în K[X].

10.76. Fie $a_1, \ldots, a_n$ elemente oarecare dintr-un inel A şi $A[X_1, \ldots, X_n]$ inelul polinoamelor în nedeterminatele $X_1, \ldots, X_n$ cu coeficienți în A.
Să se arate că inelul $A[X_1, \ldots, X_n] / (X_1-a_1, \ldots, X_n-a_n)$ este izomorf cu A.

10.77. Să se arate că $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,] \simeq \mathbb{Z}[X] / (X^2-d)$ (ca inele), cu d număr întreg nenul, liber de pătrate.

10.78. Să se determine un element idempotent diferit de 0 şi 1 în inelul $\mathbb{Z}_8[X] / (X^2+X+\hat{2})$.

10.79. Fie $f:A\to A'$ un morfism surjectiv de inele unitare şi comutative cu $Ker(f) \subseteq r(A)$.

Stabiliți dacă au loc afirmațiile:

(i) Pentru $x\in A$, $f(x)$ este inversabil în $A' \Leftrightarrow$ x este inversabil în A;

(ii) Pentru $x\in A$, $f(x)$ este divizor al lui zero în $A' \Leftrightarrow$ x este divizor al lui zero în A;

(iii) Pentru $x\in A$, $f(x)$ este idempotent în $A'\Leftrightarrow$ x este idempotent în A.

Partea 2: Soluțiile problemelor

§1. Operații algebrice. Semigrupuri. Monoizi. Morfisme de monoizi

1.1. (i). O operație algebrică pe M fiind de fapt o funcție definită pe M×M cu valori în M, numărul acestora va fi egal cu n^{n^2} deoarece |M| = n, iar |M×M| = n^2 (am folosit faptul că numărul funcțiilor definite pe o mulțime M cu m elemente, cu valori într-o mulțime N cu n elemente, este egal cu n^m).

(ii). Pe diagonala principală a tablei de compunere sunt n poziții iar deasupra ei sunt C_n^2. Dacă operația algebrică de pe M este comutativă, atunci $n + C_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ poziții se completează arbitrar iar apoi sub diagonala principală se vor pune elementele de deasupra diagonalei principale aşezate însă simetric față de aceasta.

Raționând la fel ca la (i) deducem că pe M se pot defini $n^{(n(n+1))/2}$ operații algebrice comutative.

(iii). Tabela unei operații algebrice de pe M ce admite element neutru are ocupate elementele de pe prima linie şi prima coloană cu elementele lui M. Restul de $(n-1)^2$ poziții putând fi ocupate arbitrar cu elementele lui M, deducem că pe M se pot defini $n \cdot n^{(n-1)^2} = n^{(n-1)^2+1}$ operații algebrice ce admit element neutru (am înmulțit pe n cu $n^{(n-1)^2}$ deoarece rolul elementului neutru poate fi jucat de oricare din cele n elemente ale lui M)

(iv). Ținând cont de (ii) şi (iii) deducem că numărul căutat este egal cu $n^{(n(n-1))/2}$ (care reprezintă numărul de operații algebrice de pe M ce admit drept element neutru un element fixat al lui M) luat de n ori, adică $n \cdot n^{(n(n-1))/2} = n^{(n^2-n+2)/2}$.

1.2. (i). Operația algebrică "$\circ$" este asociativă $\Leftrightarrow (\forall)x,y,z \in \mathbb{R}$ avem :

$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \Leftrightarrow x(y \circ z)+ax+b(y \circ z)+c = (x \circ y)z+a(x \circ y)+bz+c$
$\Leftrightarrow x(yz+ay+bz+c)+ax+b(yz+ay+bz+c) = (xy+ax+by+c)z+a(xy+ax+by+c)+bz$
$\Leftrightarrow (b-a)xz+(a+c-a^2)x+(b^2-b-c)z+c(b-a)=0.$

Cum x,y,z sunt elemente oarecare din $\mathbb{R}$ făcând pe rând (x = z = 0), (x = 0,z = 1), (x = 1, z = 0), (x = z = 1) obținem succesiv condițiile: c(a-b) = 0, $a+c-a^2 = 0$ şi b-a = 0.

Obținem astfel condițiile necesare $a = b = \lambda$ şi $c = \lambda^2-\lambda$ cu $\lambda \in \mathbb{R}$.

Suficiența acestor condiții se verifică imediat prin calcul.

(ii). "$\Rightarrow$". Dacă operația algebrică "$\circ$" este asociativă, atunci conform cu (i) există $\lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $a = b = \lambda$ şi $c = \lambda^2-\lambda$.

Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $x \circ (1-\lambda) = (1-\lambda) \circ x = x(1-\lambda)+\lambda x+\lambda(1-\lambda)+\lambda^2-\lambda =$

$= x-x\lambda+\lambda x+\lambda-\lambda^2+\lambda^2-\lambda=x$, adică $e=1-\lambda$ este element neutru pentru operația "$\circ$".

"$\Leftarrow$". Dacă notăm cu e elementul neutru pentru operația "$\circ$", atunci $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ avem $x\circ e = e\circ x = x \Leftrightarrow xe+ax+be+c = ex+ae+bx+c = x \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(e+a-1)x+be+c=0\\(e+b-1)x+ae+c=0\end{cases}$$

Cum x este oarecare, deducem că $e+a-1 = e+b-1 = be+c = ae+c = 0$ de unde rezultă că $a = b = 1-e$ şi $c = -ae$.

Dacă notăm $1-e = \lambda$ atunci $a = b = \lambda$ iar $c = -ae = -\lambda(1-\lambda) = \lambda^2-\lambda$, adică operația "$\circ$" este asociativă (conform cu (i)).

(iii). În ipoteza că operația "$\circ$" este asociativă, atunci conform cu (i) şi (ii), $a = b = \lambda$, $c = \lambda^2-\lambda$ iar elementul neutru este $e = 1-\lambda$.

Dacă $x\in U(\mathbb{R},\circ)$, atunci $(\exists)\ x'\in\mathbb{R}$ a.î. $x\circ x'=x'\circ x=e \Leftrightarrow xx'+ax+bx'+c=e$ $\Leftrightarrow xx'+\lambda x+\lambda x'+\lambda^2-\lambda = 1-\lambda \Leftrightarrow x'(x+\lambda) = 1-\lambda^2-\lambda x$. Se observă că dacă $x = -\lambda$ obținem egalitatea absurdă $0 = 1-\lambda^2-\lambda(-\lambda) = 1-\lambda^2+\lambda^2 = 1$.

Deci pentru $x \neq -\lambda$ deducem $x' = (1-\lambda^2-\lambda x)/(x+\lambda)$, adică $U(\mathbb{R},\circ) = \mathbb{R}\setminus\{-\lambda\}$.

1.3. (i). Prin calcul direct se arată că $(\forall)\ x,y,z\in\mathbb{Z}$ avem echivalențele:

$x\circ(y\circ z) = (x\circ y)\circ z$

$\Leftrightarrow a^2xyz + ab(xy+yz+zx) + (ac+b)x + b^2y + b^2z + (bc+c) =$

$= a^2xyz + ab(xy+yz+zx) + b^2x + b^2y + (ac+b)z + (bc+c)$

$\Leftrightarrow (ac+b)x + b^2z = (ac+b)z + b^2x \Leftrightarrow (b^2-b-ac)(x-z) = 0 \Leftrightarrow b^2-b-ac = 0$ (căci x şi y sunt oarecari).

Deci, operația algebrică este asociativă $\Leftrightarrow b^2-b-ac = 0$.

(ii). Presupunem că $b^2-b-ac = 0$ şi că operația din enunț are element neutru (fie acesta $e\in\mathbb{Z}$). Atunci cu necesitate $0\circ e = 0 \Leftrightarrow be+c = 0 \Leftrightarrow c = (-e)b$, adică b divide c. Reciproc, să presupunem că $b^2-b-ac = 0$ şi că b divide c (adică există $d\in\mathbb{Z}$ a.î. $c = bd$).

Dacă operația "$\circ$" are element neutru e, atunci cu necesitate $x\circ e = x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow axe + b(x+e) + c = x \Leftrightarrow e(ax+b) = (1-b)x-c$. (1)

Din $b^2-b-ac = 0$ deducem că $1-b = -(ac)/b = -(ad)$, deci (1) este echivalentă cu $e(ax+b) = -adx - bd \Leftrightarrow e(ax+b) = -d(ax+b)$, de unde deducem că elementul neutru este cu necesitate $e = -d$.

1.4. Fie $a,b\in H$, adică $(x\circ a)\circ y = x\circ(a\circ y)$ şi $(x\circ b)\circ y = x\circ(b\circ y)$, $(\forall)\ x,y\in M$.

Datorită asociativității operației " $\circ$ " deducem imediat că:
$(x \circ (a \circ b)) \circ y = ((x \circ a) \circ b) \circ y = (x \circ a) \circ (b \circ y) = x \circ (a \circ (b \circ y)) = x \circ ((a \circ b) \circ y)$, $(\forall)$ $x,y \in M$, de unde rezultă că $a \circ b \in H$, deci H este parte stabilă a lui M relativ la operația " $\circ$ ".

1.5. Din ipoteză operația algebrică este bine definită şi asociativă. Mai trebuie să arătăm că există elementul neutru.

Deoarece M este finită şi f este injectivă, atunci f este o bijecție. Din $a \in M$ şi f bijecție $\Rightarrow (\exists)$ $b \in M$ a.î. $aba = a$. Fie $e_1 = ba$ şi $e_2 = ab$. Pentru $x \in M$ există $y \in M$ a.î. $f(y) = x \Rightarrow aya = x$. Atunci $xe_1 = ayaba = aya = x$ şi $e_2x = abaya = aya = x \Rightarrow xe_1 = e_2x = x$, $(\forall)$ $x \in M$. Pentru $x = e_1$ şi $x = e_2$ obținem că $e_2e_1 = e_1$ şi $e_2e_1 = e_2 \Rightarrow e_1 = e_2 = e$ elementul neutru al lui M.

1.6. În şirul $\{a, a^2, \ldots, a^k, \ldots\}$ nu toate elementele sunt distincte deoarece S este finit. Deci există $i,j \in \mathbb{N}^*$ a.î. $a^i = a^{i+j}$. Fie $m \in \mathbb{N}^*$, $m > i+j$.

Atunci $a^m = a^{m-i} \cdot a^i = a^{m-i} \cdot a^{i+j} = a^{m+j} = a^{m+j-i} \cdot a^i = a^{m+j-i} \cdot a^{i+j} = a^{m+2j}$, etc. Deci pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $a^m = a^{m+kj}$. Fie $m > i+j$, $m = k \cdot j$. Atunci $a^m = a^{2m}$, deci a^m este idempotent.

1.7. Fie $y = x^{n-1} \Rightarrow x^n y^n = x^n (x^{n-1})^n = x^n x^{n^2-n} = x^{n^2} = x^n$, $(\forall)$ $x \in A$.

În relația din enunț înlocuim pe x cu x^n şi pe y cu y^n.

Atunci $x^{n^2} y^{n^2} = y^n x^n \Leftrightarrow x^n y^n = y^n x^n \Leftrightarrow xy = yx$, $(\forall)$ $x, y \in A$.

Observație. Dacă mulțimea $(A, \cdot)$ este grup atunci relația nu poate avea loc decât pentru $n \geq 3$. Pentru $n = 2$, egalitatea $x^2y^2 = yx$ devine pentru $y = 1$: $x^2 = x \Rightarrow x = 1$, deci nu poate avea loc pentru orice x din A.

1.8. Fie $xy = (yx)^n = [(xy)^n]^n = [(xy)(xy)^{n-1}]^n = (xy)^{n-1}(xy) = (xy)^n = yx$ pentru $n>1$. Pentru $n = 1$ concluzia este evidentă.

1.9. Arătăm că operația este comutativă, Într-adevăr:
$x \cdot y = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = [y(xy)]x = [(xy)x]y = [(yx)x]y = [(x \cdot x)y]y = (x \cdot y)y = (y \cdot y)x = y \cdot x$.

Operația este asociativă deoarece $(xy)z = (yz)x = x(yz) \Leftrightarrow (xy)z = x(yz)$.

1.10. În egalitatea 2) înlocuim y cu xy şi obținem :

$x(xy)^2x = (xy)x^2(xy) \Rightarrow x^2yxyx = xyx^3y$ (3) $\Rightarrow x^2yxyx = xyxy \Rightarrow x(xy)^3 = xyxy^2 \Rightarrow x^2y = xyxy^2 \Rightarrow x^2y^2 = xyxy \Rightarrow x^2y^2 = (xy)^2$ (4).

Relația (3) se mai scrie $x(xy)^2x = (xy)^2$ şi utilizând (4) avem :
$xx^2y^2x = x^2y^2 \Rightarrow xy^2x = x^2y^2$. Substituind pe x cu y în această ultimă relație avem : $yx^2y = y^2x^2 \Rightarrow x^2y^2 = y^2x^2 \Rightarrow (xy)^2 = (yx)^2$.

Din relația $xy^2x = (xy)^2 \Rightarrow (xy)(xy^2x) = (xy)^3 \Rightarrow (xy)^2yx = (xy)^3 \Rightarrow (yx)^2(yx) = (xy)^3 \Rightarrow (yx)^3 = (xy)^3 \Rightarrow xy = yx$.

1.11. Faptul că $(\mathbb{Z}[i],\cdot)$ este monoid comutativ este imediat.

Dacă $z=a+bi\in U(\mathbb{Z}[i],\cdot)$, atunci $a,b\in\mathbb{Z}$ (în mod evident $a\cdot b\neq 0$) şi trebuie ca $1/z\in\mathbb{Z}[i]$.

Însă $1/z=a/(a^2+b^2) - i\cdot b/(a^2+b^2)$, deci trebuie ca $a/(a^2+b^2)$, $b/(a^2+b^2)\in\mathbb{Z}$, de unde deducem imediat că (a,b) trebuie să fie egală cu una din perechile (0,1), (1,0), (0,-1) sau (-1,0), deci $U(\mathbb{Z}[i],\cdot)=\{-1,1,-i,i\}$.

1.12. Fie $z_i= x_i+y_i\sqrt{d}$, cu $x_i,y_i\in\mathbb{Z}$, i=1,2.

Atunci $z_1\cdot z_2 = (x_1x_2 + dy_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{d} \in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Pentru a demonstra partea a doua a problemei, arătăm că $N(z_1z_2) = N(z_1)\cdot N(z_2)$. Ţinând cont de expresia lui z_1z_2 de mai înainte deducem că:

$N(z_1)\cdot N(z_2) = (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = x_1^2x_2^2 - dx_1^2y_2^2 - dx_2^2y_1^2 + d^2y_1^2y_2^2 = (x_1^2x_2^2 + d^2y_1^2y_2^2) - d(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2) = (x_1x_2+dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2+x_2y_1)^2 = N(z_1z_2)$.

Dacă $z\in U(\mathbb{Z}[\sqrt{d}],\cdot)$, atunci $(\exists)\ z'\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ a.î. $zz' = 1$, deci $N(zz') = N(1)=1$, de unde $N(z)\cdot N(z')=1$, adică $N(z)\in\{-1,1\}$.

Reciproc, dacă $z = x+y\sqrt{d}\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ şi $N(z)\in\{-1,1\}$, atunci avem $1/z=1/(x+y\sqrt{d})=(x-y\sqrt{d})/(x^2-y^2d)=(x-y\sqrt{d})/N(z)=x/N(z) - (y/N(z))\sqrt{d}$, deci $1/z\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$(deoarece $x/N(z) = \pm x\in\mathbb{Z}$ iar $y/N(z) = \pm y\in\mathbb{Z}$), de unde deducem că $z\in U(\mathbb{Z}[\sqrt{d}],\cdot)$.

1.13. Fie $z=3+2\sqrt{2}$. Ţinând cont de problema anterioară avem că $N(z) = 3^2-4\cdot 2 = 9-8=1$, deci $z\in U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],\cdot)$.

Atunci $\{z^n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],\cdot)$, de unde deducem că $U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],\cdot)$ este o mulţime infinită.

1.14. "$\Rightarrow$". Presupunem prin absurd că n are în descompunerea sa cel puţin doi factori primi distincţi p_1, p_2. Cum $(p_1,p_2)=1$, $(\exists)\ \alpha, \beta\in\mathbb{Z}$ a.î. $\alpha p_1+\beta p_2=1$.

Deoarece $p_1=(n,\alpha p_1)$, $p_2=(n,\beta p_2)$, deducem că $\alpha p_1, \beta p_2\in M$.

Cum M este parte stabilă a lui $(\mathbb{Z},+)$ ar rezulta că $\alpha p_1+\beta p_2=1\in M$, adică $(n,1)\neq 1$ ceea ce este absurd, de unde rezultă că n este de forma p^k cu k număr natural, $k\geq 1$ iar p prim.

"$\Leftarrow$". Fie $n = p^k$ cu p prim, k natural, $k \geq 1$.

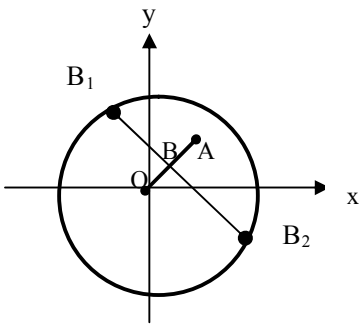
Atunci $M_n = \{x \in \mathbb{Z} : (p^k, x) \neq 1\} = \{pt : t \in \mathbb{Z}\}$ care în mod evident este parte stabilă a lui $(\mathbb{Z},+)$.

1.15. Să arătăm la început că $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subseteq M$.

Cum $|\pm 1| = 1 \Rightarrow -1, 1 \in M$, adică $0 = (-1)+1 \in M$.

Fie $z \in \mathbb{C}$ a.î. $0<|z|<1$. Considerăm în planul raportat la sistemul ortogonal de axe xOy cercul de centru O şi rază 1 (vezi figura) şi punctul A, imaginea geometrică a lui z (care va fi situat în interiorul cercului unitate).

Dacă B este mijlocul lui OA, atunci B este imaginea geometrică a lui z/2.



Perpendiculara în B pe OA taie cercul unitate în B_1, B_2. Dacă notăm cu z_1, z_2 afixele lui B_1, B_2, atunci $z = z_1+z_2$ (căci figura OB_1AB_2 este romb); cum $|z_1|=|z_2|=1 \Rightarrow z_1, z_2 \in M$, deci $z \in M$, adică $D_0 \subseteq M$.

Să arătăm acum că şi coroana circulară $D_1=\{z \in \mathbb{C} : 1<|z| \leq 2\}$ este inclusă în M. Pentru $z \in D_1$, $1< |z| \leq 2$, deci $|z/2| < 1$ adică $z/2 \in D_0 \subseteq M$, deci $z/2 \in M$. Cum $z = 2 \cdot z/2$ iar $z/2 \in M$, rezultă că $z \in M$, adică $D_1 \subseteq M$.

Să demonstrăm acum că dacă $D_n=\{z \in \mathbb{C} : 2^{n-1}<|z| \leq 2^n\} \subseteq M$ (pentru $n \in \mathbb{N}$) atunci şi $D_{n+1} \subseteq M$. Într-adevăr, dacă $z \in D_{n+1}$, atunci $2^n<|z| \leq 2^{n+1} \Rightarrow 2^{n-1}<|z/2| \leq 2^n \Rightarrow z/2 \in D_n \subseteq M \Rightarrow z \in M$ (deoarece $z=2 \cdot z/2$), deci $D_{n+1} \subseteq M$.

Conform principiului inducției matematice deducem că $D_n \subseteq M$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$. Cum $\mathbb{C} = \bigcup_{n \in N} D_n$ deducem că $\mathbb{C} \subseteq M$ şi cum $M \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow M=\mathbb{C}$.

1.16. Dacă $z_i=(x_i,y_i) \in M$, i=1,2,3, atunci :

$(z_1 \circ z_2) \circ z_3 = (x_1x_2, x_2y_1+y_2) \circ (x_3,y_3) = (x_1x_2x_3, x_3(x_2y_1 + y_2) + y_3) =$
$= (x_1x_2x_3, x_3x_2y_1 + x_3y_2 + y_3)$ iar $z_1 \circ (z_2 \circ z_3) = (x_1,y_1) \circ (x_2x_3, x_3y_2 + y_3) =$
$= (x_1x_2x_3, x_2x_3y_1 + x_3y_2 + y_3)$, de unde rezultă că $(z_1 \circ z_2) \circ z_3 = z_1 \circ (z_2 \circ z_3)$, adică operația "$\circ$" este asociativă. Tot prin calcul se arată imediat că elementul

neutru este elementul e = (1,0) (e $\circ$ z = (1,0) $\circ$ (x,y) = (1·x, 0·y+y) = (x,y)) adică dubletul (M,$\circ$) este monoid. Dacă z = (x,y) $\in$ U(M,$\circ$), atunci ($\exists$) z' = (x',y')$\in$M a.î. zz' = z'z = e $\Leftrightarrow$ xx'=1 şi x'y+y' = xy'+y = 0.

Dacă x = 1, atunci x' = 1, deci y' = -y$\in\mathbb{Z}$, iar dacă x = -1 atunci x' = -1, deci y′ = y$\in\mathbb{Z}$.

În concluzie:

$$U(M,\circ) = \{(1,-y) : y\in\mathbb{Z}\} \cup \{(-1,y) : y\in\mathbb{Z}\}.$$

1.17. Fie $M_i=\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}\in M$ cu $a_i,b_i,c_i,d_i\in\mathbb{Z}$ şi $a_i + b_i = c_i + d_i$, i=1,2.

Atunci $M_1\cdot M_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$, deci pentru a demonstra că $M_1\cdot M_2\in M$ trebuie să arătăm că $a_1a_2+b_1c_2+a_1b_2+b_1d_2= c_1a_2+d_1c_2+c_1b_2+d_1d_2 \Leftrightarrow a_1 (a_2+b_2)+b_1 (c_2+d_2) = c_1 (a_2+b_2)+d_1 (c_2+d_2)$ ceea ce este adevărat dăcă ținem cont de faptul că $a_2+b_2 = c_2+d_2$ şi că $a_1 +b_1 = c_1+d_1$.

Deoarece matricea unitate $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ face în mod evident parte din M deducem că dubletul (M,·) este monoid.

Dacă ținem cont de faptul că pentru oricare două matrice $A,B\in M_2(\mathbb{Z})$ avem relația $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$ se deduce imediat că:

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in U(M,\cdot) \Leftrightarrow \det(A) = \pm1 \Leftrightarrow$ ad-bc = $\pm1 \Leftrightarrow$ (a+b)(a -c) = ±1 (căci a+b=c+d) $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a-c=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a+b=1 \\ a-c=-1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a+b=-1 \\ a-c=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a+b=-1 \\ a-c=-1 \end{cases}$.

Exprimând numai în funcție de a, deducem că :

$$U(M,\cdot)=\left\{\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a-1 & 2-a \end{pmatrix}\middle| a\in Z\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix}\middle| a\in Z\right\}\cup$$
$$\cup\left\{\begin{pmatrix} a & -1-a \\ a-1 & -a \end{pmatrix}\middle| a\in Z\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix} a & -1-a \\ a+1 & -2-a \end{pmatrix}\middle| a\in Z\right\}.$$

1.18. Plecând de la observația că pentru f,g$\in$A şi n$\in\mathbb{N}$ avem :

$$(f * g)(n)= \sum_{d_1d_2=n} f(d_1)g(d_2)$$

rezultă imediat comutativitatea produsului de convoluție, iar asociativitatea din aceea că pentru f,g,h$\in$A şi n$\in\mathbb{N}$:

$$[(f * g) * h](n) = [f * (g * h)](n) = \sum_{d_1d_2d_3=n} f(d_1)g(d_2)h(d_3).$$

Să demonstrăm acum că funcția aritmetică $e:\mathbb{N}^*\to\mathbb{C}$ definită pentru $n\in\mathbb{N}$ prin $e(n)=1$ pentru $n=1$ şi 0 pentru $n\geq 2$ este elementul neutru al produsului de convoluție. Într-adevăr, pentru $f\in A$ şi $n\in\mathbb{N}$ avem :

$(f * e)(n)= \sum_{d_1d_2=n} f(d_1)e(d_2) = f(n)e(1) = f(n)$, deci $f * e = f$, adică dubletul $(A, *)$ este monoid comutativ.

Fie acum $f\in U(A,*)$; atunci $(\exists)$ $f'\in A$ a.î. $f * f' = f' * f = e$, deci în particular $(f * f')(1) = e(1) \Leftrightarrow f(1)f'(1) = 1$, de unde rezultă cu necesitate $f(1) \neq 0$. Reciproc, fie $f\in A$ a.î. $f(1)\neq 0$ şi să demonstrăm că $f\in U(A, *)$. Pentru aceasta definim recursiv funcția aritmetică $f':\mathbb{N}^*\to\mathbb{C}$ prin

$$f'(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(1)} & pentru\ n=1 \\ -\dfrac{1}{f(1)}\displaystyle\sum_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d)f(\frac{n}{d}) & pentru\ n\geq 2 \end{cases}$$

şi vrem să demonstrăm că $f'=f^{-1}$ (în monoidul $(A, *)$).

Într-adevăr, $(f * f')(1) = f(1) \cdot 1/f(1) = 1 = e(1)$, iar pentru $n \geq 2$ $(f * f')(n) = \sum_{d|n} f(d)f'(n/d) = f(1) \cdot f'(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d) \cdot f'(n/d) = f(1) \cdot f'(n) = 0 =$ $=e(n)$, adică $f * f' = e$, de unde concluzia dorită $(f'=f^{-1})$.

1.19. (i). Presupunem prin absurd că există $a,b\in M$ a.î. $ab = 1$ şi $ba \neq 1$. Aplicația $\varphi : M \to M$ definită prin $\varphi(x) = bx$ este injectivă (dacă $\varphi(x) = \varphi(y)$ atunci $bx = by \Rightarrow a(bx) = a(by) \Rightarrow (ab)x = (ab)y \Rightarrow 1x = 1y \Rightarrow x = y$). Cum M este finită atunci φ este surjectivă, deci există $c\in M$ a.î. $\varphi(c) = bc = 1$. Atunci $a(bc) = a \Rightarrow (ab)c = a \Rightarrow 1c = a \Rightarrow c = a \Rightarrow ba = 1$ – fals.

(ii). De exemplu putem lua $f(n) = \begin{cases} n-1, & n\geq 1 \\ 0, & n=0 \end{cases}$ şi $g(n) = n+1$, $(\forall)$ $n\in\mathbb{N}$.

(iii). Să presupunem prin absurd că $n > q$. Înmulțind relația din enunț la stânga cu a^q şi la dreapta cu b^p se obține : $a^q b^n a^m b^p = a^q b^q a^p b^p$ de unde $a^q b^q b^{n-q} a^m b^p = 1$ şi $b^{n-q} a^m b^p = 1$. Notând cu $c = a^m b^p$ (dacă $n-q = 1$) sau $c = b^{n-q-1} a^m b^p$ (dacă $n-q > 1$), rezultă că $bc = 1$. Relațiile $ab = 1$ şi $bc = 1$ implică $a = c$, deci $ba= 1$, fals.

Analog pentru $q > n$.

Aşadar $q = n$, deci $b^n a^m = b^n a^p$. Presupunem prin absurd $m > p$. Înmulțim egalitatea anterioară la stânga cu a^n obținem $a^n b^n a^m = a^n b^n a^p$, de unde $a^m = a^p$ ceea ce implică $a^m b^p = a^p b^p = 1$ şi deci $a^{m-p} a^p b^p = 1 \Rightarrow a^{m-p} = 1$. Dacă $m-p = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow ba = 1$ – fals. Dacă $m-p > 1$ atunci $ca = 1$ unde $c = a^{m-p-1} \Rightarrow cab = b \Rightarrow c = b \Rightarrow ba = 1$ – fals.

Analog se exclude cazul $p > m$, deci $p = m$.

1.20. Dacă $M \subseteq \mathbb{R}$, atunci şi $\mathbb{R} \subseteq M$ deci $M = \mathbb{R}$; să presupunem că $M \neq \mathbb{R}$, adică $(\exists)\ z_0 = a_0+i\cdot b_0 \in M$ cu $a_0,b_0 \in \mathbb{R}$ iar $b_0 \neq 0$. Atunci $ib_0 = z_0-a_0 \in M$ şi $1/b_0 \in M$ deducem că $(1/b_0)\cdot i\cdot b_0 = i \in M$. Atunci $(\forall)\ z = a+ib \in \mathbb{C}$ (cu $a,b \in \mathbb{R}$) rezultă că $z \in M$, adică $M = \mathbb{C}$.

1.21. Fie $x,y \in Z(M)$. Atunci, folosind faptul că înmulţirea este asociativă pe M deducem că $(xy)z = x(yz) = x(zy) = (xz)y = (zx)y = z(xy)$, $(\forall)\ z \in M$, deci $xy \in Z(M)$, adică Z(M) este parte stabilă în raport cu înmulţirea.

Deoarece $Z(M) \subseteq M$ rezultă că înmulţirea pe Z(M) este asociativă. Cum $1x = x1 = x$, $(\forall)\ x \in M$, atunci $1 \in Z(M)$, deci Z(M) este submonoid al lui M.

1.22. Dacă $A = a\cdot I_n$, cu $a \in \mathbb{C}$, atunci în mod evident $A\cdot B = aI_n\cdot B = B\cdot aI_n = B\cdot A$, $(\forall)\ B \in M_n(\mathbb{C})$, adică $A \in Z(M_n(\mathbb{C}),\cdot)$.

Fie acum $A \in Z(M_n(\mathbb{C}),\cdot)$, $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ iar B_{ij} matricea pătratică de ordin n ce are pe poziţia (i,j) 1 iar in rest zero $(i,j \in \{1,2,\ldots,n\})$. Deoarece matricea $A\cdot B_{ij}$ are coloana a-j-a egală cu $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ iar în rest toate elementele egale cu zero pe când matricea $B_{ij}\cdot A$ are doar linia i egală cu $(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$, din egalitatea $B_{ij}\cdot A = A\cdot B_{ij}$ $(\forall)\ i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, deducem că $a_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$. Scriind că $A\cdot B = B\cdot A$, B fiind de data aceasta matricea de ordin n ce are toate elementele egale cu 1, deducem că $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = a$, $a \in \mathbb{C}$, adică $A = a\cdot I_n$.

1.23. (i). Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ şi scriind că $AX=XA$ deducem că $z = 0$ şi $t = x$, adică X este de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, cu $x,y \in \mathbb{C}$.

(ii). Fie acum $X \in M_2(\mathbb{C})$ a.î. $X^n=A$; deoarece $AX = X^nX = X^{n+1} = XX^n = XA$, ţinând cont de (i) deducem cu necesitate că X trebuie să fie de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ cu $x,y \in \mathbb{C}$.

Deoarece se verifică imediat prin inducţie matematică egalitatea:

$X^n = \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1}y \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$, din $X^n = A$ deducem că $x^n = 1$ si $nx^{n-1}y = 2$, de unde rezultă că $x^n = 1$ şi $2x = ny$.

În concluzie X trebuie cu necesitate să fie de forma $X=\begin{pmatrix}\varepsilon & 2\varepsilon/n\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$ cu $\varepsilon^n=1$.

Dacă $X=\begin{pmatrix}\varepsilon & 2\varepsilon/n\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$ cu $\varepsilon^n=1$, atunci $X^n=\begin{pmatrix}\varepsilon^n & 2\varepsilon^n\\ 0 & \varepsilon^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.24. Să presupunem prin absurd că $(\exists)\ n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$ a.î. $A^n=I_2$ (se deduce imediat că $n\geq 2$). Prin inducție matematică se demonstrează că dacă $A\in M_2(\mathbb{R})$, atunci $(\forall)\ k\in\mathbb{N}^*$, $(\exists)\ x_k,y_k\in\mathbb{R}$ a.î. $A^k=x_k\cdot A+y_k\cdot I_2$ (1), cu $x_1=1$, $y_1=0$, $x_2=a+d$, $y_2=-\det(A)$ iar

$$\begin{cases}x_{k+1}=(a+d)x_k+y_k\\ y_{k+1}=-\det(A)x_k=-x_k\end{cases}\quad(2)$$

Cum $A^n=I_2$, din (1) deducem că $I_2=x_nA+y_nI_2\Leftrightarrow x_nA=(1-y_n)I_2$.

Dacă $x_n\neq 0\Rightarrow A=(1-y_n)/x_n\cdot I_2$, adică $a=d=(1-y_n)/x_n$ şi cum prin ipoteză $a+d>2\Rightarrow(1-y_n)/x_n>1$. (3)

Însă $\det(A)=1\Leftrightarrow ad=1\Leftrightarrow((1-y_n)/x_n)^2=1$ care este în contradicție cu (3).

Dacă $x_n=0$, atunci ținând cont de (1) deducem că $A^n=y_n\cdot I_2\Leftrightarrow I_2=y_n\cdot I_2$, adică $y_n=1$.

Ținând cont din nou de relațiile (2) deducem că $y_n=x_{n-1}$, adică $x_{n-1}=1$, iar $x_n=(a+d)x_{n-1}+y_{n-1}$, de unde $y_{n-1}=-(a+d)$.

Deci $x_{n-2}=a+d$ şi din $x_{n-1}=(a+d)x_{n-2}+y_{n-2}\Rightarrow y_{n-2}+(a+d)^2=1\Rightarrow y_{n-2}=1-(a+d)^2$.

Deci $A^{n-2}=(a+d)A+[1-(a+d)^2]\cdot I_2\Rightarrow A^n=(a+d)A^3+[1-(a+d)^2]\cdot A^2$ şi cum $A^2=(a+d)A-I_2$ iar $A^n=I_2$ deducem că $I_2=(a+d)A^3+[1-(a+d)^2]\cdot[(a+d)A-I_2]$.

În final găsim $A^3=[(a+d)^2-1]A+[2-(a+d)^2]/(a+d)I_2$ şi cum din (2) deducem că $x_3=(a+d)x_2+y_2=(a+d)^2-1$ iar $y_3=-x_2=-(a+d)$, ultima egalitate matriceală devine $x_3A+y_3I_2=[(a+d)^2-1]\cdot A+[2-(a+d)^2]/(a+d)I_2$ $\Leftrightarrow -(a+d)=[2-(a+d)^2]/(a+d)\Rightarrow 2=0$ ceea ce este absurd, deci $A^n\neq I_2$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

1.25. Din relația $A+B=AB$ deducem că $(I_n-A)(I_n-B)=I_n$, adică I_n-A este inversabilă şi $(I_n-A)^{-1}=I_n-B$, deci şi $(I_n-B)(I_n-A)=I_n\Leftrightarrow A+B=BA$, adică $AB=BA$.

1.26. Evident, este suficient să probăm doar o implicație.

Fie $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ a.î. $I_n-AB\in U(M_n(\mathbb{C}),\cdot)\Leftrightarrow(\exists)\ C\in M_n(\mathbb{C})$ a.î. $C(I_n-AB)=(I_n-AB)C=I_n\Leftrightarrow C-CAB=C-ABC=I_n$.

Atunci $(I_n - BA)(I_n + BCA) = I_n - BA + BCA - B(ABC)A = I_n - BA + BCA - B(C - I_n)A = I_n - BA + BCA - BCA + BA = I_n$ şi analog se demonstrează că $(I_n + BCA)(I_n - BA) = I_n$, adică $I_n - BA \in U(M_n(\mathbb{C}),\cdot)$.

1.27. Dacă S este chiar monoid, adică există $1 \in S$ element neutru, considerăm $M = S$ şi $f = 1_S$.

În caz contrar, fie $1 \notin S$ şi $M = S \cup \{1\}$. Înzestrăm M cu o operație algebrică $*$ a.î. M să devină monoid, iar incluziunea lui S în M să fie un morfism.

Fie $x,y \in M$. Atunci definim : $x * y = xy$, dacă $x,y \in S$, $x * 1 = 1 * x = x$, pentru orice $x \in S$ şi $1 * 1 = 1$.

Deoarece S este semigrup, înmulțirea pe S este asociativă şi atunci operația $*$ este asociativă.

Deci $(M, *)$ este monoid cu 1 element neutru.

Evident, incluziunea este morfism de semigrupuri.

1.28. (i). Dacă $x,y \in M_{f,g}$, atunci $f(x) = g(x)$, $f(y) = g(y)$ şi astfel $f(xy) = f(x)f(y) = g(x)g(y) = g(xy)$, adică $xy \in M_{f,g}$. Cum $f(1) = g(1)$ rezultă că $1 \in M_{f,g}$, adică $M_{f,g}$ este submonoid al lui M_1. Evident $f \circ i = g \circ i$.

(ii). Din $f \circ i' = g \circ i'$ rezultă că $f(i'(x)) = g(i'(x))$, $(\forall)$ $x \in M'$, adică $i'(x) \in M_{f,g}$, $(\forall)$ $x \in M'$. Definim atunci $u: M' \to M_{f,g}$ prin $u(x) = i'(x)$, $(\forall)$ $x \in M'$. Evident u este un morfism de monoizi (deoarece i′ este un morfism) şi $i \circ u = i'$. Dacă mai există $v : M' \to M_{f,g}$ a.î. $i \circ v = i'$, atunci $u(x) = i'(x) = (i \circ v)(x) = i(v(x)) = v(x)$, $(\forall)$ $x \in M'$, deci $u = v$.

1.29. (i) $\Rightarrow$ (ii). Deoarece $f(1) = 1 \Rightarrow 1 \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow \{1\} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

Fie $x \in \mathrm{Ker}(f)$, adică $f(x) = 1 = f(1)$. Cum f este presupusă injectivă $\Rightarrow$ $x = 1$, adică $\{1\} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, de unde egalitatea $\mathrm{Ker}(f) = \{1\}$.

Să demonstrăm că (ii) $\not\Rightarrow$ (i).

Pentru aceasta vom considera monoizii $M_1 = (\mathbb{Z}_3,\cdot)$ şi $M_2 = (\mathbb{Z}_2,\cdot)$.

Considerăm $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_2$, $f(\hat{x}) = \bar{x}^2$, pentru $x = 0,1,2$ (unde $\hat{x}$ este clasa lui x în $\mathbb{Z}_3$ iar $\bar{x}$ este clasa lui x în $\mathbb{Z}_2$). În mod evident f este morfism de monoizi iar $f(\hat{0}) = \bar{0}$, $f(\hat{1}) = \bar{1}$ şi $f(\hat{2}) = \bar{0}$. Se observă că deşi $\mathrm{Ker}(f) = \{\hat{1}\}$, totuşi f nu este injectivă deoarece $f(\hat{0}) = f(\hat{2})$.

1.30. (i) $\Rightarrow$ (ii). Dacă $x \in M_0$, cum $f \circ g = f \circ h \Rightarrow f(g(x)) = f(h(x))$, $(\forall)$ $x \in M_0 \Rightarrow g(x) = h(x)$, $(\forall)$ $x \in M_0 \Rightarrow g = h$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Să presupunem prin absurd că $Ker(f) \neq \{1\}$. Vom nota $M_0 = Ker(f)$ (care este submonoid al lui M_1 conform problemei **1.28.**, deci şi monoid) şi vom considera $g,h: M_0 \to M_1$, g incluziunea iar h morfismul nul.

Atunci pentru $x \in M_0$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = 1$ iar $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(1) = 1$, adică $f \circ g = f \circ h$ şi totuşi $g \neq h$.

1.31. (i) $\Rightarrow$ (ii). Fie $y \in M_2$; cum f este surjectivă, $(\exists)\ x \in M_1$ a.î. $f(x) = y$. Atunci $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$, adică $g = h$.

(ii) $\not\Rightarrow$(i). Fie $M_1 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ şi $M_2 = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ monoizii multiplicativi ai numerelor întregi nenule, respectiv raţionale nenule, iar $f : M_1 \to M_2$ incluziunea canonică.

Dacă M_3 este un alt monoid iar $g,h : M_2 \to M_3$ sunt morfisme de monoizi a.î. $g \circ f = h \circ f$, vom proba că $g = h$.

Fie $x = m/n \in \mathbb{Q}^*$, cu $m \in \mathbb{N}^*$ şi $n \in \mathbb{Z}^*$. Atunci $1 = g(1) = g(n \cdot 1/n) = g(n) \cdot g(1/n) \Rightarrow g(1/n) = (g(n))^{-1}$ şi analog $h(1/n) = (h(n))^{-1}$. Avem că $g(x) = g(m/n) = g(m \cdot 1/n) = g(m) \cdot g(1/n) = g(m) \cdot (g(n))^{-1}$ iar $h(x) = h(m/n) = h(m \cdot 1/n) = h(m) \cdot h(1/n) = h(m) \cdot (h(n))^{-1}$. Dar, deoarece f este morfismul incluziune şi $g \circ f = h \circ f$, deducem că g şi h coincid pe mulţimea $\mathbb{Z}^*$, de unde rezultă că $g(x) = h(x)$, $(\forall)\ x \in M_2$, adică $g = h$.

Deci f verifică (ii) fără însă a verifica şi pe (i).

§ 2. Grup. Subgrup. Subgrup generat de o mulţime. Calcule într-un grup. Grupuri de permutări.

2.1. (i). Prin calcul se probează că dubletul $(\mathbb{Z}, \circ)$ este monoid comutativ:

-asociativitatea:

$$(x \circ y) \circ z = (xy+2(x+y+1)) \circ z = (xy+2(x+y+1))z+2(xy+2(x+y+1)+z+1) =$$
$$= xyz + 2xz + 2yz + 2z + 2xy + 4x + 4y + 4 + 2z + 2 =$$
$$= xyz + 2xy + 2xz + 2yz + 4x + 4y + 4z + 6 = x \circ (y \circ z)$$

(din comutativitatea adunării şi înmulţirii numerelor întregi)

-comutativitatea :

$$x \circ y = xy+2(x+y+1) = xy+2x+2y+2 = y \circ x$$

- *elementul neutru este e = -1* deoarece $x \circ (-1) = x(-1)+2(x+(-1)+1) = x$

Căutăm elementele inversabile. Fie $x \in U(\mathbb{Z}, \circ)$; atunci $(\exists)\ x' \in \mathbb{Z}$ a.î. $x \circ x' = -1 \Leftrightarrow xx' + 2(x+x'+1) = -1 \Leftrightarrow xx'+2x+2x'+4 = 1 \Leftrightarrow (x+2)(x'+2) = 1 \Leftrightarrow$ $(x+2 = 1$ şi $x'+2 = 1)$ sau $(x+2 = -1$ şi $x'+2 = -1) \Leftrightarrow (x = -1$ şi $x' = -1)$ sau $(x = -3$ şi $x' = -3)$, deci $U(\mathbb{Z}, \circ) = \{-3, -1\}$, adică $(\mathbb{Z}, \circ)$ nu este un grup.

(ii). Conform punctului precedent, $G = \{-3, -1\}$.

2.2. Este evident că $(\forall)\ x,y\in\mathbb{Q} \Rightarrow x\circ y\in\mathbb{Q}$.

Operația este asociativă şi comutativă, elementul neutru este e = 0, iar simetricul lui $x\in\mathbb{Q}\setminus\{\frac{1}{k}\}$ este $x' = \frac{x}{kx-1} \neq \frac{1}{k}$, deci $\mathbb{Q}\setminus\{\frac{1}{k}\}$ este grup abelian față de operația algebrică definită.

2.3. G = (d,∞). Dacă G abelian, conform problemei **1.2.**, a = b şi atunci $x\circ y = xy + ax + ay + c = (x + a)(y +a) + c - a^2$.

$(x\circ y)\circ z = [(x + a)(y +a) + c - a^2]\circ z = [(x + a)(y +a) + c - a^2 +a]\cdot(z +a) + c - a^2$ iar $x\circ(y\circ z) = (x + a)[(y +a)(z +a) + c - a^2 + a] + c - a^2$.

Asociativitatea implică egalitatea pentru orice $x,y,z\in G$, adică

$(x + a)(y + a)(z + a) + (c - a^2 + a)(z + a) = (x + a)(y + a)(z + a) + (x + +a)(c - a^2 + a) \Rightarrow c = a^2 - a \Rightarrow x\circ y = (x + a)(y +a) - a$, $(\forall)\ x, y > d \Rightarrow$ $\Rightarrow x(y + a) + a(y +a) - a > d$.

Fie $f(x) = x(y + a) + a(y +a) - a$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Rightarrow y + a > 0$, $(\forall)\ y > d \Rightarrow d + a > 0$.

$\inf\limits_{x\in(d,\infty)} f(x) = \lim\limits_{x\to d} f(x) = d \Rightarrow d(y + a) + a(y + a) - a = d$

$(d + a)(y + a) - (d + a) = 0 \Rightarrow (d + a)(y + a - 1) = 0$, $(\forall)\ y > d \Rightarrow$ $\Rightarrow -d = a \Rightarrow x\circ y = xy - dx - dy + d = (x - d)(y - d) + d - d^2$ cu care se verifică axiomele grupului. În concluzie a = b = -d şi c = d.

2.4. Verificăm mai întâi dacă înmulțirea pe G este bine definită.

Fie $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ şi $A(b) = \begin{pmatrix} 1 & \ln b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ două matrice din G , cu $a,b\in\mathbb{R}$, $a,b > 0$. Atunci $A(a)\cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a + \ln b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix} = A(ab)\in G$, deci G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

Se ştie că înmulțirea matricelor este asociativă.

Din $A(a)\cdot A(b) = A(ab)$ deducem că elementul neutru este A(1) (care este tocmai matricea unitate I_2) iar inversa matricei A(a) este $(A(a))^{-1} = A(1/a)$ (deoarece $A(a)\cdot A(1/a)=A(1)$).

Tot din relația $A(a)\cdot A(b) = A(ab)$, ținând cont de comutativitatea înmulțirii numerelor reale deducem că $A(a)\cdot A(b) = A(b)\cdot A(a) = A(ab) = A(ba)$.

Deci G este grup comutativ.

2.5. Pentru $x\in\mathbb{R}-\{1/2\}$, notăm $A(x)=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$.

Dacă şi $y\in\mathbb{R}-\{1/2\}$, atunci prin calcul direct se demonstrează că : $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-2xy)\in G$, deoarece $x+y-2xy=1/2 \Leftrightarrow (2x-1)(2y-1)=0 \Leftrightarrow x=1/2$ sau $y=1/2$ – absurd.

În mod evident $A(x)\cdot A(y)=A(y)\cdot A(x)$, $(\forall)\ x,y\in\mathbb{R}-\{1/2\}$.

Deoarece $A(x)\cdot A(0)=A(x)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}-\{1/2\}$, deducem că $A(0)$ este elementul neutru.

Deoarece pentru $x\neq 1/2$ avem $A(x)\cdot A(\frac{x}{2x-1})=A(0)$, deducem că $(A(x))^{-1} = A(\frac{x}{2x-1})$, deci orice element din G este inversabil.

Din cele de mai sus rezultă că G este grup comutativ.

2.6. Avem :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & x & 0 \\ c_1 & 0 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & x & 0 \\ c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & 0 & a_1b_2+b_1d_2 \\ 0 & x^2 & 0 \\ a_2c_1+c_2d_1 & 0 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

Prin calcul simplu se verifică faptul că ultima matrice este din M doar dacă $x^2 = x$, adică $x \in \{0,1\}$.

Elementul neutru este I_3, deci trebuie ca $x = 1$. În acest fel, M este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & x & 0 \\ c_1 & 0 & d_1 \end{pmatrix}\in M$ şi $B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & x & 0 \\ c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix}\in M$ a.î. $AB = I_3$. Trebuie să avem: $\begin{cases} a_1a_2+b_1c_2=1 \\ a_1b_2+b_1d_2=0 \\ a_2c_1+c_2d_1=0 \\ c_1b_2+d_1d_2=1 \end{cases}$.

Înmulțind prima ecuație cu d_1 şi pe a treia cu $(-b_1)$ şi adunându-le obținem $a_2(a_1d_1 - b_1c_1) = d_1 \Rightarrow a_2 = d_1 \Rightarrow c_2 = - c_1$, $d_2 = a_1$, $b_2 = - b_1$, deci $B = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -b_1 \\ 0 & x & 0 \\ -c_1 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$. Se observă că $B \in M$ şi că $BA = I_3$, deci fiecare element este inversabil, adică M este un grup.

2.7. Deoarece G trebuie să conțină pe I_2, atunci: $\begin{cases} x_0+ay_0 = 1 \\ x_0 - ay_0 = 1 \\ y_0 - bx_0 = 0 \\ y_0 + bx_0 = 0 \end{cases}$

Din primele două ecuații rezultă că $x_0 = 1$ şi $y_0 = 0 \Rightarrow bx_0 = 0 \Rightarrow b = 0$.

Deci $G = \left\{ \begin{pmatrix} x+ay & y \\ y & x-ay \end{pmatrix} \middle| x^2 - 4y^2 = 1, x, y \in R \right\}$.

Fie $A(x,y) = \begin{pmatrix} x+ay & y \\ y & x-ay \end{pmatrix}$ şi $A(x',y') = \begin{pmatrix} x'+ay' & y' \\ y' & x'-ay' \end{pmatrix}$. Atunci

$$A(x,y)\cdot A(x',y') = \begin{pmatrix} xx'+yy'+a^2yy'+a(x'y+xy') & x'y+xy' \\ x'y+xy' & xx'+yy'+a^2yy'-a(x'y+xy') \end{pmatrix}.$$

Notăm $X = xx'+ yy'+ a^2yy'$ şi $Y = x'y + xy'$. Atunci $A(x,y)\cdot A(x',y') = A(X,Y)$ şi ca aceasta din urmă să fie din G trebuie ca $X^2 - 4Y^2 = 1 \Leftrightarrow (xx' + yy' + a^2yy')^2 - 4(x'y + xy')^2 = 1$.

Folosind faptul că $x^2 - 4y^2 = x'^2 - 4y'^2 = 1$, ajungem la relația :

$yy'[-15yy' - 6xx' + a^4yy' + 2a^2xx' + 2a^2yy'] = 0 \Leftrightarrow$

$2(a^2 - 3)xx' + (a^4+2a^2 - 15)yy' = 0 \Leftrightarrow (a^2-3)[\, 2xx' + (a^2 + 5)yy'] = 0$.

Cum x şi y, respectiv x′ sau y′, sunt arbitrare rezultă că relația este satisfăcută dacă $a^2 = 3$, adică $a = \pm\sqrt{3}$.

Se arată uşor acum că pentru $a = \sqrt{3}$, $b=0$ sau $a = -\sqrt{3}$, $b = 0$, $(G,\cdot)$ este grup.

2.8. Dacă $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix} \in G$, se observă că $AB = BA = \begin{pmatrix} xx' & 0 \\ 0 & yy' \end{pmatrix} \in G$ deoarece $(xx')^n = x^n\cdot x'^n = 1$ şi analog pentru $(yy')^n = 1$, deci $(AB)^n = I_2$, adică G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor. Evident $I_2 \in G$.

Prin inducție se arată că $A^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 0 & y^n \end{pmatrix}$, iar din $A^n = I_2$ obținem că $x^n = = y^n = 1$ ceea ce arată că x şi y sunt rădăcini de ordinul n ale unității.

Dacă $A \in G$, inversa lui A este $A^{-1} = A^{n-1}$ (deoarece $A^n = I_2$). Astfel, $(G,\cdot)$ este grup.

Numărul de elemente ale lui G este n^2 (x şi y pot lua n valori distincte deoarece sunt rădăcini de ordin n ale unității)

2.9. Pentru $x,y \in \mathbb{R}$ notăm $A(x,y) = \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -2y & x-4y \end{pmatrix}$.

Prin calcul direct se arată că dacă mai considerăm $x',y' \in \mathbb{R}$, atunci: $A(x,y)\cdot A(x',y') = A(xx' + 12yy', xy' + x'y) \in G$ (deoarece dacă notăm $x'' = xx' + 12yy'$ şi $y'' = xy' + x'y$, atunci avem relaţia $(x'')^2 - 12(y'')^2 = 1$, ţinând cont şi de faptul că $x^2-12y^2 = (x')^2-12(y')^2 = 1$). Din relaţia de mai sus deducem că $I_2 = A(1,0)$ este elementul neutru căutat, iar $(A(x,y))^{-1} = A(x,-y) \in G$, precum şi faptul că G este comutativ.

2.10. Fie $M(a,b), M(c,d) \in G$, adică $\det M(a,b) = \det M(c,d) = 1$.

Atunci prin calcul direct se arată că $M(a,b)\cdot M(c,d) = M(e,f)$ cu $e = ac + 2bd$, $f = ad + bc + bd$. Deoarece $\det(M(a,b)\cdot M(c,d)) = \det M(a,b) \cdot \det M(c,d) = 1 \Rightarrow \det M(e,f) = 1 \Rightarrow M(e,f) \in G$, deci G este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor.

Înmulţirea este asociativă, iar $I_3 = M(1,0) \in G$.

Dacă $M(a,b) \in G \Rightarrow \det M(a,b) = 1 \neq 0$, deci $M(a,b)$ este inversabilă $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ există $M(a,b)^{-1}$ a.î. $M(a,b) \cdot M(a,b)^{-1} = I_3 \Rightarrow \det (M(a,b)^{-1}) = 1$. Prin calcul se determină $M(a,b)^{-1}$ şi anume : $M(a,b)^{-1} = M(a^2-b^2, b^2 - ab)$, deci $M(a,b)^{-1} \in G$.

Astfel, $(G,\cdot)$ este grup.

2.11. Dacă $f = a + bX + cX^2$ şi $g = X^3 - 1$ sunt prime între ele, atunci $f(1) \neq 0$ şi $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 \neq 0$, unde ε este o rădăcină de ordin trei a unităţii, diferită de 1. Din prima condiţie obţinem $a + b + c \neq 0$, iar din a doua înmulţită cu ε obţinem $a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3 \neq 0$. Adică $\begin{cases} c\varepsilon^2 + b\varepsilon + a \neq 0 \ \big| b \\ b\varepsilon^2 + a\varepsilon + c \neq 0 \ \big| -c \end{cases} \Rightarrow (b^2 - ac)\varepsilon + ab - c^2 \neq 0$. Dacă considerăm, de exemplu, $\varepsilon = \cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)$, atunci condiţia de mai sus devine $(b^2 - ac)\cos(2\pi/3) + (a^2 - bc) \neq 0$ sau $(b^2 - ac)\sin(2\pi/3) \neq 0$. Deci $a^2 - bc \neq 0$ sau $b^2 - ac \neq 0$ sau $c^2 - ab \neq 0$.

Cum $\det A = (a + b + c)[a^2 - bc + b^2 - ac + c^2 - ab]$, din cele de mai sus rezultă că $\det A \neq 0$, adică A este inversabilă.

Se verifică imediat faptul că $A,B \in M \Rightarrow AB = BA \in M$, $I_3 \in M$ este elementul neutru, iar inversa lui $A \in M$ este tot o matrice din M.

Astfel, $(M,\cdot)$ este un grup abelian.

2.12. Se observă întâi că $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'}$, $(\forall)\ t,t' \in \mathbb{R}$, astfel că verificarea axiomelor grupului rezultă mai uşor:

- *asociativitatea* : $(\forall)\ t, t', t'' \in \mathbb{R}$: $f_t \circ (f_{t'} \circ f_{t''}) = (f_t \circ f_{t'}) \circ f_{t''}$

$\Leftrightarrow f_{t+(t'+t'')} = f_{(t+t')+t''}$, $(\forall)\ t,t',t'' \in \mathbb{R}$, adevărat, deoarece adunarea numerelor reale este asociativă;

-*comutativitatea* $(\forall)\ t,t' \in R$: $f_t \circ f_{t'} = f_{t'} \circ f_t \Leftrightarrow f_{t+t'} = f_{t'+t}$, $(\forall)\ t,t' \in \mathbb{R}$ ceea ce este adevărat deoarece adunarea numerelor reale este comutativă;

- *elementul neutru* este f_0 deoarece $f_0 \circ f_t = f_t \circ f_0$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$;
- *elementele inversabile :* dacă $f_t \in G$, atunci $f_t^{-1} = f_{-t} \in G$.

Astfel, $(G, \circ)$ este grup comutativ.

2.13. (i). Se constată că $(\forall)\ X \in G$, $\det X = [(a+c)^2 - (b+d)^2][(a-c)^2 + (b-c)^2] \neq 0$ şi $(\forall)\ X, Y \in G \Rightarrow XY = YX \in G$.

De asemenea, $I_4 \in G$ iar dacă se calculează X^{-1} se constată că $X^{-1} \in G$.

Prin urmare $(G, \cdot)$ este grup abelian.

(ii). Fie $A=I_4$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Făcând tabla înmulțirii pe $H = \{I_4, B, C, D\}$ se observă că $BD = DB = I_4$, $CD = DC = B$, $D^2 = C$, $B^2 = C$, de unde rezultă că $H \leq G$ şi $(\forall)\ X \in G$ avem că $X = aI_4 + bB + cC + dD$. Prin inducție după n se deduce că $X^n = a_nI_4 + b_nB + c_nC + d_nD$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

(iii). Notând cu Y matricea din enunț, atunci $Y = 2I_4 + 3D \Rightarrow$

$$Y^n = (2I_4 + 3D)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (3^k 2^{n-k}) \cdot D^k, \text{ unde } D^k = \begin{cases} I_4, & dacă\ k = 4\ m \\ D, & dacă\ k = 4m+1 \\ C, & dacă\ k = 4m+2 \\ B, & dacă\ k = 4m+3 \end{cases}$$ şi deci

$$Y^n = 2^nI_4 + 3^nD^n + \sum_{\substack{k=1 \\ k=4m}}^{n} C_n^k (3^k 2^{n-k}) \cdot I_4 + \sum_{\substack{k=1 \\ k=4m+1}}^{n} C_n^k (3^k 2^{n-k}) \cdot D + \sum_{\substack{k=1 \\ k=4m+2}}^{n} C_n^k (3^k 2^{n-k}) \cdot C +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k=4m+3}}^{n} C_n^k (3^k 2^{n-k}) \cdot B.$$

2.14. (i). Fie $X \in M_A$, $X = xI_3 + yA$, $x \in \mathbb{R}^*$, $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \det X = x^3$, deci nu depinde de y.

(ii). Notăm $X(x,y) = xI_3 + yA$ şi cum $A^2 = O_2$ avem $X(x,y) \cdot X(z,t) = X(xz, xt + yz)$ deci $X(x,y) \cdot X(z,t) \in M_A$. Din expresia lui $X(x,y) \cdot X(z,t)$ observăm că înmulțirea matricelor din M_A este comutativă. Înmulțirea matricelor este asociativă, $I_3 = X(1,0) \in M_A$ este elementul neutru, iar inversa lui $X(x,y)$ este $X(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x^2}) \in M_A$, deci $(M_A, \cdot)$ este grup abelian.

(iii). Avem :

a) $aX(x,y) = X(ax,ay)$; $X(x,y) + X(z,t) = X(x + z, y + t)$;

b) $X(x,y)^{-1} = X(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x^2})$;

c) $X(x,y)^* = \det X \cdot X(x,y)^{-1} = x^3 X(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x^2}) = X(x^2, -xy)$;

d) $X(x,y)^n = X(x^n, nx^{n-1}y)$, prin inducție după n ;

e) $(X^*)^n = X(x^{2n}, -nx^{2n-1}y)$; $(X^*)^{-n} = X(x^{-2n}, nx^{-2n-1}y)$, de unde $(X^*)^n + (X^*)^{-n} = X(x^{2n} + x^{-2n}, -nx^{2n-1}y + nx^{-2n-1}y) \in M_A$ şi din a) rezultă că $\det((X^*)^n + (X^*)^{-n} = (x^{2n} + x^{-2n})^3 \geq 2^3 = 8$.

2.15. (i). Prin calcul direct se arată că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor ; înmulțirea matricelor este asociativă, $I_2 \in M$ este element neutru iar dacă $A \in M \Rightarrow \det A \neq 0$, deci A este inversabilă şi $A^{-1} \in M$. Astfel, $(M,\cdot)$ este grup.

(ii). Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \in M$, $X X^t = I_2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ b(a+b) = 0 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2ab = 0 \Rightarrow$

$a = 0$ sau $b = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(iii). Fie $Y \in M$, $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ a.î. $Y^t \cdot Y = I_2$. Atunci

$\begin{cases} a^2 = 1 \\ ab = 0 \\ b^2 + (a+b)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.16. Fie $z_1, z_2 \in U_n \Rightarrow z_1^n = z_2^n = 1$. Deoarece $(z_1 \cdot z_2^{-1})^n = z_1^n \cdot z_2^{-n} = 1$ deducem că $U_n \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$. Analog, dacă $z_1, z_2 \in T \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$, atunci $|z_1 \cdot z_2^{-1}| = |z_1| \cdot |z_2^{-1}| = 1$, adică $z_1 \cdot z_2^{-1} \in T$, deci $T \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$.

2.17. Asociativitatea înmulțirii rezultă imediat prin calcul (de exemplu : $a(bc) = aa = 1$ iar $(ab)c = cc = 1$, e.t.c.).

Elementul neutru este 1, iar $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = c$. Faptul că K este grup comutativ rezultă imediat din tabelă ($ab = ba = c$, e.t.c.).

2.18. Grupul aditiv al soluțiilor ecuației $a\cos x + b \sin x + c = 0$ fiind subgrup al lui $(\mathbb{R},+)$ va conține pe 0, deci $a = -c$. Avem două cazuri :

1) $a = 0 \Rightarrow c = 0$ şi ecuația devine $b \sin x = 0$. Considerând cazul nebanal când b nu este 0, mulțimea soluțiilor este subgrupul $G = \pi\mathbb{Z} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2) $a \neq 0$. Ecuația devine $\sin \frac{x}{2} (b \cos \frac{x}{2} - a \sin \frac{x}{2}) = 0$ şi mulțimea soluțiilor sale este $G = G_1 \cup G_2$ unde $G_1 = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ şi

$$G_2 = \{2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dacă G este subgrup atunci $u = 4 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \in G$. Analizând cele două cazuri, $u \in G_1$ şi $u \in G_2$, deducem că în mod necesar $b = 0$. Dar în acest caz ecuația dată este $a \cos x + c = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$ a cărei mulțime de soluții este subgrupul $G = 2\pi\mathbb{Z} = \{ 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2.19. Să presupunem că $A \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice pentru care $(G(A),+)$ este grup, $A=(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Vom nota $L_i(x_1,\ldots x_n)$ matricea din $M_n(\mathbb{R})$ care pe a i-a linie are $x_1,x_2,\ldots,x_n$ (în această ordine), restul elementelor fiind nule. Atunci $B = L_1(a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n}) \in G(A)$, $C= L_2(a_{11},a_{12,}\ldots,a_{1n}) \in G(A)$ şi deci $B+C \in G(A)$.

Avem $0 = \det(A+(B+C)) = \det A + \det(B+C) = \det A$ deci $\det A = 0$. De aici rezultă că $D_i = L_i(a_{i1},a_{i2,}\ldots,a_{in}) \in G(A)$, $(\forall)$ $1 \leq i \leq n$ căci $\det(A+D_i) = 2^n \det A = 0 = \det A + \det D_i$.

Deducem în continuare că pentru $i \neq j$, $-D_i + L_j(x_{j1},x_{j2,}\ldots,x_{jn}) \in G(A)$ deci şi $L_j(x_{j1},x_{j2,}\ldots,x_{jn}) \in G(A)$, $(\forall)$ $1 \leq j \leq n$, $(\forall)$ $x_{j1},x_{j2,}\ldots,x_{jn} \in \mathbb{R}$.

De aici deducem că $G(A) = M_n(\mathbb{R})$ căci dacă $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, atunci:

$$X = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_{i1},x_{i2,}\ldots,x_{in}) \in G(A).$$

Pentru i,j arbitrare, fixate, putem alege X cu linia a i-a nulă a.î. A+X să aibă pe fiecare linie diferită de a i-a câte un singur 1, fiecare situat pe câte o coloană dintre coloanele $\{1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\}$. Vom avea $\pm a_{ij} = \det(A+X) = \det X = 0$ deci $a_{ij} = 0$, adică $A = O_n$.

2.20. Vom demonstra că în orice grup necomutativ G există cel puțin cinci elemente distincte.

Cum G este necomutativ, $(\exists)$ $x,y \in G$ a.î. $x \neq y$ şi $xy \neq yx$. Atunci 1, x, y, xy, yx sunt distincte două câte două.

Rezultă de aici că orice grup cu cel mult cinci elemente este comutativ.

2.21. Fie G o mulțime cu n elemente $(n \in \mathbb{N}^*)$, $G = \{a_0,\ldots,a_{n-1}\}$.

Dacă $i,j \in \{0,1,2, \ldots,n-1\}$ definim $a_i \cdot a_j = a_r$, unde r este restul împărțirii lui i+j la n.

Această înmulțire este evident asociativă, comutativă, elementul neutru este a_0, iar simetricul lui a_i este a_{n-i}, $(\forall)$ $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.

2.22. Să presupunem prin absurd că există un grup G, H_1,H_2 subgrupuri proprii ale sale a.î. $G = H_1 \cup H_2$. Cum H_1, H_2 sunt presupuse proprii, $(\exists)$ $x,y \in G$ a.î. $x \notin H_1$, $y \notin H_2$ (adică $x \in H_2$ şi $y \in H_1$).

Considerăm elementul $z = xy \in G = H_1 \cup H_2$. Dacă $z \in H_1 \Rightarrow x = zy^{-1} \in H_1$ ceea ce este absurd , iar dacă $z \in H_2 \Rightarrow y = x^{-1}z \in H_2$ – din nou absurd.

Observaţie. Deducem că dacă $H_1,H_2 \leq G$, atunci $H_1 \cup H_2 \leq G \Leftrightarrow H_1 \subseteq H_2$ sau $H_2 \subseteq H_1$.

2.23. Dacă vom considera grupul lui Klein **K**={1,a,b,c}(vezi problema **2.17.**) atunci :

K = {1,a}∪{1,b}∪{1,c} iar {1,a}, {1,b},{1,c} sunt subgrupuri proprii ale lui **K**.

2.24. Fie $G = H \cup K \cup L$, unde H şi K au trei elemente, deci sunt grupuri ciclice, adică $H = \{ 1,a,a^2\}$ şi $K = \{1,b,b^2\}$, unde $a \neq b$. Observăm că $H \cap K$ este subgrup al lui H diferit de H (dacă am avea $H \cap K = H \Rightarrow H \subseteq K \Rightarrow$ $\Rightarrow H = K \Rightarrow G = H \cup L$ – absurd).

Cum $| H \cap K | / 3 \Rightarrow |H \cap K| = 1 \Rightarrow H \cap K = \{1\}$.

În mod analog, $H \cap L = \{1\} = L \cap K$.

Fie $c = ab$ şi $d = a^2b \Rightarrow c \notin H$ şi $c \notin K \Rightarrow c \in L$ (dacă de exemplu $c \in H \Rightarrow$ $\Rightarrow b=a^{-1}c \in H \Rightarrow K \subset H \Rightarrow H = K$ – absurd).

În mod analog deducem că $d \notin H$ şi $d \notin K \Rightarrow d \in L$.

Deoarece $a \in H$ şi $c \in L \Rightarrow ac = d \in K$ (dacă $d \in H \Rightarrow c \in H$- absurd, iar dacă $d \in L \Rightarrow a \in L \Rightarrow H \subset L \Rightarrow G = K \cup L$ – absurd).

Am obţinut că $d \in K \cap L \Rightarrow d = 1 \Rightarrow a^2b = 1 \Rightarrow a^3b = a1 \Rightarrow a = b$, contradicţie.

2.25. Fie $x \in H$, arbirar. Atunci $(\exists)$ $a \in G$ a.î. $x = a^2 \Rightarrow x^{-1} = (a^2)^{-1} =$ $=(a^{-1})^2 \in H.(1)$

Fie $x,y \in H \Rightarrow (\exists)$ $a,b \in G$ a.î. $x = a^2$ şi $y = b^2 \Rightarrow xy = a^2b^2=aabb=abab=$ $=(ab)^2 \in H.$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $(H,\cdot)$ este subgrup al lui $(G,\cdot)$.

Reciproca nu este adevărată.

Fie S_3 grupul neabelian al permutărilor de ordin 3.

Fie $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Se verifică uşor că H este subgrup al lui S_3, $H = \{ x^2 \mid x \in S_3\}$ dar S_3 nu este comutativ.

2.26. Pentru $a \in G$ fixat $\Rightarrow (\exists)$ $x_0 \in G$ a.î. $ax_0a = a$. Notăm cu $ax_0 = e'$. Pentru $b \in G$ $(\exists)$ $x_1 \in G$ a.î. $ax_1a = b$. Atunci $e'b = ax_0(ax_1a) = ax_1a = b \Rightarrow e'b = b$,

$(\forall)$ $b \in G$. Analog, dacă notăm cu $x_0 a = e'' \Rightarrow be'' = b$, $(\forall)$ $b \in G \Rightarrow e' = e'' = e$ (elementul neutru).

Fie $b \in G$ şi $a = c = e \Rightarrow (\exists)$ $x' \in G$ a.î. $ex'b = e \Rightarrow x'b = e$ şi $(\exists)$ $x'' \in G$ a.î. $bx''e = e \Rightarrow bx'' = e$.

Dar $x'' = ex'' = x'bx'' = x'e = x' \Rightarrow x' = x'' = x^{-1}$, deci orice element al lui G este inversabil. Astfel, $(G,\cdot)$ este grup.

2.27. Din $ab = c^n \Rightarrow b = a^{-1}c^n \Rightarrow ba = a^{-1}c^n a = (a^{-1}ca)^n$, deci $d = a^{-1}ca$ verifică $ba = d^n$.

2.28. Fie $\mathbb{Z}_p$ şi $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in Z_p \right\}$. $(G,\cdot)$ este grup necomutativ.

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2b+ac \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Punem $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a+a_n & b+a_nc+b_n \\ 0 & 1 & c+c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & 1 & c_{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n + a, & a_1 = a \\ b_{n+1} = b_n + a_n c + b \\ c_{n+1} = c_n + c, & c_1 = c \end{cases} \Rightarrow a_n = na \text{ şi } c_n = nc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{n+1} - b_n = b + a_n c \Rightarrow b_n = nb + \frac{na(n-1)c}{2} \Rightarrow A^p = \begin{pmatrix} 1 & pa & pb + pac\frac{p-1}{2} \\ 0 & 1 & pc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

deoarece $a,b,c \in \mathbb{Z}_p \Rightarrow G$ are p^3 elemente.

2.29. Fie $x \in G$ fixat. Definim $f_x: G \to G$ şi $g_x : G \to G$ prin $f_x(y) = xy$, respectiv $g_x(y) = yx$. Din condiţiile din enunţ rezultă că f_x şi g_x sunt injecţii, şi deoarece G este finită, ele vor fi bijecţii. Atunci există $e_1, e_2 \in G$ a.î. $f_x(e_1) = x$ şi $g_x(e_2) = x \Rightarrow xe_1 = e_2 x = x$. Atunci $e = e_1 = e_2 \in G$ este element neutru. Tot din faptul că f_x şi g_x sunt bijecţii rezultă că există x' şi x'' în G a.î. $f_x(x') = e$ şi $g_x(x'') = e \Rightarrow xx' = x''x = e \Rightarrow x' = ex' = x''xx' = x''e = = x''$, deci $x^{-1} = x' = x''$ este inversul lui x. Cum x a fost ales oarecare în G, atunci orice element din G este inversabil, deci G este grup.

2.30. Evident, are loc egalitatea $x\,(yx)^n = (xy)^n x$, $(\forall)$ $x,y \in G$ şi conform ipotezei rezultă că $xy = yx$, deci G este abelian.

2.31. Evident, aba = bab $\Leftrightarrow$ ab = b(ab)a^{-1} $\Rightarrow$ ab = b(b(ab)a^{-1})a^{-1} = =b^2(ab)a^{-2} şi din aproape în aproape avem ab = b^n (ab)a^{-n} , de unde rezultă echivalența cerută.

2.32. (i). Evident, deoarece G este un grup abelian, se verifică uşor că $M_{m,n}(G)$ este grup abelian.

Deoarece orice matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m,n}(G)$ se identifică cu o funcție $f : \{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\} \to G$, $f(i,j) = a_{ij}$ şi reciproc, deducem că numărul elementelor lui $M_{m,n}(G)$ este egal cu numărul acestor funcții, adică cu r^{mn}.

(ii). Presupunem că ma ≠ nb şi să admitem că M(a,b) ≠ ∅. Fie $A= (a_{ij}) \in M(a,b)$. Calculând suma elementelor matricei A în două moduri, şi anume :

$$\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} a = ma \text{ respectiv } \sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} b = nb$$

rezultă că ma = nb , contradicție. Deci M(a,b) = ∅.

(iii). Fie ma = nb. Există o bijecție de la mulțimea $M_{m-1,n-1}(G)$ la mulțimea M(a,b). Într-adevăr, fie $B\in M_{m-1,n-1}(G)$, $B= (b_{ij})$, $1\le i\le m-1$, $1\le j \le n-1$, şi construim matricea

$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M(a,b)$ definind elementele sale în felul următor:

1) $a_{ij} = b_{ij}$ pentru $1\le i\le m-1$, $1\le j \le n-1$;

2) $a_{in} = a - \sum_{1\le j\le n-1} a_{ij}$ pentru $1 \le i \le m-1$

3) $a_{mj} = b - \sum_{1\le i\le m-1} a_{ij}$ pentru $1 \le j \le n-1$

4) $a_{mn}= a - \sum_{1\le j\le n-1} a_{mj} = b - \sum_{1\le i\le m-1} a_{in}$ (deoarece $a - \sum_{1\le j\le n-1} a_{mj} =$

$= a- \sum_{1\le j\le n-1} (b - \sum_{1\le i\le m-1} a_{ij}) = a - (n-1)b + \sum_{\substack{1\le i\le m-1\\ 1\le j\le n-1}} a_{ij} = a + b - nb + S$, unde

$S = \sum_{\substack{1\le i\le m-1\\ 1\le j\le n-1}} a_{ij}$. În baza lui 2) avem :

$b - \sum_{1\le i\le m-1} a_{in} = b - \sum_{1\le i\le m-1} (a - \sum_{1\le j\le n-1} a_{ij}) = b - (m-1)a + S = a + b - ma + S.$

Cum ma = nb rezultă a doua egalitate din 4).)

Din 2) rezultă că $\sum_{1\le j\le n} a_{ij} = a$ pentru $1 \le i \le m-1$, şi din 3). Avem că $\sum_{1\le i\le m} a_{ij} = b$ pentru $1 \le j \le n-1$ iar din 4). Rezultă că $a = \sum_{1\le j\le n} a_{mj}$ şi $b = \sum_{1\le i\le m} a_{in}$, adică suma elementelor de pe linia m, respectiv coloana n, este a, respectiv b.

Aşadar, matricea A construită este din M(a,b) şi se va obţine prin bordarea matricei B cu elemente din G a.î. în noua matrice suma elementelor de pe fiecare linie să fie egală cu b, iar a_{mn} se obţine datorită condiţiei ma = nb.

Funcţia $\alpha : M_{m-1,n-1}(G) \to M(a,b)$ definită prin $\alpha(B) = A$ este o bijecţie. Evident α este injectivă. Într-adevăr, fie $\alpha(B_1) = \alpha(B_2) = A$, unde $B_1, B_2 \in M_{m-1,n-1}(G)$ şi care sunt submatrici ale lui A, obţinute din A prin suprimarea ultimei linii şi ultimei coloane, deci $B_1 = B_2$.

Fie $A \in M(a,b)$ şi să considerăm B submatricea lui A obţinută prin suprimarea liniei m şi coloanei n. Avem evident $B \in M_{m-1,n-1}(G)$ şi $\alpha(B) = A$, deci α este o surjecţie.

Deoarece α este o bijecţie, mulţimea M(a,b) are acelaşi număr de elemente ca şi $M_{m-1,n-1}(G)$, adică $r^{(m-1)(n-1)}$.

2.33. Demonstrăm mai întâi că dacă $A,B,C \le G$ a.î. $A \subseteq C$, $(AB)\cap C = A(B\cap C)$.

Fie $ac \in A(B\cap C)$, cu $a \in A$ şi $c \in B\cap C$. Atunci $ac \in AB$, $ac \in AC = C$, deci $ac \in (AB)\cap C$, adică $A(B\cap C) \subseteq (AB) \cap C$. Pentru cealaltă incluziune fie $ab \in (AB)\cap C$, cu $a \in A$ şi $b \in B$. Atunci $b \in C$, deci $ab \in A(B\cap C)$, adică $(AB)\cap C \subseteq A(B\cap C)$, de unde egalitatea cerută.

Astfel, conform celor de mai sus, $A = A(A\cap C) = (AC)\cap B = (BC)\cap B = B$, deci $A = B$.

2.34. Din $Hx = Ky \Rightarrow H = Kyx^{-1} = Kz$, unde $z = yx^{-1} \in G$. Cum $1 \in H = Kz \Rightarrow 1 = kz$, cu $k \in K$ şi deci $z = k^{-1} \in K$. Cum $Kz = K \Rightarrow H = K$.

2.35. Pe mulţimea $A\times B$ considerăm relaţia $(a,b) \sim (a',b') \Leftrightarrow ab = a'b'$ care este o relaţie de echivalenţă deoarece este:

-*reflexivă*: (a,b) ~(a,b), ($\forall$) (a,b)$\in$A×B deoarece ab = ab;

-*simetrică* : (a,b) ~ (a',b') $\Rightarrow$ (a',b') ~ (a,b), ($\forall$) (a,b),(a',b')$\in$A×B deoarece ab = a′b′ $\Rightarrow$ a′b′ = ab;

-*tranzitivă*: (a,b) ~ (a',b') şi (a',b') ~(a",b") $\Rightarrow$ ab = a'b' şi a'b' = a"b" $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ab = a"b" $\Rightarrow$ (a,b) ~(a",b"), ($\forall$) (a,b),(a',b'),(a",b") $\in$A×B.

Clasele de echivalenţă corespunzătoare sunt de forma :

$(c)_\sim=\{(a,b)\in A\times B : ab = c, c\in AB\}$.

Evident aplicaţia $c \to (c)_\sim$ este o bijecţie de la AB la (A×B)/ ~.

Fie acum $c\in AB$ iar $a_0\in A$, $b_0\in B$ a.î. $a_0b_0 = c$ şi $\varphi : A\cap B \to (c)_\sim$, $\varphi(x) = (a_0x, x^{-1}b_0)$, ($\forall$) $x\in A\cap B$ (deoarece $(a_0x)(x^{-1}b_0) = a_0b_0 = c$, deducem că funcţia φ este bine definită). În mod evident φ este o injecţie.

Pentru a proba surjectivitatea lui φ, fie $(a,b)\in(c)_\sim$. Atunci $ab = c = a_0b_0$, deci $a_0^{-1}a = b_0b^{-1} = x \in A\cap B$ şi $\varphi(x) = (a_0x, x^{-1}b_0) = (a,b)$. Cum $\{(c)_\sim : c\in AB\}$ este o partiţie a lui A×B avem:

$$|A|\cdot|B| = |A\times B| = \sum_{c\in AB} |(c)_\sim| = \sum_{c\in AB} |A\cap B| = |A\cap B|\cdot|AB|.$$

2.36. Fie $x\in G$ şi $A' = \{xa^{-1} : a\in A\}\subseteq G$. Evident |A'| = |A|.

Dacă $A'\cap B = \varnothing$, atunci $|A'\cap B| = |A'| + |B| = |A| + |B| > |G|$, absurd, deoarece $A' \cup B \subseteq G$. Deci ($\exists$) $b\in A'\cap B$ a.î. $b = xa^{-1} \Rightarrow x = ab\in AB$, adică $G\subseteq AB$ şi cum $AB\subseteq G \Rightarrow G = AB$.

2.37. Arătăm că dacă $a,b\in G$ şi $a^2 = b^2$, atunci a = b. Într-adevăr, dacă $a^2 = b^2 \Rightarrow b^{-1}a^2a^{-1} = b^{-1}b^2a^{-1} \Rightarrow b^{-1}a = ba^{-1}$.

Conform proprietăţii 2) avem $(ab^{-1})^2 = (b^{-1}a)^2$. Dar $(b^{-1}a)^2 = (ba^{-1})^2$ şi $ba^{-1} =(ab^{-1})^{-1} \Rightarrow (b^{-1}a)^2 = [(ab^{-1})^{-1}]^2 = [(ab^{-1})^2]^{-1} \Rightarrow (ab^{-1})^2 = [(ab^{-1})^2]^{-1}$. Înmulţind egalitatea cu $(ab^{-1})^2$ obţinem $[(ab^{-1})^2]^2 = 1$, de unde conform proprietăţii 1), rezultă că $(ab^{-1})^2 = 1 \Rightarrow ab^{-1} = 1 \Rightarrow a = b$.

Atunci, dacă $(xy)^2 = (yx)^2 \Rightarrow xy = yx$, adică grupul G este abelian.

2.38. Faptul că G este comutativ se probează imediat. Să presupunem că G este finit şi fie H subgrupul lui G cu proprietatea că este cel mai mare având ordinul o putere a lui 2 (deci $|H| = 2^n$ iar n este cel mai mare număr natural cu această proprietate).

Deoarece ($\forall$) $x\in G$, $x \neq 1$, $x^2 = 1 \Rightarrow \{1,x\}\leq G$, deci $n \geq 1$.

Intenţionăm să demonstrăm că G = H şi atunci va rezulta că |G| este o putere naturală a lui 2.

Să presupunem prin absurd că ($\exists$) $x\in G \setminus H$. Atunci $H' = H \cup (xH) \leq G$ (se probează imediat) şi cum $H\cap(xH) = \varnothing$ deducem că $|H'| = |H| + |xH| =|H|+ +|H| = 2|H| = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$, contrazicând astfel maximalitatea lui n. Rămâne deci că G = H, adică $|G| = 2^n$.

Observaţie. Pentru o altă soluţie relativă la partea a doua a problemei, vezi problema **4.76.**.

2.39. Fie ord G = n şi S = { $(a_1,a_2,\ldots,a_p) \mid a_i \in G,\ 1 \le i \le p,\ a_1a_2\ldots a_p = 1$}. Atunci S are n^{p-1} elemente (într-adevăr, dacă $a_1,a_2,\ldots a_{p-1} \in G$ arbitrare $\Rightarrow$ $\Rightarrow a_p = (a_1a_2\ldots a_{p-1})^{-1}$, deci cum $a_1,\ldots,a_p \in G$ şi G are n elemente, rezultă că S are n^{p-1} elemente) .

Definim relaţia de echivalenţă ~ pe S astfel $x \sim y \Leftrightarrow$ x este o permutare ciclică a lui y. Atunci clasa de echivalenţă a lui $x = (a_1,\ldots,a_p)$ conţine exact un singur element dacă toţi a_i sunt egali, şi exact p elemente in caz contrar, deoarece p este prim. Într-adevăr, fie $x = (a_1,\ldots,a_p)$ şi i,j primul şi ultimul rang pentru care $a_i = a_j$ şi $a_i = a_{i_1} = \ldots = a_{i_k} = a_j$ cu $i < i_1 < \ldots < i_k < j$, $k \ge 0$ (dacă $k = 0$, $i_1 = j$). Ca să obţinem prin permutări circulare pe locurile $i,i_1,\ldots,i_k,j$ aceleaşi elemente ar trebui să avem:

$p + i - j = j - i_k = \ldots = i_1 - i = n \ge k \Rightarrow j = (k+1)n + i \Rightarrow p = n + j - i = n +$ $+(k+1)n + i - i = = n(k + 2)$. Dar p este prim atunci $n = 1$ şi $p = k+2$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow i_1 = i + 1,\ i_2 = i + 2,\ldots,\ j = i + k + 1 = p - 1 + i \Rightarrow a_{i_1} = \ldots = a_{i_k}$ şi în acest caz rezultă că toate cele p permutări circulare sunt distincte.

Fie r numărul claselor cu un element şi t numărul claselor cu p elemente. Atunci : $r + tp = n^{p-1}$ şi cum $p|n$ rezultă $p|r$. În plus r este diferit de zero pentru că $(1,1,\ldots,1) \in S$, deci r este numărul soluţiilor ecuaţiei $x^p = 1$ în G.

2.40. Cum G este în particular monoid, atunci Z(G) este submonoid al lui G (vezi problema **1.21.**). Fie acum $x \in Z(G)$; atunci $xy = yx$, $(\forall)\ y \in G$, deci $x^{-1}y = yx^{-1}$, de unde deducem că $x^{-1} \in Z(G)$, deci $Z(G) \le G$.

2.41. Deoarece $xy \in Z(G)$ avem în particular că $(xy)x = x(xy) \Rightarrow$ $xyx = xxy \Rightarrow xy = yx$.

2.42. Deoarece $(m,n) = 1$ există $u,v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $mu + nv = 1$. Deoarece x comută cu y^m şi y^n, x va comuta şi cu $y^{mu} = (y^m)^u$ şi $y^{nv} = (y^n)^v$, deci cu produsul lor, $y^{mu} \cdot y^{nv} = y^{mu+nv} = y$.

2.43. Fie $x \in G$; dacă $x \notin H \Rightarrow x \in G \setminus H$ şi totul este clar. Dacă $x \in H$, cum $H \ne G$, $(\exists)\ y \in G$ a.î. $y \notin H$ şi astfel $z = y^{-1}x \notin H$ (căci dacă $z \in H \Rightarrow$ $y = xz^{-1} \in H$, absurd). Astfel $x = yz$ cu $y,z \in G \setminus H$, deci $< G \setminus H> = G$.

2.44. Fie $a \in G \setminus H$ şi funcţia $f_a : H \to (G \setminus H)$, $f_a(x) = ax$. Evident f_a este injectivă şi deoarece $G \setminus H$ are un număr finit de elemente, rezultă că şi H are un număr finit de elemente. Cum $G = H \cup (G \setminus H) \Rightarrow$ G este finit.

2.45. Fie G_1 un grup abelian finit şi $p = \prod_{x\in G_1} x$. Atunci :

$$p^2 = \left(\prod_{x\in G_1} x\right)^2 = \prod_{x\in G_1} x \cdot \prod_{x\in G_1} x = \prod_{x\in G_1} x \cdot \prod_{x\in G_1} x^{-1} = \prod_{x\in G_1} (xx^{-1}) = 1. \quad (1)$$

Fie $H \le G$ cu proprietatea (A), $p = \prod_{x\in G} x$, $\alpha = \prod_{x\in H} x$ şi $\beta = \prod_{x\in G\setminus H} x$. Cum $\alpha\cdot\beta = p$ şi $\alpha = \beta$, rezultă că $\alpha^2 = p$. Considerând în (1) pe H în loc de G_1, rezultă că $\alpha^2 = 1$, deci $p = 1$.

Fie $H_1 \le G$, $H_1 \ne G$, $\alpha_1 = \prod_{x\in H_1} x$ şi $\beta_1 = \prod_{x\in G\setminus H_1} x$. Cum $\alpha_1\beta_1 = p = 1$, rezultă că $\beta_1 = \alpha_1^{-1}$. Dar, din (1), $\alpha_1^2 = 1$, deci $\alpha_1^{-1} = \alpha_1$. Obţinem $\beta_1 = \alpha_1$, deci H_1 are proprietatea (A).

2.46. (i). Dacă G şi H sunt grupuri finite, atunci în mod evident $s(G\times H) \ge s(G)\cdot S(H)$ (căci $G' \le G$, $H' \le H \Rightarrow G' \times H' \le G\times H$). Pentru grupul lui Klein K avem $|K| = 4$, $s(K) = 5$ astfel că $\frac{|K^n|}{s(K^n)} \le \left(\frac{|K|}{s(K)}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Fie acum $a\in\mathbb{R}$, $a>0$. Deoarece $\left(\frac{4}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, există $n_a \in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\left(\frac{4}{5}\right)^{n_a} < a$. Pentru $G = K^{n_a}$ avem $\frac{|K|}{s(K)} \le \left(\frac{4}{5}\right)^{n_a}$ astfel că $\frac{|Z_p|}{s(Z_p)} = \frac{p}{2}$.

(ii). Fie $a\in\mathbb{R}$, $a>0$. Există p_a prim astfel încât $\frac{p_a}{2} > a.$ Alegând grupul $G = (\mathbb{Z}_{p_a}, +)$ avem $\frac{|Z_{p_a}|}{s(Z_{p_a})} = \frac{p_a}{2} > a.$

2.47. $''\Rightarrow''$. $(M,\cdot)$ este grup. Atunci $(\forall)\ y \in M$, $(\exists)\ n = 1$, $x\in M$, $x = a^{-1}y\,a^{-1}$ a.î. $f_a(x) = a(a^{-1}ya^{-1})\,a^1 = y$, deci f_a este surjectivă.

$''\Leftarrow''$. $(\forall)\ a\in M$, $(\exists)\ n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $f_a(x) = axa^n$ este surjecţie. Atunci, din $a\in M$ rezultă că $(\exists)\ b\in M$ a.î. $f_a(b) = a \Rightarrow aba^n = a$. Fie $e = aba^{n-1}$ şi $f = ba^n$. Dacă $x\in M \Rightarrow (\exists)\ y\in M$ a.î. $f_a(y) = aya^n = x$. Atunci $ex = (aba^{n-1})aya^n = aba^nya^n = x$ şi $xf = (aya^n)(ba^n) = aya^n = x \Rightarrow ex = xf = x$, $(\forall)\ x\in M$. Pentru $x = e \Rightarrow ef = e$ iar pentru $x = f \Rightarrow ef = f \Rightarrow e = f$ şi $ex = xe = x$, $(\forall)\ x\in M$, deci e este element neutru. Din alegerea lui $e = aba^{n-1} = f = ba^n$ rezultă că $e = a(ba^{n-1}) = (ba^{n-1})a$, adică $a^{-1} = ba^{n-1}$ este inversul lui a. Cum a a fost ales arbitrar în M, atunci orice element din M este inversabil, deci $(M,\cdot)$ este grup.

2.48. Pentru $n\in\mathbb{N}$ considerăm $H_n = \{m/n! : m\in\mathbb{Z}\}$ deoarece $m/n! = m(n+1)/(n+1)!$ deducem că $H_n \le H_{n+1}$ şi în mod evident $H_n \le (\mathbb{Q},+)$.

De asemenea, $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\ge 1} H_n$. Să presupunem acum prin absurd că $(\mathbb{Q},+)$ ar fi finit generat şi fie $x_1,x_2,\ldots,x_m$ un sistem de generatori ai lui $(\mathbb{Q},+)$.

Pentru fiecare $i = 1,2,\ldots,m$, $(\exists)\ x_i \in H_{n_i}$ şi în mod evident avem incluziunea $H_{n_1}, H_{n_2}, \ldots, H_{n_m} \subseteq H_n$, unde $n = \max\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}$.

Deci $\mathbb{Q} = \langle \{x_1,x_2,\ldots,x_m\} \rangle \le H_n \le \mathbb{Q}$, adică $\mathbb{Q} = H$ ceea ce este absurd.

2.49. Dacă $H \le (\mathbb{Q},+) \Rightarrow H \subset \mathbb{Q}$. Vom demonstra incluziunea $\mathbb{Q} \subseteq H$.

Dacă $H = \{0\}$ atunci vom avea $\mathbb{Q} = \{0\} + \mathbb{Z} = \{0 + n \mid n\in\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ ceea ce este absurd.

Cum intersecţia a două subgrupuri ale unui grup este tot un subgrup rezultă că $H\cap\mathbb{Z}$ este subgrup al lui $\mathbb{Q}$. Dar $H\cap\mathbb{Z}$ este subgrup al lui $\mathbb{Z}$ şi deci $H\cap\mathbb{Z} = n_1\mathbb{Z}$, $n_1\in\mathbb{N}^*$, deoarece $H \ne \{0\}$.

Fie $x\in\mathbb{Q} \Rightarrow x = h + n$, $h\in H$, $n\in\mathbb{Z} \Rightarrow n_1x = n_1h + n_1n$. Cum $n_1h\in H$, $n_1n\in n_1\mathbb{Z} \subset H \Rightarrow n_1x \in H \Rightarrow n_1\mathbb{Q} \subseteq H \Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq H$ şi problema este rezolvată.

2.50. Lăsăm pe seama cititorului verificarea axiomelor grupului (care nu ridică probleme deosebite).

2.51. Pe $G = (0,1)$ operaţia $x \circ y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$ determină un grup abelian şi cum pentru $a < b$ există o bijecţie între $(0,1)$ şi (a,b), totul rezultă acum din exerciţiul precedent).

2.52. (i) $\Rightarrow$ (ii). Fie $x\in G$, atunci submulţimea $H = \{ x^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$ a lui G este parte stabilă a sa, deci subgrup. Rezultă că $1\in H$, deci există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $x^k = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Fie H o submulţime a lui G care este parte stabilă şi $x\in H$. Din ipoteză există $k\in\mathbb{N}^*$ a.î. $x^k = 1$, deci $1\in H$. Fie $x\in H \setminus \{1\}$. Atunci există $k \ge 2$ astfel încât $x^k = 1 \Rightarrow x^{-1} = x^{k-1}$. Dar H este parte stabilă a lui G şi deci $x^{-1} = x^{k-1} \in H$.

2.53. Fie $x\in G$. Vom demonstra mai întâi că pentru orice $t\in\mathbb{N}, 1\le t\le n-1$, dacă x se găseşte în t dintre subgrupurile $H_1,H_2,\ldots,H_n$, atunci $(\exists)\ 1\le u\le n-1$, încât x^u să se găsească în t+1 dintre subgrupurile $H_1,H_2,\ldots,H_n$.

Fie $x\in \bigcap_{1\le i\le t} H_i$. Există $h\in H$ a.î. $h\notin \bigcup_{t+1\le j\le n} H_j$. Atunci pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$, $x^m h\notin \bigcup_{1\le i\le n} H_i$, deci $x^m h\notin \bigcup_{k+1\le j\le n} H_j$. Există deci $m\in\mathbb{N}$ cu $t+1\le m\le n$ şi există $r,s\in\{1,2,\ldots,n-t-1\}$, $r<s$, a.î. $x^r h, x^s h\in H_m$.

Prin urmare $x^{s-r}=(x^s h)\cdot(x^r h)^{-1}\in H_m$. Notăm $k=s-t$ şi se observă că x^k se găseşte în $H_1, H_2,\ldots,H_t$ şi H_m (t+1 subgrupuri), $k\le n-t$.

Folosind cele demonstrate, rezultă că există $k_1, k_2,\ldots,k_{n-2}\in\mathbb{N}^*$ cu $k_i\le n-i$, $1\le i\le n-2$, $i\in\{1,2,\ldots,n-2\}$ a.î. $x^k\in \bigcap_{1\le i\le n} H_i$, unde $k=k_1k_2\ldots k_{n-2}$.

2.54. (i). Fie $x,y\in H_n$, $x=\frac{k}{n!}$, $y=\frac{p}{n!}$, deci $x+y=\frac{k+p}{n!}\in H_n$, deci H_n este parte stabilă.

Fie $x\in H_n$, $x=\frac{k}{n!}\Rightarrow -x=\frac{-k}{n!}\in H_n$, deci $H_n\le\mathbb{Q}$. Dacă $x\in\mathbb{Q}$, $x=\frac{p}{q}$, atunci $x\in H_q$, deci $\mathbb{Q}=\bigcup_{n\in N^*} H_n$.

(ii). Considerăm $A=\{\frac{1}{n!}\mid n\in\mathbb{N}^*\}$.

Dacă presupunem că $\mathbb{Q}=G_1\cup\ldots\cup G_m$, cum A este infinită, rezultă că există i a.î. $G_i\cap A$ să fie infinită. Se observă că $H_n\subset H_{n+1}$ şi dacă $\frac{1}{n!}\in G_i$ rezultă că $H_n\subset G_i$. Fie $n<r$ a.î. $\frac{1}{r!}\in G_i\cap A$. Atunci $H_r\subset G_i\Rightarrow H_n\subset G_i$. Deci $\bigcup_{n\in N^*} H_n\subset$ $\subset G_i$ sau $\mathbb{Q}\subset G_n$, fals.

2.55. Conform problemei **2.16.**, $U_n\le(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

Avem $U_n=\{z_0,z_1,\ldots,z_{n-1}\}$, unde $z_k=\cos(2k\pi/n)+i\cdot\sin(2k\pi/n)$, $k=0,1,\ldots,n-1$, de unde rezultă că $|U_n|=n$, şi cum $z_k=z_1^k$, $k=0,1,\ldots,n-1$ deducem că $U_n=\langle z_1\rangle$ adică U_n este grup ciclic.

Observaţie. U_n va avea $\varphi(n)$ generatori şi anume elementele de forma z_k cu $(k,n)=1$, $1\le k\le n$.

Un generator al lui U_n poartă numele de *rădăcină primitivă a unităţii de ordin n*.

2.56. Fie $x\in H_mH_n$. Atunci $x=ab$, $a\in H_m$, $b\in H_n$, deci $a^m=b^n=1$.

Fie $[m,n]=k\Rightarrow m\mid k$ şi $n\mid k$. Deoarece G este comutativ, $x^k=(ab)^k=$ $=a^k b^k=1\Rightarrow x\in H_k=H_{[m,n]}$, şi astfel $H_mH_n\subseteq H_{[m,n]}$.

Fie $x \in H_k$, $[m,n] = k$. Dacă $d = (m,n) \Rightarrow (\exists)\ u, v \in \mathbb{Z}$ a.î. $d = mu + nv$.

Atunci $k \cdot d = m \cdot n \Rightarrow k(mu + nv) = m \cdot n \Rightarrow 1 = \frac{kmu}{mn} + \frac{knv}{mn} = \frac{ku}{n} + \frac{kv}{m}$ de unde: $x = x^1 = x^{\frac{ku}{n} + \frac{kv}{m}} = x^{\frac{ku}{n}} \cdot x^{\frac{kv}{m}}$. Luând $a = x^{\frac{kv}{m}}$ şi $b = x^{\frac{ku}{n}}$ vom avea : $a^m = a^{kv} = (a^v)^k = 1$ şi $b^m = b^{ku} = (b^u)^k = 1$, deci $a \in H_m$ şi $b \in H_n$ şi $x = ab \in H_m H_n$.

Astfel, am demonstrat şi incluziunea inversă $H_{[m,n]} \subseteq H_m H_n$, de unde egalitatea cerută.

Observație. Aplicând acest rezultat grupului multiplicativ al numerelor complexe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, obținem că $U_m U_n = U_{[m,n]}$, unde $U_m = \{z \in \mathbb{C}^* | z^m = 1\}$.

2.57. Dacă $H,K \in L(G)$, atunci $H \cap K \in L(G)$ şi astfel $H \wedge K = H \cap K$; cum reuniunea a două subgrupuri nu este în general un subgrup (vezi problema **2.22.**), atunci $H \vee K = < H \cup K >$ (subgrupul generat de $H \cup K$, adică cel mai mic subgrup al lui G ce conține pe H şi pe K).

Astfel, $(L(G), \subseteq)$ devine latice. Ea este o latice completă pentru că există infimul şi supremul oricărei familii de subgrupuri ale lui A (infimul este intersecția tuturor subgrupurilor acestei familii, iar supremul este subgrupul generat de reuniunea acestor subgrupuri).

2.58. Dacă $H, K \in L(\mathbb{Z},+)$, $H \wedge K = H \cap K$ (conform exercițiului anterior). Atunci trebuie să demonstrăm că $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m,n]\mathbb{Z}$. Notăm cu $t = [m,n]$, şi atunci $t = mm_1 = nn_1$. Fie $x \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$; atunci $x = mx_1 = nx_2$, cu $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, deci $m \mid x$ şi $n \mid x$. Cum $t = [m,n]$ rezultă că $t \mid x$, adică $x \in t\mathbb{Z}$**.** Invers, fie $x \in t\mathbb{Z}$; atunci $x = tx_1$, cu $x_1 \in \mathbb{Z}$, deci $x = mm_1x_1 = nn_1x_1$, ceea ce arată că $x \in m\mathbb{Z}$ şi $x \in n\mathbb{Z}$.

Analog se demonstrează că $H \vee K = (m,n)\ \mathbb{Z}$.

Distributivitatea lui $(L(\mathbb{Z},+),\subseteq)$ rezultă din faptul că $(\mathbb{N}, |)$ este o latice distributivă şi folosind cele demonstrate anterior.

2.59. Scriind că pentru $x,y \in G$ avem $(xy)^2 = x^2y^2 \Rightarrow xyxy = xxyy \Rightarrow$ $\Rightarrow yx = xy$ deci G este comutativ.

2.60. Fie $x,y \in G$; din $x^{n+1}y^{n+1} = (xy)^{n+1} \Rightarrow x^{n+1}y^{n+1} = (xy)^n xy = x^n y^n xy \Rightarrow$ $\Rightarrow xy^n = y^n x$. (1)

Analog se deduce şi relația $xy^{n+1} = y^{n+1}x$ (2).

Deoarece $(n,n+1) = 1 \Rightarrow (\exists)\ \alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ a.î. $\alpha n + \beta(n+1) = 1 \Rightarrow$ $xy = (xy)^{\alpha n+\beta(n+1)} = x(y^n)^\alpha \cdot (y^{n+1})^\beta = (y^n)^\alpha \cdot (y^{n+1})^\beta x = y^{\alpha n+\beta(n+1)} x = yx$, adică G este comutativ.

2.61. Pentru $x,y\in G$ avem $(xy)^{n+2} = (xy)^n(xy)^2 = x^ny^nxyxy = x^{n+2}y^{n+2} \Rightarrow$ $\Rightarrow y^nxyx = x^2y^{n+1}$ (1).

De asemenea, $(xy)^{n+4} = (xy)^{n+2}(xy)^2 = x^{n+2}y^{n+2}xyxy = x^{n+4}y^{n+4} \Rightarrow$ $\Rightarrow y^{n+2}xyx = x^2y^{n+3}$ (2).

Din (1) şi (2) $\Rightarrow y^{n+2}xyx = y^2x^2y^{n+1} = x^2y^{n+3} \Rightarrow x^2y^2 = y^2x^2$, $(\forall)$ $x,y\in G$. Ţinând cont această ultimă relaţie, (1) devine $y^n xyx = x^2 y^2 y^{n-1} = y^2 x^2 y^{n-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow y^{n-1}xyx = x^2y^{n-1}$.

Dacă n este par, continuând procedeul deducem că $xyx = x^2y \Rightarrow$ $\Rightarrow xy = yx$.

Dacă n este impar, cu acelaşi procedeu găsim $yxyx = x^2y^2 = y^2x^2 = yyxx$ $\Rightarrow xy = yx$.

Deci G este comutativ.

2.62. Cum $(m,n) = 1$, $(\exists)$ $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ a.î. $\alpha m + \beta n = 1$. Astfel, dacă $x,y\in G$ avem $xy = (xy)^{\alpha m+\beta n} = [(xy)^m]^\alpha\cdot[(xy)^n]^\beta = [(yx)^m]^\alpha\cdot[(yx)^n]^\beta = (yx)^{\alpha m+\beta n} = yx$, adică G este comutativ.

2.63. Din $x^3 = 1 \Rightarrow x^2 = x^{-1}$, $(\forall)$ $x\in G$. Deci pentru $x,y\in G$, din $x^2y^2 =$ $=y^2x^2 \Rightarrow x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1} \Rightarrow yx = xy$, adică G este comutativ.

2.64. (i). Evident.

(ii). Avem $[xy,z] = (xy)^{-1}z^{-1}xyz = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz$ iar $y^{-1}[x,z]y[y,z] =$ $= y^{-1}(x^{-1}z^{-1}x\ z)\ y\ (y^{-1}z^{-1}yz) = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzyy^{-1}z^{-1}yz = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzz^{-1}yz =$ $=y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz$, de unde egalitatea cerută.

Analog procedăm şi pentru (iii).

(iv). Avem $t = y^{-1}[[x,y^{-1}],z]y = y^{-1}[x^{-1}yxy^{-1},z]y = y^{-1}((x^{-1}yxy^{-1})^{-1}z^{-1}(x^{-1}yxy^{-1})\ z)y = y^{-1}(yx^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}z)y = y^{-1}yx^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zy =$ $=x^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zy$ şi analog :

$u = z^{-1}[[y,z^{-1}],x]z = y^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}zyz^{-1}xz$

$v = x^{-1}[[z,x^{-1}],y]x = z^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx$ şi astfel

$tu = x^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}zyz^{-1}xz = v^{-1}$, de unde egalitatea $tuv = 1$.

2.65. Prima parte a enunţului este evidentă (elementul neutru este 1_X).

Faptul că unităţile lui F(X) sunt aplicaţiile bijective rezultă din faptul că o funcţie este bijectivă $\Leftrightarrow$ este inversabilă.

2.66. Se arată imediat că $\tau^n(x) = 2^nx$, $(\forall)$ $x\in\mathbb{R}$, astfel :

$\sigma_n(x) = \tau^{-n}(\sigma(\tau^n(x))) = \tau^{-n}(\sigma(2^nx)) = \tau^{-n}(2^nx + 1) = 2^{-n}(2^nx +1) = x + 2^{-n}$ şi $\sigma_n^2 = \sigma_n(x + 2^{-n}) = x + 2^{-n} + 2^{-n} = \sigma_{n-1}(x)$, $(\forall)$ $x\in\mathbb{R}$.

Rezultă că $\sigma_{n-1} = \sigma_n^2 \in H_n$, deci $H_{n-1} = <\sigma_{n-1}> \leq H_n$.

Pe de altă parte, $\sigma_n \notin H_{n-1}$ căci dacă $\sigma_n \in H_{n-1}$, atunci $\sigma_n = \sigma_{n-1}^k$ pentru un $k \in \mathbb{Z}$, deci $x + 2^{-n} = \sigma_n(x) = x + k \cdot 2^{-n+1}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ ceea ce implică $1 = 2k$, absurd.

Ultima parte a problemei se demonstrează ca în problema **2.48.**

Observație. Această problemă ne arată că într-un grup finit generat putem găsi subgrupuri ce nu sunt finit generate.

2.67. Soluția 1.

Fie $G = \{ F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F' = f\}$. $(G, \circ)$ fiind subgrup al grupului bijecțiilor lui $\mathbb{R}$, rezultă că $F \circ F \in G \Rightarrow (F \circ F)' = f \Rightarrow f(F(x))\, f(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)\,[f(F(x))-1] = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) \subset \{0,1\}$.

Dar cum f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi deci are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ $f(\mathbb{R}) = \{0\}$ sau $f(\mathbb{R}) = \{1\}$, adică $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, sau $f(x) = 1$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$. Convine $f(x) = 1$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, caz în care $G = \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F(x) = x+k, k \in \mathbb{R}\}$ şi se verifică uşor că $(G, \circ)$ este grup.

Soluția 2.

Fie $(S, \circ)$ grupul bijecțiilor lui $\mathbb{R}$ şi $(G, \circ)$ subgrupul format din primitivele funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Rezultă că elementul neutru al lui S se află în G, adică $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x$. $F \in G \Rightarrow f(x) = 1$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$. De asemenea se verifică şi în acest caz că $G = \{ F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F(x) = x + k, k \in \mathbb{R}\}$ este subgrup al grupului bijecțiilor.

2.68. Evident, $1_X \in Izom(X)$; fie $f,g \in Izom(x)$ şi $x,y \in X$. Atunci, $d((f \circ g)(x),(f \circ g)(y)) = d(f(g(x)), f(g(y))) = d(g(x),g(y)) = d(x,y)$, adică $f \circ g \in Izom(X)$. De asemenea $f^{-1} \in Izom(X)$, căci dacă $x,y \in X$, $d(f^{-1}(x),f^{-1}(y)) = d(f(f^{-1}(x)),f(f^{-1}(y))) = d(x,y)$, adică $Izom(X) \leq \Sigma(X)$.

2.69. (i).Vom considera pe E^2 (planul euclidian) raportat la un sistem cartezian xOy cu originea într-un punct O. În felul acesta, fiecărui punct $A \in E^2$ îi corespunde o pereche ordonată de numere reale (x_A, y_A) (coordonatele carteziene ale lui A relative la sistemul xOy).

Astfel, o translație a lui E^2 nu este altceva decât o aplicație de forma $\tau_A : E^2 \to E^2$ (cu $A \in E^2$) definită astfel: $\tau_A(P) = A + P$, $(\forall)\, P \in E^2$ (punctul A+P având drept coordonate suma coordonatelor lui A şi P).

Dacă $A,B \in E^2$, atunci $(\tau_A \circ \tau_B)(P) = A + (B + P) = (A + B) + P = \tau_{A+B}(P)$, $(\forall)\, P \in E^2$, deci $\tau_A \circ \tau_B = \tau_{A+B} \in Tr(E^2)$.

Dacă vom considera B = -A(adică punctul de coordonate $(-x_A,-y_A)$), atunci $\tau_A \circ \tau_{-A} = \tau_{-A} \circ \tau_A = 1_{E^2}$, adică τ_A este aplicație bijectivă și $\tau_A^{-1} = \tau_{-A}$.

De asemenea, dacă $A(x_A,y_A)$ și alegem două puncte oarecare $P(x_P,y_P)$, $R(x_R,y_R)$ atunci :

$$d(\tau_A(P),\tau_A(R)) = d(A+P,A+R) = \sqrt{(x_A + x_P - x_A - x_R)^2 + (y_A + y_P - y_A - y_R)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2} = d(P,R),$$ adică τ_A este o izometrie a lui E^2.

Din cele de mai sus deducem că $Tr(E^2) \leq Izom(E^2)$.

Pentru a proba că și $Rot(O,E^2) \leq Izom(E^2)$, să reamintim că o rotație a lui E^2 de unghi α (măsurat în radiani) în jurul lui O este o aplicație $\rho_\alpha : E^2 \to E^2$ definită astfel: dacă $P \in E^2$ are coordonatele $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, atunci $\rho_\alpha(P)$ va fi punctul de coordonate $(r\cos(\theta+\alpha), r\sin(\theta+\alpha))$.

Se observă imediat că $\rho_\alpha \circ \rho_\beta = \rho_{\alpha+\beta}$ și că $\rho_0 = 1_{E^2}$, de unde deducem că $\rho_\alpha \circ \rho_{-\alpha} = = \rho_{-\alpha} \circ \rho_\alpha = 1_{E^2}$, adică ρ_α este o bijecție și $(\rho_\alpha)^{-1} = \rho_{-\alpha}$.

Pentru a proba că ρ_α este izometrie, să considerăm $A_1(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)$, $A_2(r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$ și să calculăm:

$$d(\rho_\alpha(A_1),\rho_\alpha(A_2)) =$$

$$= \sqrt{[r_1\cos(\theta_1+\alpha) - r_2\cos(\theta_2+\alpha)]^2 + [r_1\sin(\theta_1+\alpha) - r_2\sin(\theta_2+\alpha)]^2}$$

$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)} =$$

$$= \sqrt{[r_1\cos(\theta_1) - r_2\cos(\theta_2)]^2 + [r_1\sin(\theta_1) - r_2\sin(\theta_2)]^2} = d(A_1,A_2),$$

de unde rezultă faptul că ρ_α este o izometrie. Din cele de mai sus rezultă că $Rot(O,E^2) \leq Izom(E^2)$.

(ii). Ne bazăm pe un rezultat cunoscut din geometrie și anume: o izometrie este unic determinată de imaginile a trei puncte necoliniare din E^2. Fie acum $\varphi \in Izom(E^2)$; alegem un punct O ca origine și fie $A,B \in E^2$ distincte a.î. $O \notin AB$. Notăm $O' = \varphi(O)$, $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ și considerăm translația $\tau = \tau_{O'}$ precum și $A'' = \tau(A)$, $B'' = \tau(B)$. Deoarece φ este o izometrie, deducem că triunghiurile $O'A'B'$ și $O'A''B''$ au laturile respectiv egale, deci unghiurile $A'O'A''$ și $B'O'B''$ sunt egale, astfel că triunghiul $O'A'B'$ este imaginea lui $O'A''B''$ printr-o rotație ρ în jurul lui O de unghi $A'O'A''$.

Deoarece imaginile punctelor necoliniare O,A,B prin izometriile φ și $\rho\tau$ coincid – ținând cont de observația de la început- deducem că $\varphi = \rho\tau$.

2.70. Fie $f,g \in S_X(Y)$, adică $f(Y) = g(Y) = Y$.

Atunci $(f \circ g^{-1})(Y) = f(g^{-1}(Y)) = f(Y) = Y$, adică $f \circ g^{-1} \in S_X(Y)$, deci $S_X(Y) \leq Izom(X)$.

2.71. Fie (C) cercul circumscris poligonului P_n de centru O, r raza sa iar $A_1,A_2,\ldots, A_n$ vârfurile poligonului; avem în mod evident $d(A_i,O) = r$, $(\forall)$ $i = 1,2,\ldots,n$ şi $d(A,O) < r$ pentru orice $A \in \overline{P}_n - \{A_1,\ldots,A_n\}$.

Pentru o izometrie $\varphi \in D_n$ avem: $\varphi(\overline{P}_n) = \overline{P}_n$ şi $d(\varphi(A_i),\varphi(O)) = r$, $i = 1,2,\ldots, n$ iar $d(\varphi(A),\varphi(O)) < r$, $(\forall)$ $A \in \overline{P}_n - \{A_1,\ldots,A_n\}$.

Rezultă imediat că $\varphi(O) = O$ şi $\varphi(A_i) \in \{A_1,\ldots,A_n\}$, $(\forall)$ $i = 1,2,\ldots,n$.

De asemenea, se deduce imediat că ρ şi ε din enunț sunt elemente ale D_n.

Obținem astfel 2n elemente distincte ale lui D_n : $1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \varepsilon, \rho\varepsilon, \rho^2\varepsilon, \ldots, \rho^{n-1}\varepsilon$.

Să demonstrăm acum că D_n are cel mult 2n elemente (de unde va rezulta concluzia exercițiului).

Pentru aceasta, să observăm că pentru $\varphi \in D_n$, cum $\varphi(A_i) \in \{A_1,\ldots,A_n\}$, $i = 1,2,\ldots,n$, pentru alegerea lui $\varphi(A_1)$ avem cel mult n posibilități şi anume $\varphi(A_1) = A_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. Dacă $\varphi(A_1)$ este definit, atunci $\varphi(A_2)$ are numai două posibilități şi anume vârfurile adiacente ale lui A_1.

În fine, ținând cont de observația de la rezolvarea problemei **2.69.**, izometria φ este unic determinată dacă definim $\varphi(A_1)$ şi $\varphi(A_2)$ (deoarece $\varphi(O) = O$), deci $|D_n| \le 2n$ şi cum D_n are deja 2n elemente distincte, deducem că:

$D_n = \{1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \varepsilon, \rho\varepsilon, \rho^2\varepsilon, \ldots, \rho^{n-1}\varepsilon\}$.

2.72. Se ştie că orice permutare se scrie ca un produs de transpoziții.

Totul rezultă acum din faptul că orice trapoziție (i,j) cu $1<i<j$ se scrie sub forma: $(i,j) = \tau_{j-1}\ldots\tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}\ldots\tau_{j-1}$.

2.73. Totul rezultă din faptul că orice trapoziție (i,j) cu $1<i<j$ se scrie sub forma: $(i,j) = \tau_i\tau_j\tau_i$.

2.74. Totul rezultă din faptul că orice trapoziție (i,j) cu $1<i<j$ se scrie sub forma: $(i,j) = (i,k)(j,k)(i,k)$.

2.75. Ținând cont de problema **2.72.** este suficient să demonstrăm că orice transpoziție $\tau_i = (i,i+1)$, $i \ge 2$ face parte din grupul generat de τ şi σ.

Acest lucru rezultă din relațiile :

$\sigma^{-1}\tau\sigma = (1,n)$, $\sigma^{-2}\tau\sigma^2 = \sigma^{-1}(1,n)\sigma = (n-1,n) = \tau_{n-1}$, $\sigma^{-3}\tau\sigma^3 = \sigma^{-1}\tau_{n-1}\sigma =$ $=(n-2,n-1) = \tau_{n-2},\ldots$, $\sigma^{-(n-1)}\tau\sigma^{n-1} = \sigma^{-1}\tau_3\sigma = (2,3) = \tau_2$, ținând cont că $\sigma^{-1} = (n,1,2,\ldots,n-1)$.

2.76. Se ştie că orice permutare pară este produsul unui număr par de transpoziții.

Dacă două transpoziții vecine (i,j), (k,t) au proprietatea că $\{i,j\}\cap\{k,t\}=\emptyset$, atunci (i,j)(k,t) = (i,k,j)(i,k,t), iar dacă $\{i,j\}\cap\{k,t\} \neq \emptyset$ (să presupunem că i = k) avem (i,j)(i,t) = (i,t,j).

2.77. Conform problemei **2.73.** orice permutare pară este un produs de transpoziții de forma (1,i), i = 2,3,…,n. Deoarece (1,i)(1,j) = (1,j,i), afirmația din enunț rezultă din egalitatea (1,j,i) = (1,2,i)(1,2.i)(1,2,j)(1,2,i).

2.78. Cei r - ciclii sunt egali deoarece elementele r+1, r+2, … ,n sunt lăsate pe loc iar primele r sunt schimbate între ele de fiecare r-ciclu după aceeaşi regulă.

2.79. Dacă $\alpha = (i_1,i_2, \dots ,i_r)$ este un ciclu de lungime r ($r \leq n$), atunci $\alpha^r = 1$ deoarece, de exemplu $\alpha(i_1) = i_2$, $\alpha^2(i_1) = i_3$, … , $\alpha^r(i_1) = i_1$, ş.a.m.d. iar din calcule se vede că r este cel mai mic număr natural cu proprietatea $\alpha^r = e$.

2.80. Fie $\alpha = (i_1,i_2, \dots ,i_r)$, $\beta = (j_1,j_2, \dots ,j_r)$.

Trebuie ca $\{i_1,i_2, \dots,i_r\}\cap\{j_1,j_2,\dots j_r\} \neq \emptyset$. Cum $\alpha(i)\neq i \Rightarrow i \in \{i_1,i_2, \dots ,i_r\}$ şi analog $i\in \{j_1,j_2, \dots ,j_r\}$. Deci putem presupune $i = i_1 = j_1$. Avem $\alpha(i) = \beta(i)$, $\alpha(i_2) = \alpha^2(i) = \beta(i_2)$ şi analog $\alpha(i_t) = \beta(i_t)$ pentru t =2,3,…,r.

Fie acum $j\in \{1,2,\dots,n\}-\{i_1,i_2,\dots ,i_r\}$.

Atunci $\alpha(j) = j$, iar $j\notin \{j_1,j_2, \dots ,j_r\}$, căci altfel j ar fi de forma $j = \beta^k(i) = \alpha^k(i) \in \{i_1,i_2, \dots ,i_r\}$ ceea ce este fals.

Analog dacă $j\notin \{j_1,j_2, \dots ,j_r\} \Rightarrow j\notin \{i_1,i_2, \dots ,i_r\}$, adică $\{i_1,i_2, \dots ,i_r\} = \{j_1,j_2, \dots ,j_r\}$ şi deci $\beta(j) = j = \alpha(j)$, adică $\alpha = \beta$.

2.81. $''\Rightarrow''$. Fie $\alpha = (i_1,i_2, \dots ,i_r)$, $\beta = (j_1,j_2, \dots ,j_r)$ disjuncte şi să presupunem că $\{i_1,i_2, \dots ,i_r\} \cap \{j_1,j_2, \dots ,j_r\} \neq \emptyset$; să presupunem de exemplu că $i_1 = j_1$. Cum $\alpha(i_1) \neq i_1$ ar trebui ca $\beta(i_1) = i_1$ ceea ce este contradictoriu, căci $\beta(i_1) = \beta(j_1) \neq j_1 = i_1$.

$''\Leftarrow''$. Să presupunem că $\{i_1,i_2, \dots ,i_r\} \cap \{j_1,j_2, \dots ,j_r\} = \emptyset$, şi fie x a.î.$\alpha(x) \neq x$, adică $x\in \{i_1,i_2, \dots ,i_r\}$, deci x este de forma $x = i_k$ ($k \leq r$).

Atunci $\beta(x) = x$, căci dacă $\beta(x) \neq x$, atunci $x \in \{j_1,j_2, \dots ,j_r\}$, adică $x\in \{i_1,i_2, \dots ,i_r\}\cap \{j_1,j_2, \dots ,j_r\} = \emptyset$, absurd. Analog, dacă $\beta(x) \neq x$, atunci $\alpha(x) = x$.

2.82. Fie $x\in \{1,2,\dots,n\}$, $\alpha = (i_1,i_2, \dots ,i_r)$, $\beta = (j_1,j_2, \dots ,j_r)$, cu $\{i_1,i_2, \dots,i_r\} \cap \{j_1,j_2, \dots ,j_r\} = \emptyset$. Să presupunem de exemplu că $x = j_1$; atunci $\beta(x) = j_2$ iar $\alpha(\beta(x)) = \alpha(j_2) = j_2$.

De asemenea, $\beta(\alpha(x)) = \beta(x) = j_2$, de unde deducem că $(\alpha\beta)(x) = (\beta\alpha)(x)$.

Dacă $x \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$, atunci $\alpha(x) \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$, deci $\alpha(\beta(x)) = \alpha(x)$ iar $\beta(\alpha(x)) = \alpha(x)$, adică şi în acest caz $\alpha(\beta(x)) = \beta(\alpha(x))$.

2.83. Fie $\sigma \in S_n$.

Dacă σ este pară, considerăm:

$\sigma_{n+1,n+2} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n & n+1 & n+2 \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) & n+1 & n+2 \end{pmatrix}$, care este evident în A_{n+2}.

Dacă σ este impară, considerăm:

$\sigma_{n+2,n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n & n+1 & n+2 \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) & n+2 & n+1 \end{pmatrix}$, care face parte tot din A_{n+2}.

Să notăm prin $f : S_n \to A_{n+2}$ asocierea de mai sus şi să demonstrăm că f este morfism de grupuri (în mod evident f este aplicație injectivă).

Fie deci $\sigma, \tau \in S_n$; dacă σ, τ sunt pare, atunci şi $\sigma \circ \tau$ este pară, astfel că:

$f(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n & n+1 & n+2 \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) & n+1 & n+2 \end{pmatrix}$ şi

$f(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n & n+1 & n+2 \\ \tau(1) & \ldots & \tau(n) & n+1 & n+2 \end{pmatrix}$, deci:

$f(\sigma) \circ f(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n & n+1 & n+2 \\ \sigma(\tau(1)) & \ldots & \sigma(\tau(n)) & n+1 & n+2 \end{pmatrix} = f(\sigma \circ \tau)$.

Analog se procedează în celelalte cazuri ținând cont de faptul că prin compunerea a două permutări de aceeaşi paritate obținem o permutare pară iar prin compunerea a două permutări de parități diferite obținem o permutare impară. Deoarece f este morfism injectiv de grupuri deducem că S_n poate fi privit ca subgrup al lui A_{n+2}.

2.84. Vom demonstra că dacă $\sigma \in Z(A_n)$ $(n \geq 4)$, atunci $\sigma = e$.

Să presupunem prin absurd că $\sigma \neq e$, atunci $(\exists)\ i \in \{1,2,\ldots,n\}$ a.î. $\sigma(i) \neq i$ şi fie $j = \sigma(i) \neq i$.

Cum $n \geq 4$, $(\exists)\ k,t \in \{1,2,\ldots,n\} - \{i,j\}$.

Dacă notăm $\sigma_{jkt} = (j,k,t)$, atunci $\sigma_{jkt} \in A_n$ şi astfel ar trebui ca $\sigma\sigma_{jkt} = \sigma_{jkt}\sigma$.

Scriind că în i este adevărată ultima egalitate, deducem că $j = k$ – absurd şi astfel deducem că $Z(A_n) = \{e\}$.

2.85. Vom demonstra că dacă $\sigma \in Z(S_n)$ $(n \geq 3)$, atunci $\sigma = e$.

Să presupunem prin absurd că $\sigma \neq e$, atunci $(\exists)\ i \in \{1,2,\ldots,n\}$ a.î. $\sigma(i) \neq i$ şi fie $j = \sigma(i) \neq i$.

Cum $n \geq 3$, $(\exists)\ k, \in \{1,2,\ldots,n\} - \{i,j\}$.

Dacă notăm $\sigma_{jk} = (j,k)$, atunci $\sigma_{jk}\sigma \neq \sigma\sigma_{jk}$ deoarece $(\sigma_{jk}\sigma)(i) = k$ iar $(\sigma\sigma_{jk})(i) = j$. Acest lucru este contradictoriu rezultând astfel că $Z(S_n) = \{e\}$.

2.86. $''\Leftarrow''$. Să presupunem că σ,σ' au aceeaşi structură ciclică şi să considerăm descompunerile lui σ,σ' ca produse de s ciclii disjuncți de lungimi $n_1,n_2, \dots ,n_s$ cu $1\leq n_i < n$ şi $n_1+n_2+\dots+n_s = n$:

$\sigma = (a_{11},a_{12}, \dots ,a_{1n_1}) \dots (a_{s1},a_{s2}, \dots ,a_{sn_s})$

$\sigma' = (b_{11},b_{12}, \dots ,b_{1n_1}) \dots (b_{s1},b_{s2}, \dots ,b_{sn_s})$.

Dacă vom considera permutarea :

$$\theta = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n_1} & a_{21} & \dots & a_{2n_2} & \dots & a_{s1} & \dots & a_{sn_s} \\ b_{11} & \dots & b_{1n_1} & b_{21} & \dots & b_{2n_2} & \dots & b_{s1} & \dots & b_{sn_s} \end{pmatrix}$$

atunci prin calcul direct se arată că $\theta\sigma\theta^{-1} = \sigma'$, adică σ şi σ' sunt conjugate în S_n.

$''\Rightarrow''$. Să presupunem că $\sigma,\sigma' \in S_n$ sunt conjugate în S_n, adică $(\exists)\ \theta\in S_n$ a.î. $\sigma' = \theta\sigma\theta^{-1}$.

Să presupunem că σ are structura ciclică descrisă mai sus. Deoarece prin calcul direct se arată că $\sigma'(b_{ij}) = \theta(a_{i\,j+1}) = b_{i\,j+1}$ pentru $1\leq i \leq s$, $1\leq j < n_i$ şi $\sigma'(b_{in_i}) = \theta(a_{i1}) = b_{i1}$ deducem că şi σ' are aceeaşi structură ciclică precum σ.

2.87. Permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$ are n-1 inversiuni, deci este pară pentru n impar şi impară pentru n par. Cum pentru orice $x\in S_n$, x^2 este pară, rezultă că pentru n par ecuația respectivă nu are soluție.

Fie acum $n = 2k+1$ cu $k\in\mathbb{N}^*$.

Pentru k = 1,2,3 se verifică prin calcul că soluțiile căutate sunt respectiv :

$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

În cazul general, vom demonstra că singura soluție a ecuației :

$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2k & 2k+1 \\ 2 & 3 & \dots & 2k+1 & 1 \end{pmatrix}$ este permutarea

$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & 2k+1 \\ k+2 & k+3 & \dots & 2k & 2k+1 & 1 & \dots & k+1 \end{pmatrix}$

Fie $x(1) = a$. Dacă $a = 1$, atunci $x^2(1) = x(1) = 1 \neq 2$ – absurd.

De asemenea, din $x(1) = 2 \Rightarrow 2 = x(2)$ – absurd, deci $a > 2$.

Dacă $a > 2$, atunci $x(2) = x(x^2(1)) = x^2(x(1)) = x^2(a) = a+1$ şi prin inducție după j şi t se arată că $x(j) = a+j-1$ pentru $j = 1,2,\dots,2k+2-a$ şi $x(2k + 2 – a + t) = t$ pentru $t = 1,2,\dots a-1$.

Deci $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2k+2-a & 2k+3-a & \dots & 2k+1 \\ a & a+1 & \dots & 2k+1 & 1 & \dots & a-1 \end{pmatrix}$

Deoarece $x(a) = x^2(1) = 2 \Rightarrow 2k+4-a = a \Rightarrow a = k+2$, de unde rezultă forma lui x pe care am amintit-o mai sus.

2.88. (i). Fie $\sigma = (i_o, \sigma(i_o), \dots, \sigma^{m-1}(i_o))$ un ciclu de lungime m, cu $p \nmid m$. Se observă imediat că:

$\sigma^p = (i_o, \sigma^p(i_o), \sigma^{2p}(i_o), \dots, \sigma^{(m-1)p}(i_o))$.

Deoarece (m,p) = 1, resturile pe care le dau la împărțirea cu m numerele 0,p,2p, …, (m-1)p sunt toate numerele 0,1,2,…,m-1 (eventual într-o altă ordine). Deducem că σ^p este un ciclu de lungime m. Cum $\sigma^m = (1) = e$ deducem că $\{i_o, \sigma(i_o), \dots, \sigma^{m-1}(i_o)\} = \{i_o, \sigma^p(i_o), \dots, \sigma^{p(m-1)}(i_o)\}$, adică σ şi σ^p au aceeaşi orbită.

(ii). Fie m = kp iar $\sigma = (i_o, \sigma(i_o), \dots, \sigma^{m-1}(i_o))$ un ciclu de lungime m.

Ținând cont de egalitățile $i_o = \sigma^{kp}(i_o), \sigma(i_o) = \sigma^{kp+1}(i_o), \dots, \sigma^{p-1}(i_o) = \sigma^{kp+p-1}(i_o)$, deducem că $\sigma^p = (i_o, \sigma^p(i_o), \dots, \sigma^{(k-1)p}(i_o)) \cdot (\sigma(i_o), \sigma^{1+p}(i_o), \dots, \sigma^{1+(k-1)p}(i_o)) \dots (\sigma^{p-1}(i_o), \dots, \sigma^{p-1+p}(i_o), \dots, \sigma^{p-1+(k-1)p}(i_o))$, adică σ^p este un produs de p ciclii disjuncți, fiecare având lungimea k = m/p.

2.89. (i). Fie σ un ciclu de lungime m, unde (m,p) = 1. Atunci există $q \in \{1,2, \dots, m-1\}$ a.î. $pq \equiv 1 \pmod m$. Dacă notăm $\tau = \sigma^q$, atunci din $pq \equiv 1 \pmod m$ deducem că (q,m) = 1 şi atunci, conform exercițiului precedent va rezulta că $\sigma^p = \tau$ este un ciclu de lungime m şi în plus $\tau^p = \sigma^{pq} = \sigma$ (deoarece $\sigma^m = e$).

(ii). Fie ciclii disjuncți de lungime k:

$\sigma_1 = (i_0^1, i_1^1, \dots, i_{k-1}^1)$

……

$\sigma_p = (i_0^p, i_1^p, \dots, i_{k-1}^p)$

Considerând atunci următorul ciclu de lungime kp:

$\tau = (i_0^1, \dots, i_0^p, i_1^1, \dots, i_1^p, \dots, i_{k-1}^1, \dots, i_{k-1}^p)$ se constată imediat că $\tau = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \dots \sigma_p$.

2.90. "$\Rightarrow$". Să presupunem că ecuația $x^p = \sigma$ are o soluție $x \in S_n$. Considerăm descompunerea lui x în ciclii disjuncți $x = x_1 x_2 \dots x_t$.

Să presupunem că dintre aceştia $x_1, x_2, \dots, x_i$ au lungimi divizibile cu p^2, $x_{i+1}, \dots, x_j$ au lungimi divizibile cu p dar nu cu p^2, iar $x_{j+1}, \dots, x_t$ au lungimi nedivizibile cu p.

Astfel, $\sigma = x^p = (x_1^p \dots x_i^p)(x_{i+1}^p \dots x_j^p)(x_{j+1}^p \dots x_t^p)$ (1).

Conform problemei anterioare, puterile $x_{j+1}^p,\ldots,x_t^p$ sunt ciclii de lungimi egale respectiv cu lungimile ciclilor $x_{j+1},\ldots x_t$, deci nedivizibile cu p. De asemenea orbitele lor sunt respectiv egale, ceea ce ne arată că $x_{j+1}^p,\ldots,x_t^p$ sunt ciclii disjuncți.

Tot din aceeaşi problemă deducem că fiecare din puterile $x_{i+1}^p,\ldots,x_j^p$ este un produs de p-ciclii disjuncți de lungimi care nu se mai divid cu p şi aceşti ciclii rămân disjuncți în totalitatea lor (au orbitele incluse în orbitele ciclilor $x_{i+1},\ldots,x_j$).

De asemenea, fiecare din puterile $x_1^p,\ldots,x_i^p$ este un produs de p-cicli disjuncți de lungimi divizibile cu p şi în totalitatea lor ciclii care apar rămân disjuncți.

Să presupunem că descompunerile acestor puteri sunt :

$x_1^p = x_{11}\cdot x_{12}\ldots x_{1p}$

……

$x_i^p = x_{i1}\cdot x_{i2}\ldots x_{ip}$

Ținând cont de cele de mai înainte, deducem că ciclii care au lungimi divizibile cu p sunt $x_{11},\ldots,x_{1p},x_{21},\ldots,x_{2p},\ldots,x_{i1},\ldots,x_{ip}$ şi numai aceştia; câte p dintre aceştia (şi anume exact în ordinea în care sunt scrişi mai înainte) au aceea şi lungime.

Deducem astfel că dacă fixăm o lungime divizibilă cu p de la ciclii din descompunerea lui σ, să zicem m_s, numărul α_s al ciclilor de lungime m_s este un multiplu de p (s = 1,2,…k).

"$\Leftarrow$". Să presupunem că toate numerele $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ sunt divizibile cu p. Atunci cei α_1 ciclii de lungime m_1(m_1 divizibil cu p) pot fi împărțiți în grupe de câte p ciclii şi conform ex. anterior produsul ciclilor dintr-o asemenea grupă este puterea p a unui alt ciclu (a cărui orbită este reuniunea orbitelor celor p ciclii). Deducem astfel că produsul celor α_1 ciclii de lungime m_1 este un produs de puteri de p-ciclii disjuncți. Analog pentru produsul celor α_2 ciclii de lungime m_2, ş.a,m.d. până la produsul celor α_k ciclii de lungime m_k ($m_1,\ldots,m_k$ fiind numerele divizibile cu p).

Considerăm acum şi ciclii de lungime $m_{k+1},\ldots,m_t$ (lungimi nedivizibile prin p), tot conform problemei precedente, fiecare asemenea ciclu este puterea p a unui ciclu având aceeaşi orbită.

Astfel, dacă notăm cu x produsul tuturor acestor noi ciclii puşi în evidență obținem că $\sigma = x^p$, deci ecuația considerată are soluție în grupul S_n.

Să rezolvăm acum aplicațiile din enunț.

Pentru prima aplicație, să notăm prin σ permutarea din dreapta. Avem următoarea descompunere a lui σ în produs de ciclii disjuncți:

σ = (1 5)(2 6)(3 7)(10 9)(4 8 11 13)(14 15 17 18)(9 12 16).

În cazul acestei probleme avem p = 2 iar numărul ciclilor de lungimi divizibile prin 2 sunt cei de lungime 2 şi 4. Avem $\alpha_1=4$, $\alpha_2=2$ şi cum ambele numere sunt divizibile prin 2 deducem că ecuaţia considerată are soluţie în S_{19}.

Pentru a doua ecuaţie, notând tot cu σ permutarea din partea dreaptă avem că σ = (1 3 5)(4 9 10)(2 6 7 8). Avem p = 3 iar ciclii de lungime 3 sunt în număr de $\alpha_1=2$ care nefiind multiplu de 3, deducem conform celor stabilite mai înainte că a doua ecuaţie nu are soluţie în S_{10}.

2.91. Oricum am considera o permutare $\sigma\in S_n$, $\sigma \neq e$, aceasta nu poate avea în descompunerea sa ciclii de lungime divizibilă cu p (căci p > n).

Deci numărul ciclilor de lungime divizibilă cu p este 0 şi cum 0 este multiplu de p, totul rezultă acum din problema precedentă.

2.92. "$\Rightarrow$". Fie $x\in S_n$, $x \neq e$, o soluţie a ecuaţiei $x^p = e$ şi fie $x = x_1x_2\ldots x_t$ descompunerea sa în ciclii disjuncţi. Vom demonstra că $x_1,\ldots,x_t$ au, fiecare dintre ei, lungimea p.

Deoarece $x_1,\ldots x_t$ sunt disjuncţi, rezultă că aceşti ciclii, ca şi puterile lor comută. Atunci egalitatea $x^p = e$ se scrie $x_1^p x_2^p \ldots x_t^p = e$. Să demonstrăm că de aici deducem $x_1^p = x_2^p = \ldots = x_t^p = e$.

Într-adevăr, dacă prin absurd $(\exists)$ $i\in\{1,2,\ldots t\}$ a.î. $x_i^p \neq e$, atunci $(\exists)$ $a\in\{1,2,\ldots,t\}$ cu $x_i^p(a) \neq a$ şi atunci a aparţine orbitei ciclului x_i.

Deoarece astfel a nu va face parte din orbitele ciclilor disjuncţi $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_t$ deducem că : $x_1^p(a) = \ldots = x_{i-1}^p(a) = x_{i+1}^p(a) = \ldots = x_t^p(a) = a$.

Deoarece $a = e(a) = (x_1^p x_2^p \ldots x_t^p)(a) = x_i^p(a) \neq a$ rezultă contradicţia $a \neq a$.

De asemenea, din cele de mai înainte deducem că ordinele permutărilor $x_1,x_2,\ldots,x_t$ în grupul S_n sunt divizori ai lui p şi cum p este prim deducem că $o(x_1) = \ldots = o(x_t) = p$.

Cum ordinul unui ciclu este egal cu lungimea ciclului respectiv, deducem că $x_1,\ldots,x_t$ sunt ciclii de lungime p.

"$\Leftarrow$". Această implicaţie este evidentă deoarece orice ciclu de lungime p are ordinul p în grupul S_n, deci este o soluţie a ecuaţiei $x^p = e$.

2.93. Facem inducţie după n.

Dacă n = 1, atunci G este ciclic şi cum orice subgrup al unui grup ciclic este ciclic, totul este clar.

Presupunem acum că $G = <\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}>$ şi $H \leq G$.

Alegem $y = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ a.î. m_1 ia cea mai mică valoare nenulă pozitivă (dacă m_1 este negativ schimbăm rolul lui y cu y^{-1}).

Dacă x_1 nu apare la un exponent nenul în orice element al lui H, atunci $<\{x_2,x_3,..,x_n\}>$ conține pe H și totul rezultă din ipoteza de inducție.

Astfel, pentru orice $z = x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}$ din H putem alege $q,r\in\mathbb{Z}$ cu $0 \le r < m_1$ și $l_1 = qm_1 + r$. Puterea la care apare x_1 în $zy^{-q}\in H$ este r și ținând cont de alegerea lui m_1 deducem că r = 0.

Deci $H = <y,K>$, unde $K = H \cap <\{x_2,x_3,..,x_n\}>$ și conform ipotezei de inducție K este generat de o mulțime de cel mult n-1 elemente și acum totul este clar.

2.94. Fie M o mulțime de generatori ai grupului ai grupului $(\mathbb{Q},+)$ și $\alpha \in M$ a.î. $H = <M \setminus \{\alpha\}> \subsetneq \mathbb{Q}$. Pentru $x\in H$, $(\exists)$ $a,b\in\mathbb{Z}$ a.î. $a\alpha = bx$, $a\neq 0$.

Deoarece $\frac{1}{a}\cdot\alpha\in H$ și $<M> = \mathbb{Q}$ putem scrie $\frac{1}{a}\cdot\alpha = c\alpha + y$ cu $c\in\mathbb{Z}$, $y\in H$. Rezultă că $\alpha = ac\alpha+ay = c(bx)+ay\in H$ ceea ce contrazice alegerea lui α.

2.95. După cum am arătat în soluția problemei **2.48.** avem $\mathbb{Q} = \bigcup_{m\ge 1} H_m$ unde $H_m = <\frac{1}{m!}>$ și evident $H_{m-1} \le H_m$, $(\forall)$ $m \ge 1$.

Fie deci $X = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ o mulțime nevidă a lui $\mathbb{Q}$.

Pentru orice $i = 1,2,\ldots,n$ $(\exists)$ $m_i \in\mathbb{N}$ a.î. $x_i\in H_{m_i}$. Alegând $m = \max_{1\le i\le n} m_i$ avem că $H_{m_i} \subseteq H_m$, $(\forall)$ $i = 1,2,\ldots,n$ deci $X \subseteq H_m \Rightarrow <X> \le H_m$ și cum H_m este ciclic rezultă că și $<X>$ este ciclic.

§3. Teorema lui Lagrange. Ordinul unui element. Indicele unui subgrup. Subgrupuri normale.

3.1. Din $|Z(G)| > \frac{1}{2}|G| \Rightarrow |G| < 2|Z(G)|$. Însă conform teoremei lui Lagrange $|Z(G)|$ divide $|G|$ (căci $Z(G) \le G$), adică $|G| = n\cdot |Z(G)|$ cu $n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 1$. Deci $n\cdot|Z(G)| < 2\cdot|Z(G)| \Rightarrow n < 2$, adică $n = 1 \Rightarrow |G| = |Z(G)| \Rightarrow G$ este comutativ.

3.2. Fie $H=\{x\in G: x^2 = 1\}$. Cum G este comutativ, dacă $x,y\in H \Rightarrow x^2 = y^2 = 1 \Rightarrow (xy^{-1})^2 = x^2y^{-2} = 1$, adică $xy^{-1}\in H$, deci $H \le G$.

Conform problemei anterioare, punând în locul lui Z(G) pe H, obținem că $|H| = |G|$, deci $H = G$, și de aici $x^2 = 1$, $(\forall)$ $x\in G$.

3.3. Să presupunem că mulțimea $T = \{ a_1, \ldots a_r\}$ a elementelor de ordin 2 are mai mult de n elemente, deci $r > n$ (atunci $r \ge n+1$). Pentru $a_i, a_j\in T$, $i \neq j$

rezultă că $a_ia_j \in G \setminus T$. Într-adevăr, dacă $a_ia_j \in T$ atunci $H = \{ e, a_i, a_j, a_ia_j\}$ ar fi un subgrup în G, deci $4 \mid 2n$ (conform teoremei lui Lagrange) adică n este par , ceea ce este absurd.

În plus, $a_ia_j \neq 1$ $(\forall)$ $i \neq j$. Din cele demonstrate rezultă că elementele a_1a_2, , a_1a_3, …, a_1a_r se află în $G \setminus (T \cup \{1\})$ al cărui cardinal este $2n - r - 1 < <2n - n - 1 \Rightarrow n-1 < r-1$, adică există $i \neq j$ a.î. $a_1a_i = a_1a_j \Rightarrow a_i = a_j$ – absurd. Deci $r \leq n$.

Observație. Maximul se poate atinge efectiv, de exemplu în cazul grupului diedral $\mathbf{D_n}$ cu 2n elemente.

3.4. Fie $o(x) = k$ şi $H = \{1,x,x^2,\ldots,x^{k-1}\} \leq G$. Cum $x^n \in H$, deci $o(x^n)$ divide $|H| = k = o(x)$.

3.5. Fie ord G = n şi d = c.m.m.d.c al ordinelor elementelor din G diferite de 1. Evident $d \mid n$. Fie $d = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$. Atunci există elementele $x_1, x_2, \ldots, x_r$ a.î. $p_i^{\alpha_i} \mid o(x_i) \Leftrightarrow o(x_i) = p_i^{\alpha_i} \cdot t_i$. Se verifică uşor că $x = x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_r^{t_r}$ are ordinul d.

3.6. Putem scrie $k = mm_1 = nn_1$ cu $m_1,n_1 \in \mathbb{N}$. Atunci $(xy)^k = x^ky^k = =(x^m)^{m_1}(y^n)^{n_1} = 1^{m_1} \cdot 1^{n_1} = 1$.

La cealaltă întrebare răspunsul este afirmativ căci dacă vom considera $y = x^{-1}$, atunci $xy = 1$, deci $o(xy) = 1$.

3.7. Deoarece $x^{-1}(xy)x = yx$, deducem că $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, $x^{-1}(xy)^n x = (yx)^n$, deci $(xy)^n = 1 \Leftrightarrow (yx)^n = 1$ de unde deducem că $o(xy) = o(yx)$.

Faptul că $o(x) = o(x^{-1})$ rezultă din echivalența $x^k = 1 \Leftrightarrow x^{-k} = 1$, $(\forall)$ $k \in \mathbb{N}$.

3.8. Fie $k = o(x^m)$ iar $d = (m,n)$. Putem scrie $m = dm'$, $n = dn'$ cu $m',n' \in \mathbb{N}$ şi $(m',n') = 1$ iar $mm' = nn' = dm'n'$.

Cum $n = o(x)$, avem $(x^m)^{n'} = (x^n)^{m'} = 1$, adică $o(x^m) = k \mid n'$.

Pe de altă parte, $x^{mk} = (x^m)^k = 1 \Rightarrow n = o(x) \mid mk \Rightarrow n' \mid m'k$ şi cum $(m', n') = 1 \Rightarrow n' \mid k$.

Am obținut astfel că $n' \mid k$ şi $k \mid n' \Rightarrow o(x^m) = k = n' = n/d = n/(m,n)$.

3.9. Avem $(xy)^{n_1n_2} = x^{n_1n_2} \cdot y^{n_1n_2} = (x^{n_1})^{n_2} \cdot (y^{n_2})^{n_1} = 1$.

Fie acum $n \in \mathbb{N}$ a.î. $(xy)^n = 1$; atunci $x^n = y^{-n}$ şi $x^{nn_2} = (y^{n_2})^{-n} = 1 \Rightarrow$

$n_1 \mid nn_2$ şi cum $(n_1,n_2) = 1 \Rightarrow n_1 \mid n$. Analog se demonstrează că $n_2 \mid n$, deci $n_1n_2 \mid n$. Prin urmare avem echivalența $(xy)^n = 1 \Leftrightarrow n_1n_2 \mid n$, deci $o(xy) = n_1n_2 = o(x)\cdot o(y)$.

Să presupunem că $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \{1\}$ şi fie $n = [n_1,n_2]$. În mod evident $(xy)^n = 1$, adică $o(xy) \mid n$. Fie acum $k \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(xy)^k = 1$. Atunci $x^k y^k = 1$, deci $x^k = y^{-k} \in \langle x\rangle \cap \langle y\rangle$, adică $x^k = y^{-k} = 1$, de unde $n_1 \mid k$ şi $n_2 \mid k$, deci $n \mid k$, ceea ce arată că $o(xy) = n$.

3.10. Să probăm la început existența lui y şi z. Din $(n_1, n_2) = 1 \Rightarrow (\exists)\ \alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ a.î. $\alpha n_1+\beta n_2 = 1$.

Astfel, dacă $x \in G$, $x = x^1 = x^{\alpha n_1 +\beta n_2} = x^{\alpha n_1} \cdot x^{\beta n_2}$

Alegem $y = x^{\beta n_2}$ iar $z = x^{\alpha n_1}$. Conform problemei **3.8.**, $o(y) = o(x^{\beta n_2}) = o(x)/(n_1n_2,\beta n_2) = (n_1n_2)/n_2 = n_1$ şi analog deducem că $o(z) = n_2$.

Să probăm acum unicitatea scrierii lui x; dacă $x = y_1z_1 = z_1y_1$ cu $o(y_1) = n_1$ şi $o(z_1) = n_2$, atunci $x = yz = y_1z_1 \Rightarrow y_1^{-1} y = z_1z^{-1} \Rightarrow (y_1^{-1} y)^{n_1} = 1$ şi $(y_1^{-1} y)^{n_2} = (z_1z^{-1})^{n_1} = 1 \Rightarrow (y_1^{-1} y)^{\alpha n_1 +\beta n_2} = [(y_1^{-1} y)^{n_1}]^{\alpha} \cdot [(y_1^{-1} y)^{n_2}]^{\beta} = 1 \Rightarrow y = y_1$ şi analog $z = z_1$.

3.11. Deoarece x comută cu $[x,y] = x^{-1}(y^{-1}xy)$ deducem că:
$[x,y]^m = x^{-m}(y^{-1}xy)^m = x^{-m} y^{-1}x^m y = [x^m,y] = [1,y] = 1$ şi analog $[x,y]^n = 1$.

Deoarece $d = (m,n)$, $(\exists)\ u,v \in \mathbb{Z}$ a.î. $d = mu + nv$ şi astfel
$[x,y]^d = [x,y]^{mu}\cdot[x,y]^{nv} = 1^u\cdot 1^v = 1$.

3.12. (i). $\Rightarrow$ (ii). Fie $f : G \to G$, $f(x) = x^2$, $(\forall)\ x \in G$. Atunci f este injectivă ($x^2 = y^2 \Rightarrow (xy^{-1})^2 = 1 \Rightarrow xy^{-1} = 1 \Rightarrow x = y$ căci în caz contrar, conform teoremei lui Lagrange, ar trebui ca $2 \mid |G|$ - absurd) şi cum $(G,\cdot)$ este este grup finit, se obține că f este bijecție, de unde ecuația $x^2 = a$ are o unică soluție $x_0 \in G$, pentru orice $a \in G$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Evident, căci există un singur element $x \in G$ astfel încât $x^2 = 1$, şi anume $x = 1$. Restul se dispun în perechi de forma (x,x^{-1}), unde $x \neq x^{-1}$ (căci dacă $x = x^{-1} \Rightarrow x^2 = 1$). Aşadar $ord(G) = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

3.13. $x = 1$ este o soluție comună a celor două ecuații.

$''\Leftarrow''$. Dacă $(m,n) = 1 \Rightarrow (\exists)\ u,v \in \mathbb{Z}$ a.î. $mu + nv = 1$. Dacă x_0 este o soluție comună a celor două ecuații avem $x_0^{mu} = 1$ şi $x_0^{nv} = 1 \Rightarrow x_0 = x_0^{mu+nv} = 1$.

$'' \Rightarrow ''$. Dacă $d = (m,n)$, există $a,b \in \mathbb{Z}$ a.î. $ma + nb = d$. Atunci soluția comună x_0 a celor două ecuații va fi soluție şi a ecuației $x^d = 1$ şi reciproc.

Într-adevăr : $x_0^m = x_0^n = 1 \Rightarrow x_0^d = x_0^{ma+nb} = 1$. Reciproca este evident adevărată.

Dacă $d \geq 2 \Rightarrow$ d are cel mult un divizor prim p. Atunci orice element de ordin p din G este soluție a ecuației $x^d = 1$. Cum există astfel de elemente în G (conform teoremei lui Cauchy, vezi problema **4.74.**) rezultă că ecuația $x^d = 1$ nu are soluție unică, contradicție cu ipoteza în cazul $d \geq 2$. În concluzie, rămâne doar cazul d = 1.

3.14. Presupunem că G este abelian, atunci ab = ba. Considerăm H = { 1,a,b,ab}. Deoarece G este presupus abelian, $a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1$, $a \cdot (ab) = a^2b = b$, $b \cdot (ab) = ab^2 = a$, şi astfel H este subgrup în G. Din teorema lui Lagrange avem |H| | |G|, contradicție căci |H| = 4 şi |G| = 10.

3.15. Se verifică imediat prin calcul că $A^4 = B^3 = I_2$ iar prin inducție matematică după n se demonstrează că $(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, de unde deducem că $o(AB) = \infty$.

3.16. Din $(m,n) = 1 \Rightarrow (\exists)\ \alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ a.î. $\alpha m + \beta n = 1$. Atunci, ținând cont de faptul că $x^n = 1$, deducem că $x = x^{\alpha m+\beta n} = x^{\alpha m} = (x^m)^\alpha \in H$.

3.17. Scriem $\prod_{x \in G} x = \left(\prod_{\substack{x \in G \\ o(x)>2}} x \right) \cdot \left(\prod_{\substack{x \in G \\ o(x) \leq 2}} x \right)$ şi vom demonstra că $\prod_{\substack{x \in G \\ o(x)>2}} x = 1 (*)$.

Dacă $x \in G$ cu $o(x)>2$, atunci $o(x) = o(x^{-1})>2$. Dar $x \neq x^{-1}$, căci în caz contrar ar rezulta că $x^2 = 1$.

Astfel în produsul (*) dacă apare un factor x, atunci apare şi factorul x^{-1}, deci în produsul (*) factorii se grupează doi câte doi (fiecare cu inversul său), de unde rezultă că produsul (*) este 1, deci $\prod_{x \in G} x = \prod_{\substack{x \in G \\ o(x) \leq 2}} x$.

Pentru a demonstra teorema lui Wilson, se ține cont de faptul că singurele elemente din $\mathbb{Z}_p^*$ de ordin ≤ 2 (p prim) sunt $\hat{1}$ şi $\hat{p-1} = -\hat{1}$, deci conform celor de mai înainte $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot \hat{p-1} = -\hat{1} \Rightarrow p \mid (p-1)! + 1$.

3.18. Fie p prim şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Avem că $U(\mathbb{Z}_{p^n}^*, \cdot) = \{ \hat{a} \in \mathbb{Z}_{p^n}^* \mid (a,p) = 1 \}$. Să determinăm în acest grup elementele $\hat{a} \in U(\mathbb{Z}_{p^n}^*, \cdot)$ a.î. $\hat{a}^2 = \hat{1}$, adică acele numere naturale a a.î. $1 \leq a < p^n$ cu $(a,p) = 1$ şi $p^n \mid a^2 - 1$ (*).

Evident a = 1 verifică condițiile de mai sus. Dacă a > 1, atunci putem scrie $a - 1 = p^k u$ și $a + 1 = p^t v$ cu $k,t \geq 0$, $(p,u) = (p,v) = 1$ iar $k + t \geq n$. Dacă $k = 0 \Rightarrow t \geq n \Rightarrow p^n \mid a+1$ și cum $a < p^n \Rightarrow a+1 = p^n \Rightarrow a = p^n-1$ și astfel obținem și elementul $\hat{a} = \widehat{p^n-1} = -\hat{1}$ ce verifică condițiile (*).

Dacă $t = 0 \Rightarrow k > n \Rightarrow p^n \mid a-1$ și cum $a < p^n \Rightarrow a-1 = 0 \Rightarrow a = 1$, contradicție !

Dacă $k \neq 0$, $t \neq 0 \Rightarrow 2 = p^t v - p^k u \Rightarrow p \mid 2$; pentru $p > 2$ obținem o contradicție.

Deci, dacă p > 2 atunci în $U(\mathbb{Z}^*_{p^n},\cdot)$ avem numai elementele $-\hat{1} = \widehat{p^n - 1}$ și $\hat{1}$ care au ordinul cel mult 2, obținând astfel concluzia cerută de la (ii).

Dacă p = 2, atunci din $2 = 2^t v - 2^k u \Rightarrow t = 1$ sau $k = 1$. Dacă $t = 1 \Rightarrow k \geq n-1 \Rightarrow a-1 = 2^k u \geq 2^{n-1} u$ și cum $1 < a < 2^n \Rightarrow u = 1$ și $k = n-1$. Deci în acest caz, dacă a verifică condițiile (*) $\Rightarrow a = 2^{n-1} + 1$.

Dacă $k = 1 \Rightarrow t \geq n-1 \Rightarrow a + 1 = 2^t v \geq 2^{n-1} v$ și cum $1 < a < 2^n \Rightarrow v = 1$ sau $v = 2$ (cazul v = 2 este exclus deoarece (v,2) = 1).

Dacă $v = 1 \Rightarrow t = n-1$ sau $t = n$. În cazul $t = n-1 \Rightarrow a = 2^{n-1}-1$ iar $t = n \Rightarrow a = 2^n - 1$.

În concluzie : dacă p = 2 și n > 2 în $U(\mathbb{Z}^*_{2^n},\cdot)$ numai elementele $-\hat{1}, \hat{1}$, $\widehat{2^{n-1}-1}$ și $\widehat{2^{n-1}+1}$ au ordinul cel mult 2, obținând concluzia cerută de (i).

Acum, concluziile cerute de (iii) (varianta de generalizare a teoremei lui Wilson) rezultă ținând cont de (i), (ii) și de problema **3.17.**

3.19. (i). Să notăm $H_n = U_{p^n}$ și $y_n = \cos \frac{2\pi}{p^n} + i \sin \frac{2\pi}{p^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dacă $z \in H_n \Rightarrow z^{p^n} = 1 \Rightarrow z^{p^{n+1}} = (z^{p^n})^p = 1^p = 1 \Rightarrow z \in H_{n+1} \Rightarrow H_n \subset H_{n+1}$ (această incluziune este strictă deoarece $y_{n+1} \in H_{n+1}$ și cum $y_{n+1}^{p^n} = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p} \neq 1 \Rightarrow y_{n+1} \notin H_n$).

(ii). Rezultă imediat din (i).

(iii). Fie $H \leq U_{p^\infty}$, $H \neq U_{p^\infty}$ și n cel mai mic număr natural pentru care $y_n \in H$ și $y_{n+1} \notin H$. Vom demonstra că $H = H_n$.

Incluziunea $H_n \subseteq H$ este evidentă (deoarece $H_n = \langle y_n \rangle$ iar $y_n \in H$).

Fie $z \in H \subset U_{p^\infty} \Rightarrow (\exists)\ m \in \mathbb{N}$ a.î. $z \in H_m \Rightarrow o(z) \mid p^m \Rightarrow o(z) = p^r$ cu $0 \leq r \leq m$. Deci z este o rădăcină de ordin r a unității $\Rightarrow z = y_r^k$ cu $(k,p^r) = 1$.

Dacă $a,b \in \mathbb{Z}$ a.î. $ak + bp^r = 1 \Rightarrow y_r = y_r^{ak+bp^r} = (y_r^k)^a = z^a \in H \Rightarrow r \leq n$ și cum $H_r \subset H_n \Rightarrow z \in H_n \Rightarrow H \subseteq H_n \Rightarrow H = H_n$.

3.20. Dacă $M,N\in GL_n(A)$, atunci $\det(M)$, $\det(N)\in U(A^*,\cdot)$ şi cum $\det(MN) = \det(M)\cdot\det(N) \Rightarrow MN\in GL_n(A)$.

Evident $I_n\in GL_n(A)$ iar dacă $M\in GL_n(A)$, cum $\det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1}$ deducem că $M^{-1}\in U(A^*,\cdot)$, adică $M^{-1}\in GL_n(A)$.

Rezultă astfel că $(GL_n(A),\cdot)$ este grup.

Dacă $M,N\in SL_n(A)$, atunci $\det(M) = \det(N) = 1$ şi deoarece $\det(MN^{-1}) = \det(M)\cdot(\det(N))^{-1} = 1\cdot1^{-1} = 1$ deducem că $MN^{-1}\in S_n(A)$, adică $SL_n(A) \trianglelefteq GL_n(A)$.

3.21. Dacă V este un K- spațiu vectorial de dimensiune n, atunci $|V| = q^n$ şi se observă imediat că $|GL_n(K)|$ este egal cu numărul sistemelor ordonate $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ de elemente ale lui V ce constituie baze ale lui V peste K.

Însă pentru a alege o bază a lui V peste K, putem alege mai întâi pe e_1 ca fiind orice element al lui V (avem q^n-1 posibilități), apoi pe e_2 ca fiind orice element al lui V care nu este de forma ae_1, cu $a\in K$ (şi avem q^n-q posibilități); apoi pe e_3 ca fiind orice element din V care nu este de forma $a_1e_1+a_2e_2$ cu $a_1,a_2\in K$ (şi avem q^n-q^2 posibilități), e.t.c.

În concluzie $|GL_n(K)| = (q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-1})$.

3.22. Cum $\det(U) = \det(V) = 1 \Rightarrow U,V\in SL_2(\mathbb{Z})$.

Prin calcul se verifică relațiile:

$U^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $V^{-1} =\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $U^k = \begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $V^k =\begin{pmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{pmatrix}$, $(\forall)\ k\in\mathbb{Z}$ precum şi egalitatea:

$$(*)\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}= U^{-1}V^2U^{-1}V^2.$$

Fie acum $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$ (deci $ad - bc = 1$).

Vom demonstra prin inducție matematică asupra lui $|c|$ că M poate fi scrisă sub forma $M = T_1^{k_1}\ldots T_n^{k_n}$, cu $T_i\in\{U,V\}$, $k_i\in\mathbb{Z}$, $1\le i\le n$.

Dacă $|c| = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow ad = 1 \Rightarrow a = d = 1$ sau $a = d = -1$.

În primul caz ($a = d = 1$) avem $M = \begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}= U^b$ iar în al doilea caz ($a = d = -1$) avem $M = \begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & -1\end{pmatrix}= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}= U^{-1}V^2U^{-1}V^2U^{-b}$ (ținând cont de (*)).

Presupunem acum că $|c|\neq0$ şi fie $q,r\in\mathbb{Z}$ a.î. $a = c\cdot q + r$, cu $0 \le r < c$.

Deoarece $M_1 = VU^{-q-1}M = \begin{pmatrix} r-c & b-(q-1)d \\ r & b-qd \end{pmatrix}$, conform ipotezei de inducție putem scrie $M_1 = T_1^{k_1} \ldots T_m^{k_m}$, cu $T_i \in \{U,V\}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le m$, de unde $M = U^{q+1}V^{-1}M_1 = = U^{q+1}V^{-1} T_1^{k_1} \ldots T_m^{k_m}$.

3.23. Faptul că $U,V,W \in GL_2(\mathbb{Z})$ este imediat. Dacă $M \in GL_2(\mathbb{Z})$, atunci $\det(M) = 1$ sau -1.

Dacă $\det(M) = 1$, atunci $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ şi totul rezultă din problema anterioară, iar dacă $\det(M) = -1$, cum $\det(W) = -1$ deducem că $\det(WM) = \det(W)\cdot\det(M) = 1$, deci $WM \in SL_2(\mathbb{Z})$ şi din nou afirmația rezultă din exercițiul anterior deoarece $M=W^{-1}(WM)$.

3.24. Dacă $H, K \in L_0(G)$, $H \wedge K = H \cap K \in L_0(G)$ iar $H \vee K = HK = KH \in L_0(G)$.

Pentru prima parte, fie $x \in G$ şi $h \in H \cap K$; atunci $xhx^{-1} \in H$, K deci $xhx^{-1} \in H \cap K$, adică $H \cap K \in L_0(G)$

Pentru partea a doua avem $HK = \bigcup_{x \in H} xK = \bigcup_{x \in H} Kx = KH$, deoarece $Kx = xK$, oricare ar fi $x \in G$, K fiind subgrup normal al lui G.

În mod evident $H,K \subseteq HK$, iar dacă alegem $S \le G$ a.î. $H,K \subseteq S$, atunci $HK \subseteq S$, adică $HK = KH = H \vee K$. Pentru a arăta că HK este subgrup normal în G, fie $x \in G$, $h \in H$ şi $k \in K$.

Scriind $x(hk)x^{-1} = (xhx^{-1})(xkx^{-1})$, cum $xhx^{-1} \in H$ şi $xkx^{-1} \in K$, deducem că $x(hk)x^{-1} \in HK$, adică $HK \trianglelefteq G$, deci $H \vee K \in L_0(G)$.

Am demonstrat că $L_0(G)$ este o sublatice a lui $L(G)$ (chiar mărginită deoarece $\{1\}$ şi $G \in L_0(G)$).

Demonstrăm că este o latice modulară, adică oricare ar fi $H,K,L \in L_0(G)$ cu $H \subseteq K$, se verifică relația $K \wedge (H \vee K) = H \vee (K \wedge L)$. Cum în orice latice are loc $H \vee (K \wedge L) \le K \wedge (H \vee K)$, este suficient să probăm $K \wedge (H \vee K) \le H \vee (K \wedge L)$, adică $K \cap (HL) \subseteq H(K \cap L)$. Dacă $x \in K \cap (HL)$ atunci $x \in K$ şi $x \in HL$, adică $x = yz$ cu $y \in H$ şi $z \in L$. Avem $z = y^{-1}x \in K$ şi cum $z \in L$ deducem că $z \in K \cap L$. Cum $y \in H$ rezultă că $x = yz \in H(K \cap L)$, adică $K \cap (HL) \subseteq H(K \cap L)$.

3.25. Dacă M este un A – modul, atunci este în particular un grup comutativ. Cum într-un grup comutativ subgrupurile sunt subgrupuri normale, se aplică problema anterioară ținând cont că submodulele sunt în particular subgrupuri în grupuri aditive comutative (dacă $N, S \in L_A(M)$, $N \wedge S = N \cap S$ şi $N \vee S = N + S = S + N$).

3.26. Dacă $x\in G$ şi $y\in H\subseteq Z(G) \Rightarrow y\in Z(G) \Rightarrow xyx^{-1} = xx^{-1}y = y\in H$, adică H este subgrup normal al lui G.

3.27. Fie $x\in Z(H)$, $g\in G$ şi $h\in H$. Din $H \trianglelefteq G \Rightarrow g^{-1}hg \in H \Rightarrow g^{-1}hgx = xg^{-1}hg \Leftrightarrow hgxg^{-1} = gxg^{-1}h \Rightarrow gxg^{-1}\in Z(H) \Rightarrow Z(H) \trianglelefteq G$.

3.28. Avem că $H = \{1,x\}$ cu $x\in G$, $x^2 = 1$, $x \neq 1$. Atunci $(\forall)\ y\in G$ avem $yxy^{-1}\in H$, deci $yxy^{-1} = 1$ sau $yxy^{-1} = x$. Dacă $yxy^{-1} = 1 \Rightarrow yx = y \Rightarrow x = 1$, fals. Deci $yxy^{-1} = x$, adică $yx = xy \Rightarrow x\in Z(G) \Rightarrow H \leq Z(G)$.

3.29. Deoarece $|G:H| = 2 \Rightarrow (G/H)_s = \{ H, xH\}$ cu $x\notin H$. Atunci şi $(G/H)_d = \{ H, Hx\}$. Din $H \cap xH = H \cap Hx = \varnothing$ şi $H \cup xH = H \cup Hx = G$ deducem că $xH = Hx$, adică $H \trianglelefteq G$.

3.30. Să demonstrăm la început că dacă $y,z\in G$ şi $y^n = z^n$, atunci $y = z$.

Dacă $m = |G|$, deoarece $(m,n) = 1$, există $s,t\in\mathbb{Z}$ a.î. $ms + nt = 1$. Atunci $y = y^{ms+nt} = y^{nt} = z^{nt} = z^{ms+nt} = z$, deoarece ordinele lui y şi z divid pe m. Rezultă atunci că mulțimea $\{y^n \mid y\in G\}$ conține m elemente diferite ale lui G, adică coincide cu G, de unde şi faptul că $x = y^n$ pentru un singur y.

3.31. Deoarece G/Z(G) are ordinul n, $[x,y]^n\in Z(G)$, deci $[x,y]^{n+1} = x^{-1}y^{-1}x[x,y]^n y = x^{-1}y^{-2}xy^2y^{-1}[x,y]^{n-1}y = [x,y^2]\cdot[y^{-1}xy, y]^{n-1}$.

3.32. Răspunsul este negativ. Considerăm S_3 grupul permutărilor de ordin 3, $S_3 = \{e, \sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5\}$, unde $e = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\sigma_4 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $\sigma_5 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$.

Din teorema lui Lagrange rezultă că orice subgrup propriu al lui S_3 are 2 sau 3 elemente, deci subgrupurile lui S_3 sunt $H_1 = \{e\}$, $H_2 = \{e,\sigma_1\}$, $H_3 = \{e,\sigma_2\}$, $H_4 = \{e,\sigma_3\}$, $H_5 = \{e, \sigma_4,\sigma_5\}$. Toate acestea sunt comutative, dar $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_5$ şi $\sigma_2\sigma_1 = \sigma_4$, deci $\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$.

3.33. Fie $x\in G$, $x \neq 1$. Dacă notăm cu $k = o(x)$, atunci conform teoremei lui Lagrange $k \mid n$, deci putem scrie $n = k\cdot p$, cu $p\in\mathbb{N}^*$. Atunci $x^n = x^{kp} = (x^k)^p = 1^p = 1$.

Iată o soluție care nu utilizează teorema lui Lagrange în cazul în care G este comutativ.

Presupunem că $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ şi fie $x\in G$.

Deoarece $\{xx_1, xx_2, \dots, xx_n\}=G \Rightarrow (xx_1)(xx_2)\dots(xx_n) = x_1x_2\dots x_n \Rightarrow x^n(x_1x_2\dots x_n) = x_1x_2\dots x_n \Rightarrow x^n = 1$.

Fie acum $a,n\in\mathbb{N}^*$, $(a,n) = 1$. Deoarece $\hat{a}\in U(\mathbb{Z}_n^*,\cdot)$ iar grupul $G = U(\mathbb{Z}_n^*,\cdot)$ are $\varphi(n)$ elemente, conform celor de mai sus deducem că $(\hat{a})^{\varphi(n)} = \hat{1} \Rightarrow n \mid a^{\varphi(n)}-1$.

3.34. (i). Cum $(G,\cdot)$ este un grup cu n elemente, atunci $x^n = 1$, $(\forall)\ x\in G$ (conform problemei **3.33.**). Aceasta înseamnă că $G \subset U_n$. Dar atât G cât şi U_n au câte n elemente, ceea ce arată că $G = U_n$.

(ii). Notăm $\xi = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Atunci $G = U_n = \{1, \xi, \dots, \xi^{n-1}\}$.

Fie $k = nq + r$ cu $0 \le r < n$ şi deci, notând cu S suma din enunţ, rezultă :

$S = a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k = 1 + \xi^k + \xi^{2k} + \dots + \xi^{(n-1)k} = 1 + (\xi^n)^q\cdot\xi^r + (\xi^n)^{2q}\cdot\xi^{2r} + \dots$

$\dots + (\xi^n)^{(n-1)q}\cdot\xi^{(n-1)r} = 1 + \xi^r + \xi^{2r} + \dots + \xi^{(n-1)r}$.

Deci dacă $r = 0$, atunci $S = n$, iar dacă $r > 0$, atunci :

$$S = 1 + \xi^r + \xi^{2r} + \dots + \xi^{(n-1)r} = = \frac{1-(\xi^r)^n}{1-\xi^r} = \frac{1-(\xi^n)^r}{1-\xi^r} = \frac{1-1}{1-\xi^r} = 0.$$

3.35. (i). Fie $a\in A$ fixat şi $x\in G \setminus A$. Atunci $ax\in A$ (dacă $ax \notin A \Rightarrow ax\in G \setminus A$, şi cum $x\in G \setminus A \Rightarrow a\in G \setminus A$- contradicţie)

Fie $f : G \setminus A \to A$, $f(x) = ax$. Atunci f este injectivă.

Dacă $G \setminus A$ este infinită $\Rightarrow$ A infinită (deoarece f este injectivă) – contradicţie.

Deci $G \setminus A$ este finită $\Rightarrow G = (G \setminus A) \cup A$ = finit.

Fie $|G| = m$ şi $|A| = n \Rightarrow |G \setminus A| = m-n$. Deoarece $G \setminus A \le G$, atunci $m-n \mid m \Rightarrow m-n = m \Rightarrow n = 0$- imposibil sau $m-n \le m/2 \Rightarrow m \le 2n \Rightarrow |G| \le 2|A|$.

(ii). $m-n \mid m \Rightarrow m-n \mid m-n+n \Rightarrow m-n \mid n$. Dacă n este prim $\Rightarrow m-n = 1$ sau $m-n = n$, deci $m = n+1$ sau $m = 2n$.

3.36. Fie $H' = <\{g^{-1}hg : g\in G, h\in H\}>$.

Să demonstrăm la început că $H \subseteq H'$ şi $H' \trianglelefteq G$. Cum pentru $x\in H$ avem $x = 1^{-1}x1$ iar $1\in G \Rightarrow H \subseteq H'$. Dacă $\alpha = g^{-1}hg$, cu $g\in G$, $h\in H$, atunci se verifică uşor că $\alpha^n = g^{-1}h^ng$, $(\forall)\ n\in\mathbb{Z}$.

Ţinând cont de definiţia subgrupului generat de o mulţime, deducem că un element din H' este de forma:

$h = (g_1^{-1}h_1g_1)^{n_1}\dots(g_k^{-1}h_kg_k)^{n_k}$ cu $g_i\in G$, $h_i\in H$, $n_i\in\mathbb{Z}$, $i = 1,2,\dots,k$, $k\in\mathbb{N}$.

Astfel, dacă $g\in G$, $g^{-1}hg = g^{-1}[(g_1^{-1}h_1^{n_1}g_1)\dots(g_k^{-1}h_k^{n_k}g_k)]g = [(g_1g)^{-1}h_1^{n_1}(g_1g)]\dots$

$\dots[(g_kg)^{-1}h_k^{n_k}(g_kg)]\in H'$, deci $H' \trianglelefteq G$.

Fie acum $H'' \trianglelefteq G$ a.î. $H \subseteq H''$; atunci deoarece orice element de forma $g_i^{-1} h_i^{n_i} g_i$ cu $g_i \in H$, $n_i \in \mathbb{Z}$ este în $H'' \Rightarrow H' \subseteq H''$.

3.37. (i). Definim $f : (C \cap B/C \cap A)_d \to (B/A)_d$ prin $f((C \cap A)x) = Ax$, $(\forall)\ x \in C \cap B$.

Dacă $x,y \in C \cap B$ şi $(C \cap A)x = (C \cap A)y$, atunci $xy^{-1} \in C \cap A \leq A$, deci $Ax = Ay$, adică f este corect definită.

Dacă $x,y \in C \cap B$ şi $Ax = Ay \Rightarrow xy^{-1} \in C \cap A \Rightarrow (C \cap A)x = (C \cap A)y$, adică f este injectivă, de unde rezultă că $| (C \cap B/C \cap A)_d | \leq | (B/A)_d | \Leftrightarrow |(C \cap B) : (C \cap A)| \leq |B: A|$.

(ii). Cum $A \leq G$, conform cu (i) avem $| G : A | \geq | (G \cap B) : (B \cap A) | = |B : (A \cap B)|$, prin urmare $| G : A | \cdot | G : B | \geq | B : (A \cap B) | \cdot | G : B | = | G : (A \cap B) |$.

(iii). cum $B \leq A \vee B$, conform cu (i) avem:

$| A \vee B | \geq | (A \vee B) \cap A : (A \cap B) | \Leftrightarrow | (A \vee B) : B | \geq | A : (A \cap B) |$.

3.38. (i). Conform problemei anterioare avem:

$| G : (A \cap B) | \leq | G : A | \cdot | G : B |$,

deci $| G : (A \cap B) |$ este finit.

De asemenea, $| G : (A \cap B) | = | G : A | \cdot | A : (A \cap B) | = | G : B | \cdot | B : (A \cap B) |$. Cum $| G : A |$ şi $| G : B |$ sunt prime între ele, rezultă că $| G : A|$ divide $|B : (A \cap B)|$, deci $| G : A | \leq | B : (A \cap B) |$.

Pe de altă parte, tot din exercițiul precedent ((iii)), avem că $| G : A | \geq | (A \vee B) : A | \geq | B : (A \cap B) |$. Prin urmare $| G : A | = | B : (A \cap B) |$ şi $| G : (A \cap B) | = | G : A | \cdot | G : B |$.

(ii). În cazul în care G este finit, relația $| G : (A \cap B) | = | G : A | \cdot | G : B |$ se scrie $|G| / |A \cap B| = (|G| / |A|) \cdot (|G| / |B|)$, de unde rezultă că $|G| = (|A| \cdot |B|) / |A \cap B| = |AB|$ (conform problemei **2.35.**) şi astfel $G = AB$.

3.39. Ținând cont de problemei **3.37.**, ((iii)) şi de ipoteză avem:

$| (A \vee B) : B | \geq | A : (A \cap B) | > 1/2 \cdot | G : B |$.

Cum $| G : B | = | G : (A \vee B) | \cdot | (A \vee B) : B | \Rightarrow | G : (A \vee B) | < 2$, de unde $| G : (A \vee B) | = 1 \Rightarrow G = A \vee B$.

3.40. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ a.î. $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = G$ şi $H \leq G$ a.î. $|G : H| = m$ $(m,n \in \mathbb{N}^*)$.

Pentru fiecare $j = 1,2,\ldots,n$ notând $x_{n+j} = x_j^{-1}$, fie $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ a.î. $G = \bigcup_{i=1}^{m} Hg_i$, unde $g_1 = 1$. Atunci, pentru fiecare pereche ordonată (i,j) există un

unic element $h_{ij} \in H$ şi un unic $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ a.î. $g_i x_j = h_{ij} g_k$ $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ şi $j \in \{1,2,\ldots,2n\}$.

Se probează acum imediat faptul că $\{h_{ij} : i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n\}$ este un sistem de generatori pentru H.

3.41. Este suficient să probăm afirmaţia din enunţ pentru cazul a două subgrupuri H, K ale lui G.

Pentru aceasta definim $f : (G/H\cap K)_d \to (G/H)_d \times (G/K)_d$ prin $f(x(H\cap K)) = (xH, xK)$, $(\forall)\ x \in G$.

Să demonstrăm acum că f este injectivă şi totul va fi clar; pentru aceasta fie $x,y \in G$ a.î. $xH = yH$ şi $xK = yK$. Deducem imediat că $xy^{-1} \in H\cap K$, deci $x(H\cap K) = y(H\cap K)$, adică f este injectivă (de fapt putem utiliza şi problemei **3.37.** (ii)).

3.42. Faptul că $C_G(x) \leq G$ este imediat. Fie acum $a,b \in G$. Din echivalenţele $axa^{-1} = bxb^{-1} \Leftrightarrow b^{-1}a \in C_G(x) \Leftrightarrow a\, C_G(x) = b\, C_G(x)$ deducem că dacă notăm cu C_x mulţimea conjugaţilor lui x din G, atunci funcţia $f : C_x \to (G/\, C_G(x))_d$, $f(axa^{-1}) = a\, C_G(x)$, $(\forall)\ a \in G$ este corect definită şi injectivă. Cum surjectivitatea lui f este evidentă, deducem că $|\, C_x\, | = |\, (G/\, C_G(x))_d\, | = |\, G : C_G(x)\, |$.

3.43. Dacă alegem H a.î. $K \leq H \leq G$, deoarece $Z(H) \leq C_G(K)$, atunci în ipoteza $C_G(K) = 1$ rezultă că $Z(H) = 1$.

Reciproc, presupunem că $Z(H) = 1$ pentru orice H a.î. $K \leq H \leq G$. Dacă $x \in C_G(K)$, atunci pentru $H = \langle K \cup \{x\} \rangle$ avem $K \leq H \leq G$ şi $x \in Z(H) = 1$, deci $C_G(K) = 1$.

3.44. (i). Fie $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in C_G(D)$; deoarece $K \neq Z_2$ pentru orice $1 \leq j < k \leq n$ putem alege elementele $h_i \in K^*$, $i = 1,2,\ldots,n$ cu $h_i \neq h_k$. Considerând matricea B ce are pe diagonala principală elementele $h_1, h_2, \ldots, h_n$ iar în rest zero, din $AB = BA \Rightarrow a_{jk} = 0 \Rightarrow A \in D$, adică $C_G(D) \leq D$ (am notat $G = GL_n(K)$).

Deoarece D este comutativ deducem că $D \leq C_G(D)$, adică $C_G(D) = D$.

Fie acum $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in Z(G) \leq C_G(D) = D$ cu $a_{jk} = 0$ pentru $j \neq k$.

Notând cu $E_{ij} \in M_n(K)$ matricea ce are pe poziţia (i,j) pe 1 iar în rest zero, considerăm pentru orice (i,j) cu $1 \leq i < j \leq n$, matricea $B = I_n + E_{ij}$. Atunci $B^{-1} = I_n - E_{ij}$ iar $BAB^{-1} = B + (a_{jj} - a_{ii})E_{ij}$. Scriind că $BAB^{-1} = B \Rightarrow a_{ii} = a_{jj}$, adică $A \in \{aI_n : a \in K\}$, de unde incluziunea $Z(G) \subseteq \{aI_n : a \in K\}$. Cum cealălaltă incluziune este evidentă deducem egalitatea cerută.

(ii). Să notăm $S = SL_n(K)$.

Dacă n = 2, cum $K \neq \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ putem alege $x \in K$, $x \neq -1$ sau 1 şi considerând $x_1 = x$, $x_2 = x^{-1}$ avem $x_1x_2 = 1$, deci matricea $B = x_1E_{11} + x_2E_{22} \in D \cap S$. Alegând acum $A \in C_G(D \cap S)$, din $AB = BA \Rightarrow a_{12} = a_{21} = 0$, adică $A \in D$.

Dacă n > 2, atunci $K \neq \mathbb{Z}_2$ iar pentru $1 \leq j < k \leq n$ alegem $t \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j,k\}$ şi $x_k = x_t = -1$ iar $x_i = 1$ pentru $i \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{k,t\}$.

Deoarece $x_1x_2\ldots x_n = 1$ avem că $B = x_1E_{11} + \ldots + x_nE_{nn} \in D \cap S$.

Din egalitatea $AB = BA \Rightarrow a_{jk} = 0$, adică $A \in D$.

În ambele situaţii obţinem că $C_G(D \cap S) \leq D$.

Cum D este comutativ şi $D \cap S \leq D \Rightarrow D \leq C_G(D \cap S)$, adică $C_G(D \cap S) = S$.

Avem $Z(S) \leq C_G(D \cap S) = S$, deci $Z(S) \leq D \cap S$. Observăm că pentru orice i,j cu $1 \leq i < j \leq n$, matricea $B = I_n + E_{ij} \in S$.

Cu ajutorul lui B repetăm raţionamentul : orice matrice din Z(S) este scalară, adică $Z(S) \leq S \cap Z(G)$ şi cum incluziunea $S \cap Z(G) \subseteq Z(S)$ este evidentă, deducem că $Z(S) = S \cap Z(G)$.

3.45. Fie $H = <\rho> \leq \mathbf{D}_n$; deoarece $o(\rho) = n$ deducem că H este subgrup ciclic de ordin n.

Orice element din $\mathbf{D}_n \setminus H$ este de forma $\rho^k\varepsilon$, k = 0,1,…,n-1. De asemenea, avem că $\varepsilon\rho = \rho^{n-1}\varepsilon = \rho^{-1}\varepsilon$. Dacă presupunem că $\varepsilon\rho^k = \rho^{-k}\varepsilon$, atunci $\varepsilon\rho^{k+1} = \varepsilon\rho\rho^k = \rho^{-1}\varepsilon\rho^k = \rho^{-1}\rho^{-k}\varepsilon = = \rho^{-(k+1)}\varepsilon$, prin urmare $\varepsilon\rho^k = \rho^{-k}$ pentru orice k = 0,1,…,n-1 şi $(\rho^k\varepsilon)^2 = \rho^k\varepsilon\rho^k\varepsilon = \rho^k\rho^{-k}\varepsilon^2 = 1$.

Rezultă că pentru orice $x \in \mathbf{D}_n \setminus H$ avem o(x) = 2. Dacă $H' = <x>$, $x \in \mathbf{D}_n$ (iar $\mathbf{D}_n$ este grup ciclic de ordin n) atunci o(x) = n > 2, deci $x \in H$. Dar atunci $H' \leq H$, $|H'| = |H| = n$, deci $H = H'$.

3.46. Avem că $\mathbf{D}_n = \{\rho^k\varepsilon^t : k = 0,1,\ldots,n-1, \text{ iar } t = 0,1\}$. Pentru $k,r \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ avem $\rho^k(\rho^r\varepsilon) = \rho^{k+r}\varepsilon$ şi $(\rho^k\varepsilon)\rho^r = \rho^{r-k}\varepsilon$, prin urmare $\rho^k(\rho^r\varepsilon) = (\rho^r\varepsilon)\rho^k \Leftrightarrow k + r \equiv r - k \pmod n \Leftrightarrow 2k \equiv 0 \pmod n$.

Rezultă că un element de forma $\rho^r\varepsilon$, r = 0,1,…,n-1 nu face parte din $Z(\mathbf{D}_n)$. În plus, $\rho^k \in Z(\mathbf{D}_n) \Leftrightarrow 2k \equiv 0 \pmod n$.

Dacă n este impar, rezultă că k = 0, deci $|Z(\mathbf{D}_n)| = 1$, iar dacă n este par, n = 2m, atunci k = 0 sau k = m, adică $Z(\mathbf{D}_n) = \{1, \rho^m\}$, deci $|Z(\mathbf{D}_n)| = 2$.

3.47. Să presupunem prin absurd că $(\exists)\ H \leq A_4$ a.î. |H| = 6. Atunci $|A_4 : H| = 12 : 6 = 2$ şi deci $H \trianglelefteq A_4$ (conform problemei **3.29.**). Deoarece A_4 conţine 8 ciclii de lungime 3, H va trebui să conţină un astfel de ciclu α. Ţinând cont de problema **2.87.** deducem că în S_4 α va avea 8 conjugaţi, astfel că $C_{S_4}(\alpha)$ va avea în S_4 indicele 8 (conform problemei **3.42.**) iar ordinul

24 : 8 = 3 ; există deci numai 3 permutări în S_4 (cu atât mai mult în A_4) ce comută cu α. Acestea sunt α, α^{-1} şi e (permutarea identică din S_4). Deoarece toate sunt în A_4, rezultă că $C_{A_4}(\alpha)$ are ordinul 3 iar indicele în A_4 egal cu 12 :3 = 4. Deci α are 4 conjugaţi în A_4, care vor fi de fapt în H căci $H \trianglelefteq A_4$.

De asemenea, H trebuie să conţină şi un element β de ordin 2, β= (ab)(cd). Am depistat astfel 6 elemente ale lui H şi anume : 4 ciclii de lungime 3, β şi e.

Dacă γ = (a,b,c), atunci $\gamma \in A_4$, $\gamma\beta\gamma^{-1}$ = (c,a)(b,d) $\neq \beta$ iar $\gamma\beta\gamma^{-1} \in H$. Am găsit astfel un nou element în H diferit de cele 6 (şi anume pe $\gamma\beta\gamma^{-1}$), ceea ce contrazice presupunerea de existenţă a lui $H \leq A_4$ a.î. $|H| = 6$.

§4. Morfisme şi izomorfisme de grupuri. Grupuri factor. Teorema lui Cauchy. Teoremele de izomorfism pentru grupuri.

4.1. Dacă $x,y \in G$ atunci $f(x) = g(x)$ şi $f(y) = g(y)$, astfel că $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)(f(y))^{-1} = g(x)(g(y))^{-1} = g(x)g(y^{-1}) = g(xy^{-1})$, adică $xy^{-1} \in G$, deci $G \leq G_1$.

Afirmaţiile (i) şi (ii) se demonstrează acum analog ca în cazul monoizilor (vezi problema **1.28.**).

4.2. (i) $\Rightarrow$ (ii). Dacă $x \in Ker(f) \Rightarrow f(x) = 1 = f(1) \Rightarrow x = 1$, adică $Ker(f) = \{1\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Dacă $x,y \in G_1$ şi $f(x) = f(y) \Rightarrow f(xy^{-1}) = 1 \Rightarrow xy^{-1} \in Ker(f) \Rightarrow xy^{-1} = 1 \Rightarrow x = y$, adică f este injectivă.

4.3. (i) $\Rightarrow$ (ii). Dacă $x \in G_0 \Rightarrow (f \circ g)(x) = (f \circ h)(x) \Rightarrow f(g(x)) = f(h(x)) \Rightarrow g(x) = h(x) \Rightarrow g = h$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Să presupunem prin absurd că f nu este injectivă, adică $Ker(f) \neq \{1\}$(conform problemei **4.2.**).

Considerăm $g,h : Ker(f) \to G_1$, g morfismul incluziune iar h morfismul nul.

Dacă $x \in Ker(f) \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = 1$ iar $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(1) = 1$, adică $f \circ g = f \circ h$ şi totuşi $g \neq h$, ceea ce este absurd.

Deci $Ker(f) = \{1\}$, adică f este injectivă.

4.4. (i) $\Rightarrow$ (ii). Fie $y \in G_2$; cum f este surjectivă $(\exists)\ x \in G_1$ a.î. $y = f(x)$.

Din $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g(f(x)) = h(f(x)) \Rightarrow g(y) = h(y) \Rightarrow g = h$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). (După Eilenberg şi Moore) Fie $H = f(G_1) \leq G_2$.

Dacă $H = G_2$, evident f este surjectivă; presupunem că $H \neq G_2$.

Cazul 1. $|G : H| = 2$, atunci conform problemei **3.29.** avem că $H \trianglelefteq G_2$ şi considerând în categoria grupurilor diagrama:

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2 \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} G_3 = G_2/H,$$

unde g este morfismul surjectiv canonic iar h este morfismul nul, atunci se verifică imediat că $g \circ f = h \circ f$ şi totuşi $g \neq h$, absurd!.

Cazul 2. $|G_2 : H| > 2$. Fie $\{x_i\}_{i\in I}$ un sistem complet de reprezentanți pentru clasele de resturi la stânga ale lui G_2 relativ la subgrupul H.

Pentru clasa de resturi H alegem ca reprezentant pe 1 şi fie $i_0 \in I$ a.î. $x_{i_0} = 1$.

Fie $\sigma : I \to I$ o bijecție a.î. $\sigma(i_0) = i_0$ şi $\sigma(i) \neq i$, $(\forall)\ i \neq i_0$.

Definim $\lambda : G_2 \to G_2$, $\lambda(x) = xx_i^{-1}x_{\sigma(i)}$, dacă $x \in Hx_i$.

Dacă $\lambda(x) = \lambda(y) \Rightarrow xx_i^{-1}x_{\sigma(i)} = yx_j^{-1}x_{\sigma(j)}$, cu $x \in Hx_i$ iar $y \in Hx_j$. Cum xx_i^{-1}, $yx_j^{-1} \in H \Rightarrow x_{\sigma(i)} \in Hx_{\sigma(j)} \Rightarrow \sigma(i) = \sigma(j) \Rightarrow i = j \Rightarrow x = y$, deci λ este o funcție injectivă.

Dacă $y \in G_2$, $y \in Hx_j$ şi $i \in I$ a.î. $\sigma(i) = j$, fie $h = yx_j^{-1} \in H$ şi $x = hx_i$. Atunci $\lambda(x) = xx_i^{-1}x_{\sigma(i)} = h\, x_ix_i^{-1}x_{\sigma(i)} = hx_j = y$, deci λ este surjecție, adică λ este bijecție.

Considerăm în categoria grupurilor diagrama:

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} G_3, \quad \text{unde } G_3 = \sum(G_2),\ \alpha \text{ este morfismul}$$

Cayley (adică pentru $g \in G_2$, $\alpha(g) : G_2 \to G_2$, $\alpha(g)(x) = gx$, $(\forall)\ x \in G_2$) iar $\beta(g) = \lambda^{-1} \circ \alpha(g) \circ \lambda$, $(\forall)\ g \in G_2$. Să demonstrăm că $\alpha(g) = \beta(g) \Leftrightarrow g \in H$. (*)

Dacă $\alpha(g) = \beta(g) \Rightarrow \alpha(g)(x) = \beta(g)(x)$, $(\forall)\ x \in G_1 \Rightarrow gx = \lambda^{-1}(g\lambda(x))$, $(\forall)\ x \in G_1$ atunci considerând $x = 1 \Rightarrow g = \lambda^{-1}(g)$ (pentru că $\lambda(1) = 1$). Deci $g = \lambda(g) = gx_i^{-1}x_{\sigma(i)} \Rightarrow x_i^{-1}x_{\sigma(i)} = 1 \Rightarrow x_i = x_{\sigma(i)} \Rightarrow i = \sigma(i) \Rightarrow x_i = x_{i_0} = 1 \Rightarrow g \in H$.

Dacă $h \in H$ şi $x \in G_2 \Rightarrow \lambda(hx) = h\lambda(x)$ (căci $x \in Hx_i \Rightarrow \lambda(hx) = hxx_i^{-1}x_{\sigma(i)} = h(\lambda(x))$), deci dacă $g \in H \Rightarrow (\beta(g))(x) = \lambda^{-1}(g\lambda(x)) = \lambda^{-1}(\lambda(gx)) = gx = (\alpha(g))(x)$, $(\forall)\ x \in G \Rightarrow \alpha(g) = \beta(g)$.

Din (*) rezultă că $\alpha \circ f = \beta \circ f$ şi cum $\alpha \neq \beta$ obținem contradicția ce ne arată că f este surjectivă.

4.5. Pe mulțime $M \times M$ considerăm relația $((x,y),(x',y')) \in \rho \Leftrightarrow xy' = x'y$ şi se verică imediat că este o congruență pe mulțimea produs $M \times M$.

Considerăm $G_M = (M \times M)/\rho$ şi pentru $(x,y) \in M \times M$ vom nota prin $(x,y)_\rho$ clasa de echivalență a lui (x,y) modulo ρ.

Pentru $(x_i,y_i) \in M \times M$, i = 1,2, definim:

$$(x_1,y_1)_\rho \cdot (x_2y_2)_\rho = (x_1x_2, y_1y_2)_\rho\ .$$

Se probează imediat faptul că această operație este corect definită şi dubletul $(G_M,\cdot)$ devine în felul acesta grup (elementul neutru este $(1,1)_\rho$ iar $(x,y)_\rho^{-1} = (y,x)_\rho$).

Aplicația $i_M : M \to G_M$, $i_M(x) = (x,1)_\rho$, $(\forall)\ x \in M$ este morfismul căutat.

Într-adevăr, dacă $x,y \in M$, atunci $i_M(xy) = (xy,1)_\rho = (x,1)_\rho \cdot (y,1)_\rho = i_M(x) \cdot i_M(y)$ şi $i_M(1) = (1,1)_\rho = 1$, adică i_M este morfism de monoizi.

Dacă $i_M(x) = i_M(y) \Rightarrow (x,1)_\rho = (y,1)_\rho \Rightarrow x \cdot 1 = y \cdot 1 \Rightarrow x = y$, adică i_M este morfism injectiv de monoizi.

Fie acum G un grup comutativ şi $u : G \to M$ un morfism de monoizi.

Definim $u' : G_M \to G$ prin $u'((x,y)) = u(x) \cdot (u(y))^{-1}$, $(\forall)\ (x,y) \in M \times M$.

Evident, u' este corect definită deoarece dacă mai avem $(x',y') \in M \times M$ a.î. $(x,y)_\rho = (x',y')_\rho \Rightarrow xy' = x'y \Rightarrow u(xy') = u(x'y) \Rightarrow u(x)u(y') = u(x')u(y) \Rightarrow u(x)(u(y))^{-1} = u(x')(u(y'))^{-1} \Rightarrow u'((x,y)_\rho) = u'((x',y')_\rho)$.

De asemenea, $u'((x,y)_\rho \cdot (x',y')_\rho) = u'((xx',yy')_\rho) = u(xx') \cdot (u(yy'))^{-1} = u(x)u(x') \cdot (u(y)u(y'))^{-1} = (u(x)(u(y))^{-1}) \cdot (u(x')(u(y'))^{-1}) = u'((x,y)_\rho) \cdot u'((x',y')_\rho)$, adică u' este morfism de monoizi.

Dacă $x \in M$, atunci $(u' \circ i_M)(x) = u'(i_M(x)) = u'((x,1)_\rho) = u(x)u(1) = u(x)$, adică $u' \circ i_M = u$.

Unicitatea lui u' se verifică imediat.

4.6. Fie $e > 1$ elementul neutru al grupului $(M, \circ)$.

Atunci $x \circ e = xe + ax + be + + c = x$ şi $e \circ x = ex + ae + bx + c = x$ pentru orice $x > 1$, de unde $e + a = 1$, $be + c = 0$, $e + b = 1$ şi $ae + c = 0$. Din ultimele patru relații deducem $a = b$, $e = 1-a > 1$ şi $a(1 - a) + c = 0$, deci $a = b < 0$ şi $c = a^2-a$. Operația algebrică se scrie $x \circ y = xy + a(x + + y) + a^2-a$. Cum M este stabilă relativ la $'' \circ ''$ rezultă $x \circ x = x^2 + 2ax + a^2-a > 1$ pentru orice $x > 1$. Deci $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2ax + a^2-a) = a^2 + a + 1 \geq 1$, de unde $a(a + 1) \geq 0$ şi cum $a < 0$ rezultă $a \leq -1$.

Dacă $a < -1$, fie $x = \frac{1-a}{2} > 1$ şi $y > 1$. Atunci $x \circ y = \frac{1-a}{2} y + a(1-\frac{a}{2} + y) + a^2-a = \frac{(1+a)y + a^2 - a}{2} > 1 \Leftrightarrow (1 + a)y + a^2 - a > 2 \Leftrightarrow (1 + a)(y + a - 2) > 0$. Cum $1 + a < 0$, rezultă că $y + a - 2 < 0$ pentru orice $y > 1$, fals căci $\lim\limits_{y \to \infty} (y+a-2) = +\infty$. Deci $a = -1$ şi operația devine $x \circ y = xy - (x + y) + 2$. Se arată cu uşurință că $(M, \circ)$ este grup.

Fie $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x-1)$. Cum $f(x \circ y) = f(xy-(x+y)+2) = \ln(xy-x-y+1) = \ln((x-1)(y-1)) = \ln(x-1) + \ln(y-1) = f(x) + f(y)$, rezultă că f este morfism de grupuri. Cum f este bijectivă, rezultă că f este izomorfism de grupuri.

4.7. Cum $G \neq \{0\}$, există $a \in G$, $a \neq 0$. Deoarece $G \leq \mathbb{R}$, $-a \in G$, deci G conţine numere reale strict pozitive. Fie $a > 0$, $a \in G$ şi $b = a+1$. Cum $G \cap (-b,b)$ este finită şi nevidă (conţine numărul a), fie α cel mai mic număr real strict pozitiv al ei. Atunci α este cel mai mic număr real strict pozitiv al lui G, (într-adevăr, dacă $\beta \in G$, $\beta > 0$, $\beta < \alpha$ atunci $\beta \in (-b,b) \cap G$ ceea ce contrazice alegerea lui α).

Vom arăta că $G = \{\alpha k / k \in \mathbb{Z}\} = \alpha\mathbb{Z}$.

Incluziunea $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ este imediată (se demonstrează prin inducţie după $k > 0$ că $\alpha k \in G$ şi cum $\alpha(-k) = -(\alpha k) \in G$ pentru orice $k > 0$, rezultă incluziunea dorită).

Pentru incluziunea inversă, fie $\beta > 0$, $\beta \in G$ şi $p = [\frac{\beta}{\alpha}]$. Rezultă că $p \leq \frac{\beta}{\alpha} < p+1$ sau $p\alpha \leq \beta < p\alpha+\alpha$, de unde $0 \leq \beta - p\alpha < \alpha$. Cum $\beta \in G$, $p\alpha \in G$, deducem că $\beta - p\alpha \in G$ şi ţinând cont de alegerea lui α, avem că $\beta - p\alpha = 0$, adică $\beta = p\alpha \in \{\alpha k / k \in \mathbb{Z}\}$.

Dacă $\beta < 0$, $\beta \in G$ atunci $-\beta > 0$, $-\beta \in G$ şi deci $-\beta \in \alpha\mathbb{Z}$, de unde $\beta \in \alpha\mathbb{Z}$.

Cum evident $0 = \alpha \cdot 0 \in \alpha\mathbb{Z}$, rezultă $G = \alpha\mathbb{Z}$. Grupurile $(G,+)$ şi $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe prin aplicaţia $f : G \to \mathbb{Z}$, $f(\alpha k) = k$, $(\forall)\ k \in \mathbb{Z}$.

4.8. (i). Dacă $H_2 \leq G$ şi $x,y \in H_2$ atunci $xy \in H_2$ deci $x^2y^2 = 1 = (xy)^2 = xyxy \Rightarrow x^{-1}x^2y^2y^{-1} = x^{-1}xyxyy^{-1} \Rightarrow xy = yx$.

Dacă $xy = yx$ pentru orice $x,y \in H_2$, atunci $(xy)^2 = xyxy = x^2y^2 = 1$ şi $(x^{-1})^2 = (x^2)^{-1} = 1$ deci $H_2 \leq G$.

(ii). Evident $1 \in H_p$. Dacă există $x \in H_p \setminus \{1\}$, fie $k \in \mathbb{N}^*$ cel mai mic cu proprietatea $x^k = 1$. Folosind teorema împărţirii cu rest, există $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < k$ a.î. $p = kq + r \Rightarrow 1 = x^p = (x^k)^q x^r = x^r \Rightarrow r = 0$, de unde $k = p$. Rezultă că $H_p = \{1,x,x^2,\ldots,x^{p-1}\}$ care este un subgrup al lui G.

Izomorfismul dintre H_p şi $(\mathbb{Z}_p,+)$ este dat de $x^i \to \hat{i}$, $0 \leq i \leq p-1$.

4.9. (i). Fie $x,y \in G$. Atunci $x \circ y = x^{\alpha \log_a y} > 0$. Dacă $x^{\alpha \log_a y} = 1 \Rightarrow x = 1$ sau $\alpha \log_a y = 0 \Rightarrow y = 1$ – imposibil deoarece $1 \notin G$. Atunci $x \circ y \in G$, deci G este *parte stabilă* faţă de operaţia algebrică $'' \circ ''$.

- *asociativitatea* şi *comutativitatea* rezultă prin calcul ;

- *elementul neutru* : fie $e \in G$ a.î. $x \circ e = x$, $(\forall)\ x \in G \Rightarrow x^{\alpha \log_a e} = x \Leftrightarrow \alpha \log_a e = 1 \Leftrightarrow \log_a e = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow e = a^{\frac{1}{\alpha}}$.

- *elementele simetrizabile* : fie $x \in G$ a.î. $x \circ x' = e \Leftrightarrow x^{\alpha \log_a x'} = a^{\frac{1}{\alpha}} \Leftrightarrow \log_a x^{\alpha \log_a x'} = \log_a a^{\frac{1}{\alpha}} \Leftrightarrow \alpha \log_a x' \cdot \log_a x = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \log_a x' = \frac{1}{\alpha^2 \log_a x} \Leftrightarrow x' = a^{\frac{1}{\alpha^2 \log_a x}}$ este simetricul lui x față de operația algebrică $'' \circ ''$.

Deci $G_{a,\alpha}$ este grup abelian.

(ii). Fie $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = a^{\frac{x}{\alpha}}$. Arătăm că f este injectivă :

$$f(x) = f(y) \Rightarrow a^{\frac{x}{\alpha}} = a^{\frac{y}{\alpha}} \Rightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\alpha} \Rightarrow x = y.$$

Arătăm că f este şi surjectivă : fie $y \in G$ şi atunci $f(x) = y \Leftrightarrow a^{\frac{x}{\alpha}} = y \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} = \log_a y \Leftrightarrow x = \alpha \log_a y \in \mathbb{R}^*$.

Fie $x,y \in \mathbb{R}^*$. Atunci $f(xy) = f(x) \circ f(y) \Leftrightarrow a^{\frac{xy}{\alpha}} = f(x)^{\alpha \log_a f(y)} \Leftrightarrow a^{\frac{xy}{\alpha}} = (a^{\frac{x}{\alpha}})^{\alpha \log_a (a^{\frac{y}{\alpha}})} \Leftrightarrow a^{\frac{xy}{\alpha}} = (a^{\frac{x}{\alpha}})^{\alpha \cdot \frac{y}{\alpha}} \Leftrightarrow a^{\frac{xy}{\alpha}} = a^{\frac{xy}{\alpha}}$, deci f este un morfism de grupuri.

Astfel, am demonstrat că f este un izomorfism de grupuri, adică $\mathbb{R}^* \approx G_{a,\alpha}$. Analog $\mathbb{R}^* \approx G_{b,\beta}$, deci $G_{a,\alpha} \approx G_{b,\beta}$.

4.10. Se verifică uşor axiomele grupului față de înmulțirea matricelor.

- dacă $A = \begin{pmatrix} ch\ a & sh\ a \\ sh\ a & ch\ a \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} ch\ b & sh\ b \\ sh\ b & ch\ b \end{pmatrix}$ atunci

$A \cdot B = \begin{pmatrix} ch\ (a+b) & sh\ (a+b) \\ sh\ (a+b) & ch\ (a+b) \end{pmatrix}$ astfel că M este *parte stabilă* în raport cu înmulțirea matricelor;

- *asociativitatea* este evidentă;
- *elementul neutru* este $I_2 = \begin{pmatrix} ch\ 0 & sh\ 0 \\ sh\ 0 & ch\ 0 \end{pmatrix}$;
- dacă $A \in M$, atunci $\det A = ch^2 a - sh^2 a = 1$, deci A este inversabilă şi inversa ei este $A^{-1} = \begin{pmatrix} ch\ a & -sh\ a \\ -sh\ a & ch\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\ (-a) & sh\ (-a) \\ sh\ (-a) & ch\ (-a) \end{pmatrix}$.

Funcția $f: \mathbb{R} \to M$, $f(a) = \begin{pmatrix} ch\ a & sh\ a \\ sh\ a & ch\ a \end{pmatrix}$ este izomorfismul dorit (folosim faptul că: *ch a ch b + sh a sh b = ch (a + b)* şi *sh a ch b + ch a sh b = =sh (a + b)*).

4.11. (i). Se verifică uşor axiomele grupului față de înmulțirea matricelor pentru mulțimile M şi G.

Pentru mulțimea M:

- *M este parte stabilă*: fie $A,B \in M$, $A=\begin{pmatrix} a+2b & 3b \\ 2b & a-2b \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} a'+2b' & 3b' \\ 2b' & a'-2b' \end{pmatrix}$, cu $a^2 - 10b^2 = (a')^2 - 10(b')^2 = 1$. Atunci:

$$AB=\begin{pmatrix} (aa'+10bb')+2(ab'+a'b) & 3(ab'+a'b) \\ 2(ab'+a'b) & (aa'+10bb')-2(ab'+a'b) \end{pmatrix}$$

şi se verifică prin calcul că $(aa' +10\ bb')^2 -10\ (ab' + a'b)^2 = 1$, deci $AB \in M$.

- *asociativitatea* : se ştie că înmulțirea matricelor este asociativă.
- *elementul neutru* este evident I_2 deoarece $I_2 \in M$.
- *elementele inversabile*: fie $A \in M \setminus \{I_2\}$, $A = \begin{pmatrix} a+2b & 3b \\ 2b & a-2b \end{pmatrix} \Rightarrow$ $a^2 - 10b^2 = 1 \Rightarrow \det A = 1 \Rightarrow$ A este inversabilă. Inversa lui A se calculează uşor :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a+2(-b) & 3(-b) \\ 2(-b) & a-2(-b) \end{pmatrix} \in M.$$

Calcule simple sunt şi pentru G.

(ii). Izomorfismul căutat este $f:M \to G$, $f(\begin{pmatrix} a+2b & 3b \\ 2b & a-2b \end{pmatrix}) = a + b\sqrt{10}$.

4.12. (i). Numărul matricelor de forma $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ cu $x,y \in \mathbb{Z}_3$ este egal cu numărul perechilor $(x,y) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, adică $3 \cdot 3 = 9$ (deoarece la perechi distincte corespund matrice distincte).

(ii). Se observă că mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 + y^2 = \hat{1}$, $x,y \in \mathbb{Z}_3$ conține doar următoarele perechi : $(\hat{0},\hat{1})$, $(\hat{1},\hat{0})$, $(\hat{2},\hat{0})$, $(\hat{0},\hat{2})$. Deci G va fi formată din 4 matrice :

$$e=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}.$$

(iii). Alcătuind tabla de înmulțire a elementelor lui G, deducem că acesta este un grup :

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

(iv). Pentru a defini morfismul $f : G \to \mathbb{Z}_4$ vom alcătui tabla adunării în $\mathbb{Z}_4$:

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

Vom pune $f(e) = \hat{0}$, $f(a) = \hat{1}$, $f(b) = \hat{2}$ şi $f(c) = \hat{3}$**.** Se verifică imediat faptul că $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, $(\forall)$ $x,y \in G$ (prin compararea celor două tabele) şi se observă că f este şi bijectivă. Astfel, $(G,\cdot) \approx (\mathbb{Z}_4, +)$.

4.13. (i). Se verifică axiomele grupului prin calcule simple (elementul neutru este $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$, şi deoarece dacă $A \in M$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & ib \\ 0 & 0 & 0 \\ ib & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow A$ este simetrizabilă deoarece $A' = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & 0 & i\frac{-b}{a^2+b^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ i\frac{-b}{a^2+b^2} & 0 & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \in M$ verifică faptul că $AA' = A'A = E$).

(ii). Faptul că $(\mathbb{C}^*,\cdot) \approx (M,\cdot)$ este evident deoarece $f: \mathbb{C}^* \to M$, $f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & 0 & ib \\ 0 & 0 & 0 \\ ib & 0 & a \end{pmatrix}$ este izomorfism de grupuri. Atunci $f((a + ib)^n) = A^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

În cazul nostru, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} = f(1 + i) \Rightarrow A^{2002} = f((1 + i)^{2002})$. Dar

$1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}) \Rightarrow (1 + i)^{2002} = \sqrt{2}^{2002}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})^{2002} =$

$= 2^{1001}\,(\cos\frac{2002\pi}{4} + i \sin\frac{2002\pi}{4}) = 2^{1001}[\cos(500\pi + \frac{\pi}{2}) + i \sin(500\pi + \frac{\pi}{2})] =$

$= 2^{1001}(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}) = 2^{1001}(0 + i) \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{2002} = f(0 + i \cdot 2^{1001}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i2^{1001} \\ 0 & 0 & 0 \\ i2^{1001} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.14. Se verifică axiomele grupului pentru mulțimile de matrice de la (i) şi (ii) iar pentru (iii) se verifică condițiile de subgrup.

Izomorfismele căutate sunt :

- $f : \mathbb{Z} \to M$, $f(k) = D_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pentru (i);
- $g : \mathbb{Z} \to M$, $f(k) = M_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pentru (ii);
- $h : \mathbb{R} \to M$, $h(a) = A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pentru (iii).

4.15. (i). Notăm cu $M(a) = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 \\ 2(1-a) & 2a-1 \end{pmatrix} \in M$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Dacă $a,b \in \mathbb{R}^* \Rightarrow M(a)M(b) = M(ab)$, deci M este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor. Elementul unitate este $M(1) = I_2$ şi $M(a)^{-1} = M(1/a)$, $(\forall)\ a \in \mathbb{R}^*$, deci $(M,\cdot)$ este grup.

În mod evident $f : \mathbb{R}^* \to M$, $f(a) = M(a)$, $(\forall)\ a \in \mathbb{R}^*$ este izomorfism de grupuri.

(ii). Prin inducție se verifică faptul că $M(a^n) = (M(a))^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi $a \in \mathbb{R}^*$.

O altă posibilitate de a calcula $(M(a))^n$ este folosind izomorfismul f :

$f(a^n) = f(a)^n = (M(a))^n \Rightarrow (M(a))^n = \begin{pmatrix} 2-a^n & a^n-1 \\ 2(1-a^n) & 2a^n-1 \end{pmatrix}$

4.16. Se verifică cu uşurință axiomele grupului.

Funcțiile $f_{\alpha,\beta} : G \to G$, $f_{\alpha,\beta}(A)=\begin{pmatrix} 1 & \alpha x & \alpha\beta y \\ 0 & 1 & \beta z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $\alpha,\beta \neq 0$, oricare ar fi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din G, sunt automorfismele lui G. Cum α şi β sunt oarecare, atunci mulțimea automorfismelor este infinită.

4.17. (i). Se verifică imediat că $A(x)\,A(y) = A(2xy) \in M$, pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$.

Elementul neutru se obține pentru $x = \frac{1}{2}$, deci $E = A(\frac{1}{2}) \in M$.

Inversa lui A(x) este $A(\frac{1}{4x}) \in M$ şi există pentru orice $x \neq 0$.

(ii). Fie $f : M \to \mathbb{R}^*$ izomorfismul cerut. Se caută f(A(x)) = ax şi din $f(A(\frac{1}{2})) = 1$, adică $\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$. Deci f(A(x)) = 2x şi se verifică uşor că este izomorfism de grupuri.

4.18. (i). Prin calcul direct se arată că $A^3 = O_3$.

(ii). Se verifică prin calcul că $(\forall)\, x,y \in \mathbb{R}$, $A_x \cdot A_y = A_{x+y} \in G$, deci G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor. Cum x+y = y+x şi (x+y)+z = =x+(y+z), $(\forall)\, x,y,z \in \mathbb{R} \Rightarrow A_x\, A_y = A_y A_x$ şi $A_{(x+y)+z} = A_{x+(y+z)} \Rightarrow$ înmulțirea pe G este comutativă şi asociativă.

Elementul neutru este $I_3 = A_0 \in G$ iar inversul unui element A_x din G este A_{-x} care este tot din G. Deci $(G,\cdot)$ este grup abelian.

(iii). Definind $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = A_x$, se verifică uşor că f este un izomorfism de grupuri.

4.19. Se verifică imediat că M_d este parte stabilă față de înmulțirea matricelor. Asociativitatea este evidentă, elementul neutru este I_2 (care se obține din a = 1 şi b = 0) şi deoarece toate matricele din M_d au determinantul nenul, ele vor fi inversabile, iar inversele lor se va observa că sunt din M_d. Astfel, $(M_d,\cdot)$ este grup.

Considerăm că există $f : \mathbb{C}^* \to M_d$ un izomorfism de grupuri. Acesta va duce un element a + bi într-o matrice din M_d, şi anume : $f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}$.

Se deduce imediat că f(1) = I_2. Condiția f((a+bi)(a′+b′i)) = f(a+bi)f(a′+b′i) este echivalentă cu :

$$\begin{pmatrix} aa'-bb' & d(ab'+a'b) \\ ab'+a'b & aa'-bb' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & db' \\ b' & a' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+dbb' & d(ab'+a'b) \\ ab'+a'b & aa'+dbb' \end{pmatrix}$$ ceea ce este posibil doar dacă d = -1, deci f(a + bi) = $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (faptul că f în această formă este o bijecție se verifică imediat).

4.20. Deoarece elementele lui G_n se pot caracteriza şi prin aceea că suma elementelor de pe linii şi de pe fiecare coloană este egală cu 1, se deduce imediat că $(G_n,\cdot)$ este grup (pentru $A\in G_n$, $A^{-1} = A^t\in G_n$).

Fie acum $A\in G_n$. Fixând coloana i în matricea A, există o unică linie j în această matrice cu proprietatea că elementul de la intersecția lor este 1, adică $a_{ji}=1$. Definim atunci permutarea $\sigma_A\in S_n$ asociind fiecărui element $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ elementul $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ definit ca mai sus, adică $\sigma_A(i) = j \Leftrightarrow a_{ji} = 1$. Se probează acum imediat că asocierea $A \to \sigma_A$ este izomorfismul căutat.

4.21. (i). Se verifică axiomele grupului (e = $4\in G$ este elementul neutru; dacă $x\in G\setminus\{4\}$, atunci simetricul lui x este $x' = \frac{3x-8}{x-3} = 3 + \frac{1}{x-3} \in G$).

(ii). Se impune ca f(1) = 4 şi f(xy) = f(x) $\circ$ f(y), $(\forall)$ $x,y\in G \Leftrightarrow$ a + b = 4 şi axy + b = (ax + b) $\circ$ (ay + b) $\Leftrightarrow$ a + b = 4 şi $a = a^2 \Rightarrow$ a = 1 şi b = 3 $\Rightarrow$ f(x) =x +3.

(iii). Se procedează prin inducție şi se obține $x^n = (x-3)^n + 3$ (deoarece $f^{-1}(x) = x- 3$ şi $f^{-1} : G \to \mathbb{R}_+^*$ este izomorfism şi deci $f^{-1}(x^n) = (f^{-1}(x))^n \Rightarrow (f^{-1}(x))^n = (x-3)^n \Rightarrow x^n - 3 = (x - 3)^n$).

4.22. (i).Deoarece $(\forall)$ $x,y\in G$ $x\circ y = (x-5)(y-5) + 5 > 5$, G este parte stabilă în raport cu $''\circ''$; asociativitatea rezultă prin calcul . Comutativitatea rezultă din comutativitatea înmulțirii şi adunării numerelor reale. Elementul neutru este $e = 6\in G$ iar dacă $x\in G \setminus \{6\}$, atunci $x^{-1} = \frac{5x-24}{x-5} = 5 + \frac{1}{x-5} \in G$. Deci $(G, \circ)$ este grup comutativ.

(ii). Căutăm un izomorfism $f : (\mathbb{R}_+^*,\cdot) \to (G,\circ)$, de forma f(x) = ax + b.

Din $f(xy) = f(x)\circ f(y) \Rightarrow axy + b = (ax + b)(ay + b) - 5(ax + b) - -5(ay + b) + 30 \Rightarrow$ a = 1 şi b = 5$\Rightarrow$ f(x) = x + 5 (se verifică f(1) = 6). Evident f este bijectivă, astfel avem izomorfismul dorit.

(iii). Cum $(\mathbb{R}_+^*,\cdot) \approx (\mathbb{R},+)$ ($h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \ln x$ este izomorfism sau inversul acestuia $g:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $g(x) = e^x$ este izomorfism) $\Rightarrow (\mathbb{R},+) \approx (G, \circ)$.

(iv). Fie $t = f \circ g : \mathbb{R} \to G \Rightarrow t(x) = e^x + 5$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Cum f şi g sunt bijecţii, rezultă că şi t este bijecţie, adică există $t^{-1} : (G, \circ) \to (\mathbb{R}, +)$, $t^{-1}(x) = \ln (x-5)$.

Atunci $t^{-1}(x^n) = n\, t^{-1}(x) \Leftrightarrow \ln (x^n - 5) = n \ln(x - 5) \Leftrightarrow x^n - 5 = (x - 5)^n$ de unde rezultă că $x^n = (x - 5)^n + 5$.

4.23. Observăm că $'' \circ ''$ se poate scrie astfel: $A \circ B = (A+I_2)(B+I_2) - I_2$.

Dacă $A,B \in S \Rightarrow A+I_2$, $B+I_2$ sunt inversabile $\Rightarrow A \circ B + I_2$ este inversabilă, deci $A \circ B \in S$, adică S este parte stabilă în raport cu $'' \circ ''$. Se observă că $O_2 \in S$ (deoarece $O_2+I_2 = I_2$ este inversabilă) iar $A \circ O_2 = A = O_2 \circ A$, deci O_2 este elementul neutru.

Dacă $A \in S$, $A \neq O_2$ şi $A \circ B = O_2 \Rightarrow (A+I_2)(B+I_2) = I_2 \Rightarrow B+I_2$ este inversabilă în $M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow B \in S$ şi $B+I_2$ este inversul la dreapta al lui $A+I_2$ în $M_2(\mathbb{R})$. Analog, din $C \circ A = O_2 \Rightarrow C \in S$ şi $C+I_2$ este inversul la stânga al lui $A+I_2$ în $M_2(\mathbb{R})$. Atunci $B+I_2 = C+I_2$, de unde $B = C$, deci A este inversabilă în raport cu legea $'' \circ ''$ şi $A^{-1} = (A+I_2)^{-1} - I_2$.

Astfel, $(S, \circ)$ este grup.

Fie $f : (S, \circ) \to U(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ definită prin $f(A) = A+I_2$; se verifică uşor faptul că f este un izomorfism de grupuri.

4.24. (i). Fie $x \in G$ şi $x_2, \ldots, x_n \in G \setminus \{1\}$ a.î. $x \cdot x_2 \cdot \ldots x_n \neq 1 \Rightarrow (\exists)\ x_{n+1} \in G$ cu $x \cdot x_2 \ldots x_n = x_{n+1}^n \Rightarrow x = x_{n+1}^n \cdot x_n^{-1} \ldots x_2^{-1}$. Cum $x_{n+1}^n, x_n^{-1}, \ldots, x_2^{-1} \in G \setminus \{1\} \Rightarrow (\exists)\ y \in G$, $x = x_{n+1}^n \cdot x_n^{-1} \ldots x_2^{-1} = y^n$.

(ii). $(\forall)\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $(\exists)\ x_{n+1} = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \in \mathbb{R}_+^*$ a.î. $x_1 x_2 \ldots x_n = x_{n+1}^n$.

(iii). $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ nu are proprietatea g(n), $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, deci $(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \not\simeq (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

4.25. (i). Fie $x,y \in G$. Atunci $f(xy) = f(x)f(y)$ implică $(xy)^3 = x^3y^3$, de unde, înmulţind la stânga cu x^{-1} şi la dreapta cu y^{-1}, obţinem $(yx)^2 = x^2y^2$. Dar $x^4y^4 = (y^2x^2)^2 = [(xy)^2]^2$ şi $(xy)^4 = x(yx)^3y \Rightarrow x^3y^3 = (yx)^3$. Atunci $(xy)^3 = (yx)^3 \Rightarrow f(xy) = f(yx)$ şi cum f este injectivă, rezultă că $xy = yx$, $(\forall)\ x,y \in G$, adică G este abelian.

(ii). Conform celor de mai sus $(xy)^2 = y^2x^2$ şi $(yx)^2 = x^2y^2$, $(\forall)\ x,y \in G$. Atunci, $y(xy)^2 = y^3x^2 \Rightarrow (yx)^2y = y^3x^2$. Dar $(yx)^2y = x^2y^3$, de unde rezultă că $y^3x^2 = x^2y^3$, $(\forall)\ x,y \in G$. Deoarece f este surjectivă, $(\forall)\ z \in G$ există $y \in G$ a.î. $f(y) = z$, adică $y^3 = z$. Atunci $x^2z = zx^2$, $(\forall)\ x,z \in G \Rightarrow x^2 \in Z(G)$ şi $z^2x^2 = zx^2z \Rightarrow (xz)^2 = zx^2z \Leftrightarrow xzxz = z\,x^2z \Leftrightarrow zx = xz$, $(\forall)\ x,z \in G$, adică G este abelian.

4.26. Fie H_1 un subgrup propriu al lui G. Atunci $f(H_1) = f(H \cap H_1)$, deci $f(H_1)$ este subgrup al lui G. Pentru a arăta că f nu este morfism, fie $a \in H \setminus \{1\}$ şi $b \in G \setminus H$. Atunci $ab \in G \setminus H$ şi $f(ab) = 1 \neq a \cdot 1 = f(a)\, f(b)$, deci f nu este un morfism de grupuri.

4.27. (i). Din $x^n = 1 \Rightarrow (f(x))^n = 1 \Rightarrow o(f(x)) \mid n$.

(ii). Dacă $o(x) = \infty \Rightarrow x^n \neq 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (f(x))^n \neq 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow o(f(x)) = \infty$. Dacă $o(x) = n \Rightarrow d = o(f(x)) \mid n$ (conform cu (i).).

Pe de altă parte, $f(x^d) = (f(x))^d = 1 = f(1) \Rightarrow x^d = 1 \Rightarrow n \mid d$, adică $n = d$.

4.28. (i). Dacă $f,g \in H = \mathrm{Hom}(G_1,G_2)$ şi $x,y \in G_1$, atunci $(fg)(xy) = f(xy)g(xy) = f(x)f(y)g(x)g(y) = f(x)g(x)f(y)g(y) = (fg)(x)(fg)(y)$, adică $fg \in H$.

Asociativitatea înmulţirii este imediată; elementul neutru este morfismul nul $1: G_1 \to G_2$, $1(x) = 1$, $(\forall)\ x \in G_1$.

Pentru $f \in H$, definind $f' : G_1 \to G_2$, $f'(x) = (f(x))^{-1}$, $(\forall)\ x \in G_1$ se probează imediat că f' este simetricul lui f în H , de unde deducem că H este grup.

Deoarece G_2 este comutativ rezultă că H este comutativ.

(ii). Pentru $x \in G_2$ definind $f_x : \mathbb{Z} \to G_2$, $f_x(n) = nx$, $(\forall)\ n \in \mathbb{Z}$, se verifică imediat că $f_x \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},G_2)$.

De asemenea, se probează uşor că $\varphi : G_2 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},G_2)$, $\varphi(x) = f_x$, $(\forall)\ x \in G_2$ este izomorfism de grupuri.

(iii). Fie $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)$. Cum $(\mathbb{Z}_m,+)$ este grup ciclic generat de $\hat{1}$, atunci f este determinat de fapt de $f(\hat{1})$ (mai precis, dacă $\hat{x} \in \mathbb{Z}_m \Rightarrow f(\hat{x}) = xf(\hat{1})$).

Dacă notăm $f(\hat{1}) = \bar{b}$ (clasa lui b în $\mathbb{Z}_n$), atunci $\bar{0} = f(\hat{0}) = f(\hat{m}) = m\,\bar{b}$, adică $\bar{0} = m\,\bar{b}$.

Reciproc, dacă alegem $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ a.î. $\bar{0} = m\,\bar{a}$, atunci $g: \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$, $g(\hat{x}) = x\bar{a}$ este morfism de grupuri.

Să găsim acum numărul claselor $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ a.î. $\bar{0} = m\,\bar{a}$ (putem presupune că $a<n$).

Din $\bar{0} = m\,\bar{a} \Rightarrow ma \equiv 0 \pmod n \Rightarrow (\exists)\ b \in \mathbb{Z}$ a.î. $ma = nb$.

Dacă $d = (m,n)$, atunci dacă $d = 1 \Rightarrow ma = nb \Rightarrow \bar{0} = \bar{a}$.

Dacă $d>1$, tot din $ma = nb$, cum $(m/d,n/d) = 1 \Rightarrow a =$ multiplu de n/d.

Reciproc, dacă a este multiplu de n/d cu $a < n$, atunci $\bar{0} = m\,\bar{a}$.

Deci $\bar{a} \in \{\bar{0}, \overline{(n/d)}, \overline{(2n/d)}, ..., \overline{((d-1)n/d)}\}$.

Rezultă că Hom $(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)$ este ciclic, generat de morfismul corespunzător clasei lui $\overline{(n/d)}$ şi cum are d elemente el va fi izomorf cu $(\mathbb{Z}_d,+)$.

4.29. Evident, $f_n \circ f_m = f_m \circ f_n = f_{m+n} \in G$. Elementul neutru este $f_0 = 1_{(2,\infty)}$ iar inversa funcţiei f_n este f_{-n}. Operaţia de compunere a funcţiilor fiind asociativă rezultă că $(G, \circ)$ este grup.

Se verifică fără dificultate că $F : (\mathbb{Z},+) \to (G, \circ)$, $F(n) = f_n$ este un izomorfism de grupuri.

4.30. (i). Se verifică imediat.

(ii). Fie $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un morfism. Notăm cu $n = \varphi(1)$. Se arată uşor prin inducţie matematică : $\varphi(m) = nm$, $(\forall)\ m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi(m) = f_n(m) \Rightarrow \varphi = f_n$.

(iii).Evident, $f_1 = 1_{\mathbb{Z}}$ şi $f_{-1} = -1_{\mathbb{Z}}$ sunt izomorfisme. Orice morfism $f_m(x) = mx$ cu $m \neq \pm 1$ nu este surjectiv deoarece Im $f_m = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\} \neq \mathbb{Z}$.

4.31. (i). Dacă $a,b \in (-k,k)$ atunci se verifică imediat că $a \circ b \in (-k,k)$ şi că $\circ$ este asociativă.

Elementul neutru este 0, opusul lui x este –x, deci (-k,k) este grup abelian.

(ii). $f(t) = \int_0^t \frac{dx}{k^2 - x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{k+t}{k-t}$ şi se verifică faptul că $f(x \circ y) = f(x) +$ $+f(y)$, deci f este morfism de grupuri de la $(G, \circ)$ la $(\mathbb{R},+)$. Pentru $x \in (-k,k)$, $f'(x) = \frac{1}{k^2 - x^2} > 0$, adică f este strict crescătoare, deci injectivă. Cum f este continuă pe acest interval şi $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, rezultă că f este surjectivă, deci bijectivă. Deci f este un izomorfism de grupuri.

4.32. Fie $f : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R},\circ)$, $f(x) = \text{sh } x$. Avem $f(0) = 0$, $f(x + y) =$ $=\text{sh}(x + y) = \text{sh } x \ \text{ch } y + \text{sh } y \ \text{ch } x$. Cum $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 \Rightarrow \text{ch}^2 x = 1 + \text{sh}^2 x$ şi cum cosinusul hiperbolic este o funcţie pozitivă $\Rightarrow \text{ch } x = \sqrt{1 + sh^2 x}$.

Deci $\text{sh } x \circ \text{sh } y = \text{sh } x \ \sqrt{1 + sh^2 y} + \text{sh } y \ \sqrt{1 + sh^2 x} = \text{sh } x \ \text{ch } y +$ $+\text{sh } y \ \text{ch } x = \text{sh}(x + y)$, astfel că f verifică condiţiile unui morfism de grupuri şi este şi o bijecţie (deoarece funcţia sh este o bijecţie). Astfel $(\mathbb{R},\circ)$ este imaginea printr-un izomorfism a unui grup, deci va fi şi el un grup.

4.33. (i). Fie $G' = \{0\}$. Atunci $f_{G'}(0) = 1$ verifică condiţia din enunţ.

(ii). Fie $G' \leq G = (\mathbb{R}, +)$, $G' \neq \{0\}$.

Fie $\alpha \in G' \setminus \{0\}$, $\alpha \in M$. Atunci $f(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{a}$. Cum $f_{G'}$ este morfism avem $f(0) = 1 \Rightarrow f(\alpha - \alpha) = 1 \Rightarrow f(\alpha) \cdot f(-\alpha) = 1$.

Dacă $-\alpha \in M \Rightarrow \operatorname{tg}(-\alpha) = -\frac{1}{a} \Rightarrow -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = -\frac{1}{a}$, fals. Deci $-\alpha \notin M \Rightarrow$ $f(-\alpha) = -a \sin \alpha + \cos \alpha \Rightarrow 1 = f(\alpha) \cdot f(-\alpha) = -\frac{1}{a}(-a \sin \alpha + \cos \alpha) \Rightarrow$ $\sin \alpha - \frac{1}{a} \cos \alpha = 1$ şi înlocuind pe $-\frac{1}{a}$ cu $\operatorname{tg} \alpha$, obținem $2 \sin \alpha = 1 \Rightarrow$ $\sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{a}{2}$. Înlocuind în relația $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, obținem $(-\frac{a}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$.

$G' \leq \mathbb{R}$ şi $\alpha \in G' \Rightarrow 2\alpha \in G'$ şi $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{-\frac{2}{a}}{1 - \frac{1}{a^2}} = \frac{-2a}{a^2 - 1}$ Dacă $2\alpha \in M \Rightarrow$ $f(2\alpha) = \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{a} \Rightarrow 2a^2 = a^2 - 1 \Rightarrow a^2 = -1$, absurd, deci $2\alpha \notin M$, şi atunci $f(2\alpha) = a \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$. Dacă $-2\alpha \in M$ atunci $\operatorname{tg}(-2\alpha) = -\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{2a}{a^2 - 1} =$ $= -\frac{1}{a} \Rightarrow 3a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}$ - absurd. Atunci $-2\alpha \notin M \Rightarrow f(-2\alpha) = -a \sin 2\alpha +$ $+ \cos 2\alpha \Rightarrow -a^2 \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ (din $f(2\alpha) \cdot f(-2\alpha) = 1) \Rightarrow -a^2 \sin^2 2\alpha =$ $= \sin^2 2\alpha \Rightarrow (1 + a^2) \sin^2 2\alpha = 0$ – fals.

Deci $M \cap G' = \varnothing$. Fie $x \in G' \setminus \{0\}$, atunci $-x \in G'$ şi $f(x) \cdot f(-x) = 1 \Rightarrow$ $(a^2 + 1) \sin^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow G' \subset \pi\mathbb{Z} \Rightarrow \bigcup G' \subset \pi\mathbb{Z}$. Deoarece $\pi\mathbb{Z}$ este subgrup al lui $(\mathbb{R},+)$, considerând atunci restricția lui f la $\pi\mathbb{Z}$, $f_{\pi\mathbb{Z}} : \pi\mathbb{Z} \to H$, avem $f_{\pi\mathbb{Z}}(n\pi + f\pi) = (-1)^{n+k} = f(n\pi) \cdot f(k\pi) \Rightarrow \bigcup G' = \pi\mathbb{Z}$.

4.34. Fie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ un morfism de grupuri, adică $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $(\forall)\ x,y \in \mathbb{Q}$.

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $nf(1/n) = f(n \cdot 1/n) = f(1) \Rightarrow f(1/n) = (1/n) \cdot f(1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $f(1) = 0$. Însă $f(m/n) = mf(1/n) = (m/n) \cdot f(1) = 0$, $(\forall)\ m/n \in \mathbb{Q} \Rightarrow f = 0$, adică $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ este format numai din morfismul nul.

4.35. Dacă f : $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ este un morfism de grupuri, atunci $(\forall)\ \hat{x} \in \mathbb{Z}_n$, avem $f(\hat{x}) = x \cdot f(\hat{1})$.

Însă $0 = f(\hat{0}) = f(\hat{n}) = nf(\hat{1})$, deci $f(\hat{1}) = 0$, adică f este morfismul nul.

4.36. Fie $g : G \to G$, $g(x) = x^{-1}f(x)$, $(\forall)\ x \in G$. Să demonstrăm că g este o aplicație injectivă.

Dacă $x,y \in G$ şi $g(x) = g(y) \Rightarrow x^{-1}f(x) = y^{-1}f(y) \Rightarrow yx^{-1} = f(x)\cdot(f(y))^{-1} \Rightarrow yx^{-1} = f(y)\cdot f(x^{-1}) = f(yx^{-1})$ şi cum f nu are punct fix decât pe 1, deducem că $yx^{-1} = 1$, adică $x = y$, deci g este injectivă. Deoarece G este mulțime finită, atunci g va fi şi surjectivă.

Deci orice element al lui G este de forma $x^{-1}f(x)$ cu $x \in G$.

Fie acum $y \in G$, $y = x^{-1}f(x)$ cu $x \in G$. Atunci $f(y) = f(x^{-1}f(x)) = f(x^{-1})f(f(x)) = (f(x))^{-1}x = (x^{-1}f(x))^{-1} = y^{-1}$, adică $f(y) = y^{-1}$.

Cum f este morfism de grupuri, $(\forall)\ y,z \in G$ va trebui să avem $f(yz) = f(y)f(z) \Leftrightarrow (yz)^{-1} = y^{-1}z^{-1} \Leftrightarrow yz = zy$, adică G este abelian.

4.37. Evident, există două automorfise ale lui G : $f(x) = x$, $(\forall)\ x \in G$ şi $g(x) = x^{-1}$. Deoarece în G există un singur automorfism $\Rightarrow f = g \Rightarrow f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in G \Rightarrow x = x^{-1}$, $(\forall)\ x \in G \Rightarrow x^2 = 1$, $(\forall)\ x \in G$.

4.38. Deoarece f şi g sunt morfisme rezultă că $f(xy) = f(x)f(y)$ şi $g(xy) = g(x)g(y)$, $(\forall)\ x,y \in G \Rightarrow (xy)^4 = x^4y^4$ şi $(xy)^8 = x^8y^8$, $(\forall)\ x,y \in G$.

Din prima relație rezultă că $(yx)^3 = x^3y^3 \Rightarrow (yx)^4 = (yx)(x^3y^3) = y\,x^4y^3$ şi cum $(yx)^4 = y^4x^4$ ($= f(yx)$) $\Rightarrow x^4y^3 = y^3x^4$, $(\forall)\ x,y \in G$. (1)

Din a doua relație $(xy)^8 = x^8y^8 \Rightarrow (yx)^7 = x^7y^7 \Rightarrow (yx)^8 = (yx)(x^7y^7) = y\,x^8y^7$ şi cum $(yx)^8 = y^8x^8$ ($= g(yx)$) $\Rightarrow x^8y^7 = y^7x^8$, $(\forall)\ x,y \in G$. (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow x^8$ comută cu y^3 şi $y^7 \Rightarrow x^8$ comută cu y (deoarece $(3,7) = 1$, $(\forall)\ y \in G$). Cum g este surjectivă, $(\forall)\ z \in G$ $(\exists)\ x \in G$ a.î. $g(x) = x^8 = z \Rightarrow zy = yz$, $(\forall)\ z,y \in G$, deci G este comutativ.

4.39. (i). Fie $g(x) = xf(x)$. Cum g este morfism (din ipoteză) $\Rightarrow g(xy) = g(x)g(y)$, $(\forall)\ x,y \in G \Rightarrow xyf(xy) = xf(x)yf(y)$, $(\forall)\ x,y \in G \Rightarrow xyf(x)f(y) = xf(x)yf(y)$, $(\forall)\ x,y \in G \Rightarrow yf(x) = f(x)y$, $(\forall)\ x,y \in G \Rightarrow f(x) \in Z(G)$. (1)

Dacă notăm $h(x) = x^2f(x) \Rightarrow h(x) = xg(x)$. Cum $g \in End(G)$ rezultă ca mai sus că $g(x) \in Z(G) \Leftrightarrow xf(x) \in Z(G)$. (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow x \in Z(G)$, $(\forall)\ x \in G$ deoarece $Z(G) \leq G \Rightarrow G$ este abelian.

(ii). Fie $g(x) = x^2f(x)$. Deoarece g este morfism (din ipoteză) $\Rightarrow g(xy) = g(x)g(y)$, $(\forall)\ x,y \in G \Rightarrow (xy)^2f(xy) = x^2f(x)y^2f(y)$, $(\forall)\ x,y \in G \Rightarrow xyxyf(x)f(y) = x^2f(x)y^2f(y)$, $(\forall)\ x,y \in G \Rightarrow yxyf(x) = xf(x)y^2$, $(\forall)\ x,y \in G$. (*)

Deoarece $h(x) = x^4f(x)$ este morfism $\Rightarrow h(xy) = h(x)h(y)$, $(\forall)$ $x,y\in G \Rightarrow (xy)^4f(xy) = x^4f(x)y^4f(y)$, $(\forall)$ $x,y\in G$. Cum $h(x) = x^2g(x) \Rightarrow yxyg(x) = xg(x)y^2$, $(\forall)$ $x,y\in G \Leftrightarrow yxyx^2 f(x) = x^3f(x)y^2$, $(\forall)$ $x,y\in G$. (**)

Din (*) pentru $x = y \Rightarrow x^3f(x) = xf(x)x^2 \Rightarrow x^2f(x) = f(x)x^2$, $(\forall)$ $x\in G$.

Tot din (*) avem $(f(x))^{-1}(yxy)^{-1} = y^{-2}(f(x))^{-1}x^{-1}$, $(\forall)$ $x,y\in G$, iar cu (**) avem $(f(x))^{-1}(yxy)^{-1}$ $yxyx^2$ $f(x) = y^{-2}(f(x))^{-1}x^{-1}x^3f(x)y^2$, $(\forall)$ $x,y\in G \Rightarrow (f(x))^{-1}x^2f(x) = y^{-2}$ $(f(x))^{-1}x^2f(x)$, $(\forall)$ $x,y\in G$, şi cum $f(x)$ comută cu x^2 , deci comută şi cu $(f(x))^{-1} \Rightarrow x^2 = y^{-2}$ x^2y^2, $(\forall)$ $x,y\in G \Rightarrow y^2x^2 = x^2y^2$, $(\forall)$ $x,y\in G$.

Punând în (*) x^2 în locul lui x rezultă că $yx^2yf(x) = x^2f(x)y^2$, $(\forall)$ $x,y\in G \Rightarrow yx^2yf(x) = x^2y^2$ $f(x)$, $(\forall)$ $x,y\in G \Rightarrow yx^2 = x^2y$, $(\forall)$ $x,y\in G \Rightarrow x^2 \in Z(G)$, $(\forall)$ $x\in G \Rightarrow yxyf(x) = y^2xf(x)$, $(\forall)$ $x,y\in G \Rightarrow xy = yx$, $(\forall)$ $x,y\in G$, deci G este comutativ.

4.40. Presupunem că f are un singur punct fix (acesta este 1 elementul neutru al lui G, deoarece $f(1) = 1$).

Fie $F(x) = F(y) \Rightarrow x^{-1}f(x) = y^{-1}f(y) \Rightarrow$ $f(x)(f(y))^{-1} = xy^{-1} \Rightarrow f(xy^{-1}) = xy^{-1}$ $\Rightarrow xy^{-1} = 1 \Rightarrow x = y \Rightarrow$ F este injectivă. Dar cum G este finit $\Rightarrow$ F este surjecție $\Rightarrow$ F este bijecție.

Reciproc, fie F bijecție.

Dacă $x \in G \setminus \{1\}$ este un punct fix al lui $f \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow x^{-1}f(x) = 1 =$ $=1^{-1}f(1) \Rightarrow F(x) = F(1) \Rightarrow x = 1$ deoarece F este injectivă (vezi problema **4.36.**).

4.41. Fie $a\in G \setminus H \Rightarrow a^{-1} \in G \setminus H$. Fie $x\in H$, arbitrar. Rezultă imediat că $a^{-1}x = b \in G \setminus H \Rightarrow x = ab$.

Avem $f(x) = f(ab) = f(a)f(b) = g(a)g(b) = g(ab) = g(x)$, $(\forall)$ $x\in H$.

Deci f = g pe H $\Rightarrow$ f = g pe G (în esență totul rezultă din problema **2.34.**).

4.42. Fie $x,y\in G$ iar $z = x^{-1}y \Leftrightarrow y = xz$. Cum f este surjecție $(\exists)$ $t\in G$ a.î. $z = t^n$.

Atunci avem $x^{n-1}y = x^{n-1}xz = x^{n-1}x$ $t^n = x^n$ $t^n = f(x)f(t) = f(xt) = (xt)^n =$ $=(xt)(xt)\ldots(xt)(xt) = x(tx)(tx)\ldots(tx)t = x(tx)^{n-1}$ $txx^{-1} = x(tx)^nx^{-1} = xt^n$ x^n $x^{-1} = yx^{n-1}$, adică $x^{n-1}\in Z(G)$.

4.43. Fie $a,c\in G$ elemente arbitrare. Deoarece f şi g sunt morfisme atunci $f(ac) = f(a)f(c)$ şi $g(ac) = g(a)g(c) \Rightarrow (ac)^n = a^nc^n$ şi $(ac)^{n+1} = a^{n+1}c^{n+1}$. Dar $(ac)^{n+1} = (ac)^n$ $(ac) = a^n$ c^n $ac \Rightarrow a^n$ c^n $ac =$ a^{n+1} $c^{n+1} \Rightarrow (a^n)^{-1}(a^n$ c^n $ac)$ $c^{-1} =$ $=(a^n)^{-1}$ (a^{n+1} c^{n+1}) $c^{-1} \Rightarrow c^n$ $a = ac^n$.

Fie $a,b\in G$ arbitrare. Deoarece f este surjectivă, există $c\in G$ a.î. $f(c) = b$, deci $b = c^n$. Atunci, folosind relația de mai sus, obținem : $ab = ba$, $(\forall)$ $a,b\in G$, deci G este abelian.

4.44. Fie $f : (\mathbb{Q},+) \to (S_n,\circ)$ un morfism de grupuri şi $x\in\mathbb{Q}$ iar $\sigma = f(\frac{x}{n!})\in S_n$.

Atunci putem scrie $f(x) = f(n!\cdot\frac{x}{n!}) = (f(\frac{x}{n!}))^{n!}$ = e (conform problemei **3.33.**, deoarece S_n are n! elemente), adică f este morfismul nul.

4.45. Fie $f : (\mathbb{Z}_p,+) \to (\mathbb{Z}_p^*,\cdot)$ un morfism de grupuri iar $f(\hat{1}) = \hat{a}$.

Avem $\hat{1} = f(\hat{0}) = f(\hat{p}) = (f(\hat{1}))^p = (\hat{a})^p$. Însă conform teoremei lui Fermat, $\hat{a}^p = \hat{a}$, adică $\hat{a} = \hat{1}$ deci $f(\hat{1}) = \hat{1}$.

Atunci $(\forall)$ $x\in\{0,1,\ldots,p-1\}$, $f(\hat{x}) = f(\hat{1})^x = \hat{1}^x = \hat{1}$, deci f este morfismul nul.

4.46. Să presupunem că am definit operația algebrică $''*''$ pe (1,2) a.î. $((1,2), *) \approx ((0,\infty),\cdot)$.

Fie $f : (1,2) \to (0,\infty)$ acest izomorfism $\Rightarrow$ f este o bijecție și $f(x*y) = f(x)f(y)$ $(\forall)$ $x,y\in(1,2) \Rightarrow x*y = f^{-1}(f(x)f(y))$, $(\forall)$ $x,y\in(1,2)$.

Fie $f : (1,2) \to (0,\infty)$, $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$, $(\forall)$ $x\in(1,2)$. Se observă că f este bine definită deoarece $\frac{x-1}{2-x} > 0$, $(\forall)$ $x\in(1,2)$.

Dacă $y = \frac{x-1}{2-x} \Rightarrow y(2-x) = x-1 \Rightarrow x(y+1) = 2y+1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y+1}$.

Deci $f^{-1}(y) = \frac{2y+1}{y+1}$, $(\forall)$ $y\in(0,\infty)$. Atunci definim :

$x * y = f^{-1}(f(x)f(y)) = \frac{3xy-4(x+y)+6}{2xy-3(x+y)+5}$, $(\forall)$ $x,y\in(1,2)$.

4.47. Dacă $f : (\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Q}^*,\cdot)$ este un morfism de grupuri, atunci pentru orice $x,y\in\mathbb{Q}$ avem $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$. Evident $f(-x) = 1/f(x)$, $f(0) = 1$ iar $f(x) = f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}) = (f(\frac{x}{2}))^2 \geq 0$.

Notând $f(1) = a$ ($a\in\mathbb{Q}$, $a>0$), avem $f(2) = a^2$ şi inductiv $f(n) = a^n$, $(\forall)$ $n\in\mathbb{N}$.

Dacă $n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(-n) = 1/f(n) = 1/a^n = a^{-n}$, deci $f(x) = a^x$, $(\forall)$ $x\in\mathbb{Z}$.

De asemenea, $f(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{nori}) = (f(\frac{1}{n}))^n \Rightarrow a = (f(\frac{1}{n}))^n \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}$.

Rezultă imediat că dacă şi $m\in\mathbb{Z}$, atunci $f(\frac{m}{n}) = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$, adică $f(x) = a^x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{Q}$.

4.48. Fie $H < \mathbb{Q}$ un subgrup propriu al lui $(\mathbb{Q},+)$. Presupunem că $H \approx \mathbb{Q}$ şi fie $f: \mathbb{Q} \to H$ un izomorfism. Acesta va avea forma $f(x) = ax$, $a = f(1) \neq 0$, $(\forall)\ x\in\mathbb{Q}$. Evident, există $b\in\mathbb{Q} \setminus H$ şi deci $f(x) \neq b$, $(\forall)\ x\in\mathbb{Q} \Rightarrow ax \neq b$, $(\forall)\ x\in\mathbb{Q} \Rightarrow x \neq b/a$, $(\forall)\ x\in\mathbb{Q} \Rightarrow b/a \notin\mathbb{Q}$, absurd.

4.49. (i). Dacă $a,x,y\in G$, atunci $\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \varphi_a(x)\cdot\varphi_a(y)$, adică φ_a este morfism de grupuri. Bijectivitatea lui φ_a este imediată, deci $\varphi_a\in Aut(G)$.

(ii). Dacă $a,b,x\in G \Rightarrow(\varphi_a\circ\varphi_b)(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a(bxb^{-1}) = abxb^{-1}a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = \varphi_{ab}(x) \Rightarrow \varphi_a\circ\varphi_b = \varphi_{ab}$ de unde deducem imediat că φ este morfism de grupuri.

(iii). Avem $|Inn(G)| = 1 \Rightarrow (\forall)\ a\in G,\ \varphi_a = 1_G \Rightarrow axa^{-1}=x$, $(\forall)\ x\in G \Rightarrow ax = xa$, $(\forall)\ x\in G \Rightarrow Z(G) = G \Rightarrow G$ este comutativ.

4.50. Dacă $f\in Z(Aut(G))$, în particular $f\in C_{Aut(G)}(Inn(G))$, deci $f\circ\varphi_a = \varphi_a\circ f$, $(\forall)\ a\in G$ (φ_a fiind automorfismul interior) $\Rightarrow f(axa^{-1}) = af(x)a^{-1}$, $(\forall)\ x\in G \Rightarrow a^{-1}f(a)f(x) = f(x)a^{-1}f(a)$, $(\forall)\ a,x\in G$.

Deoarece $f(G) = G$ rezultă că $a^{-1}f(a) \in Z(G)$, $(\forall)\ a\in G \Rightarrow a^{-1}f(a) = 1 \Rightarrow f(a) = a$, $(\forall)\ a\in G \Rightarrow Z(Aut(G)) = 1$.

4.51. Excluzând grupurile cu un singur element care satisfac proprietatea din enunț, considerăm un grup $(G,\cdot)$ cu cel puțin două elemente şi care au un singur automorfism (acesta va fi în mod necesar morfismul identic).

Pentru fiecare $a\in G$, aplicația $\varphi_a: G \to G$, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ este un automorfism al lui G, deci trebuie să avem $\varphi_a = 1_G \Leftrightarrow \varphi_a(x) = x \Leftrightarrow axa^{-1} = x \Leftrightarrow ax = xa$, $(\forall)\ x\in G$. Cum a este arbitrar, rezultă că G este comutativ.

Dar şi aplicația $\psi: G \to G$, $\psi(x) = x^{-1}$ este tot un automorfism al lui G, deci $\psi = 1_G \Leftrightarrow x = x^{-1}$, $(\forall)\ x\in G \Leftrightarrow x^2 = 1$, $(\forall)\ x\in G$. Vom demonstra că pe G se poate organiza o structură de $\mathbb{Z}_2$ - spațiu vectorial. Pentru aceasta vom considera notația aditivă în grupul G şi definim operația algebrică externă pe G cu domeniul de operatori în $\mathbb{Z}_2$:

$$\lambda x = \begin{cases} 0, & dacă\ \lambda = \hat{0} \\ x, & dacă\ \lambda = \hat{1} \end{cases},\ (\forall)\ \lambda\in\mathbb{Z}_2 \text{ şi } x\in G.$$

Se verifică faptul că sunt îndeplinite axiomele spațiului vectorial.

Evident $(\hat{1}+\hat{1})x = \hat{1}x + \hat{1}x$ deoarece $x + x = 0$ în G, ş.a.m.d.

Fie $B = (x_i)_{i\in I}$ o bază a spațiului vectorial G peste corpul $\mathbb{Z}_2$.

Dacă $u : B \to B$ este o bijecție a bazei B, aplicația $\bar{u} : G \to G$, $\bar{u}(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i u(x_i)$ este un automorfism al spațiului vectorial G (este o aplicație liniară bijectivă). În particular, $\bar{u}$ este un automorfism al grupului abelian G. Prin urmare, fiecare bijecție a bazei B generează un automorfism al grupului G. Cum G are un singur automorfism, este necesar să existe o singură bijecție a mulțimii B în ea însăşi, ceea ce inseamnă că B trebuie să aibă un singur element. Atunci avem izomorfismul de $\mathbb{Z}_2$ spații vectoriale: $G \approx \mathbb{Z}_2$, ceea ce arată că G este un grup izomorf cu grupul aditiv $\mathbb{Z}_2$. Această condiție apărută ca necesară, este şi suficientă, căci grupul $\mathbb{Z}_2$ are un singur automofism. În concluzie, grupurile cu un singur automorfism sunt grupurile cu un element şi grupurile cu două elemente.

4.52. Fie G un grup abelian. Dacă $(\exists)\ x\in G \setminus \{1\}$ cu $x^2 \neq 1$, rezultă |Aut(G)| este număr par.

Rămâne să analizăm cazul în care $x^2 = 1$, $(\forall)x\in G$. Atunci, conform problemei anterioare, G este un $\mathbb{Z}_2$- spațiu vectorial.

Fie $\{x_1, x_2,\ldots,x_k\}$ o bază în G. Atunci pentru $x\in G$ există în mod unic $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ a.î. $x = x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_k^{\alpha_k}$.

Cazul 1. $k \geq 2$.

Definim $f : G \to G$ astfel $f(x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_k^{\alpha_k}) = x_1^{\alpha_2}\cdot x_2^{\alpha_1} x_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot x_k^{\alpha_k}$. Se arată cu uşurință că $f\in$ Aut(G) şi $f \circ f = 1_G$. Obținem că grupul (Aut(G), $\circ$) conține un element de ordin 2, deci | Aut(G)| este număr par.

Cazul 2. $k = 1 \Rightarrow G \approx \mathbb{Z}_2$ şi Aut $(\mathbb{Z}_2) = \{1_{Z_2}\}$.

Cazul 3. $k = 0 \Rightarrow G = \{ e\}$ şi Aut(G) = $\{1_G\}$.

Deci grupurile căutate sunt $\{1\}$ şi $(\mathbb{Z}_2,+)$.

4.53. Considerăm că $G = \{a^k : k\in\mathbb{Z}\}$. Dacă $o(a) = \infty$, atunci se probează imediat că $f : G \to (\mathbb{Z},+)$, $f(a^k) = k$, $(\forall)\ k\in\mathbb{Z}$ este izomorfism de grupuri iar dacă $o(a) = |G| = n$, atunci $f : G \to (\mathbb{Z}_n,+)$, $f(a^k) = \hat{k}$, $(\forall)\ k\in\mathbb{Z}$ este izomorfism de grupuri.

4.54. Dacă $(G,\cdot)$ are un număr finit de subgrupuri, vom arăta mai întâi că orice element din G are ordin finit.

Într-adevăr, dacă presupunem că în G există un element de ordin infinit, acesta generează un subgrup ciclic infinit, deci izomorf cu $(\mathbb{Z},+)$, dar acest grup are o infinitate de subgrupuri, de unde rezultă că $(G,\cdot)$ ar avea o infinitate de subgrupuri, contradicție.

Fie $x_1 \in G \setminus \{1\}$ şi H_1 subgrupul ciclic generat de x_1. Dacă $G = H_1$, rezultă că G finit.

Dacă $G \neq H_1$, rezultă că există $x_2 \in G \setminus H_1$ şi fie H_2 subgrupul ciclic generat de x_2. Dacă $G = H_1 \cup H_2$, rezultă că G este finit.

Dacă $G \neq H_1 \cup H_2$, atunci există $x_3 \in G \setminus (H_1 \cup H_2)$ şi considerăm subgrupul ciclic generat de x_3, ş.a.m.d. Nu putem continua la nesfârşit căci am obține o infinitate de subgrupuri ale lui G (se observă că subgrupurile $H_1, H_2, \ldots$ sunt distincte două câte două datorită modului de alegere a generatorilor). Prin urmare există $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $G = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$. Deoarece subgrupurile $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sunt finite, rezultă că $(G,\cdot)$ este finit.

4.55. Dacă există $x \in G$ de ordin infinit, rezultă că subgrupul ciclic generat de x, $\langle x \rangle$, este izomorf cu $(\mathbb{Z},+)$ (vezi problema **4.53.**), iar $(\mathbb{Z},+)$ admite o infinitate de subgrupuri de forma $(n\mathbb{Z},+)$ cu $n \in \mathbb{N}$.

Dacă orice $x \in G$ este de ordin finit, construim inductiv un şir de subgrupuri distincte ale lui G. Fie $x = x_1 \in G$ şi $H_1 = \langle x_1 \rangle \Rightarrow H_1$ este finit $\Rightarrow (\exists)\ x_2 \in G \setminus H_1$. Analog se construiesc $x_3, \ldots, x_n \in H$ a.î. $\langle x_2 \rangle = H_2$, $\langle x_3 \rangle = H_3$, $\ldots, \langle x_n \rangle = H_n$ şi $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$ este finit, deci $(\exists)\ x_{n+1} = G \setminus \bigcup_{k=1}^{n} H_k$ şi $\langle x_{n+1} \rangle = H_{n+1}$.

4.56. Fie $G = \{1,a,b,c\}$ (conform problemei **2.20.**, G este comutativ).

Dacă $(\exists)\ x \in G$ a.î. $o(x) = 4$, atunci în mod evident $G \approx (\mathbb{Z}_4,+)$.

Dacă toate elementele lui G au ordin 2, atunci $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ şi se probează imediat că $ab = c$, $bc = a$ şi $ca = b$, adică $G \approx K$ (grupul lui Klein).

Evident $\mathbb{Z}_4 \not\approx K$ deoarece în K toate elementele diferite de 1 au ordinul 2 pe când în $\mathbb{Z}_4$ nu se întâmplă lucrul acesta.

4.57. Fie $H_i \leq G$, $i = 1,2,3$ a.î. $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. Fie $H_1 = \{1,a\}$ şi $H_2 = \{1,b\}$ cu $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Evident $a^2 \in H_1$ implică $a^2 = 1$ (dacă $a^2 = a \Rightarrow a = 1$ – absurd) şi analog $b^2 = 1$.

Fie $c \in H_3 \setminus \{1,a,b\}$. Dacă $ac \in H_3 \Rightarrow a \in H_3 \Rightarrow b \notin H_3$ (dacă $b \in H_3 \Rightarrow G = H_3$) $\Rightarrow bc \notin H_3 \Rightarrow bc \in H_2$.

Dacă $bc = b \Rightarrow c = 1$, contradicție. Dacă $bc = 1 \Rightarrow b \in H_3$, contradicție. Deducem că $a, b \notin H_3 \Rightarrow ca, cb \notin H_3 \Rightarrow ca = b$ şi $cb = a$ (nu putem avea $ca = a$

sau cb = b). Ținând cont că $a^2 = b^2 = 1$ rezultă că c = ab = ba şi prin urmare $H_3 = \{1,ab\}$. Evident $(ab)^2 = 1$. Deoarece $(\forall)\ x \in G$, $x^2 = 1$ rezultă că G este abelian. Tabla grupului arată astfel:

·	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

Deci G este izomorf cu grupul lui Klein.

4.58. Conform teoremei lui Lagrange ordinul unui element diferit de 1 dintr-un grup G cu 6 elemente poate fi 2,3 sau 6.

Dacă în G avem un element de ordin 6, atunci în mod evident $G \approx (\mathbb{Z}_6,+)$.

Dacă toate elementele lui $G \setminus \{1\}$ ar avea ordinul 2, atunci $|G|$ ar trebui să fie o putere a lui 2 – absurd.

Deci $(\exists)\ x \in G \setminus \{1\}$ a.î. o(x) = 3. Fie acum $y \in G-\{1,x,x^2\}$; dacă o(y) = 3, atunci în G ar apare 9 elemente distincte şi anume : 1, x, x^2, y, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2 ceea ce este fals.

Deci o(y) = 2 (cazul o(y) = 6 nu mai interesează). În acest caz în G am identificat 6 elemente distincte şi anume 1, x, x^2, y, xy, x^2y. Cum $yx \in G \Rightarrow yx \in \{xy, x^2y\}$.

Dacă $yx = xy \Rightarrow o(xy) = o(x)o(y) = 2 \cdot 3 = 6$ şi în acest caz $G \approx (\mathbb{Z}_6,+)$.

Dacă $yx = x^2y$ atunci considerând $f : G \to S_3$ definit prin $f(x) = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$ şi $f(y) = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$, obținem un izomorfism de grupuri, deci în acest caz $G \approx (S_3, \circ)$.

Deoarece S_3 nu este comutativ iar $\mathbb{Z}_6$ este, deducem că $S_3 \not\approx \mathbb{Z}_6$.

4.59. Deoarece $\mathbb{R}$ este o mulțime nenumărabilă iar $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ sunt numărabile deducem că grupurile $(\mathbb{Z},+)$ sau $(\mathbb{Q},+)$ nu pot fi izomorfe cu $(\mathbb{R},+)$.

Mai avem de demonstrat că $(\mathbb{Z},+) \not\approx (\mathbb{Q},+)$. Să presupunem prin absurd că există un izomorfism de grupuri $f : (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Q},+)$.

Notând $f(1) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ cu $p,q \in \mathbb{Z}$, (p,q) = 1, $q \neq 0$, se verifică imediat că $f(x) = \frac{p}{q} \cdot x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{Z}$.

Pentru ca f să fie injectivă, cu necesitate $p \neq 0$. Să demonstrăm că dacă $p \neq 0$ atunci f nu este surjectivă.

Dacă f este surjectivă $(\exists)\ x \in \mathbb{Z}$ a.î. $f(x) = p+1 \Leftrightarrow px = (p+1)q \Leftrightarrow p \mid (p+1) \Rightarrow p = 1$ sau $-1 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{q}$ sau $f(x) = -\frac{x}{q}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{Z}$.

Scriind în ambele cazuri că $(\exists)\ x \in \mathbb{Z}$ a.î. $f(x) = \frac{1}{q+1}$ deducem că $q = 0$, ceea ce este absurd.

4.60. Considerând pe $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ ca spații vectoriale peste $\mathbb{Q}$, atunci $(\mathbb{R},+)$ şi $(\mathbb{C},+)$ sunt grupuri aditive ale acestor spații vectoriale.

Fie B o bază a lui $\mathbb{R}$ peste $\mathbb{Q}$ şi fie c cardinalul său. Atunci $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ va avea o bază de cardinal $c \cdot c = c$, deci $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ au baze echipotente, rezultând că $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ sunt $\mathbb{Q}$ - spații vectoriale izomorfe, adică $(\mathbb{R},+) \approx (\mathbb{C},+)$.

4.61. Grupul $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ nu poate fi izomorf nici cu $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ şi nici cu $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ deoarece mulțimea $\mathbb{Q}^*$ este numărabilă, pe când $\mathbb{R}^*$ şi $\mathbb{C}^*$ sunt nenumărabile.

Să demonstrăm că $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ nu sunt izomorfe.

Dacă prin absurd ar fi izomorfe, atunci ecuația $x^3 = 1$ (ce are în $\mathbb{C}^*$ trei soluții distincte) ar trebui să aibă şi în $\mathbb{R}^*$ tot atâtea soluții ceea ce nu este adevărat (căci are doar soluția $x = 1$ în $\mathbb{R}^*$).

4.62. (i). Evident.

(ii). Funcția $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$, $(\forall)\ x > 0$ este un izomorfism de grupuri de la $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ la $(\mathbb{R},+)$.

Să presupunem acum prin absurd că există un izomorfism de grupuri $f : (\mathbb{Q}_+^*,\cdot) \to (\mathbb{Q},+)$.

Atunci $r = \frac{f(2)}{2} \in \mathbb{Q}$, şi fie $x \in \mathbb{Q}_+^*$ a.î. $r = f(x)$.

Deducem că $f(2) = 2r = 2f(x) = f(x^2) \Rightarrow x^2 = 2$, cu $x \in \mathbb{Q}$ - absurd.

4.63. Grupurile $(\mathbb{Z},+)$ şi $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ nu sunt izomorfe deoarece $(\mathbb{Z},+)$ este ciclic pe când $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ nu este ciclic (acest fapt se probează imediat prin reducere la absurd).

4.64. Presupunem prin absurd că există un izomorfism de grupuri $f : (\mathbb{Q},+) \to (Q[i],+)$. Atunci $f(x) = ax$, $(\forall)\ x\in\mathbb{Q}$, unde $a = f(1)$. Deoarece $a\in\mathbb{Q}[i]$, atunci $a = m + ni$ cu $m,n\in\mathbb{Q}^*$(nu putem avea $m = 0$ sau $n = 0$ căci atunci f nu ar mai fi surjecție).

Deoarece f este morfism surjectiv, considerând elementul $m+(n+1)i$ din $\mathbb{Q}[i]$, deducem existența lui $x\in\mathbb{Q}$ a.î. $f(x) = m + (n+1)i$. Această egalitate se mai scrie $xf(1) = m + (n+ 1)i \Leftrightarrow x(m + ni) = m + (n + 1)i \Leftrightarrow mx = m$ şi $nx = n + 1$. Cum $m \neq 0$, din prima egalitate deducem că $x = 1$ şi atunci cea de-a doua egalitate devine $n = n+1$, contradicție.

4.65. Acelaşi raționament ca la problema **4.64.**

4.66. Dacă prin absurd $(\mathbb{Q},+) \approx (\mathbb{Q}[X],+)$, atunci notând un astfel de izomorfism cu $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[X]$, se arată uşor că $f(x) = f(1)\cdot x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{Q}$.

Acest lucru este absurd deoarece ar rezulta că toate polinoamele din $\mathbb{Q}[X]$ sunt de forma $X\cdot p(X)$ unde $p(X) = f(1)\in\mathbb{Q}[X]$ (evident, în $\mathbb{Q}[X]$ sunt polinoame de grad mai mare decât gradul lui $p(X)$).

4.67. Presupunem prin absurd că există un izomorfism de grupuri $f : \mathbb{Q}[X]\to \mathbb{Z}[X]$. Fie $P\in\mathbb{Q}[X]$ un polinom nenul şi să considerăm polinomul $f(P) = a_0 + a_1X + \ldots+a_nX^n \in\mathbb{Z}[X]$ care va fi de asemenea nenul.

Dacă alegem $k\in\mathbb{N}^*$, $k >\max\{|a_0|,\ldots,|a_n|\}$ şi considerăm polinomul $S\in\mathbb{Q}[X]$, $S = \frac{1}{k}\cdot P \Rightarrow kS = P \Rightarrow f(S) = \frac{1}{k}\cdot f(P) \Rightarrow f(S) \in\mathbb{Z}[X]$ – absurd.

4.68. Se ştie că restricția morfismului f la $\mathbb{Q}$ este de forma $f(x) = ax$, unde $a\in\mathbb{R}$. Dacă se cunoaşte că pentru $x_0 \in[-b,b]$, $f(x_0) = ax_0$, atunci şi $f(x_1) = ax_1$, $(\forall)\ x_1\in\mathbb{R}$**.** Într-adevăr, $f(x_1) = f(x_1-x_0) + f(x_0) = f(x_1-2x_0) + 2f(x_0)=$ $= \ldots = f(x_1-nx_0) + nf(x_0)$ şi putem alege $n\in\mathbb{Z}$ a.î. $x_1-nx_0 \in[-b, b]$.

Deci $f(x_1) = a(x_1-nx_0) + nax_0 = ax_1$.

Se ştie că f este o funcție impară. Deci este suficient să o cunoaştem pe intervalul $[0,b]$ iar pentru aceasta, fie $x_0\in(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,b]$. Funcția f fiind integrabilă pe $[-b,b]$ este integrabilă şi pe $[0,x_0] \subset [-b,b]$, $x_0\in(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,b]$.

$\sigma_\Delta(f,\alpha^n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)\ (x_i - x_{i-1})$ şi alegând o diviziune cu intervale de lungimi egale, iar $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, obţinem $\sigma_\Delta(f,\alpha^n) = \frac{ax_0}{n}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) \to \int_0^{x_0} ax\ dx =$

$= \frac{ax_0^2}{2}$. Astfel $\int_0^{x_0} af(x)\ dx = \frac{ax_0^2}{2} \Rightarrow \int_0^{x_0} f(x)\ dx = \frac{x_0^2}{2}$, $(\forall)\ x_0 \in [0,b] \Rightarrow f(x_0) = ax_0$.

În concluzie, f este de forma f(x) = ax cu $a \in \mathbb{R}$.

4.69. Fie $G \subset M_2(\mathbb{C})$ un grup ca în ipoteza problemei şi $E \in G$ elementul neutru. Atunci $E^2 = E$ şi cum $E \neq I_2$ rezultă că det E = 0.

Fie $A \in G \Rightarrow AE = A \Rightarrow \det A = 0$, $(\forall)\ A \in G$.

Dar $A \in M_2(\mathbb{C})$, deci $A^2 - (\mathrm{Tr}\ A)\ A + \det A \cdot I_2 = 0_2 \Rightarrow A^2 = \alpha A$, $\alpha = \mathrm{Tr}\ A$.

Fie A′ simetricul lui A în $G \Rightarrow A^2A' = \alpha AA' \Rightarrow A(AA') = \alpha E \Rightarrow AE = \alpha E \Rightarrow A = \alpha E$. Deci, orice matrice $A \in G$ este de forma $A = \alpha E$ cu $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dacă $O_2 \in G \Rightarrow E = O_2$ ($E = AA'$, $(\forall)\ A \in G$) $\Rightarrow G = \{O_2\}$. În acest caz $G = (\{O_2\}, \cdot)$.

Dacă $O_2 \notin G$, fie $f : G \to \mathbb{C}^*$, $f(A) = \alpha$, dacă $A = \alpha E$. Funcţia f este bine definită pentru că $E \neq O_2$, deci $\alpha E = \beta E \Rightarrow \alpha = \beta$. În plus, dacă $A = \alpha E$ şi $B = \beta E \Rightarrow AB = \alpha\beta E^2 = \alpha\beta E$, deci f(AB) = f(A) f(B). Rezultă că f este morfism de grupuri. Fie $f(A) = 1 \Rightarrow A = E \Rightarrow$ f este morfism injectiv. Aşadar $G \approx f(G)$ care este subgrup în $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

4.70. Să presupunem prin absurd că există un izomorfism de grupuri $f : (K,+) \to (K^*,\cdot)$ şi fie $a \in K$ a.î. f(a) = -1.

Atunci $f(a + a) = f(a)\cdot f(a) = 1 = f(0) \Rightarrow a + a = 0$. Deducem imediat că K este corp de caracteristică 2.

Atunci $(f(1)-1)^2 = (f(1))^2 + 1 = f(1 + 1) + 1 = f(0) + 1 = 1 + 1 = 0 \Rightarrow f(1) = 1 = f(0) \Rightarrow 0 = 1$-absurd.

4.71. Fie $x \in G$ a.î. $G/Z(G) = \langle xZ(G) \rangle$ şi $y,z \in G$.

Avem că $yZ(G) = (xZ(G))^m$ şi $zZ(G) = (xZ(G))^n$ cu $m,n \in \mathbb{Z}$.

Deducem imediat că $yx^{-m}, zx^{-n} \in Z(G) \Leftrightarrow yx^{-m} = z_1$, $zx^{-n} = z_2$ cu $z_1,z_2 \in Z(G) \Leftrightarrow y = z_1x^m$ şi $z = z_2x^n$. Rezultă astfel că $yz = zy = z_1z_2x^{m+n}$, adică G este comutativ.

4.72. (i). În grupul G/H avem $(xH)^n = x^nH = 1\cdot H = H$.

Dacă $k\in\mathbb{N}^*$ şi $(xH)^k = H \Rightarrow (xH)^k = x^kH = H \Rightarrow x^k\in H$ şi deoarece $|H| = m \Rightarrow x^{km} = (x^k)^m = 1$ adică $n = o(x) \mid km$.

Deoarece $(m,n) = 1 \Rightarrow n \mid k$, deci $(xH)^k = 1 \Leftrightarrow n \mid k$, adică $o(xH) = n$.

(ii). Deoarece $(m,n) = 1 \Rightarrow (\exists)\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ a.î. $\alpha m = \beta n + 1$.

Din $o(xH) = n \Rightarrow (xH)^n = H \Rightarrow x^n H = H \Rightarrow x^n \in H$ şi luând $y=x^{m\alpha}$ avem $y = x^{m\alpha} = x^{n\beta+1} = x(x^n)^\beta \in xH$, adică $yH = xH$.

Deoarece $|H| = m$ şi $x^n \in H \Rightarrow x^{nm} = 1$ şi $y^n = (x^{m\alpha})^n = (x^{mn})^\alpha = 1 \Rightarrow o(y) \mid n$.

Fie acum $k = o(y)$; deoarece $(m,n) = 1 = (m,k)$, atunci conform cu (i), $o(yH) = k$. Dar $xH = yH$ şi $o(xH) = n$, deci $o(y) = k = n$.

4.73. Fie $x\in G$, $n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $x\notin H$ şi $(xH)^n = H \Leftrightarrow x^n \in H \Rightarrow (\exists)\ m\in\mathbb{N}^*$ a.î. $(x^n)^m = 1 \Rightarrow x^{mn} = 1 \Rightarrow x\in H$ – absurd.

4.74. Cazul 1. G este comutativ.

Facem inducție după $|G|$. Dacă $|G| = p$ este evident.

Presupunem afirmația adevărată pentru orice grup H de cardinal mai mic decât $|G|$ ce este multiplu de p şi fie $x\in G$, $x \neq 1$.

Dacă $o(x)$ este multiplu de p, afirmația din enunț este în mod evident adevărată.

Să presupunem că $(o(x),p) = 1$ şi să considerăm grupul $H = G/\langle x\rangle$ ce are cardinalul $|H| = |G| / o(x) < |G|$ şi cum $p \mid |G|$ iar $(o(x),p) = 1 \Rightarrow p \mid |H|$, deci putem aplica ipoteza de inducție lui H şi găsim $y\in H$ a.î. $o(y) = p$. Dar $y\in H \Rightarrow y = z\langle x\rangle$, cu $z\in G \Rightarrow y^p = z^p\langle x\rangle = 1 = \langle x\rangle$ (în $G / \langle x\rangle$) $\Leftrightarrow z^p \in \langle x\rangle \Rightarrow (z^p)^{o(x)} = 1 \Rightarrow (z^{o(x)})^p = 1$, deci alegând $x_1 = z^{o(x)}$ avem că $o(x_1) = p$.

Cazul 2. G este necomutativ.

În acest caz folosim ecuația claselor:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x\notin Z(G)} |G : C_G(x)|.$$

Dacă pentru un $x\notin Z(G)$, $p \mid |C_G(x)|$, atunci ca şi în cazul 1 putem face inducție după $|G|$ (aplicând ipoteza de inducție pentru $C_G(x)$).

Deci putem presupune că $p \nmid |C_G(x)|$, $(\forall)\ x \notin Z(G)$ şi cum $|G : C_G(x)| = |G| / |C_G(x)|$, iar $p \mid |G|$, putem presupune că $(\forall)\ x \notin Z(G)$, $p \mid |G : C_G(x)|$.

Din ecuația claselor rezultă că $p \mid |Z(G)|$ şi cum $Z(G)$ este comutativ deducem că există $x\in Z(G)$ a.î. $o(x) = p$.

4.75. Fie G un grup necomutativ a.î. $|G| = 2p$. Conform problemei **4.74.** există $s,t\in G$ a.î. $o(s) = p$ şi $o(t) = 2$. Dacă $H = \langle s\rangle$, atunci $|G:H| = 2p/p = 2$, deci $H \trianglelefteq G$ (conform problemei **3.29.**).

Astfel, $tst = tst^{-1} \in H$ ($o(t) = 2$ implică $t^2 = 1$, adică $t = t^{-1}$), deci există $i \in \mathbb{Z}$ a.î. $tst = s^i$.

Deducem imediat că $s = t^2 s t^2 = t (tst) t = t s^i t = (s^i)^i = s^{i^2} \Rightarrow p \mid (i^2-1)$ $\Rightarrow p \mid (i+1)$ sau $p \mid (i-1) \Rightarrow tst = s$ sau $tst = s^{-1}$. Dacă $tst = s$ atunci $ts = st \Rightarrow$ G este comutativ – absurd. Avem deci $tst = s^{-1}$ adică $G \approx \mathbf{D_p}$.

4.76. (i) $\Rightarrow$ (ii). Dacă în descompunerea în factori primi a lui $|G|$ avem puterea naturală a unui număr prim $q \neq p$, atunci conform problemei **4.74.** $(\exists)\ x \in G$ a.î. $o(x) = q$ contrazicându-se (i).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Rezultă din teorema lui Lagrange.

4.77. Din ecuația claselor:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \notin Z(G)} |G:C_G(x)|$$

şi din problema precedentă deducem că $p \mid |Z(G)|$, adică $|Z(G)| \geq p$.

4.78. Dacă $Z(G) = G$ totul este clar (conform problemei **4.77.**, $Z(G) \neq \{1\}$).

Să considerăm că $Z(G) \neq G$. Din teorema lui Lagrange deducem că $|Z(G)| = p$.

Atunci $|G/Z(G)| = p^2/p = p$, adică $G/Z(G)$ este ciclic şi atunci conform problemei **4.71.** rezultă că G este comutativ.

4.79. Fie G un grup cu proprietatea din enunț şi $x \in G \setminus \{1\}$. Definim $f_x : G \to G$, $f_x (y) = xyx^{-1}$, $(\forall)\ y \in G$. Se arată cu uşurință că $f_x \in Aut(G)$, $(\forall)\ x \in G$.

Cum $f_x(x) = x$ şi $f_x(1) = 1 \Rightarrow f_x$ are două puncte fixe, deci $f = 1_G \Rightarrow$ $f_x(y) = y$, $(\forall)\ y \in G \Rightarrow xyx^{-1} = y \Rightarrow xy = yx$, $(\forall)\ x,y \in G \Rightarrow (G,\cdot)$ este grup abelian.

Fie $|G| = n$ şi p cel mai mic număr prim care divide pe n.

Cazul 1. Dacă $p = 2$, fie $g : G \to G$, $g(x) = x^{-1}$, $(\forall)\ x \in G$. Cum $2 \mid n$, există $x_0 \in G$ a.î. $x_0^2 = 1$. Atunci $g(x_0) = x_0$, $g(1) = 1$, $g \in Aut(G)$ şi deci $g = 1_G$. Deci $g(x) = x$, $(\forall)\ x \in G$, adică $x^2 = 1$, $(\forall)\ x \in G$.

Cazul 2. Din alegerea lui p obținem că $p+1 \nmid n$ pentru $p > 2$.

Definim $h : G \to G$, $h(x) = x^{p+1}$. Cum $p \mid n$, din teorema lui Cauchy (vezi problema **4.74.**) există $x_0 \in G\setminus\{1\}$ a.î. $x_0^p = 1$. Atunci $h(x_0) = x_0$ şi $h(1) = 1$, $h \in Aut(G)$ şi deci $h = 1_G$. Obținem că $h(x) = x$, $(\forall)\ x \in G$ şi deci $x^p = 1$, $(\forall)\ x \in G$.

Astfel există, în orice situație, un număr prim p a.î. $x^p = 1$, $(\forall)\ x \in G$. Cum G este abelian rezultă că G este un $\mathbb{Z}_p$ - spațiu vectorial.

Fie $\{ x_1, x_2,\ldots, x_k \}$ o bază a lui G şi deci orice element $x\in G$ admite o scriere unică sub forma $x = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$, cu $\alpha_i\in\{0,\ldots,p-1\}$, $1 \le i \le k$.

Dacă $k \ge 2$, definim $f : G \to G$ astfel $f(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}) = x_1^{\alpha_2} x_2^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$. Evident $f\in Aut(G)$, $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_1$, $f(x_1x_2) = x_1x_2$. Cum $x_1x_2 \neq 1$ (în caz contrar $x_2 = x_1^{-1} = x_1^{p-1}$, adică x_1 şi x_2 sunt liniar dependente - contradicție) rezultă că f are două puncte fixe x_1x_2 şi 1 ceea ce este fals.

Deci $k\in\{0,1\}$. Dacă $k = 1$ atunci $G = \langle x_1\rangle = \{1, x_1,\ldots x_1^{p-1}\} \approx (\mathbb{Z}_p,+)$.

Dacă $k = 0$, atunci $G = \{1\}$.

Rămîne să arătăm că grupul $(\mathbb{Z}_p,+)$ îndeplineşte condiția din enunț.

Fie $f\in Aut(\mathbb{Z}_p)$. Atunci $f(\hat{k}) = a\hat{k}$ cu $a\in\{1,2,\ldots,p-1\}$. Dacă f are cel puțin două puncte fixe, atunci există $\hat{k}\neq\hat{0}$ astfel încât $f(\hat{k}) = \hat{k} \Rightarrow a\hat{k} = \hat{k} \Rightarrow$ $(a-1)\hat{k} = \hat{0} \Rightarrow$ $p \mid a-1 \Rightarrow a = 1$ $(a \le p-1) \Rightarrow f(\hat{k}) = \hat{k} \Rightarrow f = 1_{Z_p}$, deci $(\mathbb{Z}_p,+)$ îndeplineşte condiția din enunț.

Deci grupurile căutate sunt grupurile $(\mathbb{Z}_p,+)$ cu p prim şi grupul trivial $\{1\}$.

4.80. (i). Orice element din $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ este clasa unui număr rațional de forma m/n cu $0\le m <n$, $(m,n) = 1$.

Dacă $x = \frac{m}{n} + \mathbb{Z}$ este un astfel de element, atunci $nx = m + n\mathbb{Z} = 0$ (în $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$).

(ii). Este uşor de demonstrat că singurul subgrup de ordin n al lui $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ este : $\{\mathbb{Z}, \frac{1}{n}+\mathbb{Z}, \ldots, \frac{n-1}{n} + \mathbb{Z}\}$.

4.81. Facem inducție matematică după m (afirmația din enunț fiind trivială pentru m = 0,1). Să presupunem că afirmația este adevărată pentru subgrupurile de ordin p^{m-1} şi fie G un p – grup de ordin p^m. Deoarece $Z(G) \neq \{1\}$ (conform problemei **4.77.**) există un element $x\in Z(G)$, $x \neq 1$ cu $o(x) = p^n$ ($n \ge 1$). Atunci $(x^{p^{n-1}})^p = x^{p^n} = 1$ şi $x^{p^{n-1}} \neq 1$, de unde deducem că $o(x^{p^{n-1}}) = p$ iar $G_1 = \langle x^{p^{n-1}}\rangle$ este un subgrup de ordin p al lui G. Deoarece $x\in Z(G)$, atunci $G_1 \le Z(G)$, astfel că $G_1 \trianglelefteq G$ ($|G_1| = p$ – prim) şi grupul factor $\overline{G} = G / G_1$ are ordinul p^{m-1}. Conform ipotezei de inducție, grupul $\overline{G}$ are subgrupurile normale $\overline{G}_0, \overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_{m-1}$ a.î. $1 = \overline{G}_0 < \overline{G}_1 < \ldots < \overline{G}_{m-1} = \overline{G}$ şi $|\overline{G}_i| = p^i$ pentru orice $i\in\{1,2,\ldots,m-1\}$. Conform teoremei de corespondență, fiecare $\overline{G}_i$ este de forma $\overline{G}_i = G_{i+1} / G_1$, unde G_{i+1} este un subgrup normal al lui G şi

$G_1 \leq G_{i+1}$. În plus, $p^i = |G_i| = |G_{i+1}| / |G_1| = |G_{i+1}| / p$, deci $|G_{i+1}| = p^{i+1}$. Ținând cont de principiul inducției matematice deducem că afirmația din enunț este adevărată pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Observație. Din acest exercițiu tragem concluzia că pentru p – grupuri finite este adevărată reciproca teoremei lui Lagrange (vezi şi problema **3.47.**).

4.82. Vom demonstra că grupul G are proprietatea din enunț $\Leftrightarrow |G| = p^2$ cu p prim ($p \geq 2$).

Într-adevăr, dacă în descompunerea în factori primi a lui |G| ar apărea două numere prime distincte p şi q atunci, conform teoremei lui Cauchy pentru grupuri finite (problema **4.74.**), există $x,y \in G$ a.î. o(x) = p şi o(y) = q. Atunci considerând $H_1 = \langle x \rangle$ şi $H_2 = \langle y \rangle$, avem că $H_1, H_2 \leq G$ şi $|H_1| = p \neq q = |H_2|$, contradicție. În concluzie $|G| = p^k$, $k \geq 1$ şi p prim.

Utilizând exercițiul anterior, deducem că există pentru fiecare $i = 0,1,2,\ldots,k$ $H_i \leq G$ cu $|H_i| = p^i$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci cu necesitate $k = 2$.

Reciproc, dacă $|G| = p^2$, atunci conform teoremei lui Lagrange, toate eventualele sale subgrupuri proprii au p elemente.

4.83. (i). Dacă $z_1, z_2 \in T \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2^{-1}| = |z_1| : |z_2| = 1:1 = 1$ $\Rightarrow z_1 \cdot z_2^{-1} \in T \Rightarrow T \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Considerând acum $f : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{C}^*,\cdot)$, $f(t) = \cos(2\pi t) + i \cdot \sin(2\pi t)$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$, se arată uşor că f este morfism de grupuri, $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}(f) = T$ şi atunci conform teoremei fundamentale de izomorfism pentru grupuri avem $\mathbb{R}/\mathrm{Ker}(f) \approx \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx (T,\cdot)$.

(ii). Se consideră $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(z) = |z|$ şi se arată uşor că f este morfism de grupuri, $\mathrm{Ker}(f) = T$ şi acum totul rezultă din teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri.

(iii). Faptul că $\mathbb{R}_+^* \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$ rezultă imediat.

Dacă definim $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{z}{|z|}$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}^*$, atunci se arată imediat că f este morfism de grupuri, $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_+^*$, iar $\mathrm{Im}(f) = T$ şi totul rezultă din teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri.

(iv). Se arată imediat că $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ este morfism surjectiv de grupuri, $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}$ şi totul rezultă din teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri.

4.84. Definim $\alpha : P(A) \to M_n(\mathbb{Z}_2)$ prin $\alpha(X) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ unde:

$$a_{ij} = \begin{cases} \hat{1}, & dacă \ \ ni - i + j \in X \\ \hat{0}, & dacă \ \ ni - i + j \notin X, \end{cases}$$

şi se verifică uşor că α este izomorfism de grupuri.

4.85. Să presupunem că a şi b verifică relaţiile $a^{2^{n-2}} = b^2 = (ab)^2$.

Din $b^2 = (ab)^2 \Rightarrow b^2 = abab \Rightarrow b = aba \Rightarrow bab^{-1} = a^{-1}$.

Din $a^{2^{n-2}} = b^2 \Rightarrow b\, a^{2^{n-2}} b^{-1} = b^2 \Rightarrow (bab^{-1})^{2^{n-2}} = b^2 \Rightarrow a^{-2^{n-2}} = b^2 \Rightarrow a^{2^{n-2}} = b^{-2}$ şi cum $a^{2^{n-2}} = b^2 \Rightarrow b^2 = b^{-2} \Rightarrow b^4 = 1 \Rightarrow (a^{2^{n-2}})^2 = 1 \Rightarrow a^{2^{n-1}} = 1$.

Reciproc, dacă a şi b verifică relaţiile $a^{2^{n-1}} = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$ şi $b^2 = a^{2^{n-2}}$, atunci din $bab^{-1} = a^{-1} \Rightarrow (ab)^2 = b^2 = a^{2^{n-2}}$.

Din echivalenţa de relaţii probată mai sus deducem că $G \approx \mathbf{Q}_n$.

4.86. Prin calcul direct se arată că o(j) = o(k) = 4, deci $|J| = |K| = 4$ iar dacă notăm prin t = jk, atunci kj = -t şi astfel $G = \{\pm I_2, \pm j, \pm k, \pm t\}$, deci $|G| = 8$.

Deoarece $|G : J| = |G : K| = 8:4 = 2$, atunci $J, K \trianglelefteq G$.

Cum $|G| = 2^3$ şi $j^2 = k^2 = (jk)^2$ deducem că $G \approx \mathbf{Q}_3$.

4.87. Deoarece $A^2 = B^2 = (AB)^2 = -I_2$, atunci analog ca la problema precedentă deducem că $G \approx \mathbf{Q}_3$.

4.88. Făcând tabla de compunere constatăm că G este grup şi deoarece $|G| = 2^3$ iar $j^2 = k^2 = (jk)^2 = -1$, deducem că $G \approx \mathbf{Q}_3$.

4.89. Din studiul tablei de compunere de la problema precedentă deducem că $Z(\mathbf{Q}_3) = \{\pm 1\}$.

4.90. Fie $H = Z(\mathbf{Q}_3)$; cum $|H| = 2 \Rightarrow |\mathbf{Q}_3 / H| = 8 : 2 = 4$ şi ţinând cont de exerciţiul precedent deducem că $\mathbf{Q}_3/H = \{H, iH, jH, kH\}$ (folosind notaţiile de la problema **4.86.**). Ştim că $i^{-1} = -i$, $j^{-1} = -j$, $k^{-1} = -k$; de asemenea $(iH)(jH) = (ij)H = kH$ iar $(jH)(iH) = (ji)H = (-k)H = k^{-1}H$ şi deoarece $k(k^{-1})^{-1} = k^2 = -1 \in H \Rightarrow kH = k^{-1}H$, adică $(iH)(jH) = (jH)(iH)$.

Analog se arată că şi celelalte elemente din $\mathbf{Q}_3/H$ comută între ele, de unde deducem că $\mathbf{Q}_3/H$ este comutativ.

4.91. Deoarece $\mathbf{Q}_3$ nu are elemente de ordin 2 iar D_4 are astfel de elemente (de ex. pe ε) deducem că ele nu pot fi izomorfe.

4.92. Deoarece G este necomutativ de ordin 8, atunci în G nu avem elemente de ordin 8 şi nu toate elementele au ordin 2 (în caz contrar se deduce

imediat că G este comutativ, vezi problema **2.38.**). Deci $(\exists)\ a\in G$ a.î. o(a) = 4 şi fie $b\in G$ a.î. $b\notin\langle a\rangle$. Deoarece $\langle a\rangle \le G$ (căci $|\langle a\rangle| = 4$ şi $4 \mid 8$), deducem că $|G / \langle a\rangle| = 2$, deci $b^2 \in \langle a\rangle$.

Cum $b^2 = a$ sau $b^2 = a^3$ nu se poate (în caz contrar ar rezulta că o(b) = 8) deducem că $b^2 = 1$ sau $b^2 = a^2$. Mai mult, cum $\langle a\rangle \trianglelefteq G \Rightarrow b^{-1}ab \in \langle a\rangle$.

Cum $o(a^2) = 2 \Rightarrow b^{-1}ab = a$ sau $b^{-1}ab = a^3$ (rămâne numai cazul $b^{-1}ab = a^3$ căci în cazul $b^{-1}ab = a$ ar rezulta ab = ba, adică G ar fi comutativ, fals).

Avem deci posibilităţile:

(i) $a^4 = 1$, $b^2 = a^2$ şi $b^{-1}ab = a^3 = a^{-1}$

(ii) $a^4 = 1$, $b^2 = 1$ şi $b^{-1}ab = a^3 = a^{-1}$

Cazul (i) ne arată că $G \approx \mathbf{Q}_3$ iar cazul (ii) că $G \approx \mathbf{D}_4$.

4.93. Considerăm $f : G \to Aut(G)$, $f(a) = \varphi_a$ (automorfismul interior). Din problema **4.49.** rezultă că f este un morfism de grupuri, Ker(f) = Z(G), Im(f) = Inn(G) şi acum totul rezultă din teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri.

4.94. Fie $A\in GL_n(K) \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow \det((A^t)^{-1}) = (\det(A))^{-1} \neq 0$, adică $(A^t)^{-1} \in GL_n(K)$, deci α este corect definită.

Dacă $A,B\in GL_n(K) \Rightarrow ((AB)^t)^{-1} = (B^tA^t)^{-1} = (A^t)^{-1}(B^t)^{-1} \Rightarrow \alpha(AB) = \alpha(A)\cdot\alpha(B)$ adică α este morfism de grupuri.

În plus, deoarece pentru $A\in GL_n(K)$, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \Rightarrow (\alpha\circ\alpha)(A) = \alpha(\alpha(A)) = \alpha((A^t)^{-1}) = (((A^t)^{-1})^t)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$, adică $\alpha\circ\alpha = 1_{GL_n(K)}$, deci α este o bijecţie, de unde deducem că $\alpha\in Aut(GL_n(K))$.

Să presupunem prin absurd că α este automorfism interior. Atunci există $B\in GL_n(K)$ a.î. $(\forall)\ A\in GL_n(K)$ să avem $(A^t)^{-1} = \alpha(A) = BAB^{-1}$. Rezultă că $\det(A^{-1}) = \det((A^t)^{-1}) = \det(BAB^{-1}) = \det(A)$, $(\forall)\ A\in GL_n(K)$.

Deoarece aplicaţia $\det : GL_n(K) \to K^*$ este surjectivă deducem că $(\forall)\ a\in K^*$ avem $a = a^{-1} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$ sau $-1 \Rightarrow K = \mathbb{Z}_2$ sau $\mathbb{Z}_3$ – absurd; deci α nu este (în condiţiile enunţului) automorfism interior.

4.95. Fie $(G,*)$ un grup şi $\Sigma(G)$ grupul permutărilor lui G. Pentru $\sigma\in\Sigma(G)$ notăm cu σ^* operaţia algebrică de pe G definită astfel:

$$x\ \sigma^*\ y = \sigma(\sigma^{-1}(x) * \sigma^{-1}(y)),\ (\forall)\ x,y\in G.$$

Se verifică imediat că dubletul (G,σ^*) devine grup izomorf cu grupul $(G,*)$, izomorfismul fiind $\sigma : (G,*) \to (G,\sigma^*)$ (spunem că noua structură σ^* este obţinută din structura de grup iniţială $(G,*)$ prin transportul dat de σ) (vezi şi problema **2.50.**).

Pe de altă parte, să observăm că orice structură de grup $(G,\circ)$ izomorfă cu structura iniţială $(G,*)$ provine prin transportul dat de o bijecţie.

Într-adevăr, dacă $\sigma : (G,\circ) \to (G,*)$ este izomorfism de grupuri, atunci pentru orice $x,y \in G$ avem:

$x \circ y = \sigma(\sigma^{-1}(x \circ y)) = \sigma(\sigma^{-1}(x) * \sigma^{-1}(y)) = x\ \sigma^*\ y$, adică operația algebrică $'' \circ ''$ coincide cu operația algebrică $''\sigma^*\ ''$.

Dacă $\sigma,\xi \in \Sigma(G)$, atunci se probează imediat că $\sigma^* = \xi^* \Leftrightarrow \sigma^{-1}\xi \in Aut(G,*)$, deci dacă fixăm o bijecție $\sigma \in \Sigma(G)$, atunci toate bijecțiile care transportă structura lui $(G,*)$ în aceeași structură (G,σ^*) sunt de forma $\sigma\varphi$ cu $\varphi \in Aut(G,*)$, şi sunt în număr egal cu $|Aut(G,*)|$.

Cum în $\Sigma(G)$ există n! bijecții şi $|Aut(G,*)|$ dintre acestea dau aceeaşi structură de grup pe G izomorfă cu $(G,*)$, deducem că numărul structurilor ce se pot induce pe G şi care sunt izomorfe cu $(G,*)$ este egal $n!/|Aut(G,*)|$.

4.96. Să observăm la început că două grupuri ciclice cu acelaşi număr de elemente sunt izomorfe (conform problemei **4.53.**).

Dacă $G = \{1,a,a^2,\ldots,a^{n-1}\}$este un grup ciclic fixat, atunci un endomorfism al lui G este perfect determinat dacă definim $f(a) = a^k$, $0 \le k \le n-1$.

Să demonstrăm că un astfel de endomorfism este automorfism $\Leftrightarrow (n,k) = 1$. Într-adevăr, notând cu $r_0,r_1,\ldots,r_{n-1}$ resturile la împărțirea cu n a numerelor $0,2k,\ldots,(n-1)k$, atunci ținând cont de faptul că f este morfism de grupuri şi că $a^n = 1$ deducem că:

$Im(f) = G \Leftrightarrow \{r_0,r_1,\ldots r_{n-1}\} = \{0,1,\ldots,n-1\} \Leftrightarrow (k,n) = 1$.

Deducem că $|\ Aut(G)\ | = \varphi(n)$ şi atunci conform problemei **4.95.** pe G putem defini $n!/\varphi(n)$ structuri de grup ciclic. Pentru ultima afirmație se ține cont de faptul că dacă n este prim, atunci $\varphi(n) = n-1$.

4.97. Evident, dacă $y \in \mathbb{Q}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ atunci ecuația $nx = y$ are soluție în $\mathbb{Q}$.

4.98. Fie $y \in U_{p^\infty}$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ putem alege câte un generator ξ_n al lui U_{p^∞} a.î. $\xi_{n+1}^{\,p} = \xi_n$.

Avem deci un $n \in \mathbb{N}$ a.î. $y \in U_{p^n}$, deci $y = \xi_n^{\,l}$, $l \ge 0$. Fie acum $m \in \mathbb{N}^*$, $m = p^k t$, cu $(t,p) = 1$ iar $k \in \mathbb{N}$. Cum şi $(t,p^n) = 1$, $(\exists)\ u,v \in \mathbb{Z}$ a.î. $up^n + vt = 1$. Atunci ecuația $x^m = y$ are în U_{p^∞} soluția $x = \xi_{n+k}^{\,vl}$ deoarece $x^m = (\xi_{n+k}^{\,vl})^m = \xi_{n+k}^{\,vlm} = \xi_{n+k}^{\,vlp^k t} = y^{vt} = y^{1-up^n} = y$, deci $(U_{p^\infty},\cdot)$ este grup divizibil.

4.99. Fie G un astfel de grup şi $y \in G$, $y \ne 0$ (folosim notația aditivă). Dacă y are ordinul infinit, atunci definim (folosim faptul G este divizibil) şirul recursiv $(y_n)_{n\ge 1}$ de elemente din G prin $(n+1)y_{n+1} = y_n$, $n = 1,2,\ldots$. În acest caz

se verifică imediat că grupul generat de elementele $y_1,y_2,\ldots$ este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbb{Q},+)$.

Dacă y are ordinul finit m, atunci elementul $y_1 = (m/p)y$, unde p este un divizor prim al lui m, are ordinul p. Cum G este divizibil, definim şirul $y_1,y_2,\ldots$ de elemente din G prin $py_{n+1} = y_n$, $n = 1,2,\ldots$. În acest caz subgrupul lui G generat de elementele $y_1,y_2,\ldots$ este izomorf cu $(U_{p^\infty},\cdot)$.

4.100. Să demonstrăm de exemplu că dacă G este un grup divizibil iar $H \leq G$, atunci G/H este divizibil (pe G îl considerăm grup aditiv). Fie deci $m\in\mathbb{N}^*$ şi $y + H\in G/H$. Cum G este divizibil, există $x\in G$ a.î. $mx = y$. Atunci $m(x+H) = y + H$, adică G/H este divizibil.

4.101. Deoarece categoria grupurilor abeliene este echivalentă cu categoria $\mathbb{Z}$ – modulelor, putem folosi testul de injectivitate al lui Baer: *" Un A – modul Q este injectiv $\Leftrightarrow$ $(\forall)$ I un ideal stâng al lui A şi $(\forall)$ $f : I \to Q$ un morfism de A – module, $(\exists)$ $y \in Q$ a.î. $(\forall)$ $a \in I$, $f(a) = ay$."*

"$\Rightarrow$". Fie deci G un grup injectiv, $y\in G$, $m\in\mathbb{N}^*$ şi $f : m\mathbb{Z} \to G$, $f(a) = by$, $(\forall)$ $a = bm \in m\mathbb{Z}$. Se arată imediat că f este un morfism de grupuri.

Conform testului de injectivitate al lui Baer $(\exists)$ $x\in G$ a.î. $f(a) = ax$, $(\forall)$ $a\in m\mathbb{Z}$.

Pentru $a = m = 1\cdot m$ avem $y = 1\cdot y = f(1\cdot m) = mx$, cu $x = f(1)$, adică G este divizibil.

"$\Leftarrow$". Fie acum G un grup abelian divizibil. Conform aceluiaşi test al lui Baer, pentru a proba injectivitatea lui G este suficient să o probăm pentru idealele $I \neq \{0\}$ ale lui $\mathbb{Z}$.

Avem că $(\exists)$ $m\in\mathbb{N}^*$ a.î. $I = m\mathbb{Z}$. Fie $f : I \to G$ un morfism de grupuri şi $y = f(m)$. Cum G este divizibil $(\exists)$ $x\in G$ a.î. $mx = y$. Atunci $(\forall)$ $a \in m\mathbb{Z}$, $a = bm$ avem $f(a) = f(bm) = bf(m) = by = ax$, adică G este un $\mathbb{Z}$ - modul injectiv.

§5. Produse directe de grupuri

5.1. Să demonstrăm de exemplu că $H \times \{1\} \trianglelefteq H \times K$.

Fie deci $(x,1)\in H \times \{1\}$ şi $(y,z)\in H\times K$ ($x,y\in H$ iar $z\in K$).

Atunci $(y,z)^{-1}(x,1)(y,z) = (y^{-1},z^{-1})(x,1)(y,z) = (y^{-1}xy,z^{-1}z) = (y^{-1}xy,1)\in$ $\in H \times \{1\}$ (căci $y^{-1}xy \in H$). Analog se probează că $\{1\} \times K \trianglelefteq H \times K$.

5.2. Fie de exemplu $G = G_1 \times G_2$.

Se verifică imediat că $Z(G) = Z(G_1) \times Z(G_2)$.

Deci, dacă G_1 şi G_2 sunt comutative, atunci $Z(G_1) = G_1$ şi $Z(G_2) = G_2$, şi astfel $Z(G) = G_1 \times G_2 = G$, adică G este comutativ.

Reciproc, să presupunem că G este comutativ şi să probăm că G_1 şi G_2 sunt comutative. Fie de exemplu $x,y \in G_1$. Avem că $(x,1),(y,1) \in G$ şi din $(x,1)(y,1) = (y,1)(x,1) \Rightarrow (xy,1) = (yx,1) \Rightarrow xy = yx$, adică G_1 este comutativ. Analog se probează că G_2 este comutativ.

5.3. (i).Fie $z_i = (x_i,x_i) \in \hat{G}$, i = 1,2. Atunci $z_1 z_2^{-1} = (x_1,x_1)(x_2,x_2)^{-1} = (x_1 x_2^{-1}, x_1 x_2^{-1})$ este din $\hat{G}$, deci $\hat{G} \leq G \times G$.

Se probează imediat că $f: G \to \hat{G}$, $f(x) = (x,x)$, $(\forall)\ x \in G$ este un izomorfism de grupuri, deci $G \approx \hat{G}$.

(ii). "$\Leftarrow$". Presupunem că G este comutativ şi fie $z = (x,x) \in \hat{G}$ iar $y=(t,u) \in G \times G$. Atunci $yzy^{-1} = (t,u)(x,x)(t^{-1},u^{-1}) = (txt^{-1},uxu^{-1}) = (x,x) \in \hat{G}$, $\hat{G} \trianglelefteq G \times G$.

"$\Rightarrow$". Presupunem că $\hat{G} \trianglelefteq G \times G$ şi să demonstrăm că G este comutativ. Fie $x,y \in G$. Atunci $(x,y)(x,x)(x^{-1},y^{-1}) \in \hat{G} \Leftrightarrow (xxx^{-1},yxy^{-1}) \in \hat{G} \Leftrightarrow (x,yxy^{-1}) \in \hat{G}$ $\Leftrightarrow x = yxy^{-1} \Leftrightarrow xy = yx$, adică G este comutativ.

(iii). "$\Rightarrow$". Fie $t \in Z(G)$; atunci $(\forall)\ a \in G$ avem $ta = at$ şi $(t,1)(a,a) = (ta,a) = (a,a)(t,1)$, adică $(t,1) \in C_{G\times G}(\hat{G}) \leq N_{G\times G}(\hat{G}) = \hat{G}$, deci $t = 1$, adică $Z(G) = \{1\}$.

"$\Leftarrow$". Fie $(x,y) \in N_{G\times G}(\hat{G})$. Avem $(x,y)\ \hat{G}\ (x,y)^{-1} = \hat{G}$, deci pentru orice $a \in G$, $(x,y)(a,a)(x,y)^{-1} \in \hat{G}$. Însă $(x,y)(a,a)(x,y)^{-1} = (xax^{-1},yay^{-1})$ deci avem $xax^{-1} = yay^{-1} \Leftrightarrow (y^{-1}x)a = a(y^{-1}x)$, $(\forall)\ a \in G \Rightarrow y^{-1}x \in Z(G) = 1 \Rightarrow x = y$ şi astfel $(x,y) \in \hat{G}$, deci $N_{G\times G}(\hat{G}) = \hat{G}$.

5.4. Definim $f : G/(H\cap K) \to (G/H) \times (G/K)$ prin $f(x(H\cap K)) = (xH,xK)$, $(\forall)\ x \in G$.

Dacă $x,y \in G$ şi $x(H\cap K) = y(H\cap K) \Leftrightarrow xy^{-1} \in H\cap K \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ şi $xy^{-1} \in K$ $\Leftrightarrow xH = yH$ şi $xK = yK$, adică f este corect definită şi injectivă.

Se probează imediat că f este morfism de grupuri. Pentru a arăta că f este izomorfism de grupuri mai trebuie probată surjectivitatea sa.

Fie deci $(xH,yK) \in (G/H) \times (G/K)$, cu $x,y \in G$. Deoarece $G = H\cdot K$ putem scrie $x = h_1k_1$, $y = h_2k_2$ cu $h_i \in H$ şi $k_i \in K$, i = 1,2. Considerând $z = h_2k_1 \in HK = G$ avem $xz^{-1} = h_1k_1k_1^{-1}h_2^{-1} \in H$ iar $yz^{-1} = h_2k_2k_1^{-1}h_2^{-1} \in K$ (deoarece $K \trianglelefteq G$), adică $zH = xH$ şi $zK = yK$, deci $f(z(H\cap K)) = (zH,zK) = (xH,yK)$, adică f este şi surjectivă.

5.5. Considerăm surjecţiile canonice $p : H \to H/J$ şi $q : K \to K/L$. Cum p şi q sunt morfisme surjective de grupuri, atunci şi $f : H \times K \to (H/J) \times (K/L)$, $f(x,y) = (p(x),q(y)) = (xJ,yL)$, $(\forall)\ (x,y) \in H \times K$ este un morfism surjectiv de grupuri. Deoarece $(x,y) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x,y) = (1,1) \Leftrightarrow p(x)=1$ şi $q(x)=1 \Leftrightarrow x \in J$ şi $y \in L \Leftrightarrow (x,y) \in J \times L \Rightarrow Ker(f) = J \times L$.

Astfel, $J \times L = Ker(f) \trianglelefteq H \times K$ şi conform teoremei fundamentale de izomorfism pentru grupuri avem că $(H \times K)/(J \times L) = (H \times K)/Ker(f) \approx Im(f) = (H/J) \times (K/L)$.

5.6. Se probează imediat că $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^* \times T$, $f(z) = (|z|, z/|z|)$ este un izomorfism de grupuri , unde $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

5.7. Considerăm $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}_+^* \times \{-1,1\}$, $f(x) = (|x|, x/|x|)$. Avem că $x/|x| \in \{-1,1\}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{Q}^*$. Se verifică imediat că f este izomorfism de grupuri.

5.8. Analog ca la problema **5.7.**

5.9.. Conform problemei **5.6.**, $(\mathbb{C}^*,\cdot) \approx (\mathbb{R}_+^*,\cdot) \times (T,\cdot)$.

Dar $(\mathbb{R}_+^*,\cdot) \approx (\mathbb{R},+)$ (vezi problema **4.62.**), iar $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+) \approx (T,\cdot)$ (vezi problema **4.83.**), de unde deducem imediat izomorfismul căutat.

5.10. Dacă $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ cu $a,b \in \mathbb{R}$, atunci se verifică imediat că $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(z) = (a,b)$ este izomorfism de grupuri.

5.11. (i). Ţinem cont de exerciţiul anterior şi de faptul că $(\mathbb{R},+) \approx (\mathbb{C},+)$(vezi problema **4.60.**).

(ii). Ţinem cont de faptul că orice subgrup finit generat al lui $(\mathbb{Q},+)$ este ciclic (vezi problema **2.95.**).

Astfel, pentru a proba că $(\mathbb{Q},+) \not\approx (\mathbb{Q},+) \times (\mathbb{Q},+)$ este suficient să construim un subgrup finit generat al lui $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ care să nu fie ciclic.

Vom considera $H = <\{(1,0),(0,1)\}>$ şi dacă prin absurd este ciclic, atunci există $(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ a.î. $H = <(x,y)>$, deci $(\exists)\ n_1,n_2 \in \mathbb{Z}$ a.î. $(1,0) = n_1(x,y) = (n_1x,n_1y)$ şi $(0,1) = n_2(x,y) = (n_2x,n_2y)$. Deducem că $1 = n_1x = n_2y$ şi $0 = n_1y = n_2x$ care sunt contradictorii.

5.12. Fie $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5,\ldots$ şirul numerelor naturale prime. Se ştie că orice raţional se scrie în mod unic sub forma $\alpha = (-1)^a \cdot p_0^{k_0} p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \ldots$ unde $a \in \{0,1\}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0,1,\ldots$ şi $k_i \neq 0$ pentru un număr finit de indici i.

Definim $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}[X]$ prin $f(\alpha) = (\hat{a}, k_0 + k_1X + \ldots + k_nX^n + \ldots)$. Se probează imediat că f este izomorfism de grupuri.

5.13. Cum $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ este infinit, dacă presupunem prin absurd că este ciclic, atunci cu necesitate avem un izomorfism $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Dacă $f(1) = (a,b)$, atunci $f(2) = (2a,2b), \ldots, f(n) = (na,nb), (\forall)\ n \in \mathbb{Z}$.

Deoarece f este surjectivă, $(\exists)\ n \in \mathbb{Z}$ a.î. $f(n) = (1,1)$, deci $na = 1$ şi $nb = 1$ $\Rightarrow a = b = 1$ sau $a = b = -1$ şi $n = 1$ sau -1 .

Dacă însă $f(1) = (1,1)$, atunci $(\forall)\ m \in \mathbb{Z}$, $f(m) = (m,m)$ şi astfel f nu mai este surjectivă (de exemplu (1,0) nu mai este imaginea nici unui element din $\mathbb{Z}$).

Analog în celelalte cazuri.

5.14. Vom proba că subgrupurile lui $(\mathbb{Z},+) \times (\mathbb{Z},+)$ sunt de forma :

$(x_1,y_1)\mathbb{Z} + (0,y_2)\mathbb{Z}$ cu $0 \leq y_1 < y_2$ şi $x_1 \geq 0$ (evident, toate numere naturale)

Fie $H \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; atunci notând cu $p_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ prima proiecţie, avem că $p_1(H) \leq \mathbb{Z}$, deci $p_1(H) = x_1\mathbb{Z}$ cu $x_1 \in \mathbb{N}$. Avem atunci un y_1(nu neapărat unic) a.î. $(x_1,y_1) \in H$. Fie H' subgrupul generat de elementele de forma (0,y). Atunci notând cu p_2 a doua proiecţie a lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avem că $p_2(H)$ este de forma $y_2\mathbb{Z}$. Deci elementul $(0,y_2) \in H$ şi avem $(x_1,y_1)\mathbb{Z} + (0,y_2)\mathbb{Z} \subseteq H$.

Fie acum $(x,y) \in H$. În mod evident $x_1 \mid x$ şi deci există $t \in \mathbb{Z}$ cu $x = tx_1$.

Elementul $(0,y-y_1t) = (x,y) - t(x_1,y_1) \in H'$ şi deci $y_2 \mid y-y_1t$, adică $(\exists)\ s \in \mathbb{Z}$ a.î. $y - y_1t = sy_2$. Aşadar, $(x,y) = t(x_1,y_1) + s(0,y_2)$ ceea ce ne arată că $H \subseteq (x_1,y_1)\mathbb{Z} + (0,y_2)\mathbb{Z}$, de unde egalitatea $(x_1,y_1)\mathbb{Z} + (0,y_2)\mathbb{Z} = H$.

Acum putem înlocui pe y_1 cu restul împărţirii lui y_1 prin y_2 şi astfel identitatea de mai sus nu se schimbă.

5.15. Presupunem prin absurd că $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ este ciclic şi fie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ un izomorfism de grupuri. Trebuie ca $f(1) = (1,\hat{1})$ şi analog ca la soluţia de la problema **5.13.** se ajunge la contradicţia că f nu este surjectivă (elementul $(0,\hat{1})$ nefiind imaginea nici unui element din $\mathbb{Z}$).

5.16. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, atunci cum $\det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow A \in GL_3(K)$, deci $H \subseteq GL_3(K)$. Prin calcul se deduce că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, unde $a' = -a$, $b' = ac - b$ şi $c' = -c$.

Dacă $B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, atunci $AB = \begin{pmatrix} 1 & x+a & y+b+az \\ 0 & 1 & c+z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, deci, din cele de mai sus rezultă că $H \leq GL_3(K)$.

Să presupunem că $A \in Z(H)$; scriind că $AB = BA$ pentru B de forma $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ deducem că $a = c = 0$, de unde rezultă imediat că $Z(H) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in K \right\}$.

Se verifică acum imediat că $f : K \to Z(H)$, $f(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este izomorfism de grupuri.

De asemenea, se verifică imediat că $g : H \to K \times K$, $g\left(\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (a,c)$ este morfism surjectiv de grupuri cu $\operatorname{Ker}(g) = Z(H)$, de unde $H/\operatorname{Ker}(g) \approx \operatorname{Im}(g) \Leftrightarrow H/Z(H) \approx K \times K$.

5.17. (i). Fie n un număr natural. O *partiție* a lui n este un sistem ordonat $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ de n numere naturale a.î. $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n$ şi $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = n$.

Există un mod prescurtat de a scrie partițiile unui număr natural n. Fie $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ o partiție a lui n. Mai întâi, se omit zerourile, deci, dacă $m_k \neq 0$ şi $m_{k+1} = \ldots = m_n = 0$, atunci vom scrie $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ în loc de $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Apoi dacă s dintre numerele $m_1, m_2, \ldots, m_k$ coincid cu un număr dat m, vom nota

cu m^s sistemul acestor numere, adică $m^s = \underbrace{(m,m,...,m)}_{s \text{ componente}}$. Notăm cu k_n numărul partițiilor lui n. (funcția $n \mapsto k_n$ este una dintre cele mai importante funcții ale aritmeticii, comparabilă, din acest punct de vedere, cu funcția $n \mapsto \pi_n$= =numărul numerelor prime mai mici ca n).

Vom descrie, spre exemplificare, pentru $n \leq 6$, toate partițiile distincte ale lui n şi vom indica numărul lor k_n:

n = 1 ; (1) ; $k_1 = 1$.
n = 2 ; (2), (1) ; $k_2 = 2$.
n = 3 ; (3), (2,1), (1^3) ; $k_3 = 3$.
n = 4 ; (4), (3,1), (2^2), $(2,1^2)$, (1^4) ; $k_4 = 5$.
n = 5 ; (5), (4,1), (3,2), $(3,1^2)$, $(2^2,1)$, $(2,1^3)$, (1^5) ; $k_5 = 7$.
n = 6 ; (6), (5,1), (4,2), $(4,1^2)$, (3^2), (3,2,1), $(3,1^3)$, (2^3), $(2^2,1^2)$, $(2,1^4)$, (1^6); $k_6 = 11$.

Fie acum p un număr prim şi n un număr natural. Din teorema de structură a grupurilor abeliene finite (vezi [18]) se deduce că numărul grupurilor abeliene finite cu p^n elemente este egal cu k_n.

Astfel, de exemplu, există cinci tipuri de grupuri abeliene de ordin $16 = 2^4$:

$\mathbb{Z}_{16}$ - corespunzător partiției (4) ;
$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ - corespunzător partiției (3,1) ;
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ - corespunzător partiției (2^2) ;
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ - corespunzător partiției $(2,1^2)$;
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ - corespunzător partiției (1^4).

(ii). În general, fie n un număr întreg pozitiv şi $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}$ descompunerea lui n în produs de numere prime (deci $p_1,p_2\ldots,p_s$ sunt prime distincte şi $n_1,n_2,\ldots,n_s$ sunt numere naturale). Numărul tipurilor de grupuri abeliene de ordin n este $k_{n_1} k_{n_2} \ldots k_{n_s}$ (vezi [9]).

Astfel, de exemplu, există nouă tipuri de grupuri abeliene de ordin $216 = 2^3 \cdot 3^3$:

$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{27}$;
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{27}$;
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{27}$;
$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$;
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$;
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$;
$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$;

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$;

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

5.18. Ca o consecință a problemei **5.17.** deducem că un grup comutativ cu 8 elemente este de forma $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ sau $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

5.19. Acelaşi argument ca la exercițiul anterior (grupurile cu 9 elemente fiind comutative, conform problemei **4.78.**).

5.20. Fie G un grup cu 10 elemente. Dacă G este necomutativ, scriind că $10 = 2 \cdot 5$, atunci $G \approx \mathbf{D}_5$ (conform problemei **4.75.**).

Dacă G este comutativ, $G \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ (conform problemei **5.17.**).

5.21. Deoarece $\det(A) = \pm 1 \Rightarrow$ A este inversabilă şi $A^{-1} \in M_2(\mathbb{Z})$, mai precis $A^{-1} = \det(A)\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Prin calcul se verifică faptul că $t_{A^{-1}} \circ t_A = 1_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, adică t_A este bijectivă. Cum faptul că t_A este morfism de grupuri se probează imediat, deducem că $t_A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.

Reciproc, fie $t \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ şi să notăm t(1,0) = (a,c), t(0,1) = (b,d). Atunci $t(x,y) = t(x,0) + t(0,y) = x \cdot t(1,0) + y \cdot t(0,1) = x \cdot (a,c) + y \cdot (b,d) =$ $=(ax + by, cx + dy) = t_A(x,y)$.

Mai rămâne de demonstrat că $\det(A) = \pm 1$.

Cum t este bijecție, $(\exists)!\ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a.î. $t(x,y) = (1,0) \Leftrightarrow ax + by = 1$ şi $cx + dy = 0$. Datorită unicității soluției sistemului de mai sus $\Rightarrow \det(A) \neq 0$. Aplicând pentru rezolvarea sistemului formula lui Cramer, rezultă că $\det(A) \mid c$ şi $\det(A) \mid d$.

Analog, considerând unicul dublet $(z,u) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ a.î. $t(z,u) = (0,1) \Rightarrow$ $\det(A) \mid a$ şi $\det(A) \mid b$.

Deci, notând $D = \det(A) \Rightarrow a = Da'$, $b = Db'$, $c = Dc'$, $d = Dd'$ cu $a',b',c',d' \in \mathbb{Z}$. Rezultă imediat că $D = ad - bc = D^2(a'd' - b'c')$. Cum $D \neq 0 \Rightarrow$ $1 = D(a'd' - b'c') \Rightarrow D = \det(A) = \pm 1$.

5.22. (i). Conform teoremei lui Cauchy pentru grupuri finite, (vezi problema **4.74.**), G conține un element b de ordin p; fie $H = \langle b \rangle$. Cum H este un p-subgrup Sylow, atunci conform celei de-a treia teoreme a lui Sylow, numărul conjugaților lui H (adică a subgrupurilor de forma gHg^{-1} cu $g \in G$) este de forma

$1 + up$ cu $u \in \mathbb{N}$. Însă $1 + up = |G : N_G(H)|$ şi trebuie să dividă $|G| = pq$. Cum $(1+up, p) = 1$ atunci $1+up \mid q$ iar cum $q < p$ deducem că $u = 0$, deci $H \trianglelefteq G$.

De asemenea, există un element $a \in G$ al cărui ordin este q; fie $K = \langle a \rangle$. Ca şi mai înainte, K este q-subgrup Sylow al lui G, astfel că $|G : N_G(H)| = 1+kq$ cu $k \in \mathbb{N}$. Cum $1 + kq \mid p$ iar prin ipoteză $q \nmid p-1$ deducem că $k = 0$.

Astfel, $K \trianglelefteq G$, deci $G \approx H \times K \approx \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \approx \mathbb{Z}_{pq}$, deci G este ciclic în acest caz.

(ii). Să presupunem că $q \mid p-1$. Atunci K nu mai este subgrup normal în G. Cum $H \trianglelefteq G$, $a^{-1}ba = b^r$ cu $r \in \mathbb{N}$.

Putem presupune $r \not\equiv 1 \pmod p$ (căci în caz contrar ne reântoarcem la cazul comutativ). Prin inducţie se arată uşor că $a^{-j}ba^j = b^{r^j}$. În particular pentru $j=q$ avem $b = b^{r^q}$, adică $r^q \equiv 1 \pmod p$.

5.23. Rezultă din problema **5.22.** pentru $p = 5$, $q = 3$ observând că $q \nmid p-1$.

5.24. ([18]) Fie p un număr prim. Conform problemei **5.17.** numărul tipurilor de grupuri abeliene de ordin p^3 coincide cu numărul partiţiilor lui 3. Deoarece $k_3 = 3$ şi partiţiile lui 3 sunt (3), (2,1), (1^3), rezultă următoarele grupuri abeliene $\mathbb{Z}_{p^3}$, $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Căutăm şi grupurile neabeliene de ordin p^3, cazurile $p = 2$ (vezi şi problema **4.92.**) şi p impar tratându-se separat.

Considerăm mai întâi cazul $p = 2$ şi fie G un grup neabelian de ordin 8 (vezi problema **5.18**.). Deoarece G nu este ciclic, G nu conţine nici un element de ordin 8. Dacă toate elementele netriviale ale lui G au ordinul 2, atunci pentru orice $x,y \in G$ avem $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$ şi rezultă că G este abelian. Prin urmare, există un element $a \in G$ cu $o(a) = 4$. Fie $H = \langle a \rangle$. Deoarece $|G:H| = 8/4 = 2$, avem $G = H \cup Hb$, unde b este un element din $G \setminus H$ şi $H \trianglelefteq G$. Avem $Hb \in G / H$ şi $|G / H| = 2$, deci $H = 1 = (Hb)^2 = Hb^2$ şi rezultă $b^2 \in H$. Dacă $b^2 = a$ sau $b^2 = a^3$ se constată imediat că $o(b) = 8$, ceea ce nu se poate. Deci $b^2 = 1$ sau $b^2 = a^2$. Deasemenea, $bab^{-1} \in H$ deoarece H este normal. Deoarece $o(bab^{-1}) = o(a) = 4$, avem $bab^{-1} = a$ sau $bab^{-1} = a^3$. Dacă $bab^{-1} = a$, atunci $ab = ba$ şi rezultă că G este abelian deoarece $G = \langle a,b \rangle$. Prin urmare $bab^{-1} = a^3$. Avem astfel:

$G = \langle a,b \rangle$ cu $a^4 = 1$, $b^2 = 1$, $bab^{-1} = a^3$

sau

$G = \langle a,b \rangle$ cu $a^4 = 1$, $b^2 = a^2$, $bab^{-1} = a^3$.

Este uşor de verificat în primul caz că $G \approx \mathbf{D_4}$ (grupul diedral de grad 4) şi în al doilea caz, $G \approx \mathbf{Q}$ (grupul quaternionilor). Deoarece grupurile $\mathbf{D_4}$ şi **Q**, evident, nu sunt izomorfe, rezultă că există exact două tipuri de grupuri neabeliene de ordin 8.

Considerăm acum că p este un număr prim impar şi G un grup neabelian de ordin p^3. Deoarece G nu este ciclic, G nu conține nici un element de ordin p^3. Rezultă că elementele netriviale din G au un ordinul p sau p^2.

Presupunem mai întâi că există $a \in G$ a.î. $o(a) = p^2$. Fie $H = <a>$. Deoarece $|G:H| = p$ avem $H \trianglelefteq G$. Deoarece $|G/H| = p$, G/H este ciclic, deci există $b \in G$ a.î. $G / H = < Hb>$. În acest caz $H = (Hb)^p = Hb^p$ şi rezultă $b^p \in H$. De asemenea, $bab^{-1} \in H$, deoarece H este normal, deci $bab^{-1} = a^r$ cu $r = 0,1,\ldots,p^2-1$. Nu putem avea $r = 0$ sau $r = 1$ deoarece $r = 0$ implică $bab^{-1} = 1$, deci $a = 1$, iar $r = 1$ implică $bab^{-1} = a$, adică $ba = ab$ şi deoarece $G = <a,b>$, rezultă că G este abelian. Prin inducție matematică după j, se demonstrează imediat că $b^jab^{-j} = a^{r^j}$ pentru orice număr natural j. În particular, $b^pab^{-p} = a^{r^p}$. Pe de altă parte, avem $b^p \in H$ şi H este abelian, deci $b^pab^{-p} = a$. Rezultă $a^{r^p} = a$, deci $r^p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^2)$. Conform teoremei lui Fermat avem $r^p \equiv r \ (\mathrm{mod}\ p)$ şi rezultă $r \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. Scriem $r = 1 + sp$, unde s este un număr întreg. Deoarece $1 < r < p^2$ nu putem avea $s \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$ şi prin urmare $(s,p) = 1$, deci există un număr întreg j a.î. $js \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. Atunci $spj \equiv p \ (\mathrm{mod}\ p^2)$, deci $(1 + sp)^j \equiv 1 + spj \equiv$ $\equiv 1 + p \ (\mathrm{mod}\ p^2)$ şi $b^jab^{-j} = a^{r^j} = a^{(1+sp)^j} = a^{1+p}$. Deoarece $(j,p) = 1$, avem $<Hb^j> = <Hb> = G/H$ şi prin urmare putem înlocui b cu b^j, deci putem presupune că $bab^{-1} = a^{1+p}$. Avem $b^p \in H$, deci $b^p = a^t$ pentru un număr întreg t. Deoarece b nu este de ordin p^3 avem $a^{pt} = b^{p^2} = 1$, deci $pt \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p^2)$, $t \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Fie $t = up$, $u \in \mathbb{Z}$. Din relația $ba = a^{1+p}b$ rezultă $ba^i = a^{i(1+p)}b$ pentru orice număr întreg i şi, în particular, $ba^{-u} = a^{-u(1+p)}b$. Prin inducție după i rezultă imediat că $b^ia^{-u} = a^{-u(1+p)^i}b$. Avem :

$(a^{-u}b)^2 = a^{-u}(b\,a^{-u})b = a^{-u\,[1+(1+p)]}\,b^2$;

$(a^{-u}b)^3 = a^{-u\,[1+(1+p)]}\,(b^2\,a^{-u})b = a^{-u[1+(1+p)+(1+p)^2]}b^3$;

şi continuând în acest mod, rezultă :

$(a^{-u}b)^p = a^{-u[1+(1+p)+\ldots+(1+p)^{p-1}]}b^p$.

Avem $1 + (1+p) + \ldots(1+p)^{p-1} \equiv 1 + (1+p) + 1 + 2p + \ldots + 1 + (p-1)p =$ $= p + pp(p-1)/2 \equiv p \ (\mathrm{mod}\ p^2)$ (deoarece p fiind impar $(p-1)/2$ este întreg), deci

$a^{-u[1+(1+p)+\ldots+(1+p)^{p-1}]} = b^{-p}$ (deoarece $a^{up} = a^t = b^{p^2} = 1$, adică $a^{-up} = b^{-p^2} = b^{-p}$) şi astfel $(a^{-u}b)^p = b^{-p}b^p = 1$. Deoarece $Ha^{-u}b = Hb$ şi $(a^{-u}b)a(a^{-u}b)^{-1} = a^{-u}bab^{-1}a^u = a^{-u}a^{1+p}a^u = a^{1+p}$, îl putem înlocui pe b cu $a^{-u}b$.

Rezultă $G = <a,b>$, cu $a^{p^2} = 1$, $b^p = 1$, $bab^{-1} = a^{1+p}$.

Prin urmare există un unic tip de grup neabelian de ordin p^3 care conține un element de ordin p^2.

Presupunem acum că G nu conține elemente de ordin p^2. Prin urmare, toate elementele netriviale din G au ordinul p. Fie H = Z(G) centrul lui G. Atunci H este netrivial, deci |H| = p sau p^2. Nu putem avea $|H| = p^2$ deoarece în acest caz |G/H| = p, ceea ce implică că G/H este ciclic, deci G este abelian (conform problemei **4.71.**). Prin urmare |H| = p şi $|G/H| = p^2$. Deoarece G/H nu este ciclic, avem, conform problemei **5.17.** (i), $G/H \approx \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Aceasta înseamnă că G/H = <x,y> cu $x^p = y^p = 1$ şi xy = yx.

Fie a,b∈G a.î. Ha = x şi Hb = y. Avem $a^p = b^p = 1$ şi Hab = xy = yx = =Hba, adică ab = bac cu c∈H. Dacă c = 1 atunci ab = ba şi, deoarece G = <H∪{a,b}>, rezultă G abelian. Deci c ≠ 1, în care caz H = <c> şi G = <a,b,c>. Rezultă că:

G = <a,b,c> cu $a^p = b^p = c^p$ şi ab = bac.

Există deci un unic tip de grup neabelian de ordin p^3 care nu conține elemente de ordin p^2.

În concluzie, există exact două tipuri de grupuri neabeliene de ordin p^3.

5.25. Dacă n∈ℕ, n ≥2, prin *grup diciclic de ordin 4n* (notat $\mathbf{DI}_n$) înțelegem un grup cu 4n elemente :

$\mathbf{DI}_n$={1, x, …, x^{2n-1}, y, xy, … , x^{2n-1}y}

ale cărui elemente le multiplicăm astfel:

$x^a x^b = x^{a+b}$

$x^a(x^b y) = x^{a+b}y$

$(x^a y)\, x^b = x^{a-b}y$

$(x^a y)\,(x^b y) = x^{a-b+n}$

unde 0 ≤ a, b ≤ 2n-1 iar puterile lui x sunt considerate modulo 2n.

Se observă că pentru n = 2, $\mathbf{DI}_2 = \mathbf{Q}$ (grupul cuaternionilor).

Fie G un grup cu |G| = 12.

Dacă G este comutativ, totul rezultă din problema **5.17.** (adică $G \approx Z_{12}$ sau $G \approx \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$).

Considerăm acum cazul când G este necomutativ. Fie t numărul subgrupurilor Sylow distincte ale lui G cu 3 elemente. Conform teoremelor lui Sylow $t \equiv 1 \pmod 3$ şi t | 4.

Astfel, G are fie un singur subgrup de ordin 3 (care trebuie să fie subgrup normal) fie 4 subgrupuri (conjugate). Tot conform teoremelor lui Sylow deducem că G trebuie să aibă unul sau 3 subgrupuri de ordin 4.

Cazul 1. Presupunem că G conține un singur subgrup (normal) H de ordin 3 generat de x.

Dacă K este un subgrup al lui G de ordin 4, atunci K este ciclic ($K \approx \mathbb{Z}_4$) sau K este izomorf cu grupul lui Klein ($K \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$).

(a) Să analizăm cazul când K este ciclic, K = <y>.

Cum $H \cap K = \{1\}$, atunci clasele H, Hy, Hy^2, Hy^3 sunt toate distincte şi HK=G.

Cum $H \trianglelefteq G$ deducem că $yxy^{-1} \in H$.

(1) Dacă $yxy^{-1} = x$, atunci xy=yx, deci G este comutativ şi avem

$$G \approx H \times K \approx \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \approx \mathbb{Z}_{12}.$$

(2) Dacă $yxy^{-1} = x^2$, atunci $yx = x^2y$, de unde $y^2x = yx^2y = x^2yxy = x^4y^2 = xy^2$.

Astfel, $xy^2 = y^2x$ şi dacă considerăm $z = xy^2$ avem că o(z) = 6.

De asemenea $z^3 = x^3y^6 = y^2$ şi $yz = yxy^2 = y^3x = y^2x^2y = z^{-1}y$.

Cum o(y) = 4, $y \notin \langle z \rangle$ şi deci clasele $\langle z \rangle$, $\langle z \rangle y$ dau o partiție a lui G.

Multiplicând în acest caz elementele lui G ca în cazul grupului diciclic şi anume $z^a z^b = z^{a+b}$, $z^a(z^by) = z^{a+b}y$, $(z^ay)z^b = z^{a-b}y$, $(z^ay)(z^by) = z^{a-b}y^2 = z^{a-b+3}$ (unde puterile lui z se reduc modulo 6) obținem în acest caz că $G \approx DI_3$.

(b) Să presupunem că K este grupul lui Klein (deci $K \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) şi să notăm elementele sale cu 1,u,v,w unde w = uv şi $u^2 = v^2 = 1$.Atunci $H \cap K = \{1\}$ iar clasele H, Hu, Hv, Hw partiționează pe G, de unde HK = G. Cum $H \trianglelefteq G$ avem $uxu^{-1} = x^a$, $vxv^{-1} = x^b$, $wxw^{-1} = x^{ab}$ unde a, b, $ab \in \{\pm 1\}$.

(3) Dacă a = b = ab = 1, cum G este abelian,

$$G \approx H \times K \approx \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \approx \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2.$$

(4) Să considerăm cazul când două dintre a, b, ab sunt egale cu –1 iar al treilea egal cu 1.

Renumerotând u, v, w (dacă este necesar) putem presupune că a = 1 şi b = -1. Atunci ux = xu iar z = ux are ordinul 6. Astfel, G = <z,v> iar $z^6 = 1$, $v^2 = 1$ iar $vz = z^{-1}v \Leftrightarrow vzv = z^{-1}$ de unde concluzia că $G \approx D_6$.

Cazul 2. Să presupunem că G conține 4 subgrupuri (conjugate) de ordin 3.

Elementele nenule (diferite de 1) ale celor 4 subgrupuri de ordin 3 ne dau 8 elemente diferite de 1 ale lui G, restul de 4 urmând a forma singurul subgrup K de ordin 4 al lui G.

(c) Să arătăm că grupul K nu poate fi ciclic.

Presupunem prin absurd că totuşi K este ciclic, K = <y> şi fie $x \in G \setminus K$. Atunci o(x) = 3 iar clasele K, Kx şi Kx^2 dau o partiție a lui G. Cum $K \trianglelefteq G$ avem că $xyx^{-1} \in K$. Dacă $xyx^{-1} = y$, atunci ar rezulta că G este comutativ (în contradicție cu faptul că G conține 4 subgrupuri conjugate distincte de ordin 3).

De asemenea $xyx^{-1} \neq y^2$ (căci y şi y^2 au ordine diferite).

În sfârşit, dacă am avea $xyx^{-1} = y^3$, atunci $y = x^3yx^{-3} = y^{27} = y^3$ – absurd, de unde concluzia că grupul K nu este ciclic.

(d) Atunci K trebuie să fie grupul lui Klein. Considerând ca mai sus $K=\{1, u, v, w\}$, fie $x \in G$ a.î. $o(x) = 3$. Atunci clasele K, Kx, Kx^2 sunt toate distincte astfel că $G = \langle u, v, x \rangle$. Conjugarea prin x permută cele 3 elemente u, v, w între ele (căci $K \trianglelefteq G$) iar permutarea este sau identică sau un 3-ciclu (deoarece $x^3 = 1$).

(5) Nu putem avea permutarea identică căci în acest caz G ar deveni comutativ (caz studiat deja).

(6) Renumerotând eventual, putem presupune că $xux^{-1} = v$, $xvx^{-1} = w$, $xwx^{-1} = u$ şi atunci considerând asocierile $u \leftrightarrow (12)(34)$, $v \leftrightarrow (13)(24)$, $x \leftrightarrow (234)$ obținem un izomorfism între G şi A_4.

În concluzie avem 5 tipuri de grupuri cu 12 elemente, 2 comutative ($\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \approx \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$) şi 3 necomutative ($\mathbf{D}_6$, DI_3 şi $\mathbf{A}_4$).

5.26. Suntem acum în măsură să prezentăm tabelul de caracterizare a grupurilor finite cu cel mult 15 elemente:

Ordin grup	**Nr. tipuri**	**Reprezentanți**	**Rezultatul care dă caracterizarea**
2	1	$\mathbb{Z}_2$	Problema 4.53.
3	1	$\mathbb{Z}_3$	Problema 4.53.
4	2	$\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ($\approx$K)	Problema 4.56.
5	1	$\mathbb{Z}_5$	Problema 4.53.
6	2	$\mathbb{Z}_6$, D_3 ($\approx S_3$)	Problema 4.58., 4.75.
7	1	$\mathbb{Z}_7$	Problema 4.53.
8	5	3 tipuri comutative : $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 2 tipuri necomutative: Q , D_4	Problema 4.92., 5.18.
9	2	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	Problema 5.19.
10	2	$\mathbb{Z}_{10}$, D_5	Problema 4.75., 5.17.
11	1	$\mathbb{Z}_{11}$	Problema 4.53.

12	5	2 comutative: $\mathbb{Z}_{12}$,$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ 3 necomutative : D_6, DI_3, A_4	Problema 5.17., 5.25.
13	1	$\mathbb{Z}_{13}$	Problema 4.53.
14	2	$\mathbb{Z}_{14}$, D_7	Problema 4.75., 5.17.
15	1	$\mathbb{Z}_{15}$	Problema 5.23.

§6. Inel. Subinel. Exemple. Calcule în inele. Caracteristica unui inel. Elemente inversabile. Divizori ai lui zero. Elemente idempotente. Elemente nilpotente. Produse directe de inele.

6.1. Se observă că a defini o operație de înmulțire „$*$" distributivă față de adunare revine la a defini $1*1$. Într-adevăr, avem de exemplu $n*m=\underbrace{(1+...+1)}_{de\ n\ ori}*\underbrace{(1+...+1)}_{de\ m\ ori}=\underbrace{1*1+...+1*1}_{de\ nm\ ori}=(nm)(1*1)$, pentru $n, m\geq 0$. Pe de altă parte, este clar pentru fiecare $k\in\mathbb{Z}$, că operația definită prin $n*m=(nm)\cdot k$ înzestrează pe $\mathbb{Z}$ împreună cu adunarea cu o structură de inel. Prin verificarea axiomelor se deduce imediat că doar pentru $k=1$ şi $k=-1$ obținem structuri de inele unitare pe $\mathbb{Z}$.

6.2. Asociativitatea este imediată:

$(x*y)*z=x*(y*z)=x+y+z-xy-xz-yz+xyz$, oricare ar fi $x, y, z\in A$ (în baza asociativității operațiilor inelului A).

Elementul neutru al legii $*$ este 0.

Dacă $y\in A$ este inversul lui $1-x$ în inelul A, atunci $1-y$ este inversul lui x față de legea $*$.

6.3. (i). Observăm că putem scrie $(f*g)(n)=\sum_{d_1d_2=n} f(d_1)g(d_2)$.

Folosind această scriere, dacă $f, g, h\in A$ vom avea $[(f*g)*h](n)=$

$$=\sum_{dd_3=n}(f*g)(d)h(d_3)=\sum_{dd_3=n}\left(\sum_{d_1d_2=d}f(d_1)g(d_2)\right)h(d_3)=\sum_{d_1d_2d_3=n}f(d_1)g(d_2)h(d_3).$$

Analog rezultă $[f*(g*h)](n)=\sum_{d_1d_2d_3=n} f(d_1)g(d_2)h(d_3)$, deci $(f*g)*h=f*(g*h)$ adică operația $*$ este asociativă. De asemenea, avem $(f*g)(n)=\sum_{d_1d_2=n} f(d_1)g(d_2)=(g*f)(n)$, adică $f*g=g*f$, ceea ce înseamnă că operația $*$ este comutativă.

Notând cu e funcția aritmetică definită prin $e(n)=\begin{cases}1, & daca\ n=1\\ 0, & daca\ n\geq 2\end{cases}$ se observă că pentru orice $f\in A$ avem $(f*e)(n)=\sum_{d_1d_2=n} f(d_1)e(d_2)=f(n)\cdot e(1)=f(n)$.

Prin urmare, $f*e=e*f=f$, oricare ar fi $f\in A$, ceea ce înseamnă că e este element neutru față de operația $*$. Aşadar, $(A, *)$ este un monoid comutativ.

(ii). „$\Rightarrow$''. Dacă $f\in U(A)$ există $\widetilde{f}\in U(A)$ astfel încât $f*\widetilde{f}=\widetilde{f}*f=e$. În particular, $(f*\widetilde{f})(1)=e(1)$, adică $f(1)\cdot\widetilde{f}(1)=1$, deci $f(1)\neq 0$.

„$\Leftarrow$" Reciproc, să presupunem că $f(1)\neq 0$ şi să arătăm că $f\in U(A)$. Definim funcția $\widetilde{f}:\mathbb{N}^*\to\mathbb{C}$ recursiv în felul următor:

$$\widetilde{f}(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(1)}, & daca\ \ n=1\\ -\dfrac{1}{f(1)}\displaystyle\sum_{\substack{d|n\\ d>1}} f(d)\widetilde{f}\left(\frac{n}{d}\right), & daca\ \ n\geq 2\end{cases}.$$

Avem $(f*\widetilde{f})(1)=f(1)\widetilde{f}(1)=f(1)\cdot\dfrac{1}{f(1)}=1=e(1)$, iar pentru $n\geq 2$

$$(f*\widetilde{f})(n)=\sum_{d|n} f(d)\widetilde{f}\left(\frac{n}{d}\right)=f(1)\widetilde{f}(n)+\sum_{\substack{d|n\\ d>1}} f(d)\widetilde{f}\left(\frac{n}{d}\right)=f(1)\widetilde{f}(n)-f(1)\widetilde{f}(n)=$$

$$=0=e(n)$$

Prin urmare, $f*\widetilde{f}=\widetilde{f}*f=e$, deci $f\in U(A)$ şi inversul lui f este $\widetilde{f}$.

(iii). Mai întâi observăm că pentru orice $f\in M$ avem $f(1)=1$. Într-adevăr, există $k\in\mathbb{N}^*$ cu $f(k)\neq 0$ şi cum $(1, k)=1$ putem scrie $f(k)=f(1\cdot k)=f(1)\cdot f(k)$ de unde prin simplificare cu $f(k)$ se obține $f(1)=1$. Ținând seama de această observație şi punctul (ii) deducem că $M\subseteq U(A)$. Pentru a dovedi că M este un subgrup al lui U(A) vom arăta că :

1) oricare ar fi $f, g\in M\Rightarrow f*g\in M$;

2) oricare ar fi $f\in M\Rightarrow \widetilde{f}\in M$.

Să probăm mai întâi 1). Dacă $f, g\in M$ avem $(f*g)(1)=f(1)\cdot g(1)=1\cdot 1=1$, deci $f*g$ este funcție aritmetică nenulă. Dacă $n, m\in\mathbb{N}^*$ şi $(n, m)=1$ atunci orice divizor al lui nm este de forma d_1d_2, unde $d_1|n$, $d_2|m$ şi în plus, rezultă $(d_1, d_2)=1$, $\left(\dfrac{n}{d_1}, \dfrac{m}{d_2}\right)=1$, astfel că putem scrie:

$$(f*g)(nm)=\sum_{d|nm} f(d)g\left(\frac{nm}{d}\right)=\sum_{\substack{d_1|n\\ d_2|m}} f(d_1d_2)g\left(\frac{nm}{d_1d_2}\right)$$

$$= \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{n}{d_1}\right)g\left(\frac{m}{d_2}\right) = \left(\sum_{d_1|n} f(d_1)g\left(\frac{n}{d_1}\right)\right)\left(\sum_{d_2|m} f(d_2)g\left(\frac{m}{d_2}\right)\right)$$

$$=(f*g)(n)\cdot(f*g)(m).$$

Aşadar, $f*g$ este funcție multiplicativă, deci $f*g\in M$.

Să probăm acum 2). Fie $f\in M$ şi să dovedim că $\widetilde{f}\in M$.

Pentru aceasta, considerăm funcția $g\in A$ definită astfel:

$$g(n)=\begin{cases}1 \ \ daca \ \ n=1\\ \widetilde{f}(p_1^{\alpha_1})\cdot\ldots\cdot\widetilde{f}(p_k^{\alpha_k}), \ \ daca \ \ n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\end{cases}$$

(unde $p_1, \ldots p_k$ sunt numere prime distincte).

Se vede uşor că $g\in M$ căci g este nenulă iar dacă $n, m\in\mathbb{N}^*$, $(n, m)=1$ scriind $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, $m=p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$, (unde $p_1, \ldots p_k, p_{k+1}, \ldots, p_s$ sunt numere prime distincte), rezultă :

$$g(nm)=g\left(\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}\right)=\prod_{i=1}^{s}\widetilde{f}(p_i^{\alpha_i})=\prod_{i=1}^{k}\widetilde{f}(p_i^{\alpha_i})\cdot\prod_{i=k+1}^{s}\widetilde{f}(p_i^{\alpha_i})=g(n)g(m).$$

Deoarece $f, g\in M$, conform cu 1) rezultă $f*g\in M$. Arătăm că $f*g = e$ şi pentru aceasta este suficient să probăm că $(f*g)(p^{\alpha}) = e(p^{\alpha})$ pentru orice p prim şi $\alpha\in\mathbb{N}$ (aceasta deoarece $f*g\in M$, $e\in M$ şi două funcții multiplicative sunt egale dacă şi numai dacă iau valori egale pe toate puterile de numere prime). Într-adevăr, cum divizorii lui p^{α} sunt numerele p^i, $0\le i\le\alpha$, avem $(f*g)(p^{\alpha})=\sum_{i=0}^{\alpha}f(p^i)g(p^{\alpha-i})=\sum_{i=0}^{\alpha}f(p^i)\widetilde{f}(p^{\alpha-i})=(f*\widetilde{f})(p^{\alpha})=e(p^{\alpha})$. Aşadar, $f*g = e$ şi cum inversul lui f este unic rezultă $g=\widetilde{f}$. Dar $g\in M$ şi atunci $\widetilde{f}\in M$, ceea ce încheie (iii).

(iv). Evident, $(A, +)$ este grup abelian în care elementul neutru este funcția nulă. Conform cu (i), $(A, *)$ este monoid comutativ. Dacă mai demonstrăm distributivitatea operației $*$ față de adunare, va rezulta că $(A, +, *)$ este inel comutativ unitar.

Într-adevăr, pentru $f, g, h\in A$ avem pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$:

$$[f*(g+h)](n)=\sum_{d|n}f(d)(g+h)\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)+\sum_{d|n}f(d)h\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$=(f*g)(n)+(f*h)(n)=(f*g+f*h)(n).$$

Aceasta înseamnă că $f*(g+h)=f*g+f*h$, deci $*$ este distributivă la stânga față de +. Operația $*$ fiind comutativă, va fi distributivă şi la dreapta, deci $(A, +, *)$ este inel comutativ unitar.

Mai rămâne să arătăm că inelul $(A, +, *)$ nu are divizori ai lui zero. Fie $f, g\in A$ două funcții nenule; vom proba că şi $f*g$ este nenulă. Să notăm cu n şi m cele mai mici numere naturale nenule cu proprietatea că $f(n)\neq 0$, respectiv $g(m)\neq 0$. Atunci, pentru $d<n$, avem $f(d)=0$ iar pentru $d>n$ avem $\frac{nm}{d} < m$, deci $g\left(\frac{nm}{d}\right) = 0$, astfel că vom putea scrie:

$$(f*g)(nm)= \sum_{d|nm} f(d)g\left(\frac{nm}{d}\right) = \sum_{\substack{d|nm \\ d<n}} 0\cdot g\left(\frac{nm}{d}\right) + f(n)g(m) + \sum_{\substack{d|nm \\ d>n}} f(d)\cdot 0$$

$$=f(n)g(m)\neq 0.$$

Aşadar, funcția $f*g$ este nenulă şi cu aceasta soluția se încheie.

6.4. Demonstrăm că $(A, +, \cdot)$ este un inel unitar şi comutativ fără divizori ai lui zero. Elementul neutru la adunare este matricea $M(0)=O_3$ iar opusa matricei M(a) este matricea M(-a). Elementul neutru la înmulțire este matricea $M(\frac{1}{2})$.

Pentru a demonstra că A este domeniu de integritate fie M(a) şi $M(b)\in A$ cu $M(a), M(b)\neq M(0)$ (adică $a, b\neq 0$).

Atunci $M(a)\cdot M(b)=M(2ab)\neq M(0)$.

6.5. Se verifică cu uşurință axiomele inelului: $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +)$ este grup abelian; elementul neutru este (0, 0) iar inversul lui (x, y) este (–x, -y). $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \cdot)$ este monoid comutativ; elementul unitate este (1, 0). Distributivitatea înmulțirii față de adunare este imediată.

6.6. (i). Dacă $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ şi notăm cu $Tr(A)=a+d$, A verifică ecuația $x^2-(a+d)\cdot x+(ad-bc)\cdot I_2=O_2$. Dacă $Tr(A)=0$, atunci $A^2=(bc-ad)\cdot I_2$ şi deci A^2 comută cu orice matrice din $M_2(\mathbb{C})$. Se verifică uşor că $Tr([A, B])=$ $=Tr(AB-BA)=0$, deci $[A, B]^2$ comută cu orice matrice din $M_2(\mathbb{C})$.

(ii). $([A, B]+[C, D])^2=[A, B]^2+[C, D]^2+[A, B]\cdot[C, D]+[C, D]\cdot[A, B]$.

Cum $[A, B]^2$, $[C, D]^2$ comută cu orice matrice din $M_2(\mathbb{C})$ iar $([A, B]+[C, D])^2$ satisface şi ea aceiaşi proprietate (pentru că $Tr([A, B]+[C, D])=Tr([A, B])+Tr([C, D])=0+0=0$) rezultă că $[A, B]\cdot[C, D]+[C, D]\cdot[A, B]$ comută cu orice matrice din $M_2(\mathbb{C})$.

6.7. (i). Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $a,b,c,d\in\mathbb{Z}_2$ a.î. $X^2+I_2=O_2$. Problema revine la a rezolva sistemul $\begin{cases} a^2+bc+\hat{1}=\hat{0} \\ b(a+d)=\hat{0} \\ c(a+d)=\hat{0} \\ d^2+bc+\hat{1}=\hat{0} \end{cases}$. Dacă $a+d\neq\hat{0}$ atunci obligatoriu $b=c=\hat{0}$ iar $a^2=d^2=\hat{1}$, deci $a=d=\hat{1}$. În acest caz obținem $X_1=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$. Dacă $a+d=\hat{0}$ avem posibilitățile $a=d=\hat{0}$ sau $a=d=\hat{1}$. Pentru $a=d=\hat{0}$ obținem $bc=\hat{1}$, deci $b=c=\hat{1}$ rezultând matricea $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$. Pentru $a=d=\hat{1}$ obținem $bc=\hat{0}$ rezultând matricele $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Soluțiile sunt $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

(ii). Trebuie rezolvat în $\mathbb{Z}_3$ sistemul $\begin{cases} a^2+bc=\hat{1} \\ b(a+d)=\hat{0} \\ c(a+d)=\hat{0} \\ d^2+bc=\hat{1} \end{cases}$. Analog se obțin matricele $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

6.8. Fie $x\in A$ (respectiv $y\in A$) un nondivizor al lui zero la stânga (respectiv la dreapta). Aplicațiile $f_x:A\to A$, $g_y:A\to A$ definite prin $f_x(z)=x\cdot z$ şi $g_y(z)=z\cdot y$ sunt injective. A fiind finit ele sunt chiar bijective. Deci există

elementele $u,v\in A$ a.î. $f_x(u)=x$ şi $g_y(v)=y$. Fie $z\in A$ un element oarecare. Avem $f_x(uz)=xuz=xz=f_x(z)$, $g_y(zv)=g_y(z)$. Din injectivitate rezultă $uz=z=zv$. În particular, pentru $z=u$, v obținem $u=uv=v$ şi evident u este elementul unitate al lui A.

6.9. Fie $A=\{0, 1, a, b, c\}$ şi $(A, +, \cdot)$ inelul dat.Vom demonstra mai întâi că $1+1+1+1+1=0$ şi apoi că $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1\neq 0$. Este evident că oricare ar fi $x, y\in A$ din $1+x\neq 1+y\Rightarrow x\neq y$. Putem deci spune că $\{1+0, 1+1, 1+a, 1+b, 1+c\}=A$ şi atunci $(1+0)+(1+1)+(1+a)+(1+b)+(1+c)=0+1+a+b+c \Leftrightarrow (1+1+1+1+1)+(0+1+a+b+c)=0+1+a+b+c \Leftrightarrow 1+1+1+1+1=0$.

Să mai observăm că oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*$ şi oricare ar fi $x\in A$ avem $\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ k\ ori}+x\neq\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ k-1\ ori}+x$ deoarece dacă am presupune că există $y\in A$ a.î. $\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ k\ ori}+y=\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ k-1\ ori}+y$ ar rezulta $1=0$.

$1+1\neq 0$.

Presupunem deci că $1+1=0$; Atunci $\{1+0, 1+1, 1+a, 1+b, 1+c\}=\{0, 1, a, b, c\}$ de unde rezultă $a=1+b$, $b=1+c$, $c=1+a$ sau $a=1+c$, $b=1+a$, $c=1+b$, de unde ar rezulta că $a+b+c=(1+1+1)+a+b+c \Leftrightarrow 0=1+1+1$ şi cum $1+1=0$, ar rezulta $1=0$, ceea ce este absurd, deci $1+1\neq 0$.

$1+1+1\neq 0$.

Presupunem deci că $1+1+1=0$. Atunci din $\{1+1, 1+1+1, 1+1+a, 1+1+b, 1+1+c\}=\{1, 1+1, 1+a, 1+b, 1+c\}$ şi $1+1+1=0$ rezultă că

$$\{0, 1+1+a, 1+1+b, 1+1+c\}=\{1, 1+a, 1+b, 1+c\}.$$

Dacă $1+a=0$, atunci $1+1+a=1$, $1+1+b=1+c$, $1+1+c=1+b \Rightarrow (1+1+b)+(1+1+c)=(1+c)+(1+b) \Rightarrow 1+1+1+(1+b+c)=1+(1+b+c) \Rightarrow 1+1+1=1 \Rightarrow 1+1=0$, ceea ce este absurd.

Analog dacă am presupune că $1+b=0$ sau $1+c=0$ ar rezulta $1=0$.

Prin urmare, $1+1+1\neq 0$.

$1+1+1+1\neq 0$.

Presupunem că $1+1+1+1=0$. Atunci $\{1+1+1, 1+1+1+1, 1+1+1+a, 1+1+1+b, 1+1+1+c\}=\{1+1, 1+1+1, 1+1+a, 1+1+b, 1+1+c\}$ şi $1+1+1+1=0$ rezultă că $\{0, 1+1+1+a, 1+1+1+b, 1+1+1+c\}=\{1+1, 1+1+a, 1+1+b, 1+1+c\}$.

Deoarece $1+1\neq 0$ rezultă că am putea avea $1+1+a=0$ şi atunci din egalitatea de mulţimi precedentă rezultă că $\{1, 1+1+1+b, 1+1+1+c\}=\{1+1, 1+1+b, 1+1+c\} \Rightarrow 1+1+1+b+c=1+1+b+c \Rightarrow 1=0$, ceea ce este absurd. Analog dacă am presupune $1+1+b=0$ sau $1+1+c=0$ ar rezulta $1=0$.

Prin urmare, $1+1+1+1\neq 0$. Cu aceasta am demonstrat că 5 este cel mai mic $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ n\ ori}=0$.

Să demonstrăm acum că inelul $(A, +, \cdot)$ este comutativ. Avem în vedere că $A=\{0, 1, a, b, c\}=\{0, 1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1\}$.

Dacă $x=0$ sau $y=0$ atunci $xy=yx=0$ iar dacă $x,y\in A^*$, atunci $x=\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ i\ ori}$, $y=\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ j\ ori}$ cu $i, j\in\{1, 2, 3, 4\}$.

Avem $xy=\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ i\ ori}\ \underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ j\ ori}=\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ ij\ ori}$ şi

$yx=\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ j\ ori}\ \underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ i\ ori}=\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ ji\ ori}$ şi deoarece $ij=ji$ rezultă $xy=yx$. Prin urmare, oricare ar fi $x, y\in A$ avem $xy=yx$, adică inelul $(A, +, \cdot)$ este comutativ.

6.10. (i). $(x+1)^2=x^2+x+x+1=x^2+x(1+1)+1=x^2+1$;

$(x+1)^3=(x+1)^2(x+1)=(x^2+1)(x+1)=x^3+x^2+x+1$;

$(x+1)^4=(x^2+1)^2=x^4+x^2+x^2+1=x^4+x^2(1+1)+1=x^4+1$;

$(x+1)^5=(x+1)^3(x+1)^2=(x^3+x^2+x+1)(x^2+1)=x^5+x^4+x^3+x^2+x^3+x^2+x+1$

$=x^5+x^4+x+1$.

(ii). Avem $x^{n+1}=x^n$, oricare ar fi $x\in A \Rightarrow (-1)^{n+1}=(-1)^n \Rightarrow 1=-1\Rightarrow 1+1=0$. Vom demonstra prin inducţie că oricare ar fi $k\in\mathbb{N}$ avem $x^{n+k}=x^n$, pentru orice $x\in A$. Într-adevăr, pentru $k=0$ rezultă $x^n=x^n$, oricare $x\in A$, ceea ce este evident. Pentru $k=1$ avem conform proprietăţii din enunţ $x^{n+1}=x^n$, oricare ar fi $x\in A$. Presupunem deci că $x^{n+k}=x^n$, oricare ar fi $k\leq m$ şi oricare ar fi $x\in A$ şi să demonstrăm $x^{n+m+1}=x^n$ pentru orice $x\in A$. Într-adevăr, $x^{n+m+1}=x\cdot x^{n+m}=$ $=x\cdot x^n=x^{n+1}=x^n$, pentru orice $x\in A$ şi deci afirmaţia este demonstrată.

Din $1+1=0$ deducem $x^n+x^n=0$, oricare ar fi $x\in A$ şi deoarece $x^{n+1}=x^n$ pentru orice $x\in A$ rezultă că $x^{n+1}+x^n=0$, oricare ar fi $x\in A \Rightarrow x^n(x+1)=0$, pentru

orice $x\in A$ iar de aici înlocuind pe x cu x+1 deducem $0=(x+1)^n(x+1+1)=(x+1)^n\cdot x$, oricare ar fi $x\in A$.

În ultima egalitate dezvoltăm după formula binomului lui Newton şi obţinem $0=\left(x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+...+C_n^{n-1}x+1\right)x$, oricare ar fi $x\in A$. De aici prin înmulţire cu x^{n-2}, după ce ţinem cont că $x^{n+k}=x^n$, pentru orice $x\in A$ şi orice $k\in\mathbb{N}$, deducem $0=(2^n-1)\cdot x^n+x^{n-1}=-x^n+x^{n-1}\Rightarrow x^{n-1}=x^n$, pentru orice $x\in A$.

Prin acelaşi procedeu ca mai sus deducem $x^{n-1}=x^{n-2}$, pentru orice $x\in A$, ş.a.m.d. obţinem $x^2=x$, pentru orice $x\in A$.

6.11. (i). Din $1+1=0$, înmulţind cu $x\in A$ obţinem $x+x=0$ sau $x=-x$. Relaţia $xy=yx$ este echivalentă deci cu $xy+yx=0$ sau $(x+y)^2=x^2+y^2$. Dar $(x+y)^2$ şi x^2+y^2 nu pot fi decât 0 sau 1. Presupunem prin reducere la absurd că $(x+y)^2\neq x^2+y^2$ deci unul dintre termeni ar fi 1 iar celălalt ar fi 0.

Dacă $(x+y)^2=1$ şi $x^2+y^2=0$ rezultă că $xy+yx=1$.

Dacă $(x+y)^2=0$ şi $x^2+y^2=1$ rezultă că $xy+yx=1$.

În concluzie, dacă presupunem că $(x+y)^2\neq x^2+y^2$ atunci este necesar ca: (1) $xy+yx=1$. Înmulţind această relaţie cu x la stânga şi cu y la dreapta obţinem că: (2) $x^2y^2+(xy)^2=xy$.

Din (2) deducem că $xy=0$ sau $xy=1$.

Să presupunem că $xy=0$.

Din (1) rezultă $yx=1\Rightarrow y(yx)x=yx\Rightarrow y^2x^2=yx=1\Rightarrow y^2=1$ şi $x^2=1$ (dacă $x^2=0$ sau $y^2=0\Rightarrow y^2x^2=0$), de unde rezultă $x^2y^2=1$.

Dar din (2) rezultă $x^2y^2=0$, contradicţie.

Să presupunem că $xy=1\Rightarrow x(xy)y=xy=1\Rightarrow x^2y^2=1$.

Dar din (2) rezultă că $x^2y^2=0$, contradicţie.

În concluzie, deducem că $(x+y)^2=x^2+y^2$, oricare ar fi $x, y\in A$, ceea ce este echivalent cu proprietatea că inelul A este comutativ.

(ii). Considerăm $A=\left\{\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{1}\\ \hat{1}&\hat{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{1}\\ \hat{1}&\hat{1}\end{pmatrix}\right\}\subset M_2(\mathbb{Z}_2)$. Se demonstrează uşor că adunarea şi înmulţirea matricelor din A determină pe mulţimea A o structură de inel comutativ în care au loc proprietăţile din enunţ.

6.12. (i). Fie $x=ba \Rightarrow x^2=(ba)(ba)=b(ab)a=0 \Rightarrow x=0$ deci $ba=0$. Pentru $x\in A$ arbitrar, notând $y=axb$ avem $y^2=(axb)(axb)=(ax)(ba)(xb)=0 \Rightarrow y=0$ deci $axb=0$.

(ii). Fie $x=a_2a_3a_1 \Rightarrow x^2=(a_2a_3a_1)(a_2a_3a_1)=(a_2a_3)(a_1a_2a_3)a_1=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow a_2a_3a_1=0$. Atunci din $a_2(a_3a_1)=0$ rezultă şi $(a_3a_1)a_2=0$, adică $a_3a_1a_2=0$.

(iii). Fie $y=a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_n}$. Avem $y^n=\underbrace{\left(a_{i_1}...a_{i_n}\right)..\left(a_{i_1}...a_{i_n}\right)}_{de\ n\ ori}$. În prima paranteză la un moment dat apare a_1. Să presupunem că $a_{i_k}=a_1$; în a doua paranteză apare a_2. Să presupunem că $a_{i_l}=a_2$; în a treia paranteză apare a_3; să presupunem că $a_{i_m}=a_3$ ş.a.m.d. (unde $k\neq l\neq m,\ldots$).

Deci

$$y^n=\left(a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_{k-1}}a_1a_{i_{k+1}}...a_{i_n}\right)\left(a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_{l-1}}a_2a_{i_{l+1}}...a_{i_n}\right)..\left(a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_{m-1}}a_3a_{i_{m+1}}...a_{i_n}\right).. \quad (1).$$

Avem $a_1a_2\ldots a_n=0$. Luând $a=a_1$, $b=a_2\ldots a_n$ şi $x=a_{i_{k+1}}...a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_{l-1}}$ avem $ab=0$ deci $axb=0$ adică $a_1a_{i_{k+1}}...a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_{l-1}}a_2a_3...a_n=0$ (2).

Luăm acum $a=a_1a_{i_{k+1}}...a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_{l-1}}a_2$, $b=a_3a_4...a_n$ $x=a_{i_{l+1}}...a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_{m-1}}$.

Din (2) avem $ab=0$, deci $axb=0$ adică

$$a_1a_{i_{k+1}}...a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_{l-1}}a_2a_{i_{l+1}}...a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_{m-1}}a_3a_4...a_n=0.$$

Continuând raționamentul obținem din aproape în aproape întregul produs din membrul din dreapta al relației (1) egal cu 0. Deci $y^n=0$, de unde rezultă $y=0$, adică $a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_n}=0$.

6.13. (i). Fie $a\in M$ şi $x\in A$. Atunci

$(axa-ax)^2=(axa-ax)(axa-ax)=axaxa-axax-axaxa+axax=0$ şi

$(axa-xa)^2=(axa-xa)(axa-xa)=axaxa-axaxa-xaxa+xaxa=0$, de unde rezultă că $axa=ax=xa$, deci a comută cu orice element al lui A. Dacă $a, b\in M$, cum $ab=ba$ obținem:

$(a+b-2ab)^2=a^2+b^2+4a^2b^2+2ab-4a^2b-4ab^2=a+b+4ab+2ab-4ab-4ab=a+b-2ab$,

deci $a+b-2ab\in M$.

(ii). Pe A introducem legea $*$ definită astfel: $x*y=x+y-2xy$. Din punctul (i) rezultă că M este parte stabilă a lui A în raport cu $*$. Se verifică uşor că $*$ este asociativă. Cum $0\in M$, $a*0=0*a=a$ şi $a*a=a+a-2a=0$ pentru orice $a\in M$, rezultă că $(M, *)$ este un grup în care orice element diferit de 0 are ordinul 2. Cum M este mulțime finită, din teorema lui Cauchy pentru grupuri finite rezultă că numărul elementelor sale este o putere naturală a lui 2.

6.14. Fie u inversul elementului 1-ab. Vom demonstra că elementul v=1+bua este inversul lui 1-ba. Într-adevăr,

v(1-ba)=(1+bua)(1-ba)=1-ba+bua-buaba (1)

Dar u(1-ab)=1, deci uab=u-1. Continuând în (1) rezultă:

v(1-ba)=1-ba+bua-b(u-1)a=1-ba+bua-bua+ba=1.

Arătăm că (1-ba)v=1.

(1-ba)v=(1-ba)(1+bua)=1+bua-ba-b(abu)a=1+bua-ba-b(u-1)a=

=1+bua-ba-bua+ba=1 (am folosit faptul că (1-ab)u=1, adică u-abu=1 sau abu=u-1).

Deci 1-ba este inversabil, inversul acestui element fiind v.

6.15. Avem $1=1-(aba)^n=(1-aba)(1+aba+\ldots+(aba)^{n-1})$, deci 1-aba este inversabil. Notăm cu $c=(1-aba)^{-1}$, deci (1-aba)c=c(1-aba)=1. Atunci:
$(1-a^2b)(1+acab)=1-a^2b+acab-a^2bacab=1-a^2b+a[(1-aba)c]ab=1-a^2b+a^2b=1$ şi
$(1+acab)(1-a^2b)=1-a^2b+acab-acaba^2b=1-a^2b+a[c(1-aba)]ab=1-a^2b+a^2b=1$, deci $1-a^2b$ este inversabil. Analog se arată că: $(1-ba^2)(1+baca)=(1+baca)(1-ba^2)=1$, de unde $1-ba^2$ este inversabil.

6.16. Dacă x are proprietatea (P) atunci există x^{-1}, pentru că $b=ax-x^2=x(a-x)$ şi cum b este inversabil şi b^{-1} comută cu x, avem:

$1=x(ab^{-1}-xb^{-1})=(ab^{-1}-xb^{-1})x$, deci $x^{-1}=ab^{-1}-xb^{-1}$.

(i). Dacă $A=M_2(\mathbb{C})$ şi matricea X are proprietatea (P), atunci X fiind inversabilă este nesingulară. Reciproc, dacă X este nesingulară şi $X^2-(Tr(X))\cdot X+(det(X))\cdot I_2=O_2$ rezultă că există matricele $(Tr(X))\cdot I_2$ şi $(det(X))\cdot I_2$ care comută cu X şi $(det(X))\cdot I_2$ este inversabilă.

(ii). Fie $x\in A$ cu proprietatea (P), deci există a, $b\in A$ care comută cu x, b inversabil, a.î. $a=x-bx^{-1}$. Se demonstrează prin inducție după puterile lui x că dacă există a_k, $b_k\in A$ ce comută cu x^k, b_k inversabil şi $a_k=x^k-b_k\,x^{-k}$, atunci x^{k+1} are aceeaşi proprietate.

6.17. Cum b şi ab-1 sunt inversabile, rezultă că putem vorbi de elementul $b(ab-1)^{-1}$ care este element inversabil, fiind produsul a două elemente inversabile.

Observăm că $(a-b^{-1})[b(ab-1)^{-1}]=[(a-b^{-1})b](ab-1)^{-1}=(ab-1)(ab-1)^{-1}=1$ şi cum $b(ab-1)^{-1}$ este element inversabil, rezultă că $a-b^{-1}$ este tocmai inversul acestui element. Atunci şi $a-b^{-1}$ este inversabil şi $(a-b^{-1})^{-1}=b(ab-1)^{-1}$.

Calculăm produsul:

$[(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}](aba-a)=[b(ab-1)^{-1}-a^{-1}]\cdot(ab-1)a=b(ab-1)^{-1}(ab-1)a-a^{-1}(ab-1)a=$
$=ba-a^{-1}aba+a^{-1}a=1.$
Analog $(aba-a)[(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}]=(aba-a)[b(ab-1)^{-1}-a^{-1}]=(aba-a)b(ab-1)^{-1}-(aba-a)a^{-1}=$
$=(abab-ab)(ab-1)^{-1}-ab+1=ab(ab-1)(ab-1)^{-1}-ab+1=ab-ab+1=1.$

Din aceste egalități rezultă că $(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}$ este un element inversabil şi inversul său este aba-a.

6.18. (i)⇒(ii). Presupunem prin reducere la absurd că a este inversabil şi fie a^{-1} inversul său. Dacă $a\cdot x=1$, atunci $x=1\cdot x=(a^{-1}\cdot a)\cdot x=a^{-1}\cdot(a\cdot x)=a^{-1}$, de unde rezultă $card\{x\in A|a\cdot x=1\}=1$, contradicție.

(ii)⇒(iii). Cum a nu este inversabil avem $b\cdot a\neq 1$. Fie $c=b\cdot a-1\neq 0$.

Calculăm $a\cdot c=a(ba-1)=(ab)a-a=1\cdot a-a=a-a=0$.

(iii)⇒(i). Cum $c\neq 0 \Rightarrow c+b\neq b$. Dar $a(c+b)=ac+ab=0+1=1$. Deci mulțimea $\{x\in A|\ a\cdot x=1\}$ conține cel puțin elementele b şi c+b, adică $card\{x\in A|\ a\cdot x=1\}>1$.

6.19. Presupunem că $X\neq Ø$ şi fie $b\in X$. Dacă $x\in X$, atunci $a(1+b-xa)=a+ab-(ax)a=a+a\cdot b-1\cdot a=a+ab-a=ab=1$ (căci $b\in X$, adică $ab=1$), deci $1+b-xa\in X$.

Putem astfel defini funcția $f:X\to X$, $f(x)=1+b-xa$, oricare ar fi $x\in X$. Arătăm că f este funcție injectivă dar nu şi surjectivă, de unde va rezulta că mulțimea X este infinită. Pentru injectivitate, dacă $f(x_1)=f(x_2)$ atunci $1+b-x_1a=1+b-x_2a \Rightarrow x_1a=x_2a$.

Avem $x_1=x_1\cdot 1=x_1\cdot(ab)=(x_1a)b=(x_2a)b=x_2\cdot(ab)=x_2\cdot 1=x_2$, deci f este funcție injectivă. Demonstrăm că f nu este surjectivă şi anume că nu există $x\in X$ a.î. $f(x)=b$, căci din $1+b-xa=b$ se deduce $xa=1$ şi atunci din $xa=1=ax$ ar rezulta că a este element inversabil, contradicție.

6.20. Dacă $x\in A\setminus(D\cup\{0\})$ şi $d\in D$ atunci $xd\in D$ căci $xd\neq 0$ şi întrucât există $y\in A\setminus\{0\}$ cu $dy=0$, avem şi $(xd)y=x(dy)=x\cdot 0=0$.

Prin urmare funcția $d\in D\to xd$ este cu valori în D. Notând f_x această funcție ea va fi injectivă (căci $f_x(d_1)=f_x(d_2)$ înseamnă $x(d_1-d_2)=0$, deci $d_1=d_2$), deci bijectivă. Dacă $x,y\in A\setminus(D\cup\{0\})$ şi $f_x=f_y$, atunci $x-y\in D\setminus\{0\}$, prin urmare există un număr finit de elemente în $A\setminus(D\cup\{0\})$ pentru care $f_x=f_y$.

Cum şi numărul bijecţiilor de la D în D este finit rezultă că $A\setminus(D\cup\{0\})$ este o mulţime finită, aşadar inelul A este finit.

Dacă $x\in A\setminus(D\cup\{0\})$ funcţia $g_x:A\to A$, $g_x(y)=xy$ este injectivă, deci surjectivă, aşadar orice element din $A\setminus(D\cup\{0\})$ este inversabil.

Să presupunem acum că $s=d_1+d_2+\ldots+d_n\notin D\cup\{0\}$.

Atunci $1=s^{-1}(d_1+d_2+\ldots+d_n)=f_{s^{-1}}(d_1)+\ldots+f_{s^{-1}}(d_n)=d_1+d_2+\ldots+d_n=s$ şi demonstraţia este încheiată.

6.21. Dacă $D=\emptyset$ atunci $G=\{0\}$ este grup abelian. Presupunem $D\neq\emptyset$. Fie $a, b\in G\Rightarrow 2a=0$, $2b=0\Rightarrow 2(a+b)=0\Rightarrow a+b\in G$, deci G este parte stabilă a lui A faţă de operaţia de adunare, rezultă deci că „+” este asociativă şi comutativă pe mulţimea G şi deoarece $0\in G$ rezultă că (G, +) este monoid comutativ. Dacă $a\in G\Rightarrow 2a=0\Rightarrow 2(-a)=0\Rightarrow -a\in G$, deci orice element din G are opus în G, adică (G, +) este grup abelian.

6.22. „$\Rightarrow$”**.** Numărul elementelor inversabile din inelul $\mathbb{Z}_n$ este $\varphi(n)$, unde φ este indicatorul lui Euler. Prin urmare ipoteza este echivalentă cu $\varphi(n)=\frac{n}{2}$, adică (1): $n=2\varphi(n)$. Fie $n=p_1^{u_1}\ldots p_k^{u_k}$ descompunerea în factori primi a numărului natural n, unde $p_1<p_2<\ldots<p_k$ sunt numere prime iar $u_1, u_2,\ldots, u_k$ sunt numere naturale nenule. Se ştie atunci că $\varphi(n)=p_1^{u_1-1}\ldots p_k^{u_k-1}(p_1-1)\ldots(p_k-1)$ şi deci egalitatea (1) devine:

$$p_1p_2\ldots p_k=2(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_k-1). \quad (2)$$

Din (2) avem că 2 divide produsul $p_1p_2\ldots p_k$ deci în mod necesar vom avea $p_1=2$. Dacă presupunem $k>1$, egalitatea (2) devine:

$$p_2p_3\ldots p_k=(p_2-1)(p_3-1)\ldots(p_k-1). \quad (3)$$

Dar (3) este imposibilă, deoarece membrul stâng este evident mai mare decât cel drept. Prin urmare $k=1$ şi $p_1=2$, ceea ce înseamnă că $n=2^{u_1}$.

„$\Leftarrow$”**.** Dacă $n=2^k$, atunci elementele inversabile din inelul $\mathbb{Z}_{2^k}$ sunt clasele $\hat{a}$ cu proprietatea $(a, 2^k)=1$, adică clasele impare, iar clasele neinversabile sunt cele pare. Prin urmare, există 2^{k-1} elemente inversabile şi tot 2^{k-1} elemente neinversabile.

6.23. (i). Fie $f, g\in A$. Se ştie că suma lui f cu g este funcţia $f+g:[0, 1]\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, oricare ar fi $x\in[0, 1]$ iar produsul lui f cu g este funcţia $fg:[0, 1]\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, oricare ar fi $x\in[0, 1]$. Cum suma

şi produsul a două funcţii continue sunt funcţii continue, rezultă că operaţiile de adunare şi înmulţire a funcţiilor sunt operaţii algebrice pe A.

Evident, ele verifică axiomele inelului comutativ. Elementul zero al acestui inel este funcţia $0:[0, 1]\to\mathbb{R}$, $0(x)=0$, oricare ar fi $x\in[0,1]$ iar elemenul unitate este funcţia $1:[0,1]\to\mathbb{R}$, $1(x)=1$, oricare ar fi $x\in[0, 1]$.

(ii). „$\Leftarrow$". Fie $f\in A$, $f\neq 0$ şi $I=(a, b)$ cu $a<b$ un interval inclus în intervalul $[0, 1]$ a.î. $f(x)=0$, oricare ar fi $x\in I$. Funcţia $g:[0, 1]\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}(x-a)(x-b), & pentru\ \ x\in I\\ 0, & pentru\ \ x\in[0,1]-I\end{cases}$$

este continuă, $g\neq 0$ şi $fg=0$, deci f este divizor al lui zero.

„$\Rightarrow$". Fie $f\in A$, $f\neq 0$, divizor al lui zero. Există atunci $g\in A$, $g\neq 0$ a.î. $f\cdot g=0$. Cum $g\neq 0$, există $x_0\in[0, 1]$ a.î. $g(x_0)\neq 0$. Însă g este continuă, deci există un interval $I\subset[0, 1]$ a.î. $x_0\in I$ şi $g(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in I$. Cum $0=0(x)=(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)$, oricare ar fi $x\in I$ rezultă că $f(x)=0$, oricare ar fi $x\in I$.

(iii). Demonstrăm că singurele funcţii care verifică $f^2=f$ sunt 1 şi 0. Evident dacă $f=0$ sau $f=1$ atunci $f^2=f$. Reciproc, dacă $f^2=f$, atunci $[f(x)]^2=f(x)$, oricare ar fi $x\in[0, 1]$, deci $f(x)[f(x)-1]=0\Rightarrow f(x)=0$ sau $f(x)=1$ pentru $x\in[0, 1]$. Cum o funcţie continuă are proprietatea lui Darboux, rezultă $f=0$ sau $f=1$.

(iv). Evident $f\in A$ este element inversabil al inelului A dacă şi numai dacă $f(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in[0, 1]$.

6.24. (i). Fie $x_1, x_2\in Z(A)$. Atunci pentru orice $y\in A$ putem scrie

$(x_1-x_2)y=x_1y-x_2y=yx_1-yx_2=y(x_1-x_2)$, deci $x_1-x_2\in Z(A)$.

De asemenea, $(x_1x_2)y=x_1(x_2y)=x_1(yx_2)=(x_1y)x_2=(yx_1)x_2=y(x_1x_2)$ deci $x_1x_2\in Z(A)$. Rezultă că $Z(A)$ este subinel al lui A. El este evident şi comutativ.

Să observăm că dacă A este inel unitar, atunci $Z(A)$ este un subinel unitar, căci 1 comută cu toate elementele inelului, deci $1\in Z(A)$.

(ii). Vom arăta că orice element al inelului aparţine centrului, deci $A=Z(A)$ şi inelul va fi comutativ.

Fie $x\in A$ fixat. Pentru $y\in A$ oarecare avem :

$(x+y)^2-(x+y)=x^2+y^2+xy+yx-x-y=(x^2-x)+(y^2-y)+(xy+yx)$, de unde

$xy+yx=[(x+y)^2-(x+y)]-(x^2-x)-(y^2-y)\in Z(A)$ (unde am ținut seama că fiecare din elementele $[(x+y)^2-(x+y)]$, (x^2-x), $(y^2-y)\in Z(A)$).

Deoarece $xy+yx\in Z(A)$ avem că $x(xy+yx)=(xy+yx)x$, adică $x^2y+xyx=xyx+yx^2$ sau $x^2y=yx^2$. Cum $y\in A$ este arbitrar, ultima egalitate arată că $x^2\in Z(A)$. Deoarece $x^2-x\in Z(A)$, rezultă că $x=x^2-(x^2-x)\in Z(A)$. Deci $A=Z(A)$, adică A este comutativ.

6.25. (i). Avem $f(x,y)=(xy)^2-x^2y^2=xyxy-xxyy=x(yx-xy)y$.

Înlocuind pe x cu 1+x obținem:

$$f(1+x,y)=(1+x)[y(1+x)-(1+x)y]y=(1+x)(yx-xy)y.$$

Analog obținem $f(x, 1+y)=x(yx-xy)(1+y)$

$$f(1+x, 1+y)=(1+x)(yx-xy)(1+y).$$

Din cele de mai sus rezultă:

$f(1+x, 1+y)-f(1+x, y)=(1+x)(yx-xy)(1+y)-(1+x)(yx-xy)y=(1+x)(yx-xy)$ (1)

şi analog

$$-f(x, 1+y)+f(x, y)=-x(yx-xy)(1+y)+x(yx-xy)y=-x(yx-xy). \quad (2)$$

Adunând (1) cu (2) rezultă:

$$E(x,y)=(1+x)(yx-xy)-x(yx-xy)=yx-xy.$$

(ii) Ipoteza $(xy)^2-(yx)^2=x^2y^2-y^2x^2$ este echivalentă cu $(xy)^2-x^2y^2=$ $=(yx)^2-y^2x^2$, adică $f(x,y)=f(y,x)$, oricare ar fi $x,y\in A$. Atunci folosind şi definiția lui E(x,y) avem: $E(x,y)-E(y,x)=f(1+x,1+y)-f(1+x,y)-f(x,1+y)+f(x,y)-$ $-f(1+y,1+x)+f(1+y,x)+f(y,1+x)-f(y,x)=0$.

Aşadar, $E(x, y)=E(y, x)$ (3).

Pe de altă parte, folosind rezultatul de la (i) avem

$$E(x,y)=yx-xy=-(xy-yx)=-E(y, x), \text{ adică } E(y, x)=-E(x, y). \quad (4)$$

Din (3) şi (4) rezultă $E(x, y)=-E(x, y)$ adică $E(x, y)+E(x, y)=0$ şi folosind prima ipoteză de la (ii) rezultă $E(x, y)=0$. Aşadar, $yx-xy=0 \Leftrightarrow yx=xy$ oricare ar fi $x, y\in A$, deci inelul A este comutativ.

6.26. Fie A un inel unitar cu pq elemente.

Considerăm mulțimea $Z(A)=\{x\in A \mid xy=yx, \text{ oricare ar fi } y\in A\}$. Se ştie că Z(A) este un subinel unitar şi comutativ al lui A. În particular, Z(A) este subgrup aditiv al lui A şi conform teoremei lui Lagrange, $|Z(A)|$ divide pq. Cum $0, 1\in Z(A)$, avem $|Z(A)|\geq 2$, deci $|Z(A)|\in\{p, q, pq\}$.

Cazul 1. Dacă $|Z(A)|=pq$, rezultă $Z(A)=A$, deci A este inel comutativ.

Cazul 2. Dacă $|Z(A)|=p$

Alegem un element $\alpha\in A\setminus Z(A)$ şi considerăm mulţimea

$$B=\{a_0+a_1\alpha+\ldots+a_n\alpha^n \mid n\in\mathbb{N},\ a_i\in Z(A)\}.$$

Demonstrăm că B este un subinel unitar comutativ al lui A care include strict pe Z(A). Într-adevăr, se observă că diferenţa a două elemente din B este de asemenea în B, iar pentru a arăta că produsul a două elemente din B este de asemenea în B este suficient să considerăm două monoame de forma $a_i\alpha^i$ şi $a_j\alpha^j$, unde $i, j\in\mathbb{N}$ iar $a_i, a_j\in Z(A)$.

Ţinând seama că a_i şi a_j sunt în centrul lui A, putem scrie

$(a_i\alpha^i)(a_j\alpha^j)=a_i\alpha^i\, a_j\alpha^j=a_i\alpha^i\alpha^j a_j=a_i\alpha^{i+j}a_j=(a_ia_j)\alpha^{i+j}\in B$.

Deci B este un subinel al lui A.

Mai mult, putem arăta la fel că $(a_j\alpha^j)(a_i\alpha^i)=(a_ia_j)\alpha^{i+j}$, deci $(a_i\alpha^i)(a_j\alpha^j)=(a_j\alpha^j)(a_i\alpha^i)$, de unde ţinând seama de distributivitatea înmulţirii faţă de adunare, deducem că B este şi comutativ. Este clar că elementele lui Z(A) aparţin şi lui B, iar $\alpha\in A\setminus Z(A)$, deci inelul B include strict pe Z(A). Conform teoremei lui Lagrange, |B| va fi un divizor al lui pq şi în acelaşi timp un multiplu de p, mai mare decât p, adică în mod necesar, $|B|=pq$. Aceasta înseamnă că $B=A$, deci A este comutativ, contradicţie cu presupunerea că centrul lui A are doar p elemente. Aşadar acest caz este imposibil.

Cazul 3. $|Z(A)|=q$. Se tratează analog cu cazul precedent, obţinându-se că este un caz imposibil.

6.27. Luând $k=\max\{m,n\}$ rezultă că $x^ky=0=(x+1)^ky$.

Fie $l=\min\{s\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \mid x^sy=0=(x+1)^sy\}$. Dacă $l\geq 2$ obţinem:

$$\begin{cases} x^l y=0 \\ (x+1)^l y=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (x+1)^{l-1}x^l y=0 \\ x^{l-1}(x+1)^l y=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (x+1)^{l-1}((x+1)-1)^l y=0 \\ x^{l-1}(x+1)^l y=0 \end{cases}(*).$$

Dezvoltând după formula binomului lui Newton pe $[(x+1)-1]^l$, $(x+1)^l$ şi folosind faptul că $x^ly=0=(x+1)^ly$, obţinem din $(*)$ relaţiile $x^{l-1}y=0=(x+1)^{l-1}y$, cu $l-1\geq 1$. Dar aceasta contrazice minimalitatea lui l. Deci $l=1$, adică $xy=0=(x+1)y$. Deducem de aici prin scădere că $y=(x+1)y-xy=0-0=0$.

6.28. Conform ipotezei avem succesiv:

$x^{n+1}y^{n+1}=(xy)^{n+1}=(xy)^n(xy)=x^ny^nxy$, de unde (1) $x^n(xy^n-y^nx)y=0$, pentru orice $x, y\in A$.

Luând în (1) x+1 în loc de x şi observând că $(x+1)y^n-y^n(x+1)=xy^n-y^nx$, deducem de mai sus: (2) $(x+1)^n(xy^n-y^nx)y=0$, pentru orice x, y∈A.

Din (1) şi (2) rezultă conform problemei **6.27.**: (3) $(xy^n-y^nx)y=0$, pentru orice x, y∈A.

În particular, luând x^n în loc de x, rezultă din (3) că: (4) $(x^ny^n-y^nx^n)y=0$, pentru orice x, y∈A. Folosind acum ipoteza găsim în (4) că:

$0=(x^ny^n-y^nx^n)y=((xy)^n-(yx)^n)y=(xy)^ny-y(xy)^n$, adică $y(xy)^n=(xy)^ny$. Egalitatea $(yx)^ny=y(xy)^n$ folosită mai sus se poate verifica uşor prin inducție după n≥1 (ea este practic evidentă conform asociativității înmulțirii).

6.29. Conform primei părți a problemei **6.28.** obținem din relația (3) de acolo:

(5) $(xy^n-y^nx)y=0$

(6) $(xy^{n+1}-y^{n+1}x)y=0$.

Deducem de aici:

(7) $(xy-yx)y^{n+1}=(xy^{n+1}-y^{n+1}x)y-y(xy^n-y^nx)y=0-y\cdot 0=0-0=0$, pentru orice x, y∈A (prima egalitate din şirul de egalități precedente se verifică prin calcul direct).

Luând în (7) y+1 în loc de y obținem şi:

(8) $(xy-yx)(y+1)^{n+1}=0$, pentru orice x, y∈A (am folosit aici din nou egalitatea evidentă $x(y+1)-(y+1)x=xy-yx$).

Din (7) şi (8) deducem conform problemei **6.27.** că xy-yx=0, adică A este comutativ (am folosit de fapt aici „simetrica" problemei **6.27.** care afirmă că din $xy^n=0=x(y+1)^m$ rezultă x=0. Aceasta se demonstrează analog cu soluția problemei **6.27.**).

6.30. Fie α∈Z(A). Atunci conform condiției 1) din ipoteză $Z(A)\ni(\alpha x+y)^n-(\alpha x+y)=(\alpha x)^n-\alpha x+y^n-y+\sum_{j=1}^{n-1}\alpha^j P_j(x,y)$, unde $P_j(x,y)$ este suma tuturor celor C_n^j monoame de gradul n în x şi y cu exact j apariții ale lui x, din dezvoltarea $(\alpha x+y)^n$ (de exemplu, $P_1(x,y)=\sum_{j=1}^{n} y^{j-1}xy^{n-j}$, $P_2(x,y)=\sum_{\substack{n_1,n_2,n_3\geq 0\\ n_1+n_2+n_3=n-2}} y^{n_1}xy^{n_2}xy^{n_3}$, ş.a.m.d.).

Aplicând din nou ipoteza 1) găsim că $\sum_{j=1}^{n-1}\alpha^j P_j(x,y)\in Z(A)$ şi prin urmare: $(*)\sum_{j=1}^{n-1}\alpha^j[P_j(x,y),z]=0$, pentru orice $\alpha\in Z(A)$ şi $x, y, z\in A$.

Fixăm acum $x, y\in A$. Conform ipotezei 2) există elementele din Z(A) distincte $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\neq 0$. Scriind relaţia $(*)$ pentru $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\in Z(A)\setminus\{0\}$ cu $z=y$ şi privind ecuaţiile obţinute ca un sistem în necunoscutele $[P_j(x,y),y]$ cu $1\leq j\leq n-1$, obţinem prin înmulţire la stânga cu matricea adjunctă a coeficienţilor (adjuncta unei matrice este transpusa reciprocei): $d[P_1(x,y),y]=d[P_2(x,y),y]=\ldots=$ $=d[P_{n-1}(x,y),y]=0$. Deci $d\neq 0$ este determinantul matricei Vandermonde a sistemului şi este diferit de zero deoarece inelul A a fost presupus integru.

Cum într-un inel integru se poate simplifica cu elemente diferite de zero, rezultă că $[P_1(x,y),y]=[P_2(x,y),y]=\ldots=[P_{n-1}(x,y),y]=0$.

În particular din $P_1(x,y)\cdot y=y\cdot P_1(x,y)$, rezultă prin reducerea termenilor asemenea că $xy^n=y^nx$ (se foloseşte aici dezvoltarea lui $P_1(x,y)$ sub forma $P_1(x,y)=\sum_{j=1}^{n}y^{j-1}xy^{n-j}$, când $j=1$, y^0xy^{n-1} este notaţie pentru xy^{n-1}, deci nu presupunem că A este unitar. Dar $y^n-y\in Z(A)$ astfel că din $xy^n=y^nx$, obţinem $xy=yx$.

6.31. Fie $y\in A$ un element arbitrar fixat. Vom arăta că $[x,y]=xy-yx=0$.

Dacă $n=1$ sau $m=1$, atunci afirmaţia rezultă direct din enunţ.

Fie deci $n>m>1$ cu $(m,n)=1$ şi $[x,y^n]=0=[x,y^m]$.

Să observăm că pentru orice întregi $u, v\geq 1$ are loc egalitatea:

(1) $[x,y^{u+v}]=[x,y^u]y^v+y^u[x,y^v]$ (verificare directă).

Conform teoremei împărţirii cu rest avem o egalitate de tipul $n=q_1m+r_1$ cu $0<r_1<m$.

De aici, din relaţia (1) pentru $u=q_1m$, $v=r_1$ şi din $[x,y^n]=0=[x,y^m]$ deducem că:

$$0=[x,y^n]=[x,y^{q_1m+r_1}]=[x,(y^m)^{q_1}]y^{r_1}+y^{q_1m}[x,y^{r_1}]=$$
$$=0\cdot y^{r_1}+y^{q_1m}[x,y^{r_1}]=y^{q_1m}[x,y^{r_1}] \quad (2)$$

Fie acum $m=q_2r_1+r_2$ cu $0<r_2<r_1$, adică procedăm după algoritmul lui Euclid de calcul al c.m.m.d.c. Ca mai sus deducem: $0=[x,y^m]=[x,y^{q_2r_1}]y^{r_2}+y^{q_2r_1}[x,y^{r_2}]$, de unde prin înmulţire la stânga cu y^{q_1m}

rezultă conform lui (2): (3) $y^{q_1m+q_2r_1}[x,y^{r_2}]=0$ (din $y^{q_1m}[x,y^{r_1}]=0$ rezultă uşor prin inducţie după $q_2\geq 1$ că $y^{q_1m}[x,y^{q_2r_1}]=0$).

Se continuă până ce în algoritmul lui Euclid se obţine un rest egal cu 1 (aceasta se întâmplă deoarece prin ipoteză m şi n sunt relativ prime).

Găsim deci un întreg $k\geq 1$ pentru care $y^k[x,y]=0$.

Până acum am arătat deci că pentru orice $y\in A$ există un întreg $k\geq 1$ cu $y^k[x,y]=0$.

Cum şi $y+1\in A$, deducem existenţa unui întreg $l\geq 1$ cu $0=(y+1)^l[x,y+1]=(y+1)^l[x,y]$.

Deci $y^k[x,y]=0=(y+1)^l[x,y]$ şi conform problemei **6.27.** deducem că $[x,y]=0$. Deci $[x,y]=0$, pentru orice $y\in A$, adică $x\in Z(A)$.

6.32. (i), (ii). Prin calcul direct.

(iii). Fie $z=m+n\sqrt{2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ un element inversabil. Există deci $z'=x+y\sqrt{2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ a.î. $zz'=1$, ceea ce conduce la sistemul $\begin{cases} mx+2ny=1 \\ nx+my=0 \end{cases}$. Condiţia necesară şi suficientă ca pentru $m, n\in\mathbb{Z}$, daţi, sistemul precedent să aibă soluţie unică cu $x, y\in\mathbb{Z}$ este $m^2-2n^2=\pm 1$ (condiţia este evident suficientă; necesitatea rezultă deoarece conform primei ecuaţii $(m,n)=1$ şi se ţine cont de forma termenului liber). Deci $\varphi(z)=1 \Leftrightarrow z$ este inversabil.

Definim acum recurent următorul şir de numere întregi $x_0=y_0=1$, $x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}=(x_n+y_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$. Numerele de forma $x_n+y_n\sqrt{2}$ sunt toate distincte, deoarece deducem de mai sus că $x_n+y_n\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^n$ şi evident $1+\sqrt{2}\neq\pm 1$.

Conform punctului (ii) al problemei (sau prin inducţie după n) rezultă $\varphi(x_n+y_n\sqrt{2})=1$, deci elementele distincte $x_n+y_n\sqrt{2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sunt inversabile.

6.33. (i). Notând $z=a+b\sqrt{d}\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ şi cu $z^*=a-b\sqrt{d}\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, conjugatul pătratic al lui z, observăm că $z\cdot z^*=(a+b\sqrt{d})(a-b\sqrt{d})=$ $=a^2-db^2=N(z)$.

Folosind faptul că conjugatul produsului este produsul conjugaţilor avem pentru $z_1, z_2\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$:

$$N(z_1\cdot z_2)=(z_1z_2)(z_1z_2)^*=(z_1z_2)(z_1^*z_2^*)=(z_1z_1^*)(z_2z_2^*)=N(z_1)\cdot N(z_2).$$

(ii). „⇒". Dacă $z\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ este un element inversabil, există $z^{-1}\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ a.î. $z\cdot z^{-1}=1$. Trecând la normă, rezultă $N(z)\cdot N(z^{-1})=1$, deci $N(z)$ este un element inversabil în inelul $\mathbb{Z}$, adică $N(z)\in\{\pm1\}$.

„⇐". Reciproc, dacă $N(z)\in\{\pm1\}$, luând $z^{-1}=N(z)\cdot z^{*}$ avem $z\cdot z^{-1}=$ $=N(z)\cdot z\cdot z^{*}=N(z)\cdot N(z)=[N(z)]^2=(\pm1)^2=1$ deci z este inversabil în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$.

(iii). Conform punctului (ii) un element $z=a+b\sqrt{d}$ aparține lui $U(\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,])$ dacă şi numai dacă $a^2-db^2=\pm1$. (1)

Pentru $d<0$ avem $a^2-db^2>0$, deci ecuația (1) devine $a^2-db^2=1$ (2).

Dacă $d=-1$ ecuația (2) devine $a^2+b^2=1$ şi admite în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ soluțiile (1, 0), (-1, 0), (0, 1) şi (0,-1). Rezultă $U(\mathbb{Z}[i])=\{1,-1, i, -i\}$.

Dacă $d\le-2$, ecuația (2) admite ca soluții $(a, b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ doar cuplurile (1, 0) şi (–1, 0) deci $U(\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,])=\{-1, 1\}$.

Observație. Pentru $d > 0$ se demonstrează că ecuația (2), numită *ecuația lui Pell*, are o infinitate de soluții în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, deci în cazul $d >0$ grupul $U(\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,])$ este infinit.

6.34. (i). Fie $z=m+ni$, $m, n\in\mathbb{Z}$.

Avem $\varphi(z)=0 \Leftrightarrow m^2+n^2=0 \Leftrightarrow m=n=0 \Leftrightarrow z=0$.

(ii). Fie $z=m+ni$ şi $z'=m'+n'i$ cu $m, m', n, n'\in\mathbb{Z}$.

Avem $\varphi(zz')=\varphi((m+ni)(m'+n'i))=\varphi((mm'-nn')+i(mn'+m'n))=(mm'-nn')^2+$ $+(mn'+m'n)^2=m^2m'^2+n^2n'^2-2mm'nn'+m^2n'^2+m'^2n^2+2mm'nn'=$ $=(m^2+n^2)(m'^2+n'^2)=\varphi(z)\cdot\varphi(z')$.

(iii). Fie $z, z'\in\mathbb{Z}[i]$, $z=m+ni$ şi $z'=m'+n'i\neq0$.

Atunci $\frac{z}{z'}=\frac{m+ni}{m'+n'i}=\frac{mm'+nn'}{m'^2+n'^2}+i\frac{-mn'+m'n}{m'^2+n'^2}=a+ib$, unde $a, b\in\mathbb{Q}$.

Alegem $u, v\in\mathbb{Z}$ a.î. $|a-u|\le\frac{1}{2}$ şi $|b-v|\le\frac{1}{2}$ şi punem $q=u+iv$. Se verifică faptul că $r=z-qz'$ are proprietatea că $\varphi(r) < \varphi(z')$.

(iv). Dacă $z\in\{\pm1, \pm i\} \Rightarrow$ z este inversabil $\Rightarrow$ există un $z'\in\mathbb{Z}[i]$ a.î. $zz'=1 \Rightarrow \varphi(zz')=\varphi(z)\cdot\varphi(z')=1 \Rightarrow \varphi(z)=1$.

Fie $z=m+ni$ şi $\varphi(z)=1$. Atunci $z'=m-ni$ este inversul lui z, deci z este inversabil. Avem $\varphi(z)=1 \Leftrightarrow$ z este inversabil.

Dacă $\varphi(z)=1 \Rightarrow m^2+n^2=1 \Rightarrow m^2=0$ şi $n^2=1$ sau $m^2=1$ şi $n^2=0 \Rightarrow z\in\{\pm1, \pm i\}$.

6.35. (i). Fie $z=m+ni\sqrt{2}$, $m, n\in\mathbb{Z}$.

Avem $\varphi(z)=0 \Leftrightarrow m^2+2n^2=0 \Leftrightarrow m=n=0 \Leftrightarrow z=0$.

(ii). Fie $z=m+ni\sqrt{2}$ şi $z'=m'+n'i\sqrt{2}$ cu $m, m', n, n'\in\mathbb{Z}$.

Avem

$\varphi(zz')=\varphi((m+ni\sqrt{2})(m'+n'i\sqrt{2}))=\varphi((mm'-2nn')+i\sqrt{2}(mn'+m'n))=$

$=(mm'-2nn')^2+2(mn'+m'n)^2=$

$=m^2m'^2+4n^2n'^2-4mm'nn'+2m^2n'^2+2m'^2n^2+4mm'nn'=$

$=m^2(m'^2+2n'^2)+2n^2(m'^2+2n'^2)=(m^2+2n^2)(m'^2+2n'^2)=\varphi(z)\cdot\varphi(z')$.

(iii). Fie $z, z'\in\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, $z=m+ni\sqrt{2}$ şi $z'=m'+n'i\sqrt{2}\neq0$.

Atunci $\frac{z}{z'}=\frac{m+ni\sqrt{2}}{m'+n'i\sqrt{2}}=\frac{mm'+2nn'}{m'^2+2n'^2}+i\sqrt{2}\frac{-mn'+m'n}{m'^2+2n'^2}=a+ib\sqrt{2}$, unde a, $b\in\mathbb{Q}$.

Alegem $u, v\in\mathbb{Z}$ a.î. $|a-u|\leq\frac{1}{2}$ şi $|b-v|\leq\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi punem $q=u+iv$. Se verifică faptul că $r=z-qz'$ are proprietatea că $\varphi(r)<\varphi(z')$.

(iv). Dacă $z\in\{\pm1\} \Rightarrow z$ este inversabil $\Rightarrow$ există un $z'\in\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ a.î. $zz'=1\Rightarrow \varphi(zz')=\varphi(z)\cdot\varphi(z')=1 \Rightarrow \varphi(z)=1$.

Fie $z=m+ni\sqrt{2}$ şi $\varphi(z)=1$. Atunci $z'=m-ni\sqrt{2}$ este inversul lui z, deci z este inversabil. Avem $\varphi(z)=1 \Leftrightarrow z$ este inversabil.

Dacă $\varphi(z)=1 \Rightarrow m^2+2n^2=1 \Rightarrow m^2=1$ şi $n^2=0 \Rightarrow n=0$ şi $m=\pm1 \Rightarrow z\in\{\pm1\}$.

6.36. Notăm $N(A)=\{a\in A \mid \text{există } n\in\mathbb{N} \text{ a.î. } a^n=0\}$.

Dacă $x\in U(A)$ şi $y\in N(A)$, demonstrăm că $x+y\in U(A)$.

Scriind $x+y=x(1+x^{-1}y)$, cum $x^{-1}y=z\in N(A)$ pentru a demonstra că $x+y\in U(A)$ este suficient să arătăm că dacă $z\in N(A)$, atunci $1+z\in U(A)$.

Scriind din nou $1+z=1-(-z)$, cum $t=-z\in N(A)$, totul s-a redus la a proba că dacă $t\in N(A)$ atunci $1-t\in U(A)$. Din $t\in N(A)$ rezultă că există $n\in\mathbb{N}$ a.î. $t^n=0$ şi astfel $1=1-0=1-t^n=(1-t)(1+t+t^2+\ldots+t^{n-1})$, de unde rezultă că $1-t\in U(A)$ iar $(1-t)^{-1}=1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}$.

6.37. Faptul că adunarea şi înmulţirea matricelor sunt operaţii algebrice pe A se verifică imediat; de asemenea structura de inel unitar se stabileşte uşor. În acest inel matricea nulă O_3 este elementul zero, iar matricea unitate I_3 este elementul unitate.

Vom demonstra că inelul A este necomutativ.

Fie pentru aceasta matricele X, Y∈A, $X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Avem $XY=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $YX=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, deci XY≠YX.

Să arătăm acum că orice element din A este inversabil sau nilpotent. Pentru aceasta să considerăm un element X∈A, arbitrar, $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&d\\0&0&a\end{pmatrix}$. Avem det(X)=$a^3$ şi dacă a≠0, atunci X este o matrice inversabilă în inelul $M_3(\mathbb{R})$, dar se constată uşor că $X^{-1}\in A$ şi aceasta înseamnă că X este element inversabil în A. Dacă însă a=0, atunci $X=\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&d\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi se observă că $X^3=O_3$, ceea ce înseamnă că X este element nilpotent în inelul A.

6.38. „⇒". Dacă $\hat{m}\in\mathbb{Z}_n$ este element nilpotent, fie t a.î. $(\hat{m})^t=\hat{0}$. Atunci n divide m^t şi deci fiecare p_i divide m^t. Numerele $\{p_i|1\le i\le k\}$ fiind prime, fiecare p_i divide m, adică $p_1\dots p_k$ divide m.

„⇐". Invers, dacă $p_1\dots p_k \mid m \Rightarrow$ există s∈ℤ a.î. $m=s\cdot p_1\dots p_k$. Pentru $n=p_1^{r_1}\dots p_k^{r_k}$ aleg $r=\max_{1\le i\le k} r_i$. Evident $m^r=s^r p_1^r\dots p_k^r=ns^r p_1^{r-r_1}\dots p_k^{r-r_k}$, adică $(\hat{m})^r=\hat{0}$, deci $\hat{m}\in\mathbb{Z}_n$ este element nilpotent.

6.39. Fie φ:Idemp($\mathbb{Z}_n$)→A definită prin φ(x)=mulţimea numerelor prime distincte ce apar în descompunerea lui (x, n).

Fie $\hat{x}\in\mathbb{Z}_n$ un element idempotent. Atunci $\hat{x}^2=\hat{x}$, adică n|x(x-1). Cum $\frac{x}{(x,n)}$ şi $\frac{n}{(x,n)}$ sunt prime între ele, deducem că $\frac{n}{(x,n)}$ |x-1. Deci (x, n) şi $\frac{n}{(x,n)}$ sunt prime între ele pentru că sunt divizori ai unor numere prime între ele: x şi x-1.

Rezultă că puterea unui prim, p_i, care se află în descompunerea lui (x, n) este α_i, altfel (x, n) şi $\frac{n}{(x,n)}$ nu ar fi prime între ele.

Deci φ(x) caracterizează perfect (x, n).

Observăm că φ este o injecție.

Într-adevăr, dacă $\varphi(\hat{x})=\varphi(\hat{y})$, atunci (x, n)=(y, n) şi rezultă că $\frac{n}{(x,n)}$ |x-1 şi $\frac{n}{(x,n)}$ |y-1 Deci $\frac{n}{(x,n)}$ |x-y . Cum (x, n) |x-y şi este prim cu $\frac{n}{(x,n)}$ deducem că n divide x-y, adică $\hat{x}=\hat{y}$.

φ este surjecție.

Dacă I este mulţimea indicilor numerelor prime care aparţin unui element din A, atunci considerăm numărul natural $a=\prod_{i\in I} p_i^{\alpha_i}$ (a=1 dacă I=Ø). Evident există întregii s, t a.î. sa+t$\frac{n}{a}=1$.

Fie x=sa. Evident, n|x(x-1), adică x este idempotent. Rezultă a=(x, n) şi deci $\varphi(\hat{x})=\{p_i\}_{i\in I}$.

Avem $12=2^2\cdot 3$ şi A={Ø, {2}, {3}, {2,3}}. Elementelor lui A le corespund, în ordine, numerelor naturale $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=3$, $a_4=12$. Deci $\hat{x}_1=\hat{1}$, $\hat{x}_2=\hat{4}$ (4-3=1, adică $s_2=1$), $\hat{x}_3=\hat{9}$ (4-3=1 adică $s_3=-1$, $x_2=-3$), $\hat{x}_4=\hat{0}$.

6.40. Fie $n=p_1^{k_1}...p_r^{k_r}$ descompunerea în factori primi a lui n a.î. $k_i\geq 1$, $i\in\{1, \ldots, r\}$ şi $(p_i, p_j)=1$ pentru $i\neq j$. Avem că $\hat{x}\in N \Leftrightarrow p_i|x$ pentru orice $i\in\{1, ..,r\}$. Fie acum $\hat{x}\in N\cap I$. Există $k, m\in\mathbb{N}$ a.î. $\hat{x}^k=\hat{0}$ şi $\hat{x}^m=\hat{x}$. Atunci $\overset{\wedge}{x^{m^i}}=\hat{x}$ oricare ar fi $i\geq 1$. Dacă luăm $m^l\geq k$ atunci $\overset{\wedge}{x^{m^l}}=\hat{0}$. Avem $\hat{x}=\overset{\wedge}{x^{m^l}}=\overset{\wedge}{x^{k+s}}=\overset{\wedge}{x^k}\cdot\overset{\wedge}{x^s}=\hat{0} \Rightarrow \hat{x}=\hat{0}$ (unde $m^l=k+s$).

6.41. Dacă $\hat{a}\in\mathbb{Z}_n$ este inversabil, există $\hat{b}\in\mathbb{Z}_n$ a.î. $\hat{a}\cdot\hat{b}=\hat{1}$. Deci ab≡1 (mod n), adică există $k\in\mathbb{Z}$ a.î. ab-1=kn, sau ab+(-k)n=1. De aici obținem că (a, n)=1. Reciproca este evidentă deoarece toate implicațiile de mai sus sunt echivalențe.

6.42. (i). Presupunem prin reducere la absurd că ecuația are o soluție $\hat{x}_0 \in \mathbb{Z}_n$ şi totuşi d∤b. Atunci $\hat{a}\cdot\hat{x}_0 = \hat{b}$, deci n|ax$_0$-b. Cum d|n şi d|a rezultă d|b, contradicție cu presupunerea făcută.

(ii). Presupunem că d|b. Cum d=(a, n) există x_0' şi $y_0' \in \mathbb{Z}$ a.î. d=ax$_0'$-ny$_0'$. Dacă c=$\frac{b}{d}$, atunci a(x$_0'$c)-n(y$_0'$c)=b, adică $\hat{a}\left(\widehat{x_0'c}\right) = \hat{b}$, deci $\widehat{x_0'c}$ este soluție a ecuației $\hat{a}\hat{x} = \hat{b}$.

Să presupunem acum că $\hat{x}_0$ şi $\hat{x}_1$ sunt două soluții ale ecuației $\hat{a}\hat{x} = \hat{b}$. Atunci n|ax$_0$-b şi n|ax$_1$-b de unde n|a(x$_1$-x$_0$). Dacă notăm $n' = \frac{n}{d}$ şi $a' = \frac{a}{d}$ atunci (a′, n′)=1 şi obținem n′|x$_1$-x$_0$, adică x$_1$=x$_0$+kn′, cu k∈ℤ.

Pe de altă parte, se verifică imediat că $\widehat{x_0 + kn'}$ este o soluție a ecuației $\hat{a}\hat{x} = \hat{b}$ cu k∈{0, 1, …, d-1}. Cum nu este posibil să avem $\widehat{x_0 + kn'} = \widehat{x_0 + k'n'}$, pentru k, k′∈{0, 1, …, d-1} şi k≠k′ (căci ar trebui ca n|n′(k-k′) ⇔ d|k-k′, absurd) deducem că dacă $\hat{x}_0 \in \mathbb{Z}_n$ este soluție a ecuației $\hat{a}\hat{x} = \hat{b}$, atunci această ecuație are d soluții şi anume: $\hat{x}_0$, $\widehat{x_0 + n'}$,…, $\widehat{x_0 + (d-1)n'}$.

(iii). Pentru (a, n)=1 ecuația are soluție unică. Cum (a, n)=1 există u, v∈ℤ a.î. au+vn=1. Trecând la clase $\hat{a}\hat{u} = \hat{1}$. Deci soluția este x=$\hat{u}\hat{b}$.

6.43. Să notăm cu A mulțimea soluțiilor ecuației omogene ax=0, soluții considerate în inelul $\mathbb{Z}_n$; de asemenea să notăm cu B mulțimea soluțiilor din $\mathbb{Z}_n$ ale ecuației neomogene ax=b.

Fie x$_0$ o soluție fixată a ecuației neomogene (conform ipotezei această ecuație are soluții), deci ax$_0$=b. Vom demonstra că aplicația φ:A→B, φ(x)=x+x$_0$ este o bijecție.

Mai întâi este clar că aplicația φ este bine definită, în sensul că pentru x∈A, avem φ(x)∈B. Într-adevăr, dacă x∈A ⇒ ax=0 şi atunci a(x+x$_0$)=ax+ax$_0$=0+b=b.

Funcția φ este injectivă, căci φ(x)=φ(x′) ⇒ x+x$_0$=x′+x$_0$ ⇒ x=x′.

De asemenea φ este surjectivă: luând $y\in B$ arbitrar şi notând $x=y-x_0$, avem $x\in A$ căci $ax=a(y-x_0)=ay-ax_0=b-b=0$ şi $\varphi(x)=y$.

Deoarece $\varphi:A\to B$ este bijecție, rezultă că A şi B au acelaşi cardinal, deci ecuațiile au acelaşi număr de soluții în $\mathbb{Z}_n$.

Observație. Problema are loc în orice inel finit, sau mai general, în orice inel, dacă formulăm drept cerință existența unei bijecții între mulțimile de soluții A şi B.

6.44. (i). Sistemul nu poate fi rezolvat prin metoda substituției deoarece nici unul dintre coeficienții săi nu este inversabil în $\mathbb{Z}_{12}$. Scăzând prima ecuație din a doua obținem: $\begin{cases}\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{1}\\ x+y=\hat{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{2}x+y=\hat{0}\\ x+y=\hat{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\hat{1}\hat{1}\\ y=\hat{2}\end{cases}$.

(ii). Deoarece $\hat{7}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_{12}$ înmulțim prima ecuație cu inversul său, deci tot cu $\hat{7}$. Obținem: $\begin{cases}x+\hat{9}y=\hat{2}\\ \hat{4}x+\hat{6}y=\hat{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\hat{2}+\hat{3}y\\ \hat{8}+\hat{6}y=\hat{3}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=\hat{2}+\hat{3}y\\ \hat{6}y=\hat{7}\end{cases}$

Sistemul este incompatibil, ecuația $\hat{6}y=\hat{7}$ neavând soluții în $\mathbb{Z}_{12}$.

6.45. (i). Din $(1+1)^2=1+1$ deducem că $1+1+1+1=1+1$, adică $1+1=0$ şi deci $car(A)=2$.

(ii). Fie $x, y\in A$ arbitrare. Avem conform ipotezei $(x+y)^2=x+y$. (1)

Pe de altă parte: $(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+xy+yx+y^2=x+xy+yx+y$,

deci $(x+y)^2=x+xy+yx+y$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $x+xy+yx+y=x+y$, deci $xy+yx=0$, adică $xy=-yx$. (3)

Dar conform punctului (i), orice element coincide cu opusul său, astfel că egalitatea (3) devine $xy=yx$. Cum x, y au fost alese arbitrare în inelul A, rezultă că A este inel comutativ.

6.46. „$\Rightarrow$”**.** Dacă A este inel boolean avem $a=a^2=\ldots=a^n=\ldots$ şi evident zero este singurul element nilpotent. Avem $(a+b)ab=a^2b+ab^2=ab+ba=0$.

„⇐". Reciproc, punând b=a în relația dată obținem $(a+a)\cdot a\cdot a=0 \Leftrightarrow a^3+a^3=0$, de unde, prin înmulțiri succesive cu a obținem $a^n+a^n=0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$.

Fie $b=a^2-a$. Obținem $a^4=a^5$ şi prin înmulțiri succesive cu a avem $a^4=a^5=\ldots=a^n=\ldots$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$. În particular, $a^8=a^4$, deci este verificată $(a^2-a)^4=0$. Avem $(a^2-a)^2=a^4+a^2-a^3-a^3=a^4+a^2$ şi prin urmare

$$(a^2-a)^4=(a^4+a^2)^2=a^8+a^6+a^6+a^4=a^4+a^4=0.$$

Cum A nu are elemente nilpotente nenule, $a^2-a=0$ şi $a^2=a$.

6.47. Luând $a=-1$ obținem că în inelul dat are loc egalitatea $1+1=0$ şi deci $1+1+1=1$. Luând un element oarecare $a\in A$ vom ține cont de faptul că $-a=a$ şi de cele două relații:

$$a^3+a=0 \text{ şi } (1+a)^3+(1+a)=0.$$

Efectuând calculele în a doua relație obținem $1+3a+3a^2+a^3+1+a=0$, de unde rezultă $a^2=a$, deci inelul A este boolean.

6.48. Demonstrăm mai întâi că $y\in A$, $y^2=0 \Rightarrow y=0$. Într-adevăr $y^2=0 \Rightarrow y^{2^{k(y)}+1}=0 \Rightarrow y=0$. Fie $x\in A$ fixat. Atunci

$$x^{2^k+1}=x \Rightarrow (x^{2^{k-1}+1}-x)^2=x^{2^k+2}-x^2=x(x^{2^k+1}-x)=0 \Rightarrow x^{2^{k-1}+1}-x=0 \Rightarrow$$

$x^{2^{k-1}+1}=x$. Deci k poate fi micşorat până la k=0, deci $x^2=x$.

6.49. Pentru $a=xab$ avem $a=a^2=(xab)^2=x(xa^2b^2)=x(xab)=xa$ respectiv pentru $x=a+b+ab$ rezultă:

$$xa=(a+b+ab)a=a^2+ab+a^2b=a^2+ab+ab=a^2=a,$$
$$xb=(a+b+ab)b=ab+b^2+ab^2=ab+b^2+ab=b^2=b,$$

(înmulțirea este comutativă şi $car(A)=2$).

În final, alegem $x=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j+\ldots+a_1a_2\ldots a_n$.

6.50. Din $x^6=x$ şi $(-x)^6=-x$ rezultă $x=-x$ şi atunci $car(A)=2$.

Din $(x+1)^6=x+1$ dezvoltând membrul drept obținem:

$$(x^6-x)+2(3x^5+7x^4+10x^3+7x^2+3x)+(x^4+x^2)=0 \Rightarrow x^4+x^2=0.$$

Atunci $x^4=-x^2=x^2$ şi înmulțind cu x^2 obținem în final $x=x^6=x^4=x^2$.

6.51. Înlocuind pe x cu –x în ipoteză, rezultă $(-x)^{12}=-x$ dar $(-x)^{12}=x^{12}=x$ şi prin urmare $x=-x$, adică $2x=0$, oricare ar fi $x\in A$ (1).

Din (1) rezultă că pentru orice $x\in A$ şi $k\in\mathbb{Z}$ avem $kx=0$, pentru k par, respectiv $kx=x$, pentru k impar.

Ţinând cont de aceasta şi de faptul că x şi 1 comută la înmulţire putem scrie $(x+1)^{12}= x^{12} + C_{12}^1 x^{11} + C_{12}^2 x^{10} + ... + C_{12}^{10} x^2 + C_{12}^{11} x + 1$

$=x^{12}+12x^{11}+66x^{10}+220x^9+495x^8+792x^7+924x^6+792x^5+495x^4+220x^3+66x^2+$

$+12x+1= x^{12}+x^8+x^4+1.$

Dar din ipoteză $(x+1)^{12}=x+1$. Rezultă egalitatea $x^{12}+x^8+x^4+1=x+1$, de unde ţinând cont că $x^{12}=x$, deducem $x^8+x^4=0$. Adunând x^4 obţinem $x^8=x^4$. Înmulţind această egalitate cu x^4 obţinem $x^{12}=x^8$ adică, $x=x^8$, deci $x=x^4$. (2)

Înmulţim cu x^8 şi avem $x^9=x^{12}$ sau $x^9=x$ sau $(x^4)^2x=x$, sau conform cu (2), $x^2\cdot x=x$, adică $x^3=x$. Înmulţind această egalitate cu x obţinem $x^4=x^2$ şi folosind (2), rezultă $x=x^2$, ceea ce trebuia demonstrat.

6.52. (i). Din $x^3=x$, deducem $x^4=x^2$. Atunci

$(x^2yx^2-x^2y)^2=(x^2yx^2-x^2y)(x^2yx^2-x^2y)=x^2yx^4yx^2-x^2yx^4y-x^2yx^2yx^2+x^2yx^2y=0.$

Analog $(x^2yx^2-yx^2)^2 =0.$

(ii). Avem $(x^2yx^2-x^2y)^3=x^2yx^2-x^2y=0$. La fel $(x^2yx^2-yx^2)^3=$ $=x^2yx^2-yx^2=0$, adică $x^2yx^2=x^2y$, $x^2yx^2=yx^2$, deci $x^2y=yx^2$, oricare ar fi $x, y\in A$.

Înlocuind x cu x+1 obţinem $(x+1)^2y=y(x+1)^2$, de unde $2xy=2yx$. Dacă inelul A este de caracteristică diferită de 2 deducem că $xy=yx$. În cazul în care A este de caracteristică 2 deducem că $(a+1)^3=a+1$, oricare ar fi $a\in A$, de unde $a^2=a$, deci A este boolean, adică comutativ (vezi problema **6.45.**).

6.53. Fie $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şi $a\in A$. Cum $\{a, a^2, \ldots, a^{n+1}\}\subset A$ există $i<j$ a.î. $a^i=a^{i+j}$. De aici, $a^k=a^{k+jl}$, oricare ar fi $k\geq i$ şi $l\in\mathbb{N}$.

Aplicăm această observaţie pentru fiecare element al inelului A:

există i_1, j_1 a.î. $a_1^k = a_1^{k+j_1 l}$, oricare ar fi $k\geq i_1$, $l\in\mathbb{N}$;

……..

există i_n, j_n a.î. $a_n^k = a_n^{k+j_n l}$, oricare ar fi $k\geq i_n$, $l\in\mathbb{N}$;

Alegem acum $p \geq \max\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ şi $q = c.m.m.m.c.\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ şi rezultă $a^p = a^{p+q}$, oricare ar fi $a \in A$.

6.54. Notăm cu (E_k) egalitatea din enunț.

Ea se scrie echivalent: $\sum_{j=1}^{k-1} a^{k-j} b^j = b \sum_{j=1}^{k-1} a^{k-j} b^{j-1}$.

Dacă (E_m) şi (E_{m+1}) sunt adevărate

$$\sum_{j=1}^{m} a^{m+1-j} b^j = a^m b + \left(\sum_{i=1}^{m-1} a^{m-i} b^i \right) b \overset{(E_m)}{=} a^m b + b \left(\sum_{i=1}^{m-1} a^{m-i} b^{i-1} \right) b \overset{(E_{m+1})}{=} b \sum_{j=1}^{m} a^{m+1-j} b^{j-1} =$$

$$= ba^m + b \sum_{i=1}^{m-1} a^{m-i} b^i$$

de unde rezultă că $a^m b = ba^m$. Din (E_{m+1}) şi (E_{m+2}) rezultă analog $a^{m+1} b = ba^{m+1}$, deci din (E_m), (E_{m+1}) şi (E_{m+2}) avem $a^{m+1} b = a \cdot a^m \cdot b = aba^m = ba^{m+1} = ba \cdot a^m$.

Cum a este inversabil, din $aba^m = baa^m$ rezultă $ab = ba$.

6.55. (i). Punând $x = -1$ obținem $-1 = 1$ de unde $x + x = 0$, oricare ar fi $x \in A$. De aici $(1+x)^2 = 1 + x + x + x^2 = 1 + x^2$. De asemenea, oricare ar fi $x \in A$, $m \geq n$, $x^m = x^n$. Dacă $x^2 = 0$ atunci $(1+x)^2 = 1$, deci $(1+x)^{2n+1} = (1+x)^{2n} = 1$, adică $(1+x)(1+x)^{2n} = 1$, de unde $1 + x = 1$, deci $x = 0$ şi am demonstrat (i).

(ii). Avem $(x^2 + x)^{2^n} = x^{2^{n+1}} + x^{2^n} = x^{2^n} + x^{2^n} = 0$, de unde $x^2 + x = 0$, adică $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in A$.

6.56. Se observă imediat că dacă A este un p-inel atunci acesta este redus (din $x^p = x$, rezultă prin inducție după $n \geq 1$ că $x^{p^n} = x$; deci dacă x este nilpotent există $n \geq 1$ cu $x^{p^n} = 0$, adică $x = 0$).

Tot din $x^p = x$ deducem că $(x^{p-1})^2 = x^{2p-2} = x^p \cdot x^{p-2} = x \cdot x^{p-2} = x^{p-1}$, adică x^{p-1} este idempotent. De aici rezultă prin calcul direct că pentru orice $x, y \in A$

(1) $\qquad (x^{p-1} y x^{p-1} - x^{p-1} y)^2 = 0 = (x^{p-1} y x^{p-1} - y x^{p-1})^2$.

Din (1) rezultă conform faptului că A este redus (singurul element nilpotent al lui A este zero):

$$x^{p-1} y x^{p-1} - x^{p-1} y = 0 = x^{p-1} y x^{p-1} - y x^{p-1}$$

adică (2) $\qquad x^{p-1} y = x^{p-1} y x^{p-1} = y x^{p-1}$.

Deci $x^{p-1} \in Z(A)$.

Deoarece $x^p = x$ şi $x^{p-1} \in Z(A)$ deducem că:

(3) $(xy-yx)^{p-1}=xy-yx=x^{p-1}(xy-yx)$ (de exemplu:

$(xy-yx)x^{p-1}=xyx^{p-1}-yxx^{p-1}=x^{p-1}xy-yx^p=xy-yx$).

Dar (3) este adevărată pentru orice x, y deci este adevărată şi dacă x se înlocuieşte cu x+i, unde $1\le i\le p-1$.

Deoarece însă $(x+i)y-y(x+i)=xy-yx+iy-yi=xy-yx$, deducem din (3):

(4) $(x+i)^{p-1}(xy-yx)=xy-yx$, pentru $0\le i\le p-1$.

Să observăm că din $px=0$ rezultă conform micii teoreme a lui Fermat şi din faptul că numărul soluţiilor unei congruenţe nu poate depăşi gradul acesteia (teorema lui Lagrange) că:

(5) $(x+1)(x+2)\ldots(x+(p-1))=x^{p-1}+(p-1)!=x^{p-1}-1$.

Aplicând acum în ordine ipoteza ($x^p=x$) şi relaţiile (4), (2) şi (5) obţinem:

$xy-yx=(xy-yx)^p=[x^{p-1}(xy-yx)][(x+1)^{p-1}(xy-yx)]\ldots[(x+(p-1))^{p-1}(xy-yx)]=$

$=x^{p-1}(x+1)^{p-1}\ldots(x+(p-1))^{p-1}(xy-yx)^p=[x(x+1)\ldots(x+(p-1))]^{p-1}(xy-yx)^p=$

$=[x(x^{p-1}-1)]^{p-1}(xy-yx)=\ =(x^p-x)^{p-1}(xy-yx)=0$. Deci $xy-yx=0$, adică A este comutativ.

6.57. Conform ipotezei rezultă că aplicaţia $f_0:A\times A\to A$ definită prin $f_0(x,y)=(xy)^2-x^2y^2$ este identic nulă.

Deci şi $f_1:A\times A\to A$, $f_1(x,y)=f_0(x+1,y)-f_0(x,y)$ este identic nulă. Efectuând calculele obţinem $f_1(x,y)=-xy^2+yxy=0$.

Rezultă că şi $f_2:A\times A\to A$, $f_2(x,y)=f_1(x,y+1)-f_1(x,y)$ va fi identic nulă.

Deci $0=f_2(x,y)=f_1(x,y+1)-f_1(x,y)=-x(y+1)^2+(y+1)x(y+1)+xy^2-yxy=$

$=-2xy-x+xy+yx+x=yx-xy$, adică A este comutativ.

6.58. Fie $e\in A$ un element idempotent. Deci $e^2=e$.

Pentru a arăta că $e\in Z(A)$, fie a un element arbitrar din inelul A şi să notăm cu x diferenţa ea-ae. Vom demonstra că $x=0$.

Într-adevăr, $ex+xe=ea-eae+eae-ae=x$, de unde $ex=x(1-e)$.

Întrucât $(1-e)e=e-e^2=0$ obţinem: $(ex)e=x(1-e)e=x\cdot 0=0$, deci $(ex)^2=((ex)e)x=0\cdot x=0$.

Aşadar ex este nilpotent. Conform ipotezei, $ex=0$ şi în mod analog demonstrăm şi că $xe=0$. Deci $x=ex+xe=0$.

6.59. Observăm că dacă x este idempotent atunci şi 1-x este idempotent:

$$(1-x)^2=1-2x+x^2=1-2x+x=1-x.$$

Rezultă că elementele lui M se pot grupa în perechi de forma (x, 1-x). Elementele din oricare asemenea pereche sunt distincte.

Într-adevăr, dacă ar exista $x_0\in M$ cu proprietatea că $x_0=1-x_0$, înmulţind cu x_0 şi ţinând cont că $x_0^2=x_0$, obţinem $x_0^2=x_0-x_0^2$ adică $x_0=x_0-x_0$, deci $x_0=0$.

În felul acesta egalitatea $x_0=1-x_0$ conduce la $1=0$, contradicţie.

Notând cu n numărul perechilor din M de tipul descris mai sus, rezultă că M are 2n elemente.

6.60. Evident, 1 este element idempotent nenul. Avem două cazuri:

1) Singurul idempotent nenul este 1. Atunci produsul elementelor idempotente nenule este egal cu 1.

2) Există cel puţin un element idempotent nenul, diferit de 1.

Fie x un astfel de element. Atunci şi 1-x este element idempotent nenul conform soluţiei problemei **6.59.**. Dar produsul elementelor idempotente nenule x şi 1-x este $x(1-x)=x-x^2=x-x=0$.

Atunci produsul tuturor elementelor idempotente nenule este egal cu 0.

6.61. (i). Pentru orice $x\in A$ avem $x+x=1\cdot x+1\cdot x=(1+1)\cdot x=0\cdot x=0$, deci

$$(1+x)^2=1+x+x+x^2=1+x^2=\begin{cases}1, & pentru\ x\in O_A\\ 0, & pentru\ x\in E_A\\ 1+x, & pentru\ x\in I_A\end{cases}.$$

(ii). Conform punctului (i) putem defini aplicaţiile $\varphi:O_A\to E_A$, $\varphi(x)=1+x$, oricare ar fi $x\in O_A$, $\psi: E_A\to O_A$, $\psi(x)=1+x$, oricare ar fi $x\in E_A$.

Pentru orice $x\in O_A$ avem:

$$(\psi\circ\varphi)(x)=\psi(\varphi(x))=\psi(1+x)=1+1+x=x$$

şi analog pentru orice $x\in E_A$ avem:

$$(\varphi\circ\psi)(x)=\varphi(\psi(x))=\varphi(1+x)=1+1+x=x.$$

Deci $\psi\circ\varphi=1_{O_A}$ şi $\varphi\circ\psi=1_{E_A}$. Atunci φ este bijectivă, adică $|O_A|=|E_A|$.

6.62. (i). Fie A un inel cu proprietatea $\mathbb{Z}\subseteq A\subseteq\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ şi $A\neq\mathbb{Z}$. Atunci există $a+b\sqrt{d}\in A\setminus\mathbb{Z}$, deci $b\neq 0$. Cum $a\in\mathbb{Z}\subseteq A$ avem $(a+b\sqrt{d}\,)-a\in A$, adică $b\sqrt{d}\in A$. Dar atunci $-b\sqrt{d}\in A$ şi deci $|b|\sqrt{d}\in A$, unde $|b|$ este număr natural nenul.

Fie $k\in\mathbb{N}^*$ cel mai mic număr natural nenul pentru care $k\sqrt{d}\in A$.

Arătăm că avem egalitatea $A=\mathbb{Z}[k\sqrt{d}\,]=\{a+bk\sqrt{d}\mid a, b\in\mathbb{Z}\}$.

Deoarece $k\sqrt{d}\in A$ rezultă că $bk\sqrt{d}\in A$, pentru orice $b\in\mathbb{Z}$ şi cum pentru orice $a\in\mathbb{Z}$ avem $a\in A$, obţinem că $a+bk\sqrt{d}\in A$, oricare ar fi $a, b\in\mathbb{Z}$. Cu aceasta am demonstrat incluziunea $\{a+bk\sqrt{d}\mid a, b\in\mathbb{Z}\}\subseteq A$.

Pentru cealaltă incluziune, fie $x\in A$, arbitrar.

Deoarece $A\subseteq\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ există $a, b\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea $x=a+b\sqrt{d}$. Conform teoremei împărţirii cu rest, există $q, r\in\mathbb{Z}$ a.î. $b=kq+r$ şi $0\le r<k$. Atunci $x=a+b\sqrt{d}=a+qk\sqrt{d}+r\sqrt{d}$ şi cum $a\in\mathbb{Z}\subseteq A$, $kq\sqrt{d}\in A$, vom avea $x-a-kq\sqrt{d}\in A$, adică $r\sqrt{d}\in A$. Datorită minimalităţii lui $k\in\mathbb{N}^*$, rezultă $r=0$ şi astfel $b=kq$, deci $x=a+kq\sqrt{d}\in\mathbb{Z}[k\sqrt{d}\,]$.

Cu aceasta am demonstrat şi incluziunea $A\subseteq\mathbb{Z}[k\sqrt{d}\,]$, deci egalitatea $A=\mathbb{Z}[k\sqrt{d}\,]$.

Prin urmare inelele cerute sunt cele de tipul $\mathbb{Z}[k\sqrt{d}\,]$, cu $k\in\mathbb{N}$ (pentru $k=0$ se obţine $A=\mathbb{Z}$, iar pentru $k=1$ se obţine $A=\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$).

Observaţie. În această soluţie am folosit doar structura de grup aditiv din inelele $\mathbb{Z}$, A, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$, $\mathbb{Z}[k\sqrt{d}\,]$. În acest fel, problema rămâne valabilă, cu aceeaşi soluţie, dacă o reformulăm astfel: „Să se determine grupurile abeliene A cu proprietatea $\mathbb{Z}\subseteq A\subseteq\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$”.

(ii). Vom arăta că singurele inele B cu proprietatea $\mathbb{Q}\subseteq B\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ sunt $B=\mathbb{Q}$ şi $B=\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$. Într-adevăr, dacă $B\neq\mathbb{Q}$, există $x=a+b\sqrt{d}\in B\setminus\mathbb{Q}$, cu $a, b\in\mathbb{Q}$ şi $b\neq0$. Deoarece $a\in\mathbb{Q}\subseteq B$, avem $x-a\in B$, adică $b\sqrt{d}\in B$.

Dar $b^{-1}\in\mathbb{Q}\subseteq B$ şi atunci $b^{-1}(b\sqrt{d}\,)\in B$, adică $\sqrt{d}\in B$. Pentru $u, v\in\mathbb{Q}$ oarecare, avem $u+v\sqrt{d}\in B$, deci $\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)\subseteq B$ şi cum avem şi cealaltă incluziune deducem $B=\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$.

6.63. Evident T este subgrup al lui $(M_n(A),+)$. Dacă $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ şi $A\cdot B=C=(c_{ij})$ atunci $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{1\le k\le i}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}=0+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

Dacă $i>j$ atunci $k\ge i>j$ implică $b_{kj}=0$ şi atunci $c_{ij}=0$.

6.64. C(S) este format din matricele $\{(b_{ij}) \mid b_{ij}=0,\ i > j$ şi $b_{ij}=b_{i+1,j+1}$ unde $1\le i, j<n\}$, adică din matricele de forma $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_2 \\ 0 & \cdots & 0 & u_1 \end{pmatrix}$, unde $u_1, \ldots, u_n \in A$.

6.65. Se ştie că dacă un număr prim p divide produsul xy, atunci p divide cel puţin unul dintre factori. Deci, adunând şi înmulţind fracţii cu numitorul nedivizibil prin p, obţinem ca rezultate fracţii cu numitorul nedivizibil prin p.

Aceasta înseamnă că $\mathbb{Z}_{(p)}$ este subinel al lui $\mathbb{Q}$.

6.66. (i). Orice subinel al lui $\mathbb{Z}$ trebuie să fie subgrup al grupului aditiv $(\mathbb{Z}, +)$, adică să fie de forma $n\mathbb{Z}$ cu $n\in\mathbb{N}$.

Însă produsul a doi multiplii de n este evident multiplu de n, deci mulţimile $n\mathbb{Z}$ sunt subinele ale inelului $\mathbb{Z}$ al numerelor întregi. Dintre ele doar $\mathbb{Z}=1\mathbb{Z}$ conţine elementul unitate 1.

(ii). Adunând şi înmulţind fracţii al căror numitor este o putere a lui 2, obţinem ca rezultat fracţii având numitorul o putere a lui 2:

$$\frac{a}{2^n} \pm \frac{b}{2^m} = \frac{2^m a \pm 2^n b}{2^{n+m}}$$
$$\frac{a}{2^n} \cdot \frac{b}{2^m} = \frac{ab}{2^{n+m}} .$$

Deci mulţimea $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ este subinel al lui $\mathbb{Q}$, de fapt este „cel mai mic" subinel al lui $\mathbb{Q}$ care conţine pe $\mathbb{Z}$ şi pe $\frac{1}{2}$.

Observaţie. În general, dacă p este un număr prim, notând cu $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ mulţimea numerelor raţionale de forma $\frac{a}{p^n}$, cu $a\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ obţinem un exemplu de subinel al lui $\mathbb{Q}$.

6.67. Dacă mulţimea dată ar fi subinel, pentru $u=\sqrt[3]{5}$ ar exista întregii a şi b a.î. $u^2=au+b$. Avem $5=u^3=u(au+b)=a(au+b)+bu=(a^2+b)u+ab$.

Rezultă $a^2+b=0$ şi $ab=5$ iar de aici $-a^3=5$, absurd. Deci mulțimea dată nu este subinel în $\mathbb{C}$.

6.68. Se verifică uşor axiomele inelului. Elementul neutru la adunare este $0=(0, 0)$ iar elementul unitate este $1=(1, 1)$. Inelul $A_1\times A_2$ are divizori ai lui zero, de exemplu, $(1, 0)\cdot(0, 1)=(0, 0)=0$. Elementele inversabile ale lui $A_1\times A_2$ sunt perechi $(x_1, x_2)\in A_1\times A_2$, cu x_1 inversabil în A_1 şi x_2 inversabil în A_2.

Aplicație.

a) Elementele inversabile în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sunt perechi de forma $(\pm1, \pm1)$.

b) Elementele inversabile în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$ sunt $(\pm1, \frac{a}{b})$ cu $a, b\in\mathbb{Z}^*$

c) Elementele inversabile în $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ sunt perechi de forma $(\hat{a}, \hat{b})$, cu $\hat{a}\in\mathbb{Z}_m$ şi $(a, m)=1$, iar $\hat{b}\in\mathbb{Z}_n$ şi $(b, n)=1$.

6.69. Cum $car(A)$ este ordinul lui 1 în grupul $(A, +)$, deducem imediat că $car(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})=car(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z})=car(End(\mathbb{Z}))=\infty$ iar $car(End(\mathbb{Z}_3))=3$.

6.70. Avem $car(\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n)=ord([1]_m,[1]_n)=[m,n]$, (am notat $[1]_m$ clasa de echivalență a lui 1 modulo m, respectiv $[1]_n$ clasa de echivalență a lui 1 modulo n) (vezi problema **3.9.**).

Generalizare. Dacă $car(A)=m$ şi $car(A')=n$ se poate demonstra analog $car(A\times A')=[m,n]$.

6.71. Avem $car(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p)=p$ şi $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$ nu este corp (având divizori ai lui zero).

6.72. Avem $A=<(\bar{1}, \bar{1})>=\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{3})\}$ (subinelul unitate generat de elementul unitate) şi $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ - subinel unitar. Fiecare subinel cu identitatea conține A şi fie B un astfel de subinel şi $(\bar{a}, \bar{a}+\bar{b})\in B$ cu $\bar{b}\neq\bar{0}$.

Dacă $\bar{b}\in\{\bar{1}, \bar{3}\}$ atunci B este întreg inelul iar dacă $\bar{b}=\bar{2}$ atunci

$$B=A\cup\{(\bar{2},\bar{0}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{1},\bar{3}), (\bar{3},\bar{1})\}.$$

6.73. (i). Cum $1+1=0$ şi $1\neq0$ rezultă $H=\{0, 1\}$ este un subgrup de ordin 2 al grupului $(A, +)$.

Fie $a\in A\setminus H$. Atunci $H\cap(H+a)=\emptyset$ şi $A=H\cup(H+a)=\{0, 1, a, 1+a\}$.

Deci a^2 poate fi egal cu 0, 1, a sau 1+a.

Dacă $a^2=1$ atunci $(1+a)^2=1+a+a+a^2=1+1+a+a=0+0=0$ şi evident $1+a\notin H$. Aşadar, înlocuind pe a cu 1+a suntem în cazul 1). Rezultă că se poate alege $a\in A\setminus H$ a.î. $a^2=0$ sau $a^2=a$ sau $a^2=1+a$.

(ii). Fie $A=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ şi $0=(\hat{0},\ \hat{0})$, $1=(\hat{1},\ \hat{1})$, $a=(\hat{1},\ \hat{0})$.

Se observă că $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2=\{0, 1, a, 1+a\}$ şi $a^2=a$. Atunci $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ este inel cu 4 elemente de tipul 2).

În inelul $M_2(\mathbb{Z}_2)$ considerăm matricele O, E, U şi V astfel: $O=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{1}\\ \hat{1} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

Din calcul direct rezultă că $U^2=O$ şi $V^2=E+V$. Cum $E+E=O$ se deduce că $X+X=O$, oricare ar fi $X\in M_2(\mathbb{Z}_2)$. Se deduce că:

$B=\{O, E, U, E+U\}$ şi $C=\{O, E, V, E+V\}$ sunt părți stabile ale lui $M_2(\mathbb{Z}_2)$ în raport cu adunarea şi înmulțirea matricelor şi că sunt inele cu 4 elemente în raport cu operațiile induse. Evident, $(B,+, \cdot)$ este inel de tip 1) iar $(C,+,\cdot)$ este inel de tip 3).

6.74. (i). Dacă perechea (a, b) este un element nilpotent din inelul $A\times B$ atunci a şi b sunt elemente nilpotente din A, respectiv din B.

Reciproc, dacă $a\in A$ şi $a^n=0$ iar $b\in B$ şi $b^m=0$, atunci

$(a, b)^{n+m}=(a^n\cdot a^m, b^n\cdot b^m)=(0, 0)$, deci (a, b) este nilpotent în $A\times B$.

Putem identifica deci pe $N(A\times B)$ cu $N(A)\times N(B)$.

(ii). Descompunând pe n în produs de factori primi distincți, $n=p_1^{k_1}\ldots p_t^{k_t}$ şi notând $q_i=p_i^{k_i}$, ştim că inelul $\mathbb{Z}_n$ este izomorf cu produsul direct $\mathbb{Z}_{q_1}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{q_t}$.

Aşadar este suficient să aflăm elementele nilpotente din fiecare inel $\mathbb{Z}_{q_i}$ iar pentru aceasta a se vedea problema **10.47.**.

§7. Morfisme de inele. Izomorfisme de inele.

7.1. Un exemplu de inel neunitar ne este oferit de $2\mathbb{Z}$ (evident, $1\notin 2\mathbb{Z}$).

Pe mulțimea $B=\mathbb{Z}\times A$ considerăm operațiile algebrice:

$$(n, a)+(m, b)=(n+m, a+b)$$

$$(n, a)\cdot(m, b)=(nm, nb+ma+ab).$$

Prin calcul direct se verifică faptul că $(B, +, \cdot)$ este inel unitar (unitatea lui B fiind elementul (1, 0)).

De asemenea, $i:A\to B$, $i(a)=(0, a)$, pentru orice $a\in A$, este morfism injectiv de inele ($i(a)+i(b)=(0, a)+(0, b)=(0, a+b)=i(a+b)$;
$i(a)\cdot i(b)=(0, a)\cdot(0, b)=(0, ab)=i(ab)$; injectivitatea este imediată pentru că din $i(a)=i(b) \Rightarrow (0, a)=(0, b) \Rightarrow a=b$).

Astfel, A se identifică cu Im(i) care este subinel al lui B.

Dacă A este comutativ, atunci şi B este comutativ.

7.2. Definim $f(x)+f(y)=f(x+y)$ şi $f(x)f(y)=f(xy)$, pentru orice $x, y\in A$.

Funcția f fiind injectivă, operațiile date mai sus sunt bine definite (de fapt, operațiile date sunt bine definite dacă şi numai dacă relația de echivalență R dată pe A prin: „$xRy \Leftrightarrow f(x)=f(y)$” este compatibilă cu adunarea şi înmulțirea din A (f nu neapărat injectivă), adică xRy şi $x'Ry' \Rightarrow (x+x')R(y+y')$ şi $(xx')R(yy')$). Aceste operații sunt definite pe întreaga mulțime S, f fiind surjectivă. Cu operațiile date S devine inel în care $0_S=f(0)$ şi $1_S=f(1)$ (în caz că A este unitar).

Evident, structura dată pe S este unica posibilă întrucât definiția ei constituie o consecință a faptului că f trebuie să devină morfism de inele.

7.3. Fie două operații $+, \cdot$ care dau o structură de inel pe o mulțime cu 4 elemente A.

Dacă $(A, +)$ este ciclic, atunci elementele lui A au forma a, 2a, 3a, 0 şi a defini „$\cdot$” revine la a-l defini pe a^2. Distingem patru cazuri posibile:

1) $a^2=0$. În acest caz produsul oricăror două elemente este nul (notăm cu N_4 această structură).

2) $a^2=a$. În acest caz inelul este unitar izomorf cu $\mathbb{Z}_4$.

3) $a^2=2a$. În acest caz se obține un inel comutativ fără unitate, neizomorf cu N_4 (notăm acest inel cu A_4).

4) $a^2=3a$. În acest caz avem $(3a)^2=3a$ şi deci asocierea $a \rightsquigarrow 3a$ defineşte un automorfism al lui A în baza căruia ne reducem la cazul 2).

Dacă (A, +) este de tip Klein atunci elementele lui A sunt de forma {0, a, b, a+b}, 2a=2b=0 şi a defini înmulţirea „·" distributivă faţă de adunare revine la a defini pe a^2, b^2, ab, ba. Avem următoarele cazuri:

1′) $a^2=b^2=0$. În acest caz, dacă ab=a sau a+b deducem că $0=ab^2=(ab)b=ab$, contradicţie. Dacă ab=b, atunci avem $0=ab^2=a(ab)=ab$, contradicţie. Rezultă ab=0. La fel obţinem ba=0. Prin urmare, produsul oricăror două elemente din A este nul. Fie N_2 structura de inel dată pe grupul aditiv $(\mathbb{Z}_2, +)$ de înmulţirea $\hat{1}\cdot\hat{1}=\hat{0}$. Se observă că asocierea $a \rightsquigarrow (\hat{1}, \hat{0})$, $b \rightsquigarrow (\hat{0}, \hat{1})$ defineşte un izomorfism al lui A pe $N_2\times N_2$.

2′) $a^2=0$, $b^2=a$. Dacă ab=b sau a+b, deducem că $0=ab^2=ab$, contradicţie. Dacă ab=a, atunci avem $0=a^2=ab^2=ab$, contradicţie. Rezultă ab=0. La fel obţinem ba=0. Se verifică că într-adevăr înmulţirea astfel definită înzestrează grupul (A, +) cu o structură de inel comutativ fără unitate pe care îl notăm cu B_4.

3′) $a^2=0$, $b^2=b$. Ca şi la cazul 2′) obţinem ab, $ba\notin\{b, a+b\}$. Avem următoarele subcazuri:

i) ab=ba=0. În acest subcaz asocierea $a \rightsquigarrow (\hat{0}, \hat{1})$, $b \rightsquigarrow (1, 0)$ defineşte un izomorfism al lui A pe $\mathbb{Z}_2\times N_2$.

ii) ab=ba=a. În acest subcaz b este unitate în A; notăm inelul obţinut prin I_4.

iii) ab=a, ba=0. În acest subcaz obţinem inelul Q_4 necomutativ şi fără unitate.

iv) ab=0, ba=a. Se obţine un inel P_4 necomutativ şi fără unitate.

4′) $a^2=0$, $b^2=a+b$. Ca şi la 3′) deducem că ab, $ba\notin\{b, a+b\}$.

Dacă A este comutativ atunci avem $(a+b)^2=a+b+ab+ba=a+b$ şi schimbând pe a+b cu b ne reducem la cazul 3′). Deci, dacă A este comutativ, atunci A este izomorf cu $\mathbb{Z}_2\times N_2$ sau cu I_4.

Dacă A nu este comutativ atunci avem două posibilităţi:

i) ab=a, ba=0. Avem $b=(a+b)b=b^2b=bb^2=b(a+b)=a+b$, contradicţie.

ii) ab=0, ba=a. Obţinem în acelaşi mod o contradicţie.

5′) a^2, b^2, $(a+b)^2$ sunt nenule şi distincte. În acest caz obţinem $(a+b)^2=a^2+b^2$ şi rezultă ab=ba, adică A este comutativ.

Observăm că modulo o renotare a elementelor lui A putem presupune că $a^2=a$. Într-adevăr, în caz contrar am avea, eventual renotând elementele lui A, $a^2=b$, $b^2=a+b$, $(a+b)^2=a$. Rezultă $(*)$: $a(ab)=a^2b=b^2=a+b$ şi deci $ab\neq 0$.

Dacă $ab=a$ obţinem din $(*)$ $b=a+b$, contradicţie.

Dacă $ab=b$ rezultă $ab=a+b$ şi folosind $(*)$ obţinem o contradicţie.

La fel $ab\neq a+b$, contradicţie.

Distingem două subcazuri:

i′) $a^2=a$, $b^2=b$. În acest subcaz obţinem $a(ba)=ba^2=ba$ şi rezultă $ba\neq a+b$.

Dacă $ba=0$ (respectiv $ba=a$ sau $ba=b$) asocierea $a\rightsquigarrow(\hat{0},\ \hat{1})$, $b\rightsquigarrow(\hat{1},\ \hat{0})$ (respectiv $a\rightsquigarrow(\hat{0},\ \hat{1})$, $b\rightsquigarrow(\hat{1},\ \hat{1})$ sau $a\rightsquigarrow(\hat{1},\ \hat{1})$, $b\rightsquigarrow(\hat{0},\ \hat{1})$) defineşte un izomorfism al lui A pe $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

ii′) $a^2=a$, $b^2=a+b$. În acest subcaz obţinem $(**)$: $b(ab)=b^2a=a+ba$ şi rezultă $ab\neq 0, a, a+b$.

Deci $ab=b$ iar elementul a constituie element unitate în A. Cum $b(a+b)=b+(a+b)=a$, deducem că A este corp (notăm acest corp cu GF_4).

6′) a^2, b^2, $(a+b)^2$ nenule dar nu distincte. Renotând eventual elementele lui A putem presupune că $a^2=b^2=a$. Deci $(a+b)^2=ab+ba$. Prin urmare, A nu este comutativ, altfel rezultă $(a+b)^2=0$.

Evident avem $(***)$: $b(ba)=b^2a=a$ şi deci $ba\neq 0$. Dacă $ba=a+b$ atunci din $(***)$ obţinem $a=b(a+b)=ba+a$, contradicţie. La fel $ab\notin\{0, a+b\}$. Dacă $ab=a$, atunci $ba=b$ şi deci $a=b^2=(ba)b=b(ab)=ba=b$, contradicţie.La fel $ba\neq b$. Prin urmare, nu există structuri de inel în acest caz.

În consecinţă există 11 structuri de inel neizomorfe pe o mulţime finită cu 4 elemente: un corp: GF_4, trei inele unitare comutative: $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, I_4, cinci inele fără unitate comutative: N_4, $\mathbb{Z}_2\times N_2$, $N_2\times N_2$, A_4, B_4, două inele necomutative P_4, Q_4.

7.4. Fie două operaţii $+$, $\cdot$ care dau o structură de inel pe o mulţime cu p elemente A. Cum $(A, +)$ este ciclic, elementele lui A au forma $0, a, 2a, \ldots, (p-1)a$, $pa=0$ şi a defini „$\cdot$” revine la a-l defini pe a^2.

Prin urmare, A este comutativ.

Avem următoarele două cazuri:

i) $a^2=0$. În acest caz produsul oricăror două elemente este nul (notăm cu N_p acest inel).

ii) $a^2=ia$, oricare i cu $1\le i\le p-1$. Fie $u\in\{1, \ldots, p-1\}$ un reprezentant al clasei $\hat{i}^{-1}$ din corpul $\mathbb{Z}_p$. Observăm că elementul e=ua satisface relația e(ja)=j(ui)a=ja. Deci e este element unitate în A iar asocierea $\hat{t} \rightsquigarrow te$ defineşte un izomorfism al corpului $\mathbb{Z}_p$ pe A.

7.5. Fie „$\circ$" o înmulțire pe G pentru care acesta devine inel unitar. Fie $e\in G$ unitatea sa şi t ordinul lui e în grupul aditiv G. Avem $\hat{t} = \hat{t\cdot 1} = t(e\circ\hat{1}) = (te)\circ\hat{1} = \hat{0}\circ\hat{1} = \hat{0}$ (evident, $t(x\circ y)=(tx)\circ y$, întrucât tx este definit în baza adunării iar „$\circ$" este distributivă față de adunare).

Deci $n|t$, iar întrucât $ord(e)|n=ordG$, deducem că n=t.

Prin urmare, asocierea $\hat{k} \rightsquigarrow ke$ defineşte un izomorfism de grupuri $f:(\mathbb{Z}_n, +)\to(G, \circ)$.

Evident avem $f(\hat{k}\cdot\hat{t}) = f(\hat{kt}) = kte = (ke)\circ(te) = f(\hat{k})\circ f(\hat{t}),\quad f(\hat{1}) = e$. Deci f este izomorfism de inele unitare.

> În consecință, toate structurile posibile de inel unitar date pe G sunt izomorfe între ele. Întrucât pentru orice element e de ordin n al lui G izomorfismul f poate fi construit, deducem că există $\varphi(n)$ structuri de inel unitar pe G (pentru fiecare alegere posibilă a lui e).

Nu există operații de înmulțire pe H pentru care acesta devine (împreună cu adunarea) inel unitar. Într-adevăr, în caz contrar, fie dată o astfel de operație $\otimes$ şi $e=\widehat{\frac{m}{n}}$ elementul unitate din inelul $(H, +, \otimes)$. Evident $e\neq\hat{0}$ (singurul inel în care elementul unitate coincide cu elementul nul este inelul nul). Putem alege reprezentantul $\frac{m}{n}$ al lui e a.î. $m, n > 0$.

Se observă că:

$$\widehat{\frac{1}{m}} = e\otimes\widehat{\frac{1}{m}} = (m\cdot\widehat{\frac{1}{n}})\otimes\frac{1}{m} = m\cdot(\widehat{\frac{1}{n}}\otimes\widehat{\frac{1}{m}}) = \widehat{\frac{1}{n}}\otimes(m\cdot\widehat{\frac{1}{m}}) = \widehat{\frac{1}{n}}\otimes\hat{1} = \hat{\frac{1}{n}}\otimes\hat{0} = \hat{0}.$$

Rezultă $\frac{1}{m}\in\mathbb{Z}$ şi deci m=1.

Pe de altă parte avem,

$$\overset{\wedge}{\frac{n}{n+1}} = e \otimes \overset{\wedge}{\frac{n}{n+1}} = \overset{\wedge}{\frac{1}{n}} \otimes (n \cdot \overset{\wedge}{\frac{1}{n+1}}) = (n \cdot \overset{\wedge}{\frac{1}{n}}) \otimes \overset{\wedge}{\frac{1}{n+1}} = \hat{1} \otimes \overset{\wedge}{\frac{1}{n+1}} = \hat{0},$$

adică n+1|n, contradicție.

7.6. Dacă f:$\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ este un morfism de inele şi notăm $f(1)=\hat{a}$, cu $\hat{a}\in\mathbb{Z}_n$, atunci se probează imediat că $f(x)=\hat{a}\cdot x$, oricare ar fi x$\in\mathbb{Z}$.

Dacă vom considera f morfism de inele unitare, atunci $f(1)=\hat{1} \Leftrightarrow \hat{a}=\hat{1}$ şi astfel $f(x)=x\cdot\hat{1}$, oricare ar fi x$\in\mathbb{Z}$.

Dacă f nu este morfism de inele unitare (adică $f(1)\neq\hat{1}$), atunci din f(1)=f(1·1)=f(1)·f(1) deducem că $\hat{a}=\hat{a}^2$, adică $\hat{a}$ este idempotent în inelul $\mathbb{Z}_n$.

Cum pentru x, y$\in\mathbb{Z}$, $f(x)f(y)=(\hat{a}x)(\hat{a}y)=\hat{a}^2(xy)=\hat{a}xy=f(xy)$ deducem că:

i) Există un singur morfism de inele unitare f:$\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ (şi anume $f(x)=x\cdot\hat{1}$, oricare ar fi x$\in\mathbb{Z}$).

ii) În cazul în care f:$\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ nu este morfism de inele unitare atunci $f(x)=x\cdot\hat{a}$, oricare ar fi x$\in\mathbb{Z}$ cu $\hat{a}\in\mathbb{Z}_n$ idempotent.

7.7. Pentru a nu se crea confuzie, să notăm $\mathbb{Z}_m=\left\{\hat{0},\ \hat{1},\ ...,\ \overset{\wedge}{m-1}\right\}$ şi $\mathbb{Z}_n=\left\{\overline{0},\ \overline{1},\ ...,\ \overline{n-1}\right\}$. Dacă f:$\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_n$ este un morfism de inele şi $f(\hat{1})=\overline{a}$, în cazul în care f este morfism de inele unitare $\overline{a}=f(\hat{1})=\overline{1}$ şi atunci din aproape în aproape se arată că $f(\hat{2})=2\overline{a}=\overline{2},\ldots,f\left(\overset{\wedge}{m-1}\right)=\overline{m-1}$.

Cum $f(\hat{m})=f(\hat{0})=\overline{0}$ iar $f(\hat{m})=m\cdot f(\hat{1})=m\cdot\overline{a}=m\cdot\overline{1}$, cu necesitate $\overline{m}=\overline{0}$ (adică n|m). În concluzie, dacă n∤m nu există morfisme unitare de inele de la $\mathbb{Z}_m$ la $\mathbb{Z}_n$ iar în cazul n|m există un unic morfism unitar de inele (definit de condițiile $f(\hat{0})=\overline{0},\ f(\hat{1})=\overline{1}$, …, $f\left(\overset{\wedge}{m-1}\right)=\overline{m-1}$).

Dacă f:$\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_n$ este un morfism de inele (nu neapărat unitare), atunci $f(\hat{1})=\overline{a}\neq\overline{1}$. Din condiția de aditivitate a lui f deducem imediat că $f(\hat{k})=k\cdot\overline{a}$, oricare ar fi 0≤k≤m-1 şi $m\cdot\overline{a}=\overline{0}$ iar din condiția de multiplicitate a lui f

deducem că $\bar{a} = f(\hat{1}) = f(\hat{1}\cdot\hat{1}) = f(\hat{1})^2 = \bar{a}^2$ (adică $\bar{a}$ este idempotent în inelul $\mathbb{Z}_n$).

În concluzie, morfismele de inele neunitare $f:\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_n$ sunt de forma $f(\hat{k}) = k\cdot\bar{a}$, cu $\bar{a}\in\mathbb{Z}_n$ idempotent ($0\le k\le m-1$), $\bar{a}\neq\bar{1}$ şi $m\cdot\bar{a}=\bar{0}$.

7.8. Fie $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$.

$f(1) = f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right) = f(n)\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$. La fel $g(1) = g\left(n\cdot\frac{1}{n}\right) = g(n)\cdot g\left(\frac{1}{n}\right)$.

Cum $f(1)=g(1)=1_A$ şi $f(n)=g(n)$, pentru orice $n\in\mathbb{Z}$, obţinem $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)$. De aici rezultă că $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m)\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = g(m)\cdot g\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{m}{n}\right)$, oricare ar fi $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$.

7.9. Dacă $a\in U(A)$ atunci există $a'\in A$ a.î. $aa'=a'a=1$. Deducem imediat că $f(a)\cdot f(a')=f(a')\cdot f(a)=1$, adică $f(a)\in U(A')$.

Dacă $a\in N(A)$ atunci există $n\in\mathbb{N}$ a.î. $a^n=0$. Deducem imediat că $f^n(a)=0$, adică $f(a)\in N(A')$.

Dacă $a\in A$ este divizor al lui zero atunci există $a'\in A^*$ a.î. $aa'=0$. Deducem imediat că $f(a)\cdot f(a')=0$, adică $f(a)$ este divizor al lui zero în A' (căci f fiind injecţie, $f(a')\neq 0$).

7.10. Să presupunem, prin absurd, că există un izomorfism de inele $\varphi:I\to I'$. Atunci avem proprietatea:

oricare ar fi $f\in I$, $f\ge 0 \Rightarrow \varphi(f)\ge 0$. (1)

Într-adevăr, dacă $f\in I$, $f\ge 0$, putem scrie:

$$\varphi(f) = \varphi(\sqrt{f}\cdot\sqrt{f}) = \varphi(\sqrt{f})\cdot\varphi(\sqrt{f}) = \varphi(\sqrt{f})^2 \ge 0.$$

Vom arăta acum că $\varphi(a)=a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, relaţie ce trebuie interpretată prin aceea că φ invariază toate funcţiile constante (pentru simplitate am notat cu a funcţia constantă $f_a:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=a$, oricare ar fi $x\in[0,1]$). Din aceea că φ este morfism unitar de inele rezultă că $\varphi(1)=1$ şi apoi rezultă uşor că $\varphi(a)=a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{Q}$. Dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, există (a_n'), (a_n'') şiruri de numere raţionale, convergente la a, a.î. $a_n'<a<a_n''$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Aplicând morfismul φ şi ţinînd seama că φ este funcţie crescătoare (datorită lui (1)) rezultă că $\varphi(a_n')\le\varphi(a)\le\varphi(a_n'')$, adică $a_n'\le\varphi(a)\le a_n''$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Trecând la limită după n, rezultă φ(a)=a. Vom dovedi acum reciproca lui (1) şi anume:

oricare ar fi f∈I cu φ(f)≥0 ⇒f≥0. (2)

Să presupunem prin reducere la absurd că există $f_0 \in I$, cu $\varphi(f_0)\geq 0$ dar $f_0 \not\geq 0$. Aceasta înseamnă că există $x_0 \in [0, 1]$ cu $f_0(x_0)<0$. Fie $a=\frac{1}{2} f_0(x_0) < 0$ şi să considerăm funcţia $g:[0, 1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f_0(x)-a$.

Evident, $g\in I$ şi $g(x_0)=f_0(x_0)-a=\frac{1}{2} f_0(x_0) < 0$.

Avem apoi $\varphi(g)=\varphi(f_0-a)=\varphi(f_0)-\varphi(a)=\varphi(f_0)-a>0$, unde pentru ultima inegalitate am ţinut cont că $\varphi(f_0)\geq 0$ iar $a<0$.

Să notăm φ(g)=h, deci h∈I´ şi h>0. Atunci $\sqrt{h} \in I'$ şi cum φ este surjectiv există u∈I a.î. $\varphi(u)=\sqrt{h}$.

Rezultă $\varphi(u^2)=\varphi(u)\varphi(u)=\sqrt{h}\cdot\sqrt{h}=h=\varphi(g)$ şi folosind faptul că φ este injectiv obţinem $g=u^2$, contradicţie, căci $g(x_0)<0$. Aşadar implicaţia (2) este adevărată. Fie acum f∈I´, $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$. Avem evident f≥0 şi folosind surjectivitatea lui φ, deducem că există s∈I cu φ(s)=f. Din (2) avem s≥0. Evident, $\sqrt{s} \in I$ şi avem $\varphi^2(\sqrt{s})=\varphi(\sqrt{s})\varphi(\sqrt{s})=\varphi(s)=f$. Atunci $\varphi\left(\sqrt{s}\right)=\sqrt{f}$, ceea ce arată că $\sqrt{f} \in I'$. Ar însemna că funcţia $x\to\left|x-\frac{1}{2}\right|$ este derivabilă pe [0, 1], ceea ce este o contradicţie. Rezultă că cele două inele nu pot fi izomorfe.

7.11. Nu are loc nici o implicaţie.

Pentru $p_4:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_4$, $p_4(x)=[x]_4$, avem $p_4(2)=[2]_4$, unde $[2]_4\in\mathbb{Z}_4$ este divizor al lui zero ($[2]_4\cdot[2]_4=[0]_4$) dar $2\in\mathbb{Z}$ nu este divizor al lui zero.

Invers, fie $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_3$, $f([x]_6)=[x]_3$.

Evident, $f([2]_6)=[2]_3$ şi $[2]_6$ este divizor al lui zero în $\mathbb{Z}_6$ iar $[2]_3\in\mathbb{Z}_3$ nu este divizor al lui zero (acesta este corp şi $[2]_3\neq[0]_3$).

Observaţie. Am notat $[x]_n$ clasa lui x în $\mathbb{Z}_n$.

7.12. (i)⇒(ii). Fie e∈A un element idempotent diferit de 0 şi 1.

Atunci f:A→A/(e)×A/(1-e) definită prin f(a)=(a+(e), a+(1-e)) este izomorfism de inele. Într-adevăr, din f(a)=(0, 0) rezultă a∈(e) şi a∈(1-e), adică

a=es=(1-e)t. Deducem ea=e^2s=es=a şi ea=e(1-e)t=0. Deci a=0, ceea ce arată că f este injecție.

Dacă x şi y sunt elemente arbitrar alese, atunci pentru a=(1-e)x+ey avem f(a)=(a+(e), a+(1-e))=((1-e)x+(e), ey+(1-e))=(x-ex+(e), -y(1-e)+y+ +(1-e))=(x+(e), y+(1-e)), deci f este surjecție şi avem (i)⇒ (ii).

(ii)⇒(i). Reciproc, e′=(1, 0) este element idempotent în B×C diferit de (0, 0) şi de (1, 1). Elementul e∈A corespunzător lui e′ este idempotent diferit de 1 şi 0. Deci (ii)⇒(i).

7.13. (i). Înmulțind între ele matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ obținem $A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=B$ şi $B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$, ceea ce arată că inelul $T_2(\mathbb{Z})$ nu este comutativ.

Să presupunem că matricea $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\in T_2(\mathbb{Z})$ comută cu toate elementele lui $T_2(\mathbb{Z})$. Din relația $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\cdot A=A\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ obținem b=0, apoi din relația $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\cdot B=B\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ obținem a=c. Constatăm imediat că centrul lui $T_2(\mathbb{Z})$ este format din matricele $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$, cu $a\in\mathbb{Z}$. De altfel, centrul lui $T_2(\mathbb{Z})$ coincide cu centrul lui $M_2(\mathbb{Z})$.

(ii). Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}a' & b'\\ 0 & c'\end{pmatrix}$ două elemente din $T_2(\mathbb{Z})$.

Întrucât $X+Y=\begin{pmatrix}a+a' & b+b'\\ 0 & c+c'\end{pmatrix}$ şi $X\cdot Y=\begin{pmatrix}aa' & ab'+bc'\\ 0 & cc'\end{pmatrix}$ observăm că :

$$\varphi(X+Y)=(a+a', c+c')=(a, c)+(a', c')=\varphi(X)+\varphi(Y) \text{ iar}$$
$$\varphi(X\cdot Y)=(aa', cc')=(a, c)\cdot(a', c')=\varphi(X)\cdot\varphi(Y).$$

Deci φ este morfism de inele. Nucleul său, Ker(φ), este format din matricele $\begin{pmatrix}0 & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, cu $d\in\mathbb{Z}$. Observăm că :

$$\begin{pmatrix}0 & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & dc\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\text{Ker}(\varphi) \text{ şi } \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & ad\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\text{Ker}(\varphi).$$

Nucleul Ker(φ) este un exemplu de ideal bilateral al inelului $T_2(\mathbb{Z})$.

7.14. (i). Faptul că A_k este inel comutativ față de adunarea şi înmulțirea matricelor se probează imediat.

(ii). Vom demonstra că A_k are divizori ai lui zero dacă şi numai dacă k este pătrat perfect.

Să presupunem mai întâi că A_k are divizori ai lui zero şi fie $X_1=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ kb_1 & a_1 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ kb_2 & a_2 \end{pmatrix}$ două matrice nenule din inelul A_k, cu proprietatea că $X_1 \cdot X_2=O_2$, (1). Avem $b_1 \neq 0$, căci dacă am presupune $b_1=0$, cum $X_1 \neq O_2$ trebuie ca $a_1 \neq 0$ şi atunci din (1) rezultă că $\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 \\ ka_1b_2 & a_1a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $a_2=b_2=0$, adică $X_2=O_2$, contradicție cu presupunerea făcută. Analog $b_2 \neq 0$.

Din (1) obținem $\det X_1 \cdot \det X_2=0$, deci $\det X_1=0$ sau $\det X_2=0$.

Rezultă $k=\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2$ sau $k=\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2$, deci k este pătratul unui număr rațional. Cum k este întreg, rezultă că este pătratul unui număr întreg, deci k este pătrat perfect.

Reciproc, dacă k este pătrat perfect, luând $X_1=\begin{pmatrix} \sqrt{k} & 1 \\ k & \sqrt{k} \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} -\sqrt{k} & 1 \\ k & -\sqrt{k} \end{pmatrix}$, avem $X_1 \neq O_2$, $X_2 \neq O_2$ şi $X_1X_2=O_2$, ceea ce înseamnă că inelul A_k are divizori ai lui zero.

(iii). Să presupunem că există un izomorfism de inele $\varphi : A_k \to A_p$. Considerăm matricea $X_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix} \in A_k$ şi imagine sa $Y_0=\varphi(X_0)=\begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix} \in A_p$. Demonstrăm că în mod necesar avem $b \neq 0$. Într-adevăr dacă am admite că $b=0$, atunci $Y_0=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}=a \cdot I_2$ şi luând o matrice arbitrară $X=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ k\beta & \alpha \end{pmatrix} \in A_k$ putem scrie $X=\alpha I_2+\beta X_0$ şi atunci

$$\varphi(X)=\alpha\varphi(I_2)+\beta\varphi(X_0)=\alpha I_2+\beta Y_0=\alpha I_2+\beta a I_2=(\alpha+\beta a)I_2,$$

ceea ce arată că φ nu ar fi surjectiv, contradicție.

Observăm că matricea aleasă X_0 verifică egalitatea $X_0^2=kI_2$ şi de aici, aplicând izomorfismul φ obținem $Y_0^2=kI_2$, ceea ce se scrie echivalent:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+pb^2 & 2ab \\ 2pab & a^2+pb^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+pb^2 = k \\ 2ab = 0 \end{cases}. \quad (2)$$

Deoarece $b \neq 0$ din a doua egalitate din (2) rezultă $a=0$, a.î. introducând în prima obținem $pb^2=k$. Aceasta arată că $p \mid k$ şi mai mult, au şi acelaşi semn. Analog, considerând izomorfismul invers $\varphi^{-1}:A_p \to A_k$, vom obține $k|p$. În concluzie $k=p$.

Reciproc, pentru $k=p$ avem egalitatea $A_k=A_p$ şi atunci morfismul identic este un automorfism al inelului A_k.

7.15. (i). Aplicația $\varphi:\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,] \to A_d$ definită prin $\varphi(m+n\sqrt{d}\,)=\begin{pmatrix} m & n \\ dn & m \end{pmatrix}$ este un izomorfism de inele.

(ii). „$\Leftarrow$”. Dacă $d=d'$ atunci inelele $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ şi $\mathbb{Z}[\sqrt{d'}\,]$ coincid, deci sunt evident izomorfe.

„$\Rightarrow$”. Fie $f: \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,] \to \mathbb{Z}[\sqrt{d'}\,]$ un izomorfism de inele şi presupunem prin reducere la absurd că $d \neq d'$. Din $f(0)=0$ şi $f(1)=1$ rezultă $f(a)=a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$. Dacă $x=a+b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ atunci $f(x)=a+bf(\sqrt{d}\,)$.

Fie $f(\sqrt{d}\,)=m+n\sqrt{d'}$ cu $m, n \in \mathbb{Z}$.

Deci $d=f(d)=f(\sqrt{d}\cdot\sqrt{d}\,)=(m+n\sqrt{d'}\,)^2=m^2+n^2d'+2mn\sqrt{d'}$.

De aici obținem $2mn=0$ şi $d=m^2+n^2d'$, relații care conduc la o contradicție atât în cazul $m=0$ cât şi în cazul $n=0$.

7.16. Fie $P, Q \in P(M)$. Diferența simetrică $P\Delta Q=(P\cup Q)-(P\cap Q)$ poate fi scrisă şi ca $P\Delta Q=(P\cap C_M Q)\cup(Q\cap C_M P)$.

Pentru a arăta că Δ este operație asociativă probăm că $(P\Delta Q)\Delta R=(P\cap Q\cap R)\cup(P\cap C_M Q\cap C_M R)\cup(C_M P\cap Q\cap C_M R)\cup(C_M P\cap C_M Q\cap R)=$ $=P\Delta(Q\Delta R)$. (fie prin dublă incluziune, fie cu ajutorul proprietăților funcției caracteristice).

Comutativitatea este evidentă. Mulțimea vidă este elementul nul, căci $P\Delta\emptyset=P$. Deoarece $P\Delta P=\emptyset$, rezultă că inversul lui P este chiar P.

Pe de altă parte, intersecția este asociativă şi are pe M ca element neutru. Se observă imediat că $P\cap(Q\Delta R)=(P\cap Q)\Delta(P\cap R)$, oricare ar fi $P, Q, R \in P(M)$, adică $\cap$ este distributivă față de Δ.

Deci (P(M), Δ, ∩) este inel (comutativ). În acest inel P∩P=P, oricare ar fi P∈P(M), adică orice element este idempotent, deci P(M) este inel boolean.

Pentru a doua parte, fie M={1, 2, .., m} cu m≥1.

Dacă $x\in \underbrace{Z_2\times\ldots\times Z_2}_{de\ m\ ori}$, $x=(\hat{i}_1,\ldots,\hat{i}_m)$, definim $M_x=\{k \mid \hat{i}_k\neq\hat{0}\}\in P(M)$.

Se observă că $M_x\Delta M_y=M_{x+y}$ şi $M_x\cap M_y=M_{xy}$ iar aplicaţia $\varphi:\underbrace{Z_2\times\ldots\times Z_2}_{de\ m\ ori}\to P(M)$, $\varphi(x)=M_x$ este bijectivă.

Elementul neutru pentru Δ este Ø, iar elementul neutru pentru ∩ este M.

Dacă X, Y, Z∈P(M), există x, y, $z\in\underbrace{Z_2\times\ldots\times Z_2}_{de\ m\ ori}$ a.î. φ(x)=X, φ(y)=Y, φ(z)=Z. Avem:

$$(X\Delta Y)\Delta Z=(M_x\Delta M_y)\Delta M_z=M_{x+y}\Delta M_z=M_{(x+y)+z}=M_{x+(y+z)}=M_x\Delta M_{y+z}=$$
$$=M_x\Delta(M_y\Delta M_z)=X\Delta(Y\Delta Z)$$ şi
$$X\cap(Y\Delta Z)=M_x\cap(M_y\Delta M_z)=M_x\cap M_{y+z}=M_{x(y+z)}=M_{xy+xz}=M_{xy}\Delta M_{xz}=$$
$$=(X\cap Y)\Delta(X\cap Z).$$

Analog se verifică şi celelalte axiome ale inelului.

Cum φ este bijectivă şi
$$\varphi(x+y)=M_{x+y}=M_x\Delta M_y=\varphi(x)\Delta\varphi(y)$$
$$\varphi(xy)=M_{xy}=M_x\cap M_y=\varphi(x)\cap\varphi(y),$$
avem că inelul (P(M), Δ, ∩) este izomorf cu inelul $(\underbrace{Z_2\times\ldots\times Z_2}_{de\ m\ ori}, +, \cdot)$.

7.17. Conform problemei **6.45.** avem x+x=0 şi xy=yx, oricare ar fi x, y∈A.

Pe A introducem relaţia binară „≤": a≤b ⇔ a=ab, care este o relaţie de ordine pe A. Elementele minimale ale mulţimii $A^*=A\setminus\{0\}$ le vom numi *atomi*. Aşadar, un element a∈A, a≠0 este atom al lui A dacă din x≤a, cu x≠0, rezultă x=a, ceea ce revine la: x=xa, x≠0 ⇒ x=a.

Dacă a_1 şi a_2 sunt doi atomi distincţi, atunci $a_1a_2=0$.

Într-adevăr, fie $x=a_1a_2$. Dacă x≠0, din $xa_1=a_1a_2a_1=a_1a_2=x$ şi $xa_2=x$ rezultă că $a_1=x=a_2$, contradicţie cu faptul că a_1, a_2 sunt distincţi.

Cum A este o mulțime finită, rezultă imediat că pentru orice $b\in A$, $b\neq 0$, există un atom a a.î. $a\leq b$.

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_m$ atomi distincți doi cîte doi ai lui A. Avem $a_1+\ldots+a_m=1$. Într-adevăr, în caz contrar avem $b\neq 0$, unde $b=a_1+\ldots+a_m+1$. Să demonstrăm acest lucru.

Fie a un atom al lui A a.î. $a\leq b$. Există $k\in\{1, .., m\}$ a.î. $a=a_k$ şi atunci $a=a_k=a_kb=a_k(a_1+\ldots+a_m+1)=a_k^2+a_k=a_k+a_k=0$, contradicție. Deci obligatoriu $b=0$, adică $a_1+\ldots+a_m=1$.

Fie $x\in A$. Din $(xa_k)a_k=x\,a_k^2=xa_k$ rezultă că $xa_k=0$ sau $xa_k=a_k$ şi cum $x=x\cdot 1=x(a_1+\ldots+a_m)=xa_1+\ldots+xa_m$, se deduce că orice $x\in A$ se reprezintă în mod unic sub forma $x=i_1a_1+\ldots+i_ma_m$, $0\leq i_k<2$.

Definim $f:A\to \underbrace{Z_2\times\ldots\times Z_2}_{de\ m\ ori}$, $f(x)=\left(\hat{i}_1,\ldots,\hat{i}_m\right) \Leftrightarrow x=\sum_{k=1}^{m} i_k a_k$, $0\leq i_k<2$.

Dacă $x, y\in A$, $x=\sum_{k=1}^{m} i_k a_k$, $y=\sum_{k=1}^{m} j_k a_k$, $0\leq i_k, j_k<2$, atunci:

$$x+y=\sum_{k=1}^{m}(i_k+j_k)a_k=\sum_{k=1}^{m}(i_k\oplus j_k)a_k,$$

$$xy=\sum_{s,t} i_s j_t a_s a_t=\sum_{k=1}^{m}(i_k j_k)a_k^2=\sum_{k=1}^{m}(i_k\otimes j_k)a_k,$$

unde „$\oplus$" şi „$\otimes$" sunt simbolurile adunării, respectiv înmulțirii modulo doi.

Rezultă că:

$$f(x+y)=(\hat{i}_1\oplus\hat{j}_1,\ldots,\hat{i}_m\oplus\hat{j}_m)=(\hat{i}_1+\hat{j}_1,\ldots\hat{i}_m+\hat{j}_m)=(\hat{i}_1,\ldots,\hat{i}_m)+(\hat{j}_1,\ldots,\hat{j}_m)=f(x)+f(y)$$

şi analog $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$. Deci f este morfism bijectiv de inele.

7.18. (i).„⇒". Într-un inel boolean A avem $x+x=0$, oricare ar fi $x\in A$, deci în grupul (A, +) ordinul fiecărui element este cel mult 2. Dacă p este prim a. î. $p \mid n$, din teorema lui Cauchy există în (A, +) un element de ordin p. Deci p nu poate fi decât 2 şi dacă singurul divizor prim al lui n este 2 rezultă că $n=2^k$. Se mai poate justifica acest fapt prin inducție după n sau considerând structura de spațiu vectorial a grupului (A, +) peste corpul $\mathbb{Z}_2$.

„⇐”. $A=\mathbb{Z}_2\times\ldots\times\mathbb{Z}_2$ de k ori este un inel boolean (structură de produs direct de inele) iar această structură se transportă izomorf pe orice mulțime cu 2^k elemente (vezi problema **7.17.**).

(ii). Fie $B=\{X\subset\mathbb{N} \mid X \text{ este mulțime finită}\}$ şi $C=\{X\subset\mathbb{N} \mid C_{\mathbb{N}}X \text{ este mulțime finită}\}$. Avem $B\cap C=\emptyset$ şi notăm $A=B\cup C$. Se arată uşor că $(A, \Delta, \cap)$ este inel boolean, unde Δ este diferența simetrică, adică $X\Delta Y=(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)$. Definim $f:A\to\mathbb{N}$ prin $f(\emptyset)=0$, $f(\mathbb{N})=1$, $f(X)=\prod_{x\in X} p_x$, dacă $X\in B\setminus\{\emptyset\}$ şi $f(X)=\prod_{x\in C_N X} p_x^2$, dacă $X\in C\setminus\{\mathbb{N}\}$, unde $p_0<p_1<\ldots<p_n<\ldots$ reprezintă şirul numerelor prime pozitive. Se arată uşor că f este injectivă şi fie $\text{Im}(f)=\{n_0, n_1, \ldots, n_k, \ldots\}$. Atunci funcția $g:A\to\mathbb{N}$, $g(X)=k$ dacă $f(X)=n_k$, este bijectivă şi cu ajutorul funcției g transportăm stuctura de inel boolean de la A la $\mathbb{N}$.

7.19. Fie A inelul părților lui E cu operațiile date. Dacă F este o submulțime a lui E notăm prin $\varphi_F:E\to\mathbb{Z}_2$ funcția caracteristică a lui F definită prin:

$$\varphi_F(x)=\begin{cases}\hat{0}, & \text{pentru } x\notin F\\ \hat{1}, & \text{pentru } x\in F\end{cases}.$$

Această asociere $F\rightsquigarrow\varphi_F$ defineşte o aplicație de la A la $\mathbb{Z}_2^E$. În plus, φ este morfism de inele unitare. Într-adevăr avem identitățile: $\varphi_\emptyset=0$, $\varphi_E=1$, (adică funcția nulă, respectiv funcția constantă $\hat{1}$) $\varphi_{E_1+E_2}=\varphi_{E_1}+\varphi_{E_2}$, $\varphi_{E_1\cdot E_2}=\varphi_{E_1}\cdot\varphi_{E_2}$.

Observăm acum că întrucât elementele lui $\mathbb{Z}_2$ sunt idempotente, rezultă că şi elementele lui $\mathbb{Z}_2^E$ sunt idempotente. Evident,

$$P(M\cup N)\cong\prod_{i\in M\cup N}(Z_2)_i=\prod_{i\in M}(Z_2)_i\times\prod_{i\in N}(Z_2)_i\cong P(M)\times P(N),$$

unde $(\mathbb{Z}_2)_i=\mathbb{Z}_2$.

7.20. Fie $f:\mathbb{Z}\to A$ un morfism de inele, atunci $x=f(1)$ este idempotent în A. Într-adevăr, $x^2=f(1)\cdot f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)=x$. Această asociere $f\rightsquigarrow f(1)$ defineşte o aplicație φ de la morfismele de inele definite pe $\mathbb{Z}$ cu valori în A, în mulțimea idempotenților lui A.

φ este injectivă pentru că φ(f)=φ(g) înseamnă f(1)=g(1), ceea ce implică $f(n)=f(\underbrace{1+\ldots+1}_{de\ n\ ori})=\underbrace{f(1)+\ldots+f(1)}_{de\ n\ ori}=\underbrace{g(1)+\ldots+g(1)}_{de\ n\ ori}=g(\underbrace{1+\ldots+1}_{de\ n\ ori})=g(n)$,

pentru orice n∈ℕ (f şi g sunt morfisme de inele :ℤ→A).

Cum f(-n)=-f(n)=-g(n)=g(-n) deducem că f şi g coincid şi pe numerele întregi negative, deci f=g.

φ este şi surjectivă. Într-adevăr, dacă $e^2=e\in A$ atunci considerăm aplicaţia f:ℤ→A definită prin f(n)=n·e. Se arată uşor că f este morfism de inele. În plus, f(1)=e.

Evident $e^2=e$, adică e(e-1)=0 are loc într-un domeniu de integritate numai pentru 0 şi 1. Cum orice domeniu de integritate are doar două elemente idempotente, deducem că mulţimea morfismelor de la ℤ într-un domeniu de integritate are două elemente (unul este morfismul nul).

7.21. (i). Suma a două morfisme de grupuri f, g:G→G este definită prin (f+g)(x)=f(x)+g(x), oricare ar fi x∈G. Faptul că f+g:G→G este morfism de grupuri rezultă din comutativitatea grupului G. Această adunare este comutativă şi asociativă. Elementul nul este morfismul nul 0:G→G, 0(x)=0, oricare ar fi x∈G. Compunerea morfismelor este asociativă şi distributivă faţă de adunare iar elementul unitate este funcţia identică 1_G (evident un morfism de grupuri).

(ii). Dacă End(A) este izomorf cu A, atunci evident End(A) este inel comutativ.

Reciproc, să presupunem că End(A) este inel comutativ, în raport cu adunarea şi compunerea morfismelor. Fie x∈A. Notăm φ_x:A→A funcţia definită prin $\varphi_x(y)=y\cdot x$, oricare ar fi y∈A. Datorită distributivităţii înmulţirii faţă de adunare în inelul A avem $\varphi_x(y+z)=(y+z)\cdot x=y\cdot x+z\cdot x=\varphi_x(y)+\varphi_x(z)$, deci φ_x este element din End(A).

De asemenea $(\varphi_y\circ\varphi_x)(z)=\varphi_y(z\cdot x)=(z\cdot x)\cdot y=z\cdot(x\cdot y)=\varphi_{x\cdot y}(z)$.

Întrucât din ipoteză inelul End(A) este comutativ avem $\varphi_x\circ\varphi_y=\varphi_y\circ\varphi_x=\varphi_{x\cdot y}$

Fie f un element oarecare din End(A). Folosind ipoteza de comutativitate a compunerii deducem

$f(x)=f(1\cdot x)=f(\varphi_x(1))=\varphi_x(f(1))=x\cdot f(1)=\varphi_{f(1)}(x)$, ceea ce înseamnă că f este perfect determinat de imaginea f(1) a elementului unitate din A şi coincide cu $\varphi_{f(1)}$.

Să considerăm funcţia α:A→End(A), descrisă prin $\alpha(x)=\varphi_x$.

Această funcție este, conform observației anterioare, surjectivă. Dacă $\alpha(x)=\alpha(y)$ atunci în particular $\varphi_x(1)=\varphi_y(1)$, de unde $x=y$; aşadar α este injectivă. Am stabilit anterior că $\alpha(x\cdot y)=\varphi_{x\cdot y}=\varphi_x\circ\varphi_y=\alpha(x)\circ\alpha(y)$ iar $\alpha(x+y)=\alpha(x)+\alpha(y)$, după cum se constată imediat. Aşadar α este izomorfism de inele.

Dacă $(A,+,\cdot)$ este un inel (unitar) oarecare, iar $(A,+)$ este grupul aditiv subiacent al său, putem considera funcția $\alpha:A\to End(A)$ definită prin $\alpha(x)=\varphi_x$, cu $\varphi_x(y)=y\cdot x$, oricare ar fi $y\in A$. Această funcție este injectivă dar poate să nu fie surjectivă. De asemenea, $\alpha(x\cdot y)=\alpha(y)\circ\alpha(x)$.

7.22. Conform problemei **7.21.** inelul $End(\mathbb{Z})$ este izomorf cu $\mathbb{Z}$.

Pentru simplitate luăm $n=2$ (cazul general tratându-se asemănător).

Considerăm proiecțiile canonice $p_1:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ şi $p_2:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ date prin $p_1((a, b))=a$, $p_2((a, b))=b$. Acestea sunt morfisme de inele, deci şi de grupuri definite pe G cu valori în $\mathbb{Z}$.

De asemenea considerăm injecțiile canonice $i_1:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ şi $i_2:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ date prin $i_1(a)=(a, 0)$ şi $i_2(a)=(0, a)$. Şi acestea sunt morfisme de grupuri definite pe $\mathbb{Z}$ cu valori în G.

Au loc relațiile: $p_1\circ i_1=1_{\mathbb{Z}}$, $p_1\circ i_2=0$, $p_2\circ i_1=0$, $p_2\circ i_2=1_{\mathbb{Z}}$, $i_1\circ p_1+ i_2\circ p_2=1_G$.

Construim o funcție $\varphi:End(G)\to M_2(End(\mathbb{Z}))$ astfel:

Dacă $f:G\to G$ este morfism de grupuri atunci apar patru morfisme de grupuri $p_k\circ f\circ i_l : \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ pe care le scriem într-o matrice pătratică de ordinul doi: $\begin{pmatrix} p_1\circ f\circ i_1 & p_1\circ f\circ i_2 \\ p_2\circ f\circ i_1 & p_2\circ f\circ i_2 \end{pmatrix}$. Definind $\varphi(f)=(f_{kl})$ unde $f_{kl}=p_k\circ f\circ i_l$, se verifică imediat că φ este izomorfism de inele.

7.23. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel care este domeniu de integritate şi $(A^*, \cdot)$ grupul unităților sale (mulțimea elementelor inversabile ale lui A). Dacă $a\in A^*$ atunci $-a\in A^*$. Într-adevăr, $a\in A^* \Rightarrow$ există $a^{-1}\in A^*$ a.î. $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$, unde 1 este unitatea inelului A, adică a grupului $(A^*, \cdot)$ şi deci $(-a)(-a^{-1})=aa^{-1}=1$, $(-a^{-1})(-a)=a^{-1}a=1$. În particular, $-1\in A^*$.

Presupunem că $(A, +)\simeq(A^*, \cdot)$, adică există o bijectie $f:A\to A^*$ cu $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x, y\in A$. Deoarece $-1\in A^*$ şi f este izomorfism rezultă că există un $x\in A$ a.î. $f(x)=-1$. Se mai ştie că $f(0)=1$.

Avem $f(x+x)=f(x)\cdot f(x)=(-1)\cdot(-1)=1=f(0)$ şi cum f este bijectivă rezultă că $x+x=0 \Leftrightarrow (1+1)x=0$ şi cum A este integru rezultă $x=0$ sau $1+1=0\Leftrightarrow 1=-1$.

Prin urmare, oricare ar fi $y\in A$ avem $y+y=(1+1)y=0$ şi deci $f^2(y)=f(y+y)=f(0)=1$, oricare ar fi $y\in A \Leftrightarrow [f(y)-1][f(y)+1]=0$, oricare ar fi $y\in A \Leftrightarrow f(y)=1$ sau $f(y)=-1$ şi deoarece $1=-1$ rezultă că $f(y)=1$, oricare ar fi $y\in A$.

Deci $f(A)=\{1\}$ şi cum f este surjectivă rezultă că $A^*=\{1\}$ şi deoarece f este bijecție rezultă $\text{card}A=\text{card}A^*=1$. Acesta este un rezultat contradictoriu deoarece $0, 1\in A$ şi deci $\text{card}A\geq 2$. Prin urmare $(A, +)\not\simeq(A^*, \cdot)$.

7.24. Se consideră mulțimile:

$$A_1=\{y\in A \mid f(xy)=f(x)f(y), \text{ oricare ar fi } x\in A\}$$

$$A_2=\{y\in A \mid f(xy)=f(y)f(x), \text{ oricare ar fi } x\in A\}.$$

Din ipoteza 1) rezultă că f este morfism de la grupul (A, +) la grupul (B, +), deci $f(0_A)=0_B$. Atunci se vede uşor că $0_A\in A_1$, $0_A\in A_2$ deci A_1 şi A_2 sunt nevide.

Arătăm că A_1 este subgrup al grupului aditiv (A, +).

Într-adevăr, dacă $y_1, y_2\in A_1$ avem pentru orice $x\in A$: $f(x(y_1-y_2))=$ $=f(xy_1-xy_2)=f(xy_1)-f(xy_2)=f(x)f(y_1)-f(x)f(y_2)=f(x)[f(y_1)-f(y_2)]=f(x)f(y_1-y_2)$, ceea ce arată că $y_1-y_2\in A_1$. Analog se arată că A_2 este subgrup al grupului (A, +). Vom arăta acum egalitatea $A=A_1\cup A_2$. (*) Deoarece incluziunea $A\supseteq A_1\cup A_2$ este evidentă, rămâne să dovedim incluziunea $A\subseteq A_1\cup A_2$. Fie $y_0\in A$ fixat.

Considerăm mulțimile:

$$C_1(y_0)=\{x\in A \mid f(xy_0)=f(x)f(y_0)\}$$

$$C_2(y_0)=\{x\in A \mid f(xy_0)=f(y_0)f(x)\}.$$

Ca şi mai înainte, se arată că $C_1(y_0)$ şi $C_2(y_0)$ sunt subgrupuri ale grupului (A, +). Evident avem incluziunea $C_1(y_0)\cup C_2(y_0)\subseteq A$. Dar, datorită ipotezei 2), pentru orice $x\in A$ avem $f(xy_0)=f(x)f(y_0)$ sau $f(xy_0)=f(y_0)f(x)$, adică $x\in C_1(y_0)$ sau $x\in C_2(y_0)$, deci $x\in C_1(y_0)\cup C_2(y_0)$. Aceasta înseamnă că $A\subseteq C_1(y_0)\cup C_2(y_0)$, deci de fapt, $C_1(y_0)\cup C_2(y_0)=A$. (**)

Dar grupul A nu poate fi scris ca reuniunea a două subgrupuri proprii, deci în egalitatea (**) avem $A=C_1(y_0)$ sau $A=C_2(y_0)$. Dacă $A=C_1(y_0)$, rezultă că pentru orice $x\in A$ avem $f(xy_0)=f(x)f(y_0)$, deci $y_0\in A_1$. Dacă $C_2(y_0)=A$, rezultă că pentru orice $x\in A$ avem $f(xy_0)=f(y_0)f(x)$, deci $y_0\in A_2$.

Am arătat aşadar că $y_0\in A_1\cup A_2$ şi cum y_0 a fost arbitar fixat în A, deducem că $A\subseteq A_1\cup A_2$ şi deci avem (*). Dar A nu se poate scrie ca reuniune de două subgrupuri proprii şi atunci din (*) trebuie să avem $A=A_1$ sau $A=A_2$. Dacă $A=A_1$ rezultă că f este morfism de inele, iar dacă $A=A_2$ rezultă că f este antimorfism de inele.

§8. Ideale. Laticea idealelor unui inel comutativ. Anulatorul şi radicalul unui inel. Factorizarea unui inel printr-un ideal bilateral. Ideale prime. Ideale maximale.

8.1. În inelul $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $\mathbb{Z}$ este subinel fără a fi însă ideal (deoarece de exemplu $2\in\mathbb{Z}$ iar pentru $\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$, $2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\notin\mathbb{Z}$).

8.2. Alegem inelul $\mathbb{Z}$ şi idealele $2\mathbb{Z}$ şi $3\mathbb{Z}$. Deoarece $3-2=1\notin 2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$ deducem că $2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$ nu este ideal al lui $\mathbb{Z}$.

8.3. Dacă $(I_k)_{k\in K}$ este o famile de ideale ale lui A, atunci $\underset{k\in K}{\wedge} I_k = \bigcap_{k\in K} I_k$ iar $\underset{k\in K}{\vee} I_k = \left(\bigcup_{k\in K} I_k\right)$.

8.4. (i). P este subinel fără a fi ideal (deoarece dacă $f\in P$ şi $g\in A$,

$$g(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

atunci $f\cdot g$ are o infinitate de zerouri, deci $f\cdot g\notin P$).

(ii), (iii). Analog ca la (i), P_n şi Q_n sunt doar subinele ale lui A fără a fi însă ideale (cu acelaşi argument ca la (i)).

(iv). B este ideal al lui A.

(v). C este doar subinel al lui A fără a fi însă ideal (căci dacă alegem $f\in C$, $f(x)=x+1$, $g\in A$, $g(x)=x$, atunci $(f\cdot g)(0)=0$, deci $f\cdot g\notin C$.).

8.5. Considerăm de exemplu divizorii lui zero din inelul $\mathbb{Z}_6$. Evident, $\hat{2}$ şi $\hat{3}$ sunt divizori ai lui zero dar nu şi $\hat{3}-\hat{2}=\hat{1}$.

8.6. Luăm $i:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, $i(n)=n$, pentru orice $n\in\mathbb{Z}$.

Evident, $\mathbb{Z}$ este ideal (impropriu) al lui $\mathbb{Z}$ şi $i(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ nu este ideal în $\mathbb{Q}$.

8.7. (i). Pentru a arăta că A_1 este subinel al lui A verificăm că oricare ar fi $ux, uy\in A_1$, $ux-uy\in A_1$ şi $(ux)(uy)\in A_1$.

Observăm că $ux-uy=u(x-y)\in A_1$, $(ux)\cdot(uy)=u^2xy=u(xy)\in A_1$, oricare ar fi $x, y\in A$, deci A_1 este subinel al lui A.

(ii). Fie $A_2=(1-u)A=\{(1-u)x \mid x\in A\}$. Deoarece $1-u\notin\{0,1\}$ şi $(1-u)^2=(1-u)(1-u)=1-2u+u^2=1-2u+u=1-u$, rezultă conform celor de mai sus că A_2 este subinel al lui A.

b) Evident orice element $x\in A$ se scrie $x=x_1+x_2$ cu $x_1=ux\in A_1$ şi $x_2=(1-u)x\in A_2$.

c) Fie $x_1\in A_1$ şi $x_2\in A_2$. Atunci există $x'_1\in A$ a.î. $x_1=ux'_1$ şi există $x'_2\in A$ a.î. $x_2=(1-u)x'_2$, $x_1x_2=ux'_1(1-u)x'_2=u(1-u)x'_1x'_2=(u-u^2)x'_1x'_2=$ $=0\cdot x'_1x'_2=0$.

d) Fie $y\in A_1\cap A_2$; atunci $y=ux=(1-u)z$ cu $x,z\in A$. Atunci $y=ux=u^2x=u(ux)=uy=u(1-u)z=(u-u^2)z=0\cdot z=0$.

(iii). Din d) rezultă că scrierea lui x sub forma x_1+x_2 cu $x_1\in A_1$ şi $x_2\in A_2$ este unică, deci $f(x)=(x_1, x_2)$, pentru $x=x_1+x_2$ este bine definită. Faptul că $f:A\to A_1\times A_2$, $f(x)=(x_1, x_2)$ pentru $x=x_1+x_2$ (operaţiile din A se efectuează pe componente) este un izomorfism rezultă imediat din c), d) şi din unicitatea scrierii $x=x_1+x_2$. Morfismul invers este $g:A_1\times A_2\to A$, $g(x_1, x_2)=x_1+x_2$.

8.8. Considerăm următoarele patru matrice:

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Între ele există relaţiile $E_{ij}\cdot E_{kl}=\begin{cases}E_{il} & pentru\ \ j=k\\ O_2 & pentru\ \ j\neq k\end{cases}$.

Orice matrice $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ poate fi scrisă sub forma $A=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22}$.

Să presupunem acum că I este un ideal bilateral nenul al inelului $M_2(\mathbb{R})$. În I există deci o matrice nenulă $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$. Produsele $E_{ki}\cdot X\cdot E_{jl}$ aparţin idealului I. Avem $E_{ki}\cdot X\cdot E_{jl}=x_{ij}\cdot E_{kl}$. Evident, nu toate cele patru componente x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} ale matricei X sunt nule. Dacă de exemplu $x_{12}\neq 0$ atunci din $E_{k1}\cdot X\cdot E_{2l}=x_{12}\cdot E_{kl}\in I$, deducem că $a_{kl}E_{kl}=(a_{kl}x_{12}^{-1}E_{kk})(x_{12}E_{kl})\in I$ şi deci $A\in I$. Aşadar I coincide cu $M_2(\mathbb{R})$.

8.9. Alegem A un inel unitar nenul iar $B=M_n(A)$ cu $n\geq 2$ care nu este inel comutativ. Dacă I este mulțimea matricelor din B cu prima coloană formată numai din elemente egale cu zero se verifică imediat că I este un ideal stâng în B ce nu este drept căci

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{I}.$$

Evident, prin schimbarea coloanelor în linii obținem un ideal drept ce nu este stâng.

8.10. Asocierea $d \rightsquigarrow \hat{d}\,\mathbb{Z}_n$ constituie o aplicație u de la laticea divizorilor lui n în laticea idealelor lui $\mathbb{Z}_n$. Evident, dacă d şi d′ sunt divizori ai lui n şi d|d′ atunci $\hat{d}\,\mathbb{Z}_n \supseteq \hat{d'}\,\mathbb{Z}_n$. Deci $u(d)\supseteq u(d')$.

Reciproc, dacă $u(d)\subseteq u(d')$ atunci $\hat{d'}\,\mathbb{Z}_n \subseteq \hat{d}\,\mathbb{Z}_n$ şi deci există $\hat{x}\in\mathbb{Z}_n$ cu $\hat{d}\cdot\hat{x}=\hat{d'}$, adică n|dx-d′. Cum d|n, deducem că d|d′ adică d≺d′.

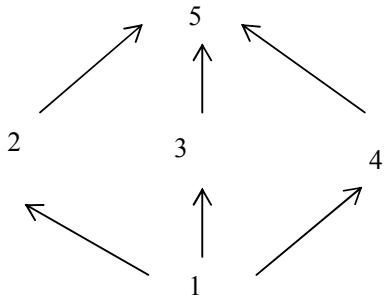
Deci dacă u(d)=u(d′), atunci avem d≺d′ şi d′≺d, de unde rezultă că d=d′. În concluzie u este injectivă.

Fie acum I un ideal în $\mathbb{Z}_n$ şi $d=\inf\{t\in\mathbb{N} \mid t|n \text{ şi } \hat{t}\in I\}$. Vom demonstra că $I=\hat{d}\,\mathbb{Z}_n=u(d)$. Evident, $I\supseteq \hat{d}\,\mathbb{Z}_n$. Pe de altă parte, dacă $\hat{x}\in I$ şi d′=(x, d), atunci există $p, q\in\mathbb{Z}$ cu d′=px+qd, de unde rezultă $\hat{d'}=\hat{p}\hat{x}+\hat{q}\hat{d}\in I$. Cum d′|d, deducem că d=d′. Deci d|x, adică $\hat{x}\in\hat{d}\,\mathbb{Z}_n$ şi atunci $I\subseteq\hat{d}\,\mathbb{Z}_n$. În concluzie I=u(d) şi deci u este surjectivă.

8.11. Vom demonstra că laticea idealelor lui $\mathbb{Z}_n$ este total ordonată dacă şi numai dacă n este de forma p^s, p fiind un număr prim şi s un număr natural. Evident, dacă $n=p^s$, atunci idealele lui $\mathbb{Z}_n$ sunt de forma $(0)\subseteq(\hat{p}^{s-1})\subseteq\dots\subseteq(\hat{p})\subseteq(\hat{1})=\mathbb{Z}_{p^s}$.

Reciproc, dacă n are în descompunerea sa doi factori primi distincți p şi q, atunci laticea divizorilor lui n (deci şi laticea idealelor lui $\mathbb{Z}_n$), (vezi problema **8.10.**) nu este total ordonată.

8.12. Nu. De exemplu, se observă că laticile idealelor lui $\mathbb{Z}_n$ nu pot avea forma:



care este totuşi o latice completă.

Dacă $\mathbb{Z}_n$ are cinci ideale, ţinând cont de descompunerea în factori primi a lui $n = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r}$ şi de problema **8.10.**, deducem că $5 = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1)$, de unde rezultă $r=1$ şi $\alpha_1=4$. Deci n are forma generală p^4, cu p prim. Pe de altă parte, $\mathbb{Z}/p^4\mathbb{Z}$ are laticea idealelor total ordonată, deci nu este de forma de mai sus.

8.13. Fie $f:Id_b(A)\rightarrow Id_b(M_n(A))$ definită prin

$$f(I)=\{(a_{ij}) \mid a_{ij}\in I \text{ pentru orice } i, j\in\{1, .., n\}\}.$$

Se verifică uşor că f(I) este un ideal bilateral şi că f este injectivă.

Fie U un ideal bilateral în $M_n(A)$. Definim pentru $t, s\in\{1, .., n\}$ mulţimile $U_{ts}=\{x\in A \mid \text{există o matrice } (a_{ij}) \text{ în U a.î. } x=a_{ts}\}$. Se verifică uşor că U_{ts} sunt ideale bilaterale în A. Toate aceste ideale coincid, adică $U_{11}=U_{ts}$ pentru orice $t, s\in\{1, \ldots,n\}$.

Într-adevăr, dacă $x\in U_{11}$ atunci există $(a_{ij})\in U$ a.î. $x=a_{11}$.

Notăm prin P_{pq} $(p<q)$ matricea care în poziţiile (t, t) cu $t\neq i, j$ şi în poziţiile (i, j) şi (j, i) are elementul $1\in A$ şi în rest 0.

Evident, prin înmulţirea matricei (a_{ij}) la stânga cu matricea P_{1t} şi la dreapta cu matricea P_{1s} obţinem o matrice care va aparţine lui U şi va conţine elementul x în poziţia (t, s). Deci $x\in U_{ts}$. Analog demonstrăm că $U_{ts}\subseteq U_{11}$.

Notăm $I=U_{ts}$. Vom arăta că $f(I)=U$. Evident, $U\subseteq f(I)$.

Fie acum $(a_{ij})\in f(I)$. Deducem că $a_{ts}\in I=U_{ts}$. Există deci o matrice $B_{ts}\in U$ care conţine elementul a_{ts} pe poziţia (t, s). Notăm cu R_p matricea care are în

poziția (p, p) elementul 1 şi în rest 0. Se observă uşor că avem $(a_{ij}) = \sum_{t,s=1}^{n} R_t B_{ts} R_s \in U$. Deci U=f(I) şi f este bijectivă.

8.14. Suma a două ideale A+B={a+b|a∈A, b∈B} este ideal. Deci n$\mathbb{Z}$+m$\mathbb{Z}$ este ideal. Cum $\mathbb{Z}$ este principal există D∈$\mathbb{Z}$ a.î. n$\mathbb{Z}$+m$\mathbb{Z}$=D$\mathbb{Z}$.

Deci n$\mathbb{Z}$, m$\mathbb{Z}$⊆D$\mathbb{Z}$, adică n, m∈D$\mathbb{Z}$ şi există n′, m′∈$\mathbb{Z}$ a.î. n=Dn′ şi m=Dm′. Rezultă D|n şi D|m.

Dacă avem D′∈$\mathbb{Z}$ a.î. D′|n şi D′|m atunci există n″, m″∈$\mathbb{Z}$ a.î. n=D′n″ şi m=D′m″. Rezultă n, m∈D′$\mathbb{Z}$, adică n$\mathbb{Z}$, m$\mathbb{Z}$⊆D′$\mathbb{Z}$.

Din n$\mathbb{Z}$+m$\mathbb{Z}$⊂D′$\mathbb{Z}$ ⇒ D$\mathbb{Z}$⊂D′$\mathbb{Z}$ ⇒D∈D′$\mathbb{Z}$ ⇒D′|D ⇒D=(n,m).

Intersecția a două ideale este un ideal. Rezultă că n$\mathbb{Z}$∩m$\mathbb{Z}$ este ideal. Cum $\mathbb{Z}$ este principal există M∈$\mathbb{Z}$ a.î. n$\mathbb{Z}$∩m$\mathbb{Z}$=M$\mathbb{Z}$**.**

Cum M∈M$\mathbb{Z}$ ⇒M∈n$\mathbb{Z}$, M∈m$\mathbb{Z}$ ⇒ M este multiplu de m şi n.

Dacă M′∈$\mathbb{Z}$ este un alt multiplu comun al numerelor n şi m atunci M′∈m$\mathbb{Z}$ şi M′∈n$\mathbb{Z}$, adică M′∈n$\mathbb{Z}$∩m$\mathbb{Z}$, deci M′∈M$\mathbb{Z}$. Rezultă M|M′. Deci M=[n,m].

8.15. Incluziunea I+(J∩K)⊆(I+J)∩K este evidentă când I⊆K.

Reciproc, dacă k∈(I+J)∩K, k=i+j cu i∈I , j∈J, k∈K. Atunci j=k-i∈K deoarece I⊆K şi atunci k=i+j∈I+(J∩K).

8.16. Înmulțind egalitatea I+J=A cu L obținem IL+JL=L şi cum IL⊆I, JL⊆I deducem că L⊆I.

8.17. Folosind inducția putem reduce problema la un ideal cu doi generatori, adică $A=Ax_1+Ax_2$. Fiecare element fiind idempotent sunt verificate egalitățile: $x_1=x_1(x_1+x_2-x_1x_2)$ şi $x_2=x_2(x_1+x_2-x_1x_2)$.

Atunci $A=Ax_1+Ax_2=A(x_1+x_2-x_1x_2)$.

8.18. Idealul I fiind finit generat, fie $I=Ae_1+\ldots+Ae_n$.

De asemenea, $I=Ia_1+\ldots+Ia_n$ (sunt verificate IA=I şi $I^2=I$). Atunci pentru fiecare k, $1\le k\le n$ există un element $b_k\in I$ a.î. $(1-b_k)I\subseteq Ia_k+\ldots+Ia_n$.

Se verifică prin inducție după k. Pentru $k=1$ avem $b_1=0$. Dacă $b_k\in I$, alegem un $b_{k+1}\in I$ a.î. $(1-b_{k+1})I\subseteq Ia_{k+1}+\ldots+Ia_n$.

În final, $e=b_{n+1}\in I$ este elementul idempotent căutat.

8.19. Considerăm incluziunea $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}[X,Y]$ şi M idealul maximal al polinoamelor cu termenul liber nul. $f^{-1}(M)=\{0\}\neq\mathbb{Z}$, nu este ideal maximal al lui $\mathbb{Z}$.

Observație. Dacă $f:A\to A'$ este un morfism surjectiv de inele şi M este ideal maximal în A' atunci $f^{-1}(M)$ este ideal maximal în A.

8.20. $\mathbb{Z}$ fiind inel comutativ, idealul $n\mathbb{Z}$ este prim dacă şi numai dacă $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ este domeniu de integritate, adică dacă şi numai dacă $\mathbb{Z}_n$ este domeniu de integritate, adică dacă n este număr prim.

Avem că $2\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$, $5\mathbb{Z}$, …, $p\mathbb{Z}$, … (p prim) sunt ideale prime ale lui $\mathbb{Z}$.

8.21. Fie inelul $\mathbb{Z}$ şi idealul nul $I=(0)=\{0\}$. În mod evident I este prim dar nu este maximal.

8.22. Inelul $\mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z}$ are idealele $(0)\subseteq(\hat{2}^{s-1})\subseteq(\hat{2}^{s-2})\ldots\subseteq(\hat{2})\subseteq(\hat{1})=\mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z}$.

Deci pentru orice $n\geq 1$, inelul $\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z}$ are n ideale. Evident, putem lua orice număr prim p în loc de 2.

8.23. Evident R este subinel: $A,B\in R\Rightarrow A-B\in R$, $A\cdot B\in R$.

Avem $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

Deci R are proprietățile cerute.

$\begin{pmatrix}0&a\\0&b\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&ab\\0&b^2\end{pmatrix}=O_2\Leftrightarrow b=0$, deci $I=\left\{\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}\middle| a\in Q\right\}$.

Pentru $A,B\in I$, $C\in R$ avem $A-B$, CA, $AC\in I$.

În final, $\begin{pmatrix}0&a_1\\0&b_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&a_2\\0&b_2\end{pmatrix}\in I\Leftrightarrow b_1=b_2$.

Aplicația f:R→ℚ, $f\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right)=b$, oricare ar fi b∈ℚ este un morfism surjectiv de inele cu Ker(f)=I. Totul rezultă din teorema fundamentală de izomorfism pentru inele.

8.24. f fiind morfism de inele avem f(I+Ker(f))=f(I), deci I+Ker(f) ⊆ f^{-1}(f(I)). Invers, dacă r∈f^{-1}(f(I)) atunci f(r)=f(a), pentru un anumit a∈I. Deci f(r-a)=0, adică r-a∈Ker(f). Rezultă r∈a+Ker(f)⊆I+Ker(f).

8.25. Pentru funcția normă N:ℤ[i]→ℤ, $N(a+bi)=a^2+b^2$ în ℤ[i], avem N(xy)=N(x)·N(y), oricare ar fi x,y∈ℤ[i].

Unitățile lui ℤ[i] sunt {1, -1, i, -i}, adică acele elemente x∈ℤ[i] pentru care N(x)=1.

Elementul x este prim în ℤ[i] dacă şi numai dacă N(x) este prim în ℤ.

Deci N(1+i)=2 implică faptul că idealul (1+i) este prim.

În continuare vom demonstra că un număr prim p∈$\mathbb{N}^*$ este de asemenea prim în ℤ[i] dacă şi numai dacă ecuația $a^2+b^2=p$ nu are soluții în ℤ.

Astfel, dacă $a^2+b^2=p$ are soluții întregi atunci p=(a+ib)(a-ib) este o descompunere netrivială pentru că N(a+ib)=N(a-ib)=p≠1. Invers, dacă p=(a+ib)(c+id) este o descompunere netrivială, pentru N(a+ib)·N(c+id)=p^2 trebuie să avem N(a+ib)=N(c+id)=p. Produsul (a+ib)(c+id) fiind număr real şi a+ib, c+id având acelaşi modul, a-ib=c+id. Atunci $p=a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$.

În final, $a^2+b^2=3$ nu are soluții întregi dar $a^2+b^2=2$ are soluția a=b=1. Deci (3) este ideal prim iar (2) nu este prim.

8.26. (i)⇒(ii). Presupunem că inelul cît A/P este integru şi prin absurd, că există idealele I şi J a.î. I⊄P şi J⊄P dar IJ⊂P.

Alegem elementele a∈I-P şi b∈J-P. În inelul cît A/P avem $\overline{a},\overline{b}\neq\overline{0}$. Însă ab∈IJ⊂P, deci $\overline{a}\overline{b}=\overline{0}$, se contrazice integritatea inelului A/P.

(ii)⇐(i). Reciproc, fie a, b elemente din A a.î. $\overline{a}\overline{b}=\overline{0}$ în A/P. Notăm I=aA, J=bA. Atunci IJ⊂P, deci I⊂P sau J⊂P. Aceasta înseamnă că $\overline{a}=\overline{0}$ sau $\overline{b}=\overline{0}$, deci A/P este integru.

8.27. Fie J,K ideale ale lui A a.î. $J\not\subset I$ şi $K\not\subset I$. Din maximalitatea lui I deducem că $(J+I)\cap S\neq\emptyset$ şi $(K+I)\cap S\neq\emptyset$. Există atunci $s_1\in(J+I)\cap S$ şi $s_2\in(K+I)\cap S$. S fiind sistem multiplicativ avem $s_1s_2\in S$, deci $s_1s_2\in(J+I)(K+I)\cap S$ şi $s_1s_2\in JK+I$. Atunci $s_1s_2\notin I$ implică $JK\not\subset I$.

8.28. Notăm cu T intersecția idealelor maximale ale lui A[X] şi presupunem că $0\neq f\in T$. Fie M un ideal maximal care include idealul principal (1+Xf).

Un astfel de ideal maximal există deoarece $f\neq 0$ implică 1+Xf nu este inversabil în A[X]. Cum $f\in M$ rezultă $1\in M$, contradicție.

8.29. Fie P un ideal prim în A. Atunci A/P este integru dar cum el este şi finit rezultă că este corp. Deci, P este maximal.

8.30. Fie P un ideal prim şi I un ideal în A a.î. $P\subsetneq I$. Deci există un $x\in I\setminus P$. Cum $x^n=x$, pentru un $n\in\mathbb{N}$ $0=x(x^{n-1}-1)\in P$. Astfel $(x^{n-1}-1)\in P\subsetneq I$ şi cum $x\in I$ obținem $1\in I$, adică $I=A$. Rezultă că P este maximal.

8.31. Considerăm morfismul $\varphi:\mathbb{Z}[X,Y]\to\mathbb{Z}[Y]$ definit prin $\varphi(f)=g_0$ unde $f=g_nX^n+\ldots+g_1X+g_0\in\mathbb{Z}[Y][X]$. Acesta este surjectiv şi $\mathrm{Ker}(\varphi)=(X)$, de unde obținem izomorfismul $\mathbb{Z}[X,Y]/(X)\simeq\mathbb{Z}[Y]$. Cum $\mathbb{Z}[Y]$ este integru dar nu este corp obținem rezultatul cerut.

8.32. (i). Considerăm morfismul compunere $A[X]\to A\to A/(a)$ pe care îl notăm cu φ şi avem pentru $f=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$, $\varphi(f)=a_0+(a)$.

φ este surjectiv şi $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{f=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i \mid a_0\in(a)\}=(X,\ a)$, de unde $A[X]/(X,a)\simeq A/(a)$

(ii). rezultă din (i) şi pentru (iii) se alege $A=\mathbb{Z}$ şi $a=0$ după care se aplică (ii).

8.33. (i). Fie $x\in J(A)$. Deci $x\in M$ pentru orice ideal maximal M. Fie $y\in A$. Atunci $1-xy\notin M$, altfel $1\in M$ deci $M=A$, fals. Obținem astfel $M+(1-xy)=A$, adică există un $z\in A$ pentru care $1=0+(1-xy)z$.

Deci 1-xy este inversabil pentru orice y, cum y a fost ales arbitrar. Presupunem acum că $x \notin M_0$, unde M_0 este ideal maximal. Atunci $M_0+(x)=A$, adică există $y \in A$ pentru care $1-xy \in M_0$, deci este neinversabil, ceea ce contrazice ipoteza noastră.

(ii). Fie I un ideal în A care are proprietatea din enunț. Fie $x \in I$ şi $y \in A$ Cum $xy \in I$ obținem $1-xy \in U(A)$ adică $x \in J(A)$.

8.34. Conform problemei **8.33.** căutăm matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ a.î. matricea $I_2 - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-ax & -ay-bz \\ 0 & 1-cz \end{pmatrix}$ să fie inversabilă pentru orice $x,y,z \in \mathbb{Z}$, adică $(1-ax)(1-cz)=\pm 1$, pentru orice $x,y,z \in \mathbb{Z}$. De aici rezultă că $a=c=0$ şi deci

$$J(A)= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| b \in Z \right\}.$$

8.35. Fie $A=(\mathbb{Q}, +, \odot)$, unde pentru $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \odot y=0$; evident A nu are element unitate diferit de 0. Idealele lui A sunt exact subgrupurile lui $(\mathbb{Q}, +)$. Cum $(\mathbb{Q}, +)$ este grup divizibil, $\mathbb{Q}$ nu are subgrupuri maximale. Astfel, $\mathbb{Z}$ este un ideal al lui A ce nu este conținut într-un ideal maximal.

8.36. Presupunem că există $f \in J(A[X])$ nenul. Atunci $g=fX+1$ este element neinversabil în A[X] deci există un ideal maximal M pentru care $g \in M$. Din alegerea lui f, $f \in M$ de unde rezultă $1 \in M$, adică $M=A$, ceea ce este fals.

8.37. (i). Dacă $x \in Ann(I)$ şi $a \in A$, atunci pentru orice $i \in I$ avem $i(xa)=(ix)a=0 \cdot a=0$, adică $xa \in Ann(I)$.

Pentru a arăta că r(I) este un ideal mai dificil este a demonstra că suma a două elemente din r(I) se găseşte în r(I).

Fie $x, y \in r(I)$. Deci există numerele naturale m şi n a.î. $x^m \in I$ şi $y^n \in I$. În $(x+y)^k = \sum_{t=0}^{k} C_k^t x^{k-t} y^t$ luăm $k=m+n-1$. Dintre cei m+n termeni ai sumei din membrul drept în primii n (deci cei pentru care $t \leq n-1$) apare ca factor x^m, iar în ceilalți apare ca factor y^n. Aşadar, $(x+y)^{m+n-1} \in I$, ceea ce înseamnă că $x+y \in r(I)$.

(ii). 1) Incluziunea $I \subseteq r(I)$ este evidentă.

Deducem că $r(I) \subseteq r(r(I))$.

Fie $a\in r(r(I))$; rezultă că există $n\in\mathbb{N}$ a.î. $a^n\in r(I)$, deci există $m\in\mathbb{N}$ a.î. $(a^n)^m=a^{nm}\in I$, adică $a\in r(I)$. Deci $r(I)= r(r(I))$.

2) Din $a\in r(I)\cap r(J)$ rezultă că există m şi $n\in\mathbb{N}$ a.î. $a^n\in I$ şi $a^m\in J$, deci $a^{n+m}=a^n\cdot a^m\in I\cap J$, deci $a\in r(I\cap J)$.

3) Din $a\in r(r(I)+r(J))$ rezultă că există $k\in\mathbb{N}$ a.î. $a^k=s+t$, cu $s\in r(I)$, $t\in r(J)$. Dacă $s^n\in I$ şi $t^m\in J$ aplicând din nou binomul lui Newton deducem că $a^{k(n+m)}=(s+t)^{n+m}\in I+J$ şi obţinem concluzia.

8.38. Notăm $s:A\to A/r(A)$ morfismul canonic.

Fie $x\in A$ a.î. $s(x)$ este nilpotent. Există deci $n\in\mathbb{N}$ a.î. $s(x)^n=s(0)$. Deci $x^n\in Ker(s)=r(A)$; există atunci $m\in\mathbb{N}$ a.î. $(x^n)^m=0$. Aceasta înseamnă că $x^{nm}=0$, deci x este nilpotent şi astfel $s(x)=s(0)$. Putem spune deci că idealul $r(A/r(A))$ este nul.

8.39. Fie a, b elemente idempotente din A a.î. $f(a)=f(b)$.

Notăm $n=a-b\in Ker(f)$. Evident, avem $n^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a-b=n$ şi rezultă $n(1-n^2)=0$. Dar $1-n^2$ este element inversabil (pentru că adunând un element nilpotent cu unul inversabil obţinem un element inversabil) şi deci $n=0$.

Fie $a'=f(x)$ un element idempotent din A'. Căutăm un element a idempotent în A de forma $x+z$ cu $z\in Ker(f)$.

Analizăm întâi cazul cînd $(Ker(f))^2=0$. Astfel căutăm $z\in Ker(f)$ a.î. $(x+z)^2=x+z$, adică a.î. $z(1-2x)=x^2-x$.

Cum $x^2-x\in Ker(f)$ rezultă $(1-2x)(1+2x-12x^2+8x^3)=1-16(x^2-x)^2=1$. Deci $1-2x$ este inversabil în A şi $z=(x^2-x)(1-2x)^{-1}$ este un element din Ker(f) a.î. $a=x+z$ este idempotent.

În cazul general, alegem k a.î. $n=x^2-x$ să satisfacă $n^k=0$. Considerăm surjecţiile canonice $f_i:A/(n^{i+1})\to A/(n^i)$, $1\le i<k$.

Evident, elementul cls x mod(n) este idempotent în A/(n). Cum $Ker(f_1)=(n)/(n^2)$ are pătratul nul, există $x_1\in A$ a.î. cls x_1 mod(n^2) să fie idempotent în $A/(n^2)$ iar $x_1\equiv x$ mod(n). Raţionând inductiv, obţinem un element $x_{k-1}\in A$ a.î. cls x_{k-1} mod(n^k) să fie idempotent în $A/(n^k)$ iar $x_{k-1}\equiv x$ mod(n). Luăm $a=x_{k-1}$.

8.40. Fie p un număr prim şi s un număr natural. Evident $r(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$ este idealul principal generat de p. Deci $r(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$ are p^{s-1} elemente. Folosind faptul că $r(A\times B)=r(A)\times r(B)$ deducem că dacă $n = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$ este descompunerea în factori primi a lui n ($p_i\neq p_j$ pentru $i\neq j$) atunci avem $r\left(\prod_{i=1}^{r} Z/p_i^{\alpha_i}Z\right)=\prod_{i=1}^{r} r\left(Z/p_i^{\alpha_i}Z\right)$. Deci $r\left(\prod_{i=1}^{r} Z/p_i^{\alpha_i}Z\right)$ are $\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i-1}$ elemente şi cum $Z/nZ \cong \prod_{i=1}^{r} Z/p_i^{\alpha_i}Z$ deducem că $r(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ are acelaşi număr de elemente. În particular, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ este redus dacă şi numai dacă, $r(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ are un singur element ($\hat{0}$), adică dacă şi numai dacă, $\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i-1}=1$, ceea ce este echivalent cu $\alpha_i=1$, pentru orice $i\in\{1, \ldots, r\}$.

8.41. Faptul că I este ideal se verifică fie prin calcul direct, fie observând că este nucleul morfismului de inele $F:C([0, 1], \mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $F(f)=f(0)$, ce evaluează în punctul $t=0$ funcțiile continue pe [0, 1].

Să presupunem prin reducere la absurd că I ar fi principal, generat de funcția continuă $\varphi:[0, 1]\to\mathbb{R}$. Atunci $\varphi(0)=0$ şi orice funcție $f\in I$ ar fi multiplu al lui φ. În particular, luând funcția f descrisă de $f(t)=\sqrt[3]{\varphi(t)}$, $t\in[0, 1]$, avem $f\in I$, deci putem scrie $\varphi(t)\cdot g(t)=\sqrt[3]{\varphi(t)}$, $t\in[0, 1]$, cu g funcție continuă pe [0, 1]. Funcția φ nu este identic nulă căci $I\neq\{0\}$, în mod evident. Dacă notăm $\bar{t}=\sup\{t \mid \varphi(t)=0\}$ atunci $\bar{t}<1$, $\varphi(t)\neq 0$, pentru $\bar{t}<t\leq 1$, iar $\varphi(\bar{t})=0$ datorită continuității lui φ. Pentru fiecare argument t cu $\bar{t}<t\leq 1$ obținem deci $1=[\sqrt[3]{\varphi(t)}]^2\cdot g(t)$, de unde trecând la limită cînd $t\to\bar{t}$ obținem $1=0\cdot g(\bar{t})=0$, contradicție. Deci inelul $C([0, 1], \mathbb{R})$ nu este principal.

8.42. Determinăm numerele întregi de forma $u=(a+b\sqrt{d})(m+n\sqrt{d})$, a, b, m, $n\in\mathbb{Z}$. Aceasta are loc dacă şi numai dacă $an+bm=0$, care are soluțiile întregi de forma $n=\frac{-b}{(a,b)}\cdot s$, $m=\frac{a}{(a,b)}\cdot s$, unde $s\in\mathbb{Z}$. Deci numerele întregi u

de mai sus trebuie să fie de forma $am+bnd=\frac{a^2-b^2d}{(a,b)}\cdot s$, s∈ℤ. Notând $t=\frac{a^2-b^2d}{(a,b)}$ dacă b≠0 şi t=a când b=0, obţinem (x)∩ℤ=tℤ.

Evident (x)=(0) implică (x)∩ℤ=(0). Reciproc, dacă (x)∩ℤ=(0) atunci (t)=(0), deci t=0. Obţinem $a^2-b^2d=0$. Dar d este liber de pătrate şi deci b trebuie să fie nul (altfel am avea $d=\left(\frac{a}{b}\right)^2$, contradicţie). În concluzie, a=b=0, adică (x)=0.

8.43. Inelul $A=T_2(\mathbb{Z}_2)$ are ca elemente matricele $\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix}$ cu a, b, c∈$\mathbb{Z}_2$. Întrucât $\mathbb{Z}_2$ are doar două elemente şi anume clasele $\hat{0}$ şi $\hat{1}$ deducem că inelul $T_2(\mathbb{Z}_2)$ are $2^3=8$ elemente. Grupul aditiv subiacent inelului este izomorf cu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$; notând $X=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $Z=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ cele opt elemente ale inelului $T_2(\mathbb{Z}_2)$ pot fi descrise astfel: O, X, Y, Z, X+Y, X+Z, Y+Z, X+Y+Z. Înmulţirea inelului este descrisă (ţinând cont de distributivitatea ei faţă de adunare) de tabelul:

·	X	Y	Z
X	X	Y	O
Y	O	O	Y
Z	O	O	Z

.

Observăm că elementele inversabile sunt X+Z (elementul unitate) şi $X+Y+Z=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Vom determina mai întâi idealele stângi principale.

Elementul X determină un ideal stâng format doar din matricele O şi X. La fel elementele Y şi X+Y determină idealele stângi formate doar din cîte două elemente. Elementele Z şi Y+Z sunt asociate şi determină un ideal stâng format din patru elemente: O, Y, Z, Y+Z.

Idealele stângi ale inelului pot fi ordonate (prin incluziune) ca în Figura 1:

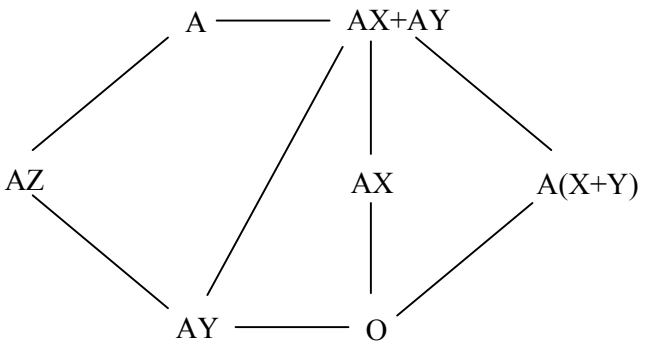


Figura 1

Unul singur este neprincipal şi anume AX+AY, format din matricele $\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

Idealele drepte se obțin observând dualitatea „stânga-dreapta” între X şi Z. Ele sunt prezentate în Figura 2:

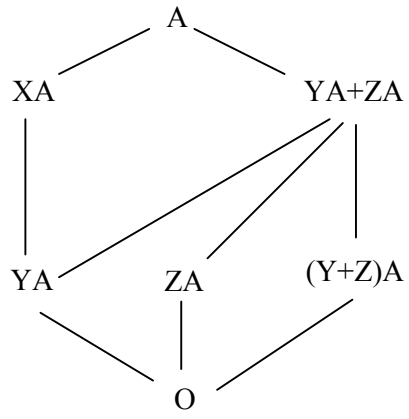


Figura 2

În final observăm că inelul $A=T_2(\mathbb{Z}_2)$ are trei ideale bilaterale netriviale: primul AY=YA, format din matricele $\begin{pmatrix} \hat{0} & b \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$; al doilea,

AX+AY=XA, format din matricele $\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$; al treilea, AZ=YA+ZA, format din matricele $\begin{pmatrix} \hat{0} & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix}$.

8.44. Faptul că A este subinel al lui B şi că B este subinel al lui $T_2(\mathbb{Q})$ se verifică imediat. Putem scrie, simbolic, $A=\begin{pmatrix} Z & Q \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} Z & Q \\ 0 & Q \end{pmatrix}$.

Determinăm mai întâi idealele bilaterale ale inelului B.

Fie I un asemenea ideal. Considerând funcţiile $f:B\to\mathbb{Z}$ şi $g:B\to\mathbb{Q}$ ce asociază matricei $\begin{pmatrix} a & p \\ 0 & q \end{pmatrix}$ pe a respectiv pe q, obţinem (ca în problema **7.13.**) că f şi g sunt morfisme de inele. Deci f(I) este ideal al lui $\mathbb{Z}$, adică este de forma $m\mathbb{Z}$ (cu $m\in\mathbb{N}$) iar g(I) este ideal al lui $\mathbb{Q}$, deci este nul sau coincide cu $\mathbb{Q}$. Aşadar I este de forma $\begin{pmatrix} mZ & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau de forma $\begin{pmatrix} mZ & T \\ 0 & Q \end{pmatrix}$.

Identificăm proprietăţile submulţimii T a lui $\mathbb{Q}$.

Din $I+I\subset I$ rezultă că $T+T\subset T$ iar din $IB\subset I$ rezultă că $m\mathbb{Q}+T\mathbb{Q}\subset T$, adică T este ideal al lui $\mathbb{Q}$ ce conţine pe $m\mathbb{Q}$. În cazul când $m\neq 0$, obţinem $T=\mathbb{Q}$, iar dacă $m=0$, putem avea $T=\{0\}$ sau $T=\mathbb{Q}$.

Idealele bilaterale ale inelului B sunt deci următoarele:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} mZ & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} mZ & Q \\ 0 & Q \end{pmatrix} \text{ cu } m\in\mathbb{N}.$$

Pentru a determina idealele bilaterale ale inelului A procedăm asemănător. Considerăm morfismemle surjective de inele $f:A\to\mathbb{Z}$ şi $g:A\to\mathbb{Z}$ ce asociază matricei $\begin{pmatrix} a & p \\ 0 & b \end{pmatrix}$ pe a respectiv pe b. Dacă I este un ideal bilateral al lui A, atunci atât f(I) cât şi g(I) sunt ideale ale lui $\mathbb{Z}$, deci de forma $m\mathbb{Z}$, respectiv $n\mathbb{Z}$ (cu $m, n \in\mathbb{N}$) iar $I=\begin{pmatrix} mZ & T \\ 0 & nZ \end{pmatrix}$.

Determinăm forma lui T. Din $I+I\subset I$ rezultă că $T+T\subset T$, din $IA\subset I$ rezută $m\mathbb{Q}+T\mathbb{Z}\subset T$ iar din $AI\subset I$ rezultă $n\mathbb{Q}+T\mathbb{Z}\subset T$. Din aceste condiţii deducem că T trebuie să fie subgrup aditiv al lui $\mathbb{Q}$ iar în caz că $m\neq 0$ sau $n\neq 0$, T trebuie să-l conţină pe $\mathbb{Q}$, deci să coincidă cu $\mathbb{Q}$.

Dacă însă m=n=0, T poate fi orice subgrup al grupului aditiv al numerelor raționale $\mathbb{Q}$. Idealele bilaterale ale inelului B sunt deci de forma $\begin{pmatrix} mZ & Q \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ cu m, n∈ℕ sau de forma $\begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde T este subgrup aditiv al lui $\mathbb{Q}$.

Inelul $T_2(\mathbb{Q})$ are doar trei ideale bilaterale netriviale: $\begin{pmatrix} 0 & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Q & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & Q \\ 0 & Q \end{pmatrix}$.

Prin acelaşi procedeu se obțin şi idealele bilaterale ale lui $T_2(\mathbb{Z})$. Ele sunt de forma $\begin{pmatrix} mZ & dZ \\ 0 & nZ \end{pmatrix}$ cu m, n∈ℕ iar d divizor comun al lui m şi n.

8.45. Dacă I şi J sunt ideale nilpotente atunci fiecare element din I+J este nilpotent. Într-adevăr, fie x+y=z∈I+J (x∈I, y∈J) şi k∈ℕ* a.î. $x^k=0$. Avem $z^k=(x+y)^k=x^k+a$ cu a∈J. În fiecare produs xyxy…xy orice xy∈J pentru că J este ideal stâng, xyx∈J pentru că J este ideal drept.

În final, există l∈ℕ* a.î. $a^l=0$, deci $z^{kl}=a^l=0$, adică z este nilpotent şi deci I+J este nilpotent. Dacă I şi J sunt ideale nilpotente şi $I^n=J^m=0$ atunci $(I+J)^{n+m}\subset I^{n+m}+J^{n+m}$, deci I+J este nilpotent.

Verificarea incluziunii inverse se probează astfel:

Orice element din $(I+J)^{n+m}$ este o sumă de produse care conțin n+m factori din I sau J, adică (cel puțin n) factori din I sau (cel puțin m) factori din J, (adică un produs finit de forma $a_1b_1a_2b_2,\ldots$ cu $a_i\in I$ şi $b_j\in J$ poate fi scris ca $a_1'a_2'a_3'$ … cu $a_i'\in I$, folosind faptul că I este ideal stâng sau $b_1'b_2'b_3'$ … cu $b_j'\in J$, folosind faptul că J este ideal stâng) şi folosim incluziunile evidente $I^t\subseteq I^{n+m}$, $J^t\subseteq J^{n+m}$ pentru orice t≤n+m.

8.46. Presupunem prin reducere la absurd că pe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ avem definită o înmulțire · care împreună cu adunarea să determine o stuctură de inel unitar. Fie u elementul unitate al acestui inel. Îl putem scrie pe u sub formă de fracție ireductibilă, $u=\frac{m}{n}$, cu 1≤m<n, m, n numere întregi prime între ele.

Deoarece, $x=u\cdot x$ pentru orice $x\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ avem în particular pentru $x=\frac{1}{m}$:

$$\frac{1}{m}=\frac{m}{n}\bullet\frac{1}{m}=\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{de\ m\ ori}\right)\bullet\frac{1}{m}=\underbrace{\frac{1}{n}\bullet\frac{1}{m}+\ldots+\frac{1}{n}\bullet\frac{1}{m}}_{de\ m\ ori}=\frac{1}{n}\bullet\left(\underbrace{\frac{1}{m}+\ldots+\frac{1}{m}}_{de\ m\ ori}\right)=\frac{1}{n}\bullet 1=\frac{1}{n}\bullet 0=0$$

(am folosit faptul că $1=0$ în $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). Din $\frac{1}{m}=0$ deducem că $m=1$. Deci elementul unitate al inelului trebuie să fie de forma $u=\frac{1}{n}$ cu $n>1$.

Luând $x=\frac{n}{n+1}$ în relația $x=u\cdot x$, obținem:

$$\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n}\bullet\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n}\bullet\left(\underbrace{\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+1}}_{de\ n\ ori}\right)=\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{de\ n\ ori}\right)\bullet\frac{1}{n+1}=1\bullet\frac{1}{n+1}=0\bullet\frac{1}{n+1}=0$$

Deci $\frac{n}{n+1}=0$ în $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, adică $\frac{n}{n+1}$ este un număr întreg, absurd.

8.47. Considerăm morfismele canonice $p_I:A\to A/I$, $p_J:A\to A/J$. Proprietatea de universalitate a produsului direct induce morfismul de inele $\alpha:A\to A/I\times A/J$ care are nucleul $I\cap J$. Folosind teorema lui Noether de izomorfism avem $A/I\cap J\simeq A/I\times A/J \Leftrightarrow \alpha$ este surjectiv.

Dacă I şi J sunt comaximale demonstrăm că α este surjectiv.

Pentru un element arbitrar $(a+I, b+J)$ din $A/I\times A/J$ considerăm $a-b\in A=I+J$. Dacă $i\in I$ şi $j\in J$ a.î. $a-b=-i+j$ notăm prin $r=a+i=b+j$. Rezultă că $\alpha(r+(I\cap J))=(a+I, b+J)$, adică α este surjectiv.

Reciproc, din faptul că α este surjectiv deducem că oricare ar fi $a, b\in A$ există $r\in A$ a.î. $a-r\in I$ şi $b-r\in J$. Luând $b=0$ obținem $a=(a-r)+r\in I+J$, adică $A=I+J$.

8.48. Dacă $I\subseteq\prod_{i=1}^{n}A_i$ este un ideal stâng, atunci evident $I\subseteq\prod_{i=1}^{n}p_i(I)$.

Fie $x=(x_1, \ldots, x_n)\in\prod_{i=1}^{n} p_i(I)$. Cum p_i sunt surjecțiile canonice $A\to A_i$, deducem că pentru orice $i\in\{1, \ldots, n\}$ există un element $y^{(i)}\in I$, $y^{(i)}=(y_1^{(i)},...,y_n^{(i)})$ cu $y_i^{(i)}=x_i$. Fie $z^{(i)}=(z_1^{(i)},...,z_n^{(i)})$ elementul din A definit prin $z_j^{(i)}=\delta_{ij}$ (i, j$\in\{1, .., n\}$), unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker. Avem $x=\sum_{i=1}^{n} z^{(i)}y^{(i)}$. Deci x∈I pentru că $\{y^{(i)}\}_i\in I$. În concluzie $I=\prod_{i=1}^{n} p_i(I)$.

Analog demonstrăm pentru cazul când I este ideal drept folosind egalitatea $x=\sum_{i=1}^{n} y^{(i)}z^{(i)}$. Se observă că subgrupul T al lui $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ format din elementele $\{(k, k) \mid k\in\mathbb{Z}\}$, nu poate fi ideal deoarece, de exemplu $T\neq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=p_1(T)\times p_2(T)$.

8.49. Se aplică teorema fundamentală de izomorfism surjecției canonice $A\to\prod_{i=1}^{n} A_i/I_i$, definită prin $(x_1, \ldots, x_n)\rightsquigarrow(\hat{x}_1,...,\hat{x}_n)$.

8.50. Dacă I şi J sunt ideale în inelele comutative unitare A şi B atunci I× J este ideal în A×B.

Invers, dacă I este ideal în A×B notând cu p_A respectiv p_B proiecțiile canonice ale produsului direct, se demonstrează că $I=p_A(I)\times p_B(I)$, unde $p_A(I)$ este ideal în A iar $p_B(I)$ este ideal în B.

Orice corp necomutativ K are numai idealele {0} şi K. Atunci {0}×K şi K×{0} sunt singurele ideale netriviale în K×K. Idealele lui $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sunt de forma $m\mathbb{Z}\times n\mathbb{Z}$, cu m, n∈ℕ.

8.51. Fie morfismul de inele $\varphi:A[X]\to S^{-1}A$ dat prin $\varphi(X)=a^{-1}$. Se demonstrează uşor că $Ker(\varphi)=(aX-1)$ şi apoi se aplică teorema fundamentală de izomorfism pentru inele.

8.52. Necesitatea este evidentă.

Folosind problema **8.42.** observăm că este suficient să arătăm că $x\neq 0$ implică $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]/(t)$ finit (unde t este generatorul idealului $(x)\cap\mathbb{Z}$), deoarece $(t)\subseteq(x)$. Dar $x\neq 0$ implică $t\neq 0$ şi evident $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]/(t)$ are cel mult t^2 elemente.

8.53. Grupul $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$ are elementele $\{\hat{1},\ \hat{3}\}$ şi este izomorf cu subgrupul ciclic al lui $\mathbb{Z}$ format de 1 şi –1 (în raport cu înmulţirea).

Fie $f^*:(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*\to(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*\simeq\{\pm1\}$, $n\geq3$ compunerea izomorfismului de mai sus cu morfismul surjectiv indus de surjecţia canonică $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Avem $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*/\text{Ker } f^*\simeq\{\pm1\}$, f^* fiind surjectiv.

Deci Ker f^* are ordinul 2^{n-2} întrucât $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^*$ are ordinul $\varphi(2^n)=2^{n-1}$.

Observăm că $\hat{5}$, clasa lui 5 modulo 2^n, generează pe Ker f^*.

Într-adevăr, dacă k este ordinul lui $\hat{5}$, atunci $(1+4)^k\equiv1$(modulo 2^n), adică $k+C_k^2\cdot4+C_k^3\cdot4^2+\ldots+C_k^k\cdot4^{k-1}\equiv0$ (modulo 2).

Folosim inducţia pentru a arăta că $2^{n-2}|k$.

Evident $4|k$ iar dacă $2^i|k$, $i<n-2$, atunci $2^{i-1}\left|C_k^2\right.$, $2^{i-2}\left|C_k^3\right.$, $2^{i-3}\left|C_k^4\right.$, ... şi în concluzie $2^{i+1}|k$ în baza congruenţei de mai sus.

Deci Ker f^* are ordinul 2^{n-2} şi $2^{n-2}|\text{ord}\,\hat{5}$.

Deducem că $\hat{5}$ generează pe Ker f^* şi astfel $\mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}\simeq$Ker f^* (primul grup fiind aditiv).

Fie acum $u:(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*\to\{\pm1\}\times$Ker f^* morfismul de grupuri definit prin $u(\hat{x})=\left(f^*(\hat{x}),\ f^*(\hat{x})\cdot\hat{x}\right)$. u este bine definit pentru că

$$f^*\left(f^*(\hat{x})\cdot\hat{x}\right)=f^*(\hat{x})\cdot f^*(\hat{x})=1 \text{ şi deci } f^*(\hat{x})\cdot\hat{x}\in Kerf^*.$$

În plus, dacă $u(\hat{x})=(1,\ \hat{1})$ atunci $f^*(\hat{x})\cdot\hat{x}=\hat{1}$ şi $f^*(\hat{x})=1$. Deci $\hat{x}=\hat{1}$. Rezultă că u este injectivă şi grupurile având acelaşi ordin deducem că u este şi bijectivă.

Deci $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*\simeq\{\pm1\}\times(\mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z})\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z})$, pentru $n\geq3$.

8.54. Fie $f:\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ morfismul surjectiv canonic şi fie $f^*:(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*\to(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ morfismul de grupuri indus de f. Observăm că f^* este surjectiv. Într-adevăr, dacă $x\in\mathbb{Z}$ are clasa modulo p inversabilă în $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ atunci $p\nmid x$, de unde rezultă că $(x, p^n)\simeq1$. Deci clasa modulo p^n a lui x este inversabilă în $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ şi imaginea ei prin f^* este clasa modulo p a lui x.

Pe de altă parte, ordinul grupului $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ este $\varphi(p^n)=p^{n-1}(p-1)$ şi Kerf* are indicele p-1 în $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$. Deducem că Kerf* are ordinul p^{n-1}. Am folosit aici faptul că $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*/\text{Ker } f^*\simeq(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, f^* fiind surjectivă.

Avem $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*\simeq$Ker $f^*\times(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, deoarece ordinele grupurilor Ker f^* şi $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ sunt prime între ele.

Grupul Ker f^* este ciclic generat de clasa lui 1+p modulo p^n.

Într-adevăr, dacă $(p+1)^k \equiv 1$ modulo p^n, deducem

$$k \cdot p + C_k^2 \cdot p^2 + C_k^3 \cdot p^3 + ... + C_k^k \cdot p^k \equiv 0 \text{, modulo } p^n.$$

Deci $p|k$ şi cum $p \neq 2$ rezultă că $p| C_k^2$, de unde obţinem că $p^2|k$. Aplicăm inducţia. Dacă avem $p^i|k$, pentru un $i<n-1$, atunci $p^i \left| C_k^2 \right.$, $p^{i-1} \left| C_k^3 \right.$ (dacă $p \neq 3$ am fi dedus chiar $p^i \left| C_k^3 \right.$),…, $p^{i-j} \left| C_k^{j+2} \right.$ pentru $j<i$. Din aceeaşi congruenţă de mai sus rezultă $p^{i+1}|k$. Am arătat că $p^{n-1}|k$. Cum $\hat{1+p}$ este în Ker f^*, care are ordinul p^{n-1}, deducem că $\hat{1+p}$ este un generator al lui Ker f^*.

Deci $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p^{n-1}(p-1)\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ fiind ciclic.

§9. Corp. Subcorp. Caracteristica unui corp. Morfisme de corpuri. Izomorfisme de corpuri.

9.1. În inelul $\mathbb{Z}_n$, $\hat{a}$ este inversabil dacă şi numai dacă $(a, n)=1$.

„⇒”. Dacă n este prim, atunci 1, …, n-1 sunt relativ prime cu n şi atunci toate elementele nenule ale inelului $\mathbb{Z}_n$ sunt inversabile, deci $\mathbb{Z}_n$ este corp.

„⇐”. Dacă $\mathbb{Z}_n$ este corp atunci toate elementele nenule sunt inversabile, deci $(i, n)=1$, pentru orice $i \in \{1, .., n-1\}$, adică în particular avem că numărul natural n nu este divizibil prin nici un număr prim $p \leq \sqrt{n}$, deci n este prim.

9.2. Din prima ecuaţie avem $y=-x$ şi înlocuind în a doua ecuaţie obţinem $-x^2 = \hat{5}$, adică $x^2 = \hat{2}$. Ecuaţia $x^2 = \hat{2}$ are în corpul $\mathbb{Z}_7$ două soluţii: $x_1 = \hat{3}$ şi $x_2 = \hat{4}$. Corespunzător obţinem: $y_1 = -x_1 = \hat{4}$ respectiv $y_2 = -x_2 = \hat{3}$. Soluţiile sistemului sunt: $\begin{cases} x_1 = \hat{3} \\ y_1 = \hat{4} \end{cases}$ şi $\begin{cases} x_2 = \hat{4} \\ y_2 = \hat{3} \end{cases}$.

9.3. Fie A un inel integru finit şi $a \in A$, $a \neq 0$. Definim $\varphi_a: A \to A$ prin $\varphi_a(x)=ax$, oricare ar fi $x \in A$. Deoarece A este integru rezultă că φ_a este injectivă şi cum A este finit este şi surjectivă. Există deci $a' \in A$ a.î. $\varphi_a(a')=1$, adică $aa'=1$. Avem $a' \neq 0$ şi există $a'' \in A$ a.î. $\varphi_{a'}(a'')=1$, adică $a'a''=1$.

Atunci $a=a\cdot 1=a(a'a'')=(aa')a''=1\cdot a''=a''$. Deci şi $a'a=1$. În consecinţă a este inversabil şi a' este inversul său.

9.4. Fie I un ideal la stânga în corpul K.

Dacă $I\neq(0)$, atunci există în I un element nenul a, deci $1=a\cdot a^{-1}\in I$. Dacă b este un element arbitrar din K, atunci din egalitatea $b=b\cdot 1$ obţinem că $b\in I$, deci I conţine toate elementele lui K, adică $I=K$.

În mod analog se arată că orice ideal drept coincide cu (0) sau K. Deci singurele ideale bilaterale în K sunt (0) şi K.

9.5. Pentru a demonstra că K este corp trebuie să arătăm că orice element nenul din K este inversabil. Fie $x\in K$, $x\neq 0$. Deoarece idealele xK şi Kx sunt nenule, deducem că $xK=Kx=K$. Deci există x' şi $x''\in K$ a.î. $xx'=1$ şi $x''x=1$. Atunci obţinem $x'=1\cdot x'=(x''x)x'=x''(xx')=x''\cdot 1=x''$, deci $x'=x''$ şi deci x este inversabil.

9.6. (i). Se verifică axiomele grupului comutativ $(K, \oplus)$. Elementul neutru la $\oplus$ este 1 iar inversul lui x este $\frac{1}{x}$. $(K, \odot)$ este monoid comutativ, elementul unitate fiind e. Pentru a arăta comutativitatea operaţiei $\odot$ observăm că:

$$x\odot y=x^{\ln y}=e^{\ln x^{\ln y}}=e^{\ln x\cdot\ln y}=e^{\ln y^{\ln x}}=y^{\ln x}=y\odot x.$$

Orice element x diferit de 1 este inversabil, iar $x^{-1}=e^{1/\ln x}$.

(ii). Definim $f: (K, \oplus, \odot)\to(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $f(x)=\ln x$ şi demonstrăm că f este un izomorfism de corpuri:

$$f(x\oplus y)=\ln(x\oplus y)=\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)=f(x)+f(y),$$
$$f(x\odot y)=\ln(x\odot y)=\ln(x^{\ln y})=\ln(y)\cdot\ln(x)=f(x)\cdot f(y),$$

oricare ar fi $x, y\in K$, $f(e)=\ln(e)=1$. Evident, f este funcţie bijectivă.

9.7. Definim $x\otimes 0=0\otimes x=0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}$ şi în felul acesta operaţia $\otimes$ se prelungeşte de la $\mathbb{Q}^*$ la $\mathbb{Q}$. Să notam cu e elementul neutru faţă de operaţia $\otimes$, adică elementul unitate al inelului $(\mathbb{Q}, +, \otimes)$. Mai notăm $e\mathbb{Z}=\{ke \mid k\in\mathbb{Z}\}$, adică subgrupul ciclic generat de elementul e în grupul aditiv $(\mathbb{Q}, +)$. Datorită distributivităţii operaţiei $\otimes$ faţă de adunarea +, rezultă uşor că $ne\otimes me=nm(e\otimes e)=nme$, oricare ar fi $n, m\in\mathbb{N}$ şi datorită regulilor de calcul

$(-x)\otimes y=x\otimes(-y)=-x\otimes y$, $(-x)\otimes(-y)=x\otimes y$, valabile pentru orice $x,\ y\in(\mathbb{Q}, +, \otimes)$ rezultă:

$$ne\otimes me=nme, \text{ oricare ar fi } n, m\in\mathbb{Z} \quad (1).$$

Din această ultimă egalitate, deducem că $(e\mathbb{Z}, +, \otimes)$ este un inel, de fapt un subinel al inelului $(\mathbb{Q}, +, \otimes)$. Aplicația $f:(\mathbb{Z}, +, \cdot)\to(e\mathbb{Z}, +, \otimes)$, $f(n)=ne$ este un izomorfism de inele, ceea ce se probează uşor pe baza lui (1). Cum $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este domeniu de integritate, rezultă că şi $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$ este domeniu de integritate şi atunci are un corp de fracții, care este tocmai $(\mathbb{Q}, +, \otimes)$. Aşadar, $(\mathbb{Q}, +, \otimes)$ este un corp.

9.8. (i). Fie K corpul căutat. Fiind de caracteristică zero, el va conține un subcorp izomorf cu $\mathbb{Q}$. Putem considera că $\mathbb{Q}\subset K$, deci $a\in K$ pentru orice $a\in\mathbb{Q}$. De asemenea, deoarece $\sqrt{2}\in K$ rezultă că $b\sqrt{2}\in K$, pentru orice $b\in\mathbb{Q}$. Aşadar orice număr de forma $a+b\sqrt{2}$ cu a, b numere raționale este în K.

Acum este suficient să arătăm că numerele de forma $a+b\sqrt{2}$ formează un subcorp al lui $\mathbb{R}$. Evident, ele formează un subinel al lui $\mathbb{R}$; rămâne de demonstrat că orice element de această formă, nenul, are inversul (în $\mathbb{R}$) tot de această formă. Se arată imediat că $a+b\sqrt{2}=0$ dacă şi numai dacă $a^2-2b^2=0$ adică, dacă şi numai dacă $a=b=0$ iar dacă $a+b\sqrt{2}\neq 0$ atunci $(a+b\sqrt{2})^{-1}=c+d\sqrt{2}$ cu $c=\dfrac{a}{a^2-2b^2}$, $d=\dfrac{-b}{a^2-2b^2}$ raționale.

(ii). Se verifică imediat că F este subinel al lui $\mathbb{R}$.

Într-adevăr dacă $x, y\in F$, $x=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ şi $y=a'+b'\sqrt[3]{2}+c'\sqrt[3]{4}$ cu a, b, c, a', b', $c'\in\mathbb{Q}$ atunci:

$$x-y=(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})-(a'+b'\sqrt[3]{2}+c'\sqrt[3]{4})=(a-a')+(b-b')\sqrt[3]{2}+(c-c')\sqrt[3]{4}\in\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}),$$

$$xy=(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})(a'+b'\sqrt[3]{2}+c'\sqrt[3]{4})=(aa'+2bc'+2cb')+(ab'+a'b+2cc')\sqrt[3]{2}+$$
$$+(ac'+a'c+bb')\sqrt[3]{4}\in\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}).$$

Evident, $1\in\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Arătăm că $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ (*) dacă şi numai dacă $a=b=c=0$.

Scriem egalitatea $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ sub forma $b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=-a$. Înmulțind ambii membrii ai lui (*) cu $\sqrt[3]{2}$ obținem: $a\sqrt[3]{2}+b\sqrt[3]{4}=-2c$, de unde sistemul:

(S) $\begin{cases} b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=-a \\ a\sqrt[3]{2}+b\sqrt[4]{4}=-2c \end{cases}$. Înmulțind prima ecuație a sistemului (S) cu –b și pe a doua cu c obținem: $\begin{cases} -b^2\sqrt[3]{2}-bc\sqrt[3]{4}=ba \\ ac\sqrt[3]{2}+bc\sqrt[4]{4}=-2c^2 \end{cases}$ și prin adunare $(ac-b^2)\sqrt[3]{2}=ab-2c^2$, de unde $ac=b^2$ și $ab=2c^2$. Atunci $abc=2c^3$, adică $b^3=2c^3$, de unde $b=c=0$ (căci în caz contrar am deduce că $\sqrt[3]{2}=\frac{b}{c}\in\mathbb{Q}$, absurd). Rezultă imediat că și $a=0$. Demonstrăm că orice element nenul din $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ este inversabil în $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, adică dacă $\alpha\in\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\alpha\neq 0$, atunci și $\alpha^{-1}\in\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Dacă $\alpha=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, cu $a, b, c\in\mathbb{Q}$, $\alpha\neq 0$, (echivalent deci cu $a^2+b^2+c^2\neq 0$) trebuie să găsim $\beta=a'+b'\sqrt[3]{2}+c'\sqrt[3]{4}$ cu $a', b', c'\in\mathbb{Q}$, $a'^2+b'^2+c'^2\neq 0$ a.î. $\alpha\cdot\beta=1$.

Folosind calculul anterior

$\alpha\cdot\beta=(aa'+2bc'+2cb')+(ab'+a'b+2cc')\sqrt[3]{2}+(ac'+a'c+bb')\sqrt[3]{4}$.

Cum $\alpha\cdot\beta=1$, trebuie să arătăm că următorul sistem liniar

(S′) $\begin{cases} aa'+2bc'+2cb'=1 \\ ab'+a'b+2cc'=0 \\ ac'+bb'+a'c=0 \end{cases}$ în necunoscutele a′, b′, c′ are o soluție rațională. Înmulțind ecuațiile sistemului (S′) cu un multiplu comun diferit de zero al numitorilor numerelor raționale a, b, c putem presupune că $a, b, c\in\mathbb{Z}$, nu toate nule. Determinantul sistemului (S′) este

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{vmatrix}=a^3+2b^3+4c^3-6abc.$$

Presupunem prin reducere la absurd că $\Delta=0$.

Atunci $a^3+2b^3+4c^3-6abc=0$. Putem presupune că nu toate numerele a, b, c sunt pare căci altfel $0=\Delta=8(a_1^3+2b_1^3+4c_1^3-6a_1b_1c_1)$ unde $a=2a_1$, $b=2b_1$, $c=2c_1$ deci $a_1^3+2b_1^3+4c_1^3-6a_1b_1c_1=0$ și nu toate a_1, b_1, c_1 sunt nule. Din $\Delta=0$ rezultă că $2|a$ deci $a=2a_0$, $a_0\in\mathbb{Z}$. Înlocuindu-l pe a obținem $4a_0^3+b^3+2c^3-6a_0bc=0$, ceea ce implică $2|b$, contradicție căci ar trebui și $2|c$. Deci $\Delta\neq 0$. Atunci (S′) este sistem Cramer și are soluție unică.

9.9. Fie φ, e respectiv elementul nul şi elementul unitate din inelul A. Pentru fiecare $x\in(0, 1)$ vom avea $x+\varphi=x$ respectiv $xe=x$, de unde rezultă $\varphi=0$ respectiv $e=1$. Deoarece $1\in A$ rezultă $\mathbb{Z}\subseteq A$.

Arătăm că $\mathbb{R}\subseteq A$. Fie, într-adevăr, $x\in\mathbb{R}$ arbitrar. Avem $x=[x]+\{x\}$ şi cum $[x]\in\mathbb{Z}\subseteq A$, iar $\{x\}\in[0, 1)\subseteq A$, rezultă $x\in A$, deci $\mathbb{R}\subseteq A$.

Avem de analizat două cazuri, după cum $A\subseteq\mathbb{R}$, respectiv $A\nsubseteq\mathbb{R}$.

i) $A\subseteq\mathbb{R}$. Deoarece am arătat că $\mathbb{R}\subseteq A$, rezultă $A=\mathbb{R}$.

ii) $A\nsubseteq\mathbb{R}$. Fie $z_0=a_0+ib_0\in A\setminus\mathbb{R}$, unde $a_0,b_0\in\mathbb{R}$, $b_0\neq0$. Deoarece z_0, $a_0\in A$ rezultă $z_0-a_0\in A$, adică $ib_0\in A$. Cum $\frac{1}{b_0}\in\mathbb{R}\subseteq A$ rezultă $\frac{1}{b_0}\cdot(ib_0)\in A$, adică $i\in A$. Atunci luând $z=a+ib\in\mathbb{C}$ avem $a, b\in\mathbb{R}\subseteq A$ şi $i\in A$, deci $z\in A$. Aşadar $\mathbb{C}\subseteq A$ şi cum $A\subseteq\mathbb{C}$, rezultă $A=\mathbb{C}$.

9.10. (i). $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ este intersecția a două corpuri deci va fi tot un corp ce include în mod evident corpul $\mathbb{Q}$. Avem extinderile de corpuri:

$$\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}).$$

Relația asupra gradelor se scrie:

$$2=[\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}):\mathbb{Q}]$$
$$=[(\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})):\mathbb{Q}]\cdot[\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}):(\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{d_2}))].$$

Rezultă $[(\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})):\mathbb{Q}]\in\{1, 2\}$.

Dacă am avea $[(\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})):\mathbb{Q}]=2$, atunci ar rezulta egalitatea $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})=\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$. În particular, am avea $\sqrt{d_2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$, adică $\sqrt{d_2}=\alpha+\beta\sqrt{d_1}$, $\alpha, \beta\in\mathbb{Q}$. Dacă $\beta=0$, atunci $\sqrt{d_2}=\alpha\in\mathbb{Q}$, contradicție. Dacă $\alpha=0$, atunci $\sqrt{\frac{d_2}{d_1}}=\beta\in\mathbb{Q}$, contradicție. Deci $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$ şi ridicând la pătrat obținem $d_2=\alpha^2+\beta^2d_1+2\alpha\beta\sqrt{d_1}$, de unde $\sqrt{d_1}=\frac{d_2-\alpha^2-\beta^2d_1}{2\alpha\beta}\in\mathbb{Q}$, contradicție.

Rămâne drept unică posibilitate $[(\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})):\mathbb{Q}]=1$, adică egalitatea: $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})=\mathbb{Q}$.

(ii). Evident, $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}[\sqrt{d_1}]\cap\mathbb{Z}[\sqrt{d_2}]$, căci $\mathbb{Z}$ este inclus în fiecare dintre cele două inele.

Deoarece $\mathbb{Z}[\sqrt{d_1}]\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$ şi $\mathbb{Z}[\sqrt{d_2}]\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ vom avea:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d_1}]\cap\mathbb{Z}[\sqrt{d_2}]\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})=\mathbb{Q}.$$

Pe de altă parte, $\mathbb{Z}[\sqrt{d_1}]\cap\mathbb{Z}[\sqrt{d_2}]\subseteq\mathbb{Z}[\sqrt{d_1}]$ deci

$\mathbb{Z}[\sqrt{d_1}]\cap\mathbb{Z}[\sqrt{d_2}]\subseteq\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}[\sqrt{d_1}]=\mathbb{Z}$, adică $\mathbb{Z}[\sqrt{d_1}]\cap\mathbb{Z}[\sqrt{d_2}]\subseteq\mathbb{Z}$.

Aşadar $\mathbb{Z}[\sqrt{d_1}]\cap\mathbb{Z}[\sqrt{d_2}]=\mathbb{Z}$.

9.11. Deoarece K este corp rezultă că $\mathbb{Q}\subset K$.

În ipoteza (ii) cu a=1 rezultă $\sqrt{3}\in K$.

În ipoteza (i) cu a=1 rezultă $\sqrt{2}\in K$ şi apoi cu a= $\sqrt{2}$ rezultă $\sqrt{3}\in K$.

În orice corp K, $a\in K$ implică în condiţiile ipotezei (ii) că

$$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left\{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(a+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1\right\}.$$

Evident funcţia $f:K\to K$, $f(a)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(a+\frac{1}{2}\right)$ este bijectivă. De asemenea, putem scrie: $a^2+1=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}\right)+1\right]$, oricare ar fi $a\in K$.

Deci (i)$\Leftrightarrow$(ii).

Ca exemplu de corp pentru care una din afirmaţiile (i) sau (ii) este adevărată putem lua $K=\mathbb{R}$.

9.12. Notăm cu $\mathbb{P}$ mulţimea numerelor prime. Pentru $P\subseteq\mathbb{P}$ considerăm $A(P)=\{\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}\mid p|n\Rightarrow p\in P\}$, adică toate fracţiile (ireductibile) $\frac{m}{n}$ a.î. divizorii primi ai lui n sunt doar din P.

Pentru un subinel A unitar al lui $\mathbb{Q}$ considerăm P(A) mulţimea tuturor divizorilor primi ai numitorilor tuturor fracţiilor (ireductibile) din A.

Vom arăta că aceste două corespondenţe sunt una inversa celeilalte (adică, A(P(A))=A şi P(A(P))=P), adică există o bijecţie între mulţimea tuturor subinelelor unitare ale lui $\mathbb{Q}$ şi $P(\mathbb{P})$ mulţimea tuturor submulţimilor finite sau infinite de numere prime.

Toate fracţiile sunt presupuse ireductibile.

Dacă un subinel unitar conţine $\frac{m}{n}$ trebuie de asemenea să conţină $\frac{1}{n}$.

Într-adevăr, dacă (m, n)=1 atunci um+vn=1 are loc pentru u, v∈ℤ. Rezultă $\frac{1}{n}=\frac{um+vn}{n}=u\cdot\frac{m}{n}+v\cdot 1$. Deci ℤ=<1>, evident cel mai mic subinel unitar al lui ℚ.

În final P(A(P))=P şi A⊆A(P(A)) sunt evidente, conform definiției anterioare. Pentru a demonstra că A(P(A))⊆A, fie $\alpha=\frac{m}{p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}}\in$A(P(A)). Pentru $p_1\in$P(A), există o fracție $\frac{s}{p_1^{e_1}\cdot t}\in$A şi cu remarca de mai sus $\frac{1}{p_1}\in$A. Analog $\frac{1}{p_2}\in$A, …, $\frac{1}{p_k}\in$A, adică α∈A.

Observație. Dacă P={p_1, …, p_k} este mulțime finită atunci P(A) este subinelul generat de $\frac{1}{p_1\cdots p_k}$.

9.13. Dacă în egalitatea $a^nb^n-b^{n+1}a^{n+1}=1$ înmulțim la dreapta cu a^n obținem:

$$a^nb^na^n-b^{n+1}a^{2n+1}=a^n \quad (1).$$

Din ipoteză avem $a^{2n+1}=-b^{2n+1}$şi înmulțind cu b^{n+1} mai întâi la stânga şi apoi la dreapta obținem respectiv:

$$b^{n+1}a^{2n+1}=-b^{3n+2} \qquad (2)$$

$$a^{2n+1}b^{n+1}=-b^{3n+2} \qquad (3)$$

Din (2) şi (3) rezultă că $b^{n+1}a^{2n+1}=a^{2n+1}b^{n+1}$ (4).

Din (1) şi (4) rezultă $a^nb^na^n-a^{2n+1}b^{n+1}=a^n$ şi înmulțind la stânga cu a^{-n} rezultă $b^na^n-a^{n+1}b^{n+1}=1$, adică egalitatea cerută.

9.14. Deoarece K⊂K(x) şi ax+b∈K(x) rezultă K(ax+b)⊂K(x). Pentru a stabili şi incluziunea inversă observăm că $x=a^{-1}(ax+b)-a^{-1}b\in$K(ax+b).

9.15. (i). Cum ordinul lui 1 în grupul (A,+) este n, elementele 0, 1, 2·1,…,(n-1)·1 sunt distincte şi n·1=0. Avem A={0, 1, 2·1, …, (n-1)·1}. Aşadar, dacă x∈A, atunci x se reprezintă în mod unic sub forma x=i·1, 0≤i<n. Definim f:A→$\mathbb{Z}_n$, $f(i\cdot 1)=\hat{i} \Leftrightarrow$ x=i·1, 0≤i<n. Evident f este aplicație bijectivă. Fie x, y∈A, x=i·1, y=j·1, 0≤i, j<n. Atunci:

$$x+y=i\cdot 1+j\cdot 1=(i+j)\cdot 1=(i\oplus j)\cdot 1,$$

$$xy=(i\cdot 1)(j\cdot 1)=(ij)\cdot 1=(i\otimes j)\cdot 1,$$

unde $\oplus$ şi $\otimes$ sunt simbolurile adunării respectiv înmulţirii modulo n.

Rezultă că:

$$f(x+y)=\hat{i}\hat{\oplus}\hat{j}=\hat{i}+\hat{j}=f(x)+f(y),\ f(xy)=\hat{i}\hat{\otimes}\hat{j}=\hat{i}\hat{j}=f(x)f(y),$$

deci f este izomorfism de inele.

(ii). Cum $|A|=p>1$, rezultă că $0\neq 1$. Deci ordinul elementului 1 în grupul $(A, +)$ este egal cu p şi $A=\{0, 1, 1+1, \ldots, (p-1)\cdot 1\}$. Conform punctului (i), rezultă că $(A,+,\cdot)\simeq(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$. Cum $\mathbb{Z}_p$ este corp comutativ şi $(A,+,\cdot)\simeq(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$, rezultă că şi A este corp comutativ.

9.16. (i). Pentru orice $x\in A$ avem $x+x=0$.

Într-adevăr, $x+x=1\cdot x+1\cdot x=(1+1)\cdot x=0\cdot x=0$. Deducem că $x=-x$, oricare ar fi $x\in A$.

Avem:
$$\begin{aligned}x^7+1=x^7-1&=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\&=(x+1)[(x^6+x^4+x^3)+(x^5+x^3+x^2)+(x^3+x+1)]\\&=(x+1)[x^3(x^3+x+1)+x^2(x^3+x+1)+(x^3+x+1)]\\&=(x+1)(x^3+x^2+1)(x^3+x+1).\end{aligned}$$

(ii). Presupunem că A este cop şi fie $A^*=A\setminus\{0\}$. Atunci $(A^*, \cdot)$ este un grup cu 7 elemente. Fie $a\in A^*$, $a\neq 1$. Avem $a^7=1$, deci $(a+1)(a^3+a^2+1)(a^3+a+1)=0$.

Cum A este corp şi $a\neq 1$, deducem că $a^3+a+1=0$ sau că $a^3+a^2+1=0$. Dacă $a^3+a^2+1=0$, atunci $(1+a)^3+(1+a)+1=1+3a+3a^2+a^3+1+a+1=a^3+a^2+1=0$ şi din nou avem proprietatea cerută cu $1+a$ în loc de a.

Reciproc, fie $a\in A$ a.î. $a^3+a+1=0$. Cum $1\neq 0$, se deduce că $a\neq 0$ şi $a\neq 1$. Din (i) rezultă că $a^7=1$, deci a este element inversabil al inelului A. Cum $a\neq 1$ şi $a^7=1$, rezultă că a este un element de ordin 7 al grupului unităţilor inelului A. Aşadar A are cel puţin 7 elemente inversabile, anume 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6. Cum $|A|=8$, rezultă că orice element diferit de 0 al lui A este inversabil, deci A este corp.

9.17. (i)$\Rightarrow$(ii). Fie $a\in A\setminus\{0,1\}$ neinversabil şi $B=\{a^k|k\in\mathbb{N}^*\}$. Evident $1\notin B$ şi B este finită. Distingem cazurile:

1) $0\in B$. Atunci există $s\in\mathbb{N}^*$ cu $a^s\neq 0$ şi $a^{s+1}=0$. Fie $x_0=a^s$, $y_0=1-a^s\neq 0$. Cum $x_0+y_0=1$ rezultă că ecuația $x+y=z$ are soluții în A^*.

Dacă $n\geq 2$ atunci $x_0^n=0$ şi cum $x_0^n+x_0^n=x_0^n$ rezultă că ecuația $x^n+y^n=z^n$ are soluția $(x_0, x_0, x_0)\in(A^*)^3$.

2) $0\notin B$. Cum B este finită există $i>j\geq 1$ cu $a^i=a^j$. Dacă $i=j+p$ cu $p\in\mathbb{N}^*$ atunci $a^j(a^p-1)=0=(a^p-1)a^i$. Fie $x_0=a^j$ şi $y_0=a^p-1$.

Cum $0, 1\notin B$ rezultă că $x_0, y_0\neq 0$. Dacă $z_0=x_0+y_0=a^j+a^p-1$ rezultă $z_0\neq 0$ (în caz contrar, rezultă că $a^j+a^p=1 \Leftrightarrow a(a^{j-1}+a^{p-1})=1$, deci a este inversabil, fals).

Cum $x_0y_0=y_0x_0=0$, rezultă că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem:

$$z_0^n=(x_0+y_0)^n=x_0^n+\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k x_0^{n-k}y_0^k+y_0^n=x_0^n+y_0^n,$$

deci ecuația $x^n+y^n=z^n$ are soluția $(x_0, y_0, z_0)\in(A^*)^3$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Presupunem că A este corp. Fie $q=|A|$ (numărul elementelor lui A) Cum $q\geq 2$ atunci există $x_0, y_0, z_0\in A^*$ cu $x_0^{q-1}+y_0^{q-1}=z_0^{q-1}$. Deci $1+1=1$, de unde $1=0$, absurd.

9.18. Grupul $(K^*, \cdot)$ are 7 elemente, deci pentru orice $x\in K^*$ avem $x^7=1$. Rezută că polinomul $f(X)=X^8-X$ are ca rădăcini toate elementele lui K. Deoarece K este corp comutativ, f are 8 factori de gradul întâi. Considerăm $g(X)=X^3-X-1$; Se verifică uşor că $f(X)=g(X)\cdot(X^5+X^3+X^2+X)$, deoarece $-1=1$ în K. Atunci g conține 3 factori liniari ai lui f, deci are rădăcini în K. Dacă $a\in K$ este o rădăcină a lui g, atunci $a^3=a+1$.

9.19. (i)$\Rightarrow$(ii). Considerăm K corp. Cum $|K|=4$ rezultă că ordinul lui 1 în grupul (K, +) poate fi 2 sau 4, deci $car(K)=2$ sau $car(K)=4$.

Dacă $car(K)=4$ atunci $1+1\neq 0$ şi $1+1+1+1=0$, de unde $(1+1)(1+1)=1+1+1+1=0$, contradicție, căci un corp nu are divizori ai lui zero. Aşadar $1+1=0$ şi avem $x+x=1\cdot x+1\cdot x=(1+1)x=0\cdot x=0$, oricare ar fi $x\in K$.

Fie $K^*=K\setminus\{0\}$. $(K^*,\cdot)$ este grup şi $|K^*|=3$.

Fie $a\in K^*$, $a\neq 1$. Atunci $a^3=1$.

Avem $0=a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)=(a+1)(a^2+a+1)$ şi cum $a+1\neq 0$ iar K este corp, rezultă $a^2+a+1=0$, deci $a^2=a+1$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Presupunem că există $a\in K$ a.î. $a^2=a+1$. Atunci $a\neq 0$ şi $a\neq 1$ căci în caz contrar $1=0$, contradicție.

Presupunem că car(K)=4. Atunci $K=\{0, 1, 1+1, 1+1+1\}$. Cum $a\neq 0$ şi $a\neq 1$, rezultă că $a=1+1$ sau $a=1+1+1$.

Dacă $a=1+1$ atunci din $a^2=a+1$ deducem că $(1+1)^2=1+(1+1)$ $\Leftrightarrow 1+1+1+1=1+1+1$ rezultă $1=0$, contradicție.

De asemenea, dacă $a=1+1+1$, din $a^2=a+1$ rezultă $1=0$, contradicție.

Ambele cazuri sunt imposibile, deci car(K)=2. Aşadar K este inel de tipul 2) (vezi problema **6.73.**).

Cum $(1+a)a=a+a^2=a+1+a=(a+a)+1=0+1=1$ şi $a(1+a)=a+a^2=1$, în mod analog, rezultă că toate elementele diferite de zero ale lui K sunt inversabile, deci K este corp.

9.20. (i). Cum $E\neq O$ şi $E+E=O$, rezultă că E este element de ordin 2 al grupului $(M_3(\mathbb{Z}_2), +)$. Rezultă că elementul unitate al inelului $M_3(\mathbb{Z}_2)$ are ordinul aditiv egal cu 2, deci $M_3(\mathbb{Z}_2)$ este inel de caracteristică 2.

(ii). O verificare directă arată că $U^3+U+E=O$. Cum $E+E=O$, se deduce că: $X+X=O$, $X^7+E=(X+E)(X^3+X^2+E)(X^3+X+E)$, oricare ar fi $X\in M_3(\mathbb{Z}_2)$.

Acum din $U^3+U+E=O$ rezultă $U^7=E$ şi cum $U\neq E$, deducem că U este element de ordin 7 al grupului unităților inelului $M_3(\mathbb{Z}_2)$, deci $F^*_8=\{E, U, U^2, U^3, U^4, U^5, U^6\}$ formează grup cu 7 elemente în raport cu înmulțirea matricelor.

Aşadar $|F_8|=8$ şi cum: $U^4=U^3U=(E+U)U=U+U^2$,

$U^5=U^4U=U^2+U^3=E+U+U^2$, $U^6=U^5U=U+U^2+U^3=E+U^2$, avem:

$$F_8=\{O, E, U, E+U, U^2, E+U^2, U+U^2, E+U+U^2\}.$$

Se deduce că orice element $X\in F_8$ se reprezintă în mod unic sub forma $X=iE+jU+kU^2$, $0\leq i, j, k<2$.

Dacă de asemenea, $Y\in F_8$, $Y=sE+tU+uU^2$, $0\leq s, t, u<2$, atunci $X+Y=(i+s)E+(j+t)U+(k+u)U^2=(i\oplus s)E+(j\oplus t)U+(k\oplus u)U^2$, unde $\oplus$ este simbolul adunării modulo 2. Rezultă că F_8 este o parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{Z}_2)$ în raport cu adunarea matricelor şi evident $(F_8, +)$ este grup abelian. Deci $(F_8, +, \cdot)$ este inel cu toate elementele diferite de O inversabile, deci este corp cu 8 elemente.

(iii). Cum $|K|=8$, ordinul lui 1 în grupul (K, +) poate fi 2, 4 sau 8. Dacă ordinul lui 1 este 8, atunci $(K, +, \cdot)\simeq(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ şi cum $\mathbb{Z}_8$ nu este corp se obține

o contradicție. Dacă ordinul aditiv al lui 1 este 4, atunci $1+1\neq 0$ şi $(1+1)(1+1)=1+1+1+1=0$, deci corpul K are divizori ai lui zero, contradicție.

Aşadar $1+1=0$, deci există $a\in K$ a.î. $a^3+a+1=0$ (vezi problema **9.16.**). Ca şi la punctul (ii) se deduce că $K=\{0, 1, a, 1+a, a^2, 1+a^2, a+a^2, 1+a+a^2\}$, deci orice $x\in K$ se reprezintă în mod unic sub forma $x=i\cdot 1+j\cdot a+k\cdot a^2$, $0\leq i, j, k<2$.

Rezultă că aplicația $f:K\to F_8$, $f(x)=iE+jU+kU^2 \Leftrightarrow x=i\cdot 1+j\cdot a+k\cdot a^2$, $0\leq i, j, k<2$, este bijectivă. Cum $x+x=0$, oricare ar fi $x\in K$, $X+X=O$, oricare ar fi $X\in F_8$, $a^3+a+1=0$ şi $U^3+U+E=O$ se arată că $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(xy)=f(x)f(y)$, oricare ar fi $x, y\in K$, de unde $(K, +, \cdot)\simeq(F_8, +, \cdot)$.

9.21. Demonstrăm că orice element nenul este inversabil.

Fie $a\in A$, $a\neq 0$ şi $b\in A$ a.î. $ba=1$. Evident $b\neq 0$ şi fie $b'\in A$ cu $b'b=1$. Atunci $a=1\cdot a=(b'b)a=b'(ba)=b'\cdot 1=b'$, adică $b'=a$. Deci $ab=ba=1$ şi rezultă că a este inversabil.

9.22. Elementul unitate este (1, 0). Dacă $(a, b)\neq(0, 0)$ atunci $(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. $K_1=\{(x, 0)|x\in K\}\subset K\times K$ este un subcorp al lui $K\times K$ şi aplicația $f:K\to K_1$ definită prin $f(x)=(x, 0)$ este un izomorfism de corpuri.

Ecuația $x^2+1=0$ are în corpul $K\times K$ soluția $x=(0, 1)$.

Fie $K=\mathbb{Z}_p$ cu p număr prim de forma $4k+3$, $k\in\mathbb{N}$ inelul claselor de resturi modulo p. Să presupunem că $x\in K$ are proprietatea că $x^2+1=0$. Atunci conform teoremei lui Fermat rezultă că $1=x^{p-1}=(x^2)^{p-1/2}=(-1)^{2k+1}=-1$, contradicție.

9.23. Fie $M=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ şi $N=\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix}$ două elemente din H.

Atunci $M-N=\begin{pmatrix} \alpha-\gamma & \beta-\delta \\ \overline{-(\beta-\delta)} & \overline{\alpha-\gamma} \end{pmatrix}\in H$, $MN=\begin{pmatrix} \alpha\gamma-\beta\bar{\delta} & \alpha\delta+\beta\bar{\gamma} \\ \overline{-\alpha\delta+\beta\bar{\gamma}} & \overline{\alpha\gamma-\beta\bar{\delta}} \end{pmatrix}\in H$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}\in H$, de unde concluzia că H este subinel (unitar) al lui

$M_2(\mathbb{C})$. Mai avem de demonstrat faptul că dacă $M\in H$, $M=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\neq O_2$, atunci există $N\in H$ a.î. $MN=NM=I_2$. Din $M\neq O_2$ deducem că $\Delta=\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=|\alpha|^2+|\beta|^2\neq 0$. Considerând $N=\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\overline{\beta}' & \overline{\alpha}' \end{pmatrix}\in H$, unde $\alpha'=\overline{(\alpha/\Delta)}$ şi $\beta'=-\frac{\beta}{\Delta}$ avem:

$$MN=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\overline{\beta}' & \overline{\alpha}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\alpha'-\beta\overline{\beta}' & \alpha\beta'+\beta\overline{\alpha}' \\ -\overline{(\alpha\beta'+\beta\overline{\alpha}')} & \overline{\alpha\alpha'-\beta\overline{\beta}'} \end{pmatrix} \text{ iar}$$

$$\alpha\alpha'-\beta\overline{\beta}'=\alpha\overline{\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)}+\beta\overline{\left(\frac{\beta}{\Delta}\right)}=\frac{\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}}{\Delta}=\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{\Delta}=\frac{\Delta}{\Delta}=1$$

$$\alpha\beta'+\beta\overline{\alpha}'=-\alpha\left(\frac{\beta}{\Delta}\right)+\beta\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)=-\frac{\alpha\beta}{\Delta}+\frac{\alpha\beta}{\Delta}=0,$$

de unde $MN=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$ şi analog $NM=I_2$, adică $M^{-1}=N$.

9.24. (i). Fie $M=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ cu $\alpha=a+bi$ şi $\beta=c+di$; Se observă că asocierea $M\to\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ defineşte un morfism de inele de la corpul quaternionilor în $M_4(\mathbb{R})$.

Observăm că $A\cdot A^t=(a^2+b^2+c^2+d^2)\cdot I_4$, de unde $\det A=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Dacă $A\neq O_4$, atunci $\det A\neq 0$ şi matricea A este inversabilă.

Observaţie. Considerăm K mulţimea expresiilor formale de forma $a+bi+cj+dk$ cu $a, b, c, d\in\mathbb{R}$. Definind pentru două elemente din K suma pe componente şi produsul polinomial (ţinând cont că $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$) se observă că $(K, +, \cdot)$ devine corp izomorf cu corpul H al quaternionilor.

(ii). Fie $x=a+bi+cj+dk$ un quaternion din centrul lui H. Din condiţia de comutare $x\cdot i=i\cdot x$ rezultă că $ai-b-ck+dj=ai-b+ck-dj$, de unde $c=d=0$. Din

condiția de comutare $x\cdot j=j\cdot x$ rezultă şi $b=0$. Aşadar centrul lui H este mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale.

9.25. Presupunem prin reducere la absurd că avem $\bigcup_{i=1}^{3} K_i = K$.

Atunci în mod necesar $K_1 \not\subseteq K_2 \cup K_3$, $K_2 \not\subseteq K_1 \cup K_3$, $K_3 \not\subseteq K_1 \cup K_2$, (căci dacă am avea de exemplu $K_1 \subseteq K_2 \cup K_3$, atunci $K = K_2 \cup K_3$ şi gândind această egalitate pentru grupurile aditive corespunzătoare, rezultă $K = K_2$ sau $K = K_3$, imposibil).

Prin urmare putem alege elementele $x_1 \in K_1 \setminus (K_2 \cup K_3)$ şi $x_2 \in K_2 \setminus (K_1 \cup K_3)$. Evident $x_1 \neq 0$ şi $x_2 \neq 0$ şi $x_1 + x_2 \notin K_1 \cup K_2$ (căci dacă, de exemplu, $x_1 + x_2 \in K_1$, atunci $x_2 = -x_1 + (x_1 + x_2) \in K_1$, contrar alegerii lui x_2). Prin urmare, $x_1 + x_2 \in K_3$. Considerăm elementul $z = x_1^{-1}(x_1 + x_2) = 1 + x_1^{-1}x_2$. Cum $x_1^{-1} \in K_1$ şi $x_1 + x_2 \in K_3 \setminus \{0\}$, rezultă ca mai sus, că $z \notin K_1 \cup K_3$ deci neapărat $z \in K_2$. Atunci $z - 1 \in K_2$, adică $x_1^{-1}x_2 \in K_2$. Din faptul că $x_2 \in K_2 \setminus \{0\}$, rezultă $(x_1^{-1}x_2)x_2^{-1} \in K_2$, adică $x_1^{-1} \in K_2$ şi de aici $x_1 \in K_2$, ceea ce este o contradicție cu alegerea lui x_1.

9.26. Cazul 1. Studiem mai întâi cazul când corpul dat $(K, +, \cdot)$ este finit. Să presupunem că avem o scriere a sa $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, unde $K_i \subset K$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sunt subcorpuri proprii ale lui K. Se ştie că grupul multiplicativ $(K^*, \cdot)$ al lui K este ciclic şi fie $a \in K^*$ un generator al său. Există atunci $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a.î. $a \in K_i$, de exemplu, $a \in K_1$. Atunci $a^m \in K_1$, oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$ şi deci $K^* \subset K_1$. Aşadar găsim $K = K_1$, care contrazice faptul că subcorpul K_1 este propriu. Problema este deci rezolvată în cazul unui corp finit K.

Cazul 2. Fie acum un corp infinit K. Să presupunem prin reducere la absurd că există $K_1, K_2, \ldots, K_n$ $(n \geq 2)$, subcorpuri proprii ale lui K a.î. $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ şi $K_i \neq \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} K_j$, oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, n\}$. $(*)$

Vom arăta că intersecția celor n subcorpuri $K_1, K_2, \ldots, K_n$ este infinită. Demonstrăm prin inducție matematică după $k \leq n$, arătând că pentru orice $k \leq n$, intersecția primelor k subcorpuri K_i conține un şir infinit de elemente distincte.

Într-adevăr, cazul k=1 este evident, căci K_1, de exemplu trebuie să fie infinit. Presupunem afirmația adevărată pentru k, deci există un şir de elemente distincte $(x_n)_n \subset \bigcap_{i=1}^{k} K_i$. Cum $K \neq \bigcup_{j=1}^{k} K_j$, fie $b \in K - \bigcup_{j=1}^{k} K_j$.

Considerăm $A=\{x_1b, x_2b, \ldots, x_nb, \ldots\}=(x_nb)_{n\geq 1}$.

Evident $A \not\subset \bigcup_{j=1}^{k} K_j$ şi cum $K = \bigcup_{j=1}^{n} K_j$ rezultă $A \subset \bigcup_{j=k+1}^{n} K_j$. Există deci un subşir al lui $(x_nb)_{n\geq 1}$ inclus într-un K_j ($j \geq k+1$), de exemplu putem presupune că subşirul este $(x_{n_p} b)_{p\geq 1} \subset K_{k+1}$. Deoarece $(x_{n_1} b)(x_{n_p} b)^{-1} = x_{n_1} x_{n_p}^{-1} \in K_{k+1}$, oricare ar fi $p \geq 1$ şi cum în mod evident, şirul $(x_{n_1} x_{n_p}^{-1})_{p\geq 1} \subset \bigcap_{i=1}^{k} K_i$ rezultă că $(x_{n_1} x_{n_p}^{-1})_{p\geq 1} \subset \bigcap_{i=1}^{k+1} K_i$, ceea ce încheie demonstrația prin inducție.

În particular, când k=n obținem că $P = \bigcap_{i=1}^{n} K_i$ este infinită.

Observăm că P este subcorp în fiecare K_i şi în K. Vom arăta că din (∗) obținem că P are cel mult n-1 elemente; aceasta va contrazice faptul că P este infinită şi încheie demonstrația.

Într-adevăr, să presupunem că există $a_1, a_2, \ldots, a_n \in P$ distincte. Fie $a_1 \in K_1 \setminus \bigcup_{j=2}^{n} K_j$ şi fie $b \in K_2 \setminus K_1$. Valorile $a_i \cdot a+b$ formează o mulțime de n elemente distincte (altfel avem $a_i \cdot a+b=a_j \cdot a+b$, cu $i \neq j$ implică $a_i=a_j$, fals). În plus, $a_i \cdot a+b \notin K_1$, oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, n\}$ (într-adevăr, dacă pentru un i am avea $a_i \cdot a+b = y \in K_1$, cum $a_i \cdot a \in K_1$ ar rezulta $b \in K_1$, fals). Atunci conform principiului lui Dirichlet va exista un K_j, $j \geq 2$ care include cel puțin două elemente de forma $a_i \cdot a+b$.

Dacă $a_{i_1} a + b$, $a_{i_2} a + b \in K_j$ rezultă că $(a_{i_1} - a_{i_2})a \in K_j$ deci, $a \in K_j$ (deoarece $a_{i_1} - a_{i_2} \neq 0$), imposibil. Contradicția rezultă din faptul că ar exista elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in P$ distincte. Deci card $P \leq n-1$. Dar în condițiile ipotezei (∗) am demonstrat că avem card $P=\infty$. Din contradicția obținută rezultă că (∗) nu este adevărată şi deci problema este rezolvată.

9.27.„⇐”. Fie E_1, E_2, …, E_n liniile matricei E. Dacă E nu este inversabilă, atunci det(E)=0, deci există r_1, r_2, …, $r_n \in K$ nu toți nuli a.î. $\sum_{i=1}^{n} r_i E_i = 0$ în mulțimea $M_{1\times n}(K)$. Fie $F_1=(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ şi $F_i=(0, 0, \ldots, 0)$ pentru $1<i\leq n$. Matricea F formată cu liniile F_1, F_2, …, F_n constituie un divizor al lui zero la stânga pentru E.

„⇒”. Dacă E este divizor al lui zero atunci există $F\neq O_n$ a.î. $EF=O_n$. Presupunem prin reducere la absurd că E este inversabilă. Există deci E^{-1} inversa sa. Atunci $E^{-1}E=I_n$ şi înmulțind la dreapta cu $F\neq O_n$ deducem că $E^{-1}(EF)=F$, adică, $E^{-1}\cdot O_n=F$ deci $O_n=F$, contradicție.

Dacă K nu este corp, afirmația nu este valabilă după cum se observă în cazul marticei $2I_n \in M_n(\mathbb{Z})$.

9.28. Considerând ecuația $x^3-1=0$, se observă că are o singură rădăcină în $\mathbb{R}$ şi anume x=1 iar în $\mathbb{C}$ are trei rădăcini $x_1=1$, $x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

9.29. Fie $f:K\to A$ un morfism unitar de inele. Ştim că f este injectiv dacă şi numai dacă Ker(f) este idealul nul în K. Deoarece Ker(f) este ideal bilateral în K şi K este corp deducem, conform problemei **9.4.**, că Ker(f)=K sau Ker(f)=(0).

Egalitatea Ker(f)=K nu poate avea loc deoarece ar rezulta f(1)=0, ceea ce contrazice faptul că f(1) este elementul unitate la înmulțire în A şi acesta este diferit de zero, deoarece A este inel nenul.

Observație. Deducem că morfismele de corpuri sunt în particular funcții injective.

9.30. Fie $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ morfism de corpuri, deci morfism de inele şi f(1)=1. În particular, f este endomorfism al grupului aditiv $(\mathbb{Q}, +)$.

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=f(0) \Rightarrow f(0)=0.$$

Din f(1)=1 rezultă că $f(n)=f(\underbrace{1+\ldots+1}_{de\ n\ ori})=n\cdot f(1)=n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

De asemenea, pentru $n\in\mathbb{N}^*$ avem $1=f(1)=f(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{de\ n\ ori})=nf\left(\frac{1}{n}\right)$ de unde $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$. Dacă m, $n\in\mathbb{N}^*$ avem $f\left(\frac{m}{n}\right)=f(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{de\ m\ ori})=mf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}$. Deci f(q)=q, oricare ar fi $q\in\mathbb{Q}_+$. Pentru $q\in\mathbb{Q}_-$ avem $-q\in\mathbb{Q}_+$

0=f(q+(-q))=f(q)+f(-q) deci f(q)=-f(-q) şi cum –q>0 rezultă că f(-q)=-q, deci f(q)=q. Am arătat că singurul endomorfism al corpului $\mathbb{Q}$ este cel identic.

9.31. (i). f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0) deci f(0)=0.

f(1)=1, pentru că f este morfism unitar de inele.

$f((-1)^2)=[f(-1)]^2$, deci $1=[f(-1)]^2$ de unde $f(-1)\in\{\pm1\}$.

Nu putem avea f(-1)=1, căci ar rezulta f(-1)=f(1), deci f nu ar fi injectivă.

Aşadar f(-1)=-1.

(ii). Din f(1)=1 rezultă $f(n)=f(\underbrace{1+\ldots+1}_{de\ n\ ori})=n\cdot f(1)=n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

De asemenea, pentru $n\in\mathbb{N}^*$ avem $1=f(1)=f(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{de\ n\ ori})=nf\left(\frac{1}{n}\right)$, de unde $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$.

Dacă m, $n\in\mathbb{N}^*$ avem $f\left(\frac{m}{n}\right)=f(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{de\ m\ ori})=mf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}$. Deci f(q)=q, oricare ar fi $q\in\mathbb{Q}_+$. Pentru $q\in\mathbb{Q}_-$ avem $-q\in\mathbb{Q}_+$, 0=f(q+(-q))=f(q)+f(-q) deci f(q)=-f(-q) şi cum –q>0 rezultă că f(-q)=-q, deci f(q)=-(-q)=q.

(iii). Dacă α>0, atunci există $\beta\in\mathbb{R}^*$ a.î. $\alpha=\beta^2$, deci $f(\alpha)=f(\beta^2)=[f(\beta)]^2>0$. Fie x_1, $x_2\in\mathbb{R}$ cu $x_1<x_2$. Atunci $\alpha=x_2-x_1>0$ deci $f(\alpha)=f(x_2-x_1)>0 \Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)>0 \Leftrightarrow f(x_2)>f(x_1)$, deci f este strict crescătoare. (Am ţinut cont că $f(-x_1)=-f(x_1)$, ceea ce se arată ca şi la (ii) când am demonstrat că f(-q)=-f(q)).

(iv). Fie f un endomorfism al lui $\mathbb{R}$. Ținând cont de (ii) este suficient să arătăm că $f(x)=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Fie $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ fixat și $(q_n)_n$, $(r_n)_n$ șirurile aproximărilor raționale ale lui x prin lipsă respectiv prin adaos. Avem $q_n<x<r_n$ deci $f(q_n)<f(x)<f(r_n)$, adică, $q_n<f(x)<r_n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Trecând la limită după n, obținem $x\leq f(x)\leq x$, deci $f(x)=x$.

9. 32. Egalitatea $f\circ\lambda_a=\lambda_a\circ f$, pentru orice $a\in K$, se scrie $\lambda_a(f(x))=f(\lambda_a(x))$, oricare ar fi $a, x\in K$ sau $af(x)-f(x)a=f(ax-xa)$, oricare ar fi $a, x\in K$, sau încă:

$$af(x)-f(x)a=f(a)f(x)-f(x)f(a), \text{ oricare ar fi } a, x\in K.(1)$$

Egalitatea (1) poate fi scrisă și sub forma:

$$[a-f(a)]f(x)=f(x)[a-f(a)], \text{ oricare ar fi } a, x\in K. (2)$$

Punând $b=a-f(a)\in Im(1_K-f)$, egalitatea (2) devine:

$$bf(x)=f(x)b, \text{ oricare ar fi } x\in K,\ b\in Im(1_K-f).(3)$$

Atunci, pentru orice $x\in K$ și $b\in Im(1_K-f)$, avem:

$$f(bx-xb)=f(b)f(x)-f(x)f(b)\overset{(1)}{=}bf(x)-f(x)b\overset{(3)}{=}0,$$

de unde, ținând seama că f este injectiv, rezultă $bx-xb=0$, adică $bx=xb$. Înseamnă că $Im(1_K-f)\subset Z(K)$, centrul corpului K. Atunci, întrucât $\lambda_a(x)=0$, oricare ar fi $a\in K$ și $x\in Z(K)$, rezultă $\lambda_a\circ(1_K-f)=0$. (4)

Observăm ușor că $\lambda_a\in End(K)$, oricare ar fi $a\in K$, unde $(End(K), +, \circ)$ este inelul endomorfismelor grupului abelian $(K, +)$. În acest inel de endomorfisme, egalitatea (4) devine $\lambda_a=\lambda_a\circ f$, sau folosind ipoteza, $f\circ\lambda_a=\lambda_a$. (5)

Mai observam că: $\lambda_a(ax)=a\lambda_a(x)$, oricare ar fi $a, x\in K$. (6)

Pentru a arăta că corpul $(K, +, \cdot)$ este comutativ, este suficient să demonstrăm că grupul $(K^*, \cdot)$ este comutativ. Cum $Z(K^*)$ este centrul grupului K^* este suficient să stabilim egalitatea $Z(K^*)=K^*$. Observăm ușor că $F=Ker(1_K-f)^*=\{x\in K^* \mid f(x)=x\}$ este un subgrup al lui K^*. Fie $a\in K^*\setminus F$, deci $f(a)\neq a$. Atunci, oricare ar fi $x\in K$ avem $\lambda_a(x)=0$, căci dacă ar exista un $x_0\in K$ cu $\lambda_a(x_0)\neq 0$, din (6) am avea $\lambda_a(ax_0)=a\lambda_a(x_0)$, deci $f(\lambda_a(ax_0))=f(a)f(\lambda_a(x_0))$ și din (5) ar însemna că $\lambda_a(ax_0)=f(a)\lambda_a(x_0)$, adică $a\lambda_a(x_0)=f(a)\lambda_a(x_0)$ și după o simplificare la dreapta cu $\lambda_a(x_0)\neq 0$, am obține $a=f(a)$, contrar presupunerii făcute asupra lui a. Cum $\lambda_a(x)=0$, oricare ar fi $x\in K$ înseamnă că $a\in Z(K^*)$. Am demonstrat așadar incluziunea $K^*\setminus F\subset Z(K^*)$ și de aici rezultă egalitatea de grupuri multiplicative $K^*=F\cup Z(K^*)$. Dar un grup nu poate fi scris ca reuniune a două subgrupuri

proprii ale sale, deci neapărat $F=K^*$ sau $Z(K^*)=K^*$. Nu putem avea $F=K^*$, căci ar rezulta $f=1_K$, contrar ipotezei. Rezultă $Z(K^*)=K^*$, deci grupul $(K^*, \cdot)$ este comutativ.

9.33. Ambele corpuri sunt conținute în $\mathbb{R}$. Deoarece elementele lui $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ se scriu în mod unic sub forma $a+b\sqrt{2}$ cu $a, b\in\mathbb{Q}$, orice automorfism φ al lui $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este determinat de $\varphi(\sqrt{2})$, care trebuie să fie o rădăcină a polinomului X^2-2. Avem două posibilități: $\varphi(\sqrt{2})=\sqrt{2}$ (şi obținem automorfismul identic $\varphi(a+b\sqrt{2})=a+b\sqrt{2}$) sau $\varphi(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$ (şi obținem automorfismul de „conjugare" $\varphi(a+b\sqrt{2})=a-b\sqrt{2}$; acesta are proprietatea că $\varphi\circ\varphi=1$). Automorfismele lui $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ formează un grup izomorf cu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

La fel, un automorfism ψ al lui $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ este determinat de imaginea $\psi(\sqrt[3]{2})$, care trebuie să fie o rădăcină (reală) a polinomului X^3-2. Cum acest polinom are o singură rădăcină reală, corpul $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ are un singur automorfism, cel identic.

9.34. Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ un morfism de corpuri cu $f(x)=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Dacă $f(i)=\alpha$ atunci $-1=f(-1)=f(i^2)=f(i)^2=\alpha^2$, deci $\alpha\in\{\pm i\}$.

Pentru $f(i)=i$ obținem $f(z)=f(x+iy)=x+f(i)y=x+iy=z$, iar pentru $f(i)=-i$ obținem $f(z)=f(x+iy)=x+f(i)y=x-iy=\bar{z}$.

Deci singurele morfisme de corpuri $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ care invariază $\mathbb{R}$ sunt identitatea şi conjugarea, care sunt evident automorfisme.

9.35. Este suficient să demonstrăm că dacă K nu este corp există un morfism de la K la un inel nenul care nu este injectiv.

Dacă K nu este corp, conform problemei **7.4.**, există în K un ideal I diferit de (0) şi K. Deoarece K este un inel comutativ, idealul I este bilateral, deci există inelul factor $A=K/I$. Atunci morfismul canonic $p: K\to K/I$ nu este injectiv, căci $\mathrm{Ker}(p)=I\neq(0)$.

9.36. Să presupunem mai întâi că f este morfism sau antimorfism de corpuri şi să demonstrăm că satisface 1), 2), 3). Să presupunem că f este morfism de corpuri (analog se procedează dacă f este antimorfism). Condiția 1) rezultă din definiția morfismului (ea apare şi în definiția antimorfismului).

Arătăm acum 3): Deoarece f este neconstantă, există $x\in K$ cu $f(x)\neq 0$. Cum $f(x)=f(1\cdot x)=f(1)\cdot f(x)$, rezultă $f(1)\neq 0$. Pe de altă parte,

$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)\cdot f(1)$, adică $f(1)\cdot[1-f(1)]=0$ şi cum $f(1)\neq 0$ rezultă că $1-f(1)=0$, adică $f(1)=1$.

Arătăm 2): Pentru $x\in K\setminus\{0\}$, putem scrie $1=f(1)=f(x\cdot x^{-1})=f(x)\cdot f(x)^{-1}$ şi analog $1=f(x^{-1})\cdot f(x)$. Deducem că $f(x)$ este inversabil (deci nenul) şi $f(x^{-1})=f(x)^{-1}$.

Reciproc, să presupunem că f verifică condiţiile 1), 2), 3) şi să arătăm că este morfism sau antimorfism de corpuri.

Fie $x, y\in K$. Dacă $x\neq 0$, $y\neq 0$ şi $xy\neq 1$, din problema **6.17.** rezultă

$$xyx=x+((x-y^{-1})^{-1}-x^{-1})^{-1}.$$

Cum f verifică condiţiile 1), 2), 3) rezultă:

$$f(xyx)=f(x)+((f(x)-f(y)^{-1})^{-1}-f(x)^{-1})^{-1} \quad (1)$$

Pe de altă parte, f este injectivă. Într-adevar, dacă avem $u, v\in K$ cu $f(u)=f(v)$, din 1) rezultă $f(u-v)=0$ sau $f(t)=0$, unde $t=u-v$. Dacă am avea $t\neq 0$, din 2) ar rezulta, $f(t^{-1})=f(t)^{-1}=0^{-1}$, adică 0 ar fi inversabil, contradicţie. Deci $t=0$, adică $u=v$, ceea ce înseamnă că f este injectivă. Atunci cum $x\neq 0$, $y\neq 0$, $xy\neq 1$, rezultă $f(x)\neq f(0)=0$, $f(y)\neq 0$, precum şi $f(x)f(y)\neq 1$ (căci $f(x)f(y)=1$ ar conduce la $f(x)=f(y)^{-1}$ sau $f(x)=f(y^{-1})$, deci $x=y^{-1}$, adică $xy=1$, contradicţie). În aceste condiţii aplicând problema **6.17.** rezultă:

$$f(x)f(y)f(x)=f(x)+((f(x)-f(y)^{-1})^{-1}-f(x)^{-1})^{-1}\ . \quad (2)$$

Comparând (1) cu (2) rezultă $f(xyx)=f(x)f(y)f(x)$ pentru acele elemente $x, y\in K$ cu $x, y\neq 0$, $xy\neq 1$. Dar egalitatea precedentă se verifică în mod evident şi dacă $x=0$ sau $y=0$ sau $xy=1$ (de exemplu, dacă $xy=1$, atunci $x=y^{-1}$, deci $f(x)=f(y^{-1})=f(y)^{-1}$ şi atunci $f(x)f(y)=1$, încât egalitatea se reduce la $f(x)=f(x)$).

Aşadar putem scrie:

$$f(xyx)=f(x)f(y)f(x), \text{ oricare ar fi } x, y\in K. \quad (3).$$

Pentru $y=1$ rezultă $f(x^2)=f(x)^2$, oricare ar fi $x\in K$. (4)

Dacă în (4) înlocuim x cu $x+y$ obţinem

$$f(x^2+xy+yx+y^2)=f(x)^2+f(x)f(y)+f(y)f(x)+f(y)^2, \text{ adică}$$
$$f(x^2)+f(xy)+f(yx)+f(y^2)=f(x)^2+f(x)f(y)+f(y)f(x)+f(y)^2.$$

Reducând termenii egali conform cu (4) rezultă:

$$f(xy)+f(yx)=f(x)f(y)+f(y)f(x). \quad (5)$$

Calculăm următorul produs, pentru $x, y\in K$, $x\neq 0$, $y\neq 0$:

$$[f(xy)-f(x)f(y)]f(xy)^{-1}[f(xy)-f(y)f(x)]=[1-f(x)f(y)f(xy)^{-1}]\cdot[f(xy)-f(y)f(x)]=$$
$$=f(xy)-f(x)f(y)-f(y)f(x)+f(x)f(y)f(xy)^{-1}f(y)f(x) \overset{(5)}{=} -f(yx)+f(x)f(y)f((xy)^{-1})f(y)f(x)$$
$$\overset{(3)}{=} -f(yx)+f(x)f(y(xy)^{-1}y)f(x)=-f(yx)+f(x)f(x^{-1}y)f(x) \overset{(3)}{=} -f(yx)+f(x(x^{-1}y)x)=$$
$$=-f(yx)+f(yx)=0.$$

Deoarece $f(xy)^{-1}\neq 0$, iar într-un corp nu avem divizori ai lui zero, rezultă $f(xy)-f(x)f(y)=0$ sau $f(xy)-f(y)f(x)=0$, pentru orice $x, y\in K\setminus\{0\}$. Dacă $x=0$ sau $y=0$, aceste egalități au loc, în mod evident. Prin urmare am obținut că $f(xy)=f(x)f(y)$ sau $f(xy)=f(y)f(x)$, oricare ar fi $x, y\in K$. Conform problemei **7.24.** rezultă că f este morfism sau antimorfism de inele, deci de corpuri.

9.37.„⇒”. Dacă f este morfism de corpuri afirmațiile 1), 2), 3) sunt satisfăcute.

„⇐”. Reciproc, să presupunem că 1), 2), 3) sunt satisfăcute şi să demonstrăm că f este morfism de corpuri.

Vom arăta mai întâi egalitatea $f(x^2)=f(x)^2$, oricare ar fi $x\in K$. (1)

Într-adevăr, din 2) avem $f((1+x)^3)=[f(1+x)]^3$ şi ținând cont de 1) şi de 3) obținem: $f(1+3x+3x^2+x^3)=[1+f(x)]^3 \Leftrightarrow$

$f(1)+3f(x)+3f(x^2)+f(x^3)=1+3f(x)+3[f(x)]^2+[f(x)]^3 \Leftrightarrow 3[f(x)]^2=3f(x^2)$
(la reducerile de termeni asemenea am folosit 1) şi 3)).

Ultima egalitate se scrie $3[f(x^2)-f(x)^2]=0$ şi cum corpul L este de caracteristică zero, rezultă $f(x^2)-f(x)^2=0$, adică (1).

Arătăm acum că $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x, y\in K$. (2)

Avem evident $2xy=(x+y)^2-x^2-y^2$. Aplicând funcția f şi ținând cont că f este morfism de grupuri aditive, rezultă: $2f(xy)=f((x+y)^2)-f(x^2)-f(y^2)$. Folosind (1) ultima egalitate se transcrie succesiv:

$2f(xy)=[f(x+y)]^2-f(x)^2-f(y)^2 \Leftrightarrow 2f(xy)=[f(x)+f(y)]^2-f(x)^2-f(y)^2 \Leftrightarrow$

$2f(xy)=2f(x)f(y) \Leftrightarrow 2[f(xy)-f(x)f(y)]=0$.

Cum L are caracteristica zero rezultă că $f(xy)-f(x)f(y)=0$, adică (2). Aceasta înseamnă că f este morfism de corpuri.

Observație. Ipoteza conform căreia corpurile K şi L sunt de caracteristică 0, poate fi înlocuită cu una mai generală: caracteristica acestor corpuri să nu fie egală cu 2 sau 3.

9.38. (i). Fie $A=\{1, 2\cdot 1, 3\cdot 1, \ldots, n\cdot 1\}$ care este o submulțime a corpului K. Deoarece K este de caracteristică zero sau de caracteristică $p>n$, deducem că elementele lui A sunt distincte două câte două. Dacă $a\in A$ şi $x\in K$, avem evident $ax=xa$ şi deci funcționeaza formula binomului lui Newton:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 + \ldots + C_n^{n-2}x^2 a^{n-2} + C_n^{n-1}xa^{n-1} + a^n .$$

Luând în această identitate pe rând $a=1$, $a=2\cdot 1$, …, $a=n\cdot 1$ obținem sistemul:

$$(x+1)^n - 1^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} x$$
$$(x+2\cdot 1)^n - 2^n \cdot 1 = x^n + C_n^1 (2\cdot 1) x^{n-1} + C_n^2 (2\cdot 1)^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2} (2\cdot 1)^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} (2\cdot 1)^{n-1} x$$
……
$$(x+n\cdot 1)^n - n^n \cdot 1 = x^n + C_n^1 (n\cdot 1) x^{n-1} + C_n^2 (n\cdot 1)^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2} (n\cdot 1)^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} (n\cdot 1)^{n-1} x$$

în care avem n ecuaţii şi n necunoscute x, x^2, …, x^n.

Determinantul sistemului este:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 \cdot 1 & C_n^2 \cdot 1^2 & \ldots & C_n^{n-1} \cdot 1^{n-1} \\ 1 & C_n^1 \cdot (2\cdot 1) & C_n^2 \cdot (2\cdot 1)^2 & \ldots & C_n^{n-1} \cdot (2\cdot 1)^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & C_n^1 \cdot (n\cdot 1) & C_n^2 \cdot (n\cdot 1)^2 & \ldots & C_n^{n-1} \cdot (n\cdot 1)^{n-1} \end{vmatrix}$$
$$= C_n^1 \cdot C_n^2 \cdot \ldots \cdot C_n^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \ldots & 1^{n-1} \\ 1 & (2\cdot 1) & (2\cdot 1)^2 & \ldots & (2\cdot 1)^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (n\cdot 1) & (n\cdot 1)^2 & \ldots & (n\cdot 1)^{n-1} \end{vmatrix}$$
$$= C_n^1 \cdot C_n^2 \cdot \ldots \cdot C_n^{n-1} \cdot \prod_{1\le i<j\le n} (j\cdot 1 - i\cdot 1),$$

unde am ţinut seama că ultimul determinant este Vandermonde. Aşadar, observăm că $\delta = c\cdot 1$, cu $c\in\mathbb{Z}$, iar datorită faptului că suntem în caracteristică zero sau p>n, avem $C_n^1 \cdot 1 \neq 0$, $C_n^2 \cdot 1 \neq 0$, ..., $C_n^{n-1} \cdot 1 \neq 0$, $\prod_{1\le i<j\le n} (j\cdot 1 - i\cdot 1) \neq 0$, deci $\delta \neq 0$. Aplicând regula lui Cramer, obţinem că necunoscutele x, x^2, …, x^n se exprimă ca nişte combinaţii liniare de elementele $(x+1)^n$, $(x+2\cdot 1)^n$, …, $(x+n\cdot 1)^n$ cu coeficienţi „numere raţionale” (aici prin „număr raţional” înţelegem un element din K de forma $\frac{\alpha\cdot 1}{\beta\cdot 1} = (\alpha\cdot 1)\cdot(\beta\cdot 1)^{-1}$, cu $\alpha, \beta\in\mathbb{Z}$). Facem observaţia că deşi suntem într-un corp necomutativ, am operat numai cu elemente ce comută, deci toate consideraţiile din cazul comutativ (de exemplu, regula lui Cramer) rămân valabile. Din 1) şi 3) rezultă uşor $f(r\cdot 1) = r\cdot f(1) = r\cdot 1$, pentru orice $r\in\mathbb{Z}$. Dacă r este raţional, adică $r = \frac{\alpha}{\beta}$, cu $\alpha, \beta\in\mathbb{Z}$, atunci $\beta r = \alpha$, deci $f(\beta\cdot r\cdot 1) = f(\alpha\cdot 1) = \alpha\cdot 1$, adică $\beta f(r\cdot 1) = \alpha\cdot 1$, de unde $f(r\cdot 1) = (\alpha\cdot 1)(\beta\cdot 1)^{-1}$. Deci funcţia f invariază numerele raţionale, în accepţiunea de mai sus.

Exprimăm necunoscuta x^2 sub forma unei combinaţii liniare de tipul:

$$x^2 = r_1(x+1)^n + r_2(x+2\cdot 1)^n + \ldots + r_n(x+n\cdot 1)^n \quad (1)$$

Să observăm că în (1), coeficienţii r_1, r_2, …, r_n depind numai de elementele din A şi de nişte combinări, deci rămân aceiaşi pentru orice $x\in K$. În

mod similar, o relație analoagă cu (1) funcționează pentru orice $y\in L$ şi în particular pentru elementele $y=f(x)\in L$, cu $x\in K$. Altfel spus, egalitatea (1) se menține când se înlocuieşte x cu f(x). Aplicând atunci f în (1) şi ținând seama de proprietățile 1) şi 2) precum şi de cele spuse anterior, va rezulta $f(x^2)=f(x)^2$, oricare ar fi $x\in K$;

(ii). Dacă L şi K sunt corpuri comutative, în egalitatea $f(x^2)=f(x)^2$ să înlocuim pe x cu x+y, unde $x, y\in K$. Deoarece $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$, rezultă

$$f(x^2+2xy+y^2)= f(x)^2+2f(x)f(y)+f(y)^2,$$

adică $f(x^2)+2f(xy)+f(y^2)=f(x)^2+2f(x)f(y)+f(y)^2$ sau încă $2[f(xy)-f(x)f(y)]=0$. Deoarece caracteristica este zero sau $p>2$, rezultă $f(xy)=f(x)f(y)$, oricare ar fi $x, y\in K$, deci f este morfism de corpuri.

9.39. (i). Se arată uşor că $f(x)=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}$. Deoarece $f(\sqrt{d_1})\in\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ există $a, b\in\mathbb{Q}$ a.î. $f(\sqrt{d_1})=a+b\sqrt{d_2}$ (1).

Atunci $d_1=f(d_1)=[f(\sqrt{d_1})]^2=(a+b\sqrt{d_2})^2$, deci $d_1=a^2+d_2b^2+2ab\sqrt{d_2}$. (2)

Dacă $a\neq 0$ şi $b\neq 0$, din (2) rezultă $\sqrt{d_2}\in\mathbb{Q}$, contradicție. Deci $a=0$ sau $b=0$.

Dacă $b=0$, atunci din (2) rezultă $\sqrt{d_1}=\pm a\in\mathbb{Q}$, contradicție Aşadar $b\neq 0$ şi atunci obligatoriu $a=0$. Egalitatea (2) devine $d_1=d_2b^2$ şi arată că $\frac{d_1}{d_2}=b^2$, deci $\frac{d_1}{d_2}$ este pătratul unui număr rațional. Dacă d_1 şi d_2 sunt întregi liberi de pătrate, diferiți, această egalitate nu poate avea loc, deci neapărat $d_1=d_2$.

În particular, rezultă $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})=\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$, adică două corpuri pătratice sunt izomorfe dacă şi numai dacă sunt egale.

(ii). Reluând cele de la punctul (i) în care $d_1=d_2=d$, vom avea, conform cu (1) şi (2): $f(\sqrt{d})=a+b\sqrt{d}$, unde $a=0$ şi $d=db^2$, adică $b^2=1$ deci $b\in\{\pm 1\}$.

Pentru $b=1$ obținem $f(\sqrt{d})=\sqrt{d}$, adică $f(x)=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, deci f este automorfismul identic al corpului $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Pentru $b=-1$ obținem $f(\sqrt{d})=-\sqrt{d}$, adică $f(x)=x^*$ (conjugatul pătratic al lui x) pentru orice $x\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, deci f este automorfismul conjugare al lui $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

9.40. Fie $\varphi:(\mathbb{Z}_p, +)\to(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ un morfism de grupuri. Nucleul morfismului φ, $\text{Ker}(\varphi)$, este un subgrup al lui $(\mathbb{Z}_p, +)$. Dar conform teoremei lui Lagrange rezultă că singurele subgrupuri ale lui $\mathbb{Z}_p$ sunt $\{\hat{0}\}$ şi $\mathbb{Z}_p$.

Dacă $\text{Ker}(\varphi)=\{\hat{0}\}$, atunci φ ar fi injectiv, ceea ce nu se poate deoarece $\mathbb{Z}_p$ are p elemente iar are $\mathbb{Z}_p^*$ are p-1 elemente.

Dacă $\text{Ker}(\varphi)=\mathbb{Z}_p$, atunci $\varphi(x)=\hat{1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}_p$.

Deci unicul morfism căutat este cel nul, care duce toate elementele grupului $(\mathbb{Z}_p, +)$ în elementul neutru al grupului $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$.

9.41. Fie f: $(\mathbb{Q}, +)\to(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ un morfism de grupuri.

Pentru orice $x\in\mathbb{Q}$ putem scrie $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2>0$, deci f ia valori strict pozitive. Arătăm că $f(x)=[f(1)]^x$, pentru orice $x\in\mathbb{Q}$. Avem $f(x)=f(\underbrace{1+\ldots+1}_{de\ x\ ori})=\underbrace{f(1)\cdot\ldots\cdot f(1)}_{de\ x\ ori}=[f(1)]^x$. Demonstrăm că $f(1)=1$.

Presupunem prin reducere la absurd că $f(1)=\frac{a}{b}$, unde $a, b\in\mathbb{N}^*$, $a\neq b$, a, b relativ prime.

Fie p natural, $p>\max(a, b)$. Atunci cel puţin unul dintre numerele a sau b nu este putere de ordin p a unui număr natural şi deci fracţia $\frac{a}{b}$ nu este putere de ordinul p a unui număr raţional. Luând $x=\frac{1}{p}\in\mathbb{Q}$ avem $f(x)=[f(1)]^x=\left(\frac{a}{b}\right)^{1/p}=\sqrt[p]{\frac{a}{b}}\notin\mathbb{Q}$, contradicţie. Deci $f(1)=1$ şi în concluzie $f(x)=[f(1)]^x=1^x=1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}$. Deci unicul morfism de grupuri de la $(\mathbb{Q}, +)$ la $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ este cel constant, care duce toate elementele lui $(\mathbb{Q}, +)$ în elementul neutru 1 din grupul $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

9.42. (i). Presupunem prin reducere la absurd că p nu este prim, deci există k, t numere naturale mai mici decât p a.î. $p=kt$. Egalitatea $p\cdot 1_K=0_K$ devine $(kt)\cdot 1_K=0_K \Leftrightarrow (k\cdot 1_K)(t\cdot 1_K)=0_K$ şi cum un corp nu are divizori ai lui zero, rezultă $k\cdot 1_K=0_K$ sau $t\cdot 1_K=0_K$. Oricare dintre aceste egalităţi contrazice minimalitatea lui p. Rezultă că p este prim.

(ii). Folosind binomul lui Newton (K corp comutativ) avem pentru orice x, y∈K: $(x+y)^p = x^p + y^p + \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i x^{p-i} y^i$ (∗). Dar pentru p prim avem $C_p^i = pa_i$, pentru i∈{1, …, p-1} (unde a_i este un număr natural) a.î. pentru orice α∈K avem: $C_p^i \alpha = (pa_i)\alpha = (p \cdot 1_K)(a_i\alpha) = 0_K(a_i\alpha) = 0_K$.

Rezultă că suma din membrul drept al egalității (∗) este nulă şi obținem $(x+y)^p=x^p+y^p$, oricare ar fi x, y∈K. Dacă în această egalitate înlocuim pe y cu –y obținem $(x-y)^p=x^p+(-1)^p y^p$.

Pentru p prim impar egalitatea devine $(x-y)^p=x^p-y^p$ iar pentru p=2, ținând cont că într-un corp de caracteristică 2 fiecare element este egal cu opusul său, obținem $(x-y)^2=x^2+y^2=x^2-y^2$. Deci am demonstrat că $(x\pm y)^p=x^p\pm y^p$, pentru orice p prim şi x, y∈K.

(iii). Fie f: (K, +)→(K^*, ·) un morfism de grupuri.

Pentru orice x∈K avem $px=(p\cdot 1_K)x=0_K\cdot x=0_K$, deci aplicând morfismul f rezultă că $f(px)=f(0_K)$, adică $[f(x)]^p=1_K$.

Ultima egalitate poate fi scrisă sub forma $[f(x)]^p-(1_K)^p=0_K$ sau, ținând cont de (ii): $[f(x)-1_K]^p=0_K \Rightarrow f(x)-1_K=0_K \Rightarrow f(x)=1_K$.

Deci unicul morfism de grupuri căutat este cel nul care duce toate elementele grupului (K, +) în elementul neutru al grupului (K^*, ·).

9.43. Elementele acestui corp pot fi reprezentate sub forma: 0, 1, 2, y, 2y, 1+y, 1+2y, 2+y, 2+2y unde 3y=0. Pentru un element oarecare a se verifică a+a+a=0. Deci caracteristica căutată este 3.

9.44. Va trebui să arătăm că Z(K)=K. Pentru aceasta procedăm prin reducere la absurd, presupunând că Z(K)⊊K. Fie deci x∈K\Z(K) şi să considerăm n≥1 un întreg minimal cu proprietatea $x^{p^n} \in Z(K)$.

Din minimalitatea lui n rezultă că elementul $a = x^{p^{n-1}}$ verifică condițiile: a∈K\Z(K) şi $a^p\in Z(K)$. Definim aplicația δ:K→K prin δ(y)=ya-ay şi inductiv iteratele sale prin $\delta^1=\delta$; $\delta^{k+1}=\delta\cdot\delta^k$, pentru k≥1. Se verifică imediat

prin inducție după k≥1 că: (1)

$$\delta^k(y) = ya^k - kaya^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}a^2 ya^{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3 ya^{k-3} + ... + (-1)^k a^k y =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j a^j ya^{k-j}$$

(în pasul inductiv se foloseşte formula de descompunere a combinărilor).

Deoarece p este prim rezultă că $p \mid C_p^j$ pentru orice 2≤j≤p-1. De aici şi din (1) aplicată pentru k=p rezultă conform ipotezei 1) că:

(2) $\delta^p(y)=ya^p-a^py=0$, oricare ar fi y∈K (deoarece $a^p \in Z(K)$).

Din a∉Z(K) rezultă că δ≠0. Deci dacă y∈K\{0} verifică δ(y)≠0, deducem din (2) existența unui întreg k cu 1<k≤p având proprietatea că $\delta^k(y)=0$ şi $\delta^{k-1}(y)\neq 0$.

Fie $z=\delta^{k-1}(y)\neq 0$. Deoarece k>1, rezultă k-1≥1 şi prin urmare z=δ(w)=wa-aw pentru $w=\delta^{k-2}(y)\neq 0$ (pentru k=2, $\delta^{2-2}(y)=\delta^0(y)$ este notație pentru y).

Luând $u=za^{-1}$ putem scrie z=ua şi deoarece z comută cu a (căci $z=\delta^{k-1}(y)$ şi prin urmare $0=\delta^k(y)=\delta(\delta^{k-1}(y))=\delta(z)=za-az$) rezultă că şi u comută cu a. Rezultă din cele de mai sus că au=z=wa-aw şi prin urmare

$$a=(wa-aw)u^{-1}=(wu^{-1})a-a(wu^{-1})=ca-ac,$$

unde am notat $c=wu^{-1}$. Ultima relație conduce la $c=1+aca^{-1}$.

De aici şi din ipoteza 1) deducem prin inducție după t≥1 că:

(3) $c^{p^t} = (1+aca^{-1})^{p^t} = 1^{p^t} + (aca^{-1})^{p^t} = 1 + ac^{p^t}a^{-1}$.

Datorită ipotezei 2) există un t≥1 cu $c^{p^t} \in Z(K)$ şi conform lui (3): $c^{p^t} = 1 + ac^{p^t}a^{-1} = 1 + aa^{-1}c^{p^t} = 1 + c^{p^t}$, adică 0=1. Contradicția obținută arată că K este corp comutativ.

9.45. Deoarece corpul K este finit, caracteristica sa este un număr natural nenul (nu putem avea caracteristica 0, căci atunci elementele 1_K, $2\cdot 1_K$, $3\cdot 1_K$, …, $n\cdot 1_K$, … ar fi distincte şi în consecință corpul K ar fi infinit).

Conform problemei **9.42.**, caracteristica sa este un număr prim, să-l notăm cu p.

Tot în problema **9.42.** am demonstrat că singurul morfism de grupuri de la (K, +) la $(K^*, \cdot)$ este morfismul nul $\varphi:(K,+)\to(K^*,\cdot)$, $\varphi(x)=1_K$.

Determinăm în continuare morfismele de grup de la $(K^*, \cdot)$ la (K, +).

Observăm mai întâi că numărul de elemente al corpului K este o putere a lui p. Într-adevăr, operația externă $\alpha:\mathbb{Z}_p\times K\to K$, $\alpha(\hat{i}, x)=ix=\underbrace{x+\ldots+x}_{de\ i\ ori}$ determină pe K o structură de $\mathbb{Z}_p$-spațiu vectorial. Notând cu q dimensiunea acestui spațiu, avem izomorfismul de $\mathbb{Z}_p$-spații vectoriale $\mathbb{Z}_p^q\cong K$, încât dacă trecem la cardinale vom avea $|K|=p^q$.

Rezultă că pentru orice $x\in K$ avem $x^{p^q}=x$.

Fie atunci $\psi:(K^*,\cdot)\to(K,+)$ un morfism de grupuri.

Avem pentru orice $x\in K$, $\psi(x)=\psi(x^{p^q})=p^q\cdot\psi(x)=0_K$.

Deci singurul morfism $\psi:(K^*,\cdot)\to(K,+)$ este cel constant, $\psi(x)=0_K$.

Pentru $K=\mathbb{Z}_p$ regăsim rezultatul din problema **9.40.**.

9.46. Observăm că $a\neq-1$: Existența lui f implică $car(K)=2$. Pentru $a=-1$, $f(x)+f(-x)=2x$ şi înlocuind x cu –x, $f(-x)+f(x)=-2x$, deci $2[f(x)+f(-x)]=0$ sau (înmulțind cu 2^{-1}), $f(x)+f(-x)=2x=0$, oricare ar fi $x\in K$.

Pentru $a^{2n+1}+1=(a+1)(a^{2n}-a^{2n-1}+\ldots-a+1)$ rezultă $a^{2n}-a^{2n-1}+\ldots-a+1=2(a+1)^{-1}$ (pentru că $a+1\neq0$). În final alegem $f:K\to K$, $f(x)=2(a+1)^{-1}x$, oricare ar fi $x\in K$.

Observație. Se poate arăta că f este unica aplicație cu proprietățile cerute.

9.47. (i). Faptul că $(K, +, \cdot)$ este corp se verifică imediat. Funcția $f:K\to\mathbb{C}$, $f(M(a, b))=a+ib$ este un izomorfism de corpuri, fapt care se probează imediat.

(ii). Rezolvăm în corpul $\mathbb{C}$ sistemul ,,izomorf": $\begin{cases}u+v=3+3i\\u^3+v^3=-9+9i\end{cases}$, unde $u=f(X)$ iar $v=f(Y)$. Sistemul este simetric şi vom nota $u+v=s$, $uv=p$ obținând sistemul în s şi p: $\begin{cases}s=3+3i\\s^3-3ps=-9+9i\end{cases}$.

Acest sistem are soluție unică $\begin{cases}s=3+3i\\p=5i\end{cases}$.

Deci obținem sistemul în u şi v: $\begin{cases} u+v=3+3i \\ uv=5i \end{cases}$ care are soluțiile $\begin{cases} u_1=2+i \\ v_1=1+2i \end{cases}$ respectiv $\begin{cases} u_2=1+2i \\ v_2=2+i \end{cases}$.

Soluțiile sistemului matriceal în X şi Y vor fi:

$$\begin{cases} X_1=f^{-1}(u_1)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ Y_1=f^{-1}(v_1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} X_2=f^{-1}(u_2)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ Y_2=f^{-1}(v_2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

9.48. (i). Se verifică axiomele corpului comutativ. Elementul neutru la adunare este $0=0+0\cdot\sqrt{d}$ iar opusul lui $x=a+b\sqrt{d}$ este $-x=-a+(-b)\sqrt{d}$. Elementul unitate este $1=1+0\cdot\sqrt{d}$. Orice element nenul $x=a+b\sqrt{d}$ este inversabil, inversul său fiind $x^{-1}=\frac{1}{a^2-db^2}(a-b\sqrt{d})$.

(ii). Se verifică axiomele corpului comutativ. Elementul neutru la adunare este O_2, elementul unitate este matricea I_2 iar inversa unei matrice nenule $\begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix}$ (adică cel puțin unul dintre a şi b este diferit de 0) este $\frac{1}{a^2-db^2}\cdot\begin{pmatrix} a & -b \\ -db & a \end{pmatrix}$.

(iii). Aplicația f: $\mathbb{Q}(\sqrt{d})\to K$, $f(a+b\sqrt{d})=\begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix}$ este un izomorfism de corpuri.

9.49. Evident $\mathbb{Q}\subseteq K$ şi $\mathbb{Q}\neq K$, căci corpul $\mathbb{Q}$ are un singur endomofism. Unul din endomorfismele lui K fiind cel identic, putem presupune că $g=1_K$. Avem $f\circ f=f$ sau $f\circ f=g=1_K$. Nu se poate însă ca $f\circ f=f$, căci f fiind injectiv ar rezulta $f=g=1_K$, absurd, deci $f\circ f=1_K$. (1) Cum $g=1_K$, ipoteza ii) se mai scrie $f(x)=x \Rightarrow x\in\mathbb{Q}$ (2).

Să considerăm un element oarecare $x\in K\setminus\mathbb{Q}$ şi apoi elementele $a=x+f(x)\in K$, $b=xf(x)\in K$.(3) Din (1), (2), (3) avem :

$$f(a)=f(x)+f(f(x))=f(x)+x=a \Rightarrow a\in\mathbb{Q}$$

$$f(b)=f(x)f(f(x))=xf(x)=b \Rightarrow b\in\mathbb{Q}.$$

Rezultă că x şi f(x) sunt rădăcinile ecuației cu coeficienți raționali:

$$x^2-ax+b=0.(4)$$

Din (4) rezultă că $x=\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4b})$. Scriind $a^2-4b=q^2d$ cu $q\in\mathbb{Q}$ şi $d\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}$ liber de pătrate, avem $x=\frac{1}{2}(a\pm q\sqrt{d})\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Luând acum un alt $x'\in K\setminus\mathbb{Q}$, există în mod analog un întreg $d'\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}$ liber de pătrate a.î. $x'\in\mathbb{Q}(\sqrt{d'})$. Arătăm că $d=d'$. Mai întâi observăm că: $(f(\sqrt{d}))^2=f((\sqrt{d})^2)=f(d)=d$, de unde $f(\sqrt{d})=\pm\sqrt{d}$. Dacă am avea $f(\sqrt{d})=\sqrt{d}$ din (2) ar rezulta $\sqrt{d}\in\mathbb{Q}$, imposibil. Aşadar $f(\sqrt{d})=-\sqrt{d}$ şi analog $f(\sqrt{d'})=-\sqrt{d'}$.

Atunci: $f(\sqrt{dd'})=f(\sqrt{d})f(\sqrt{d'})=(-\sqrt{d})(-\sqrt{d'})=\sqrt{dd'}$ şi din (2) rezultă $\sqrt{dd'}\in\mathbb{Q}$. Cum d şi d′ sunt libere de pătrate, rezultă că $d=d'$. Din cele spuse rezultă că există şi este unic un întreg liber de pătrate $d\neq1$, a.î. $K\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Incluziunea reciprocă este imediată căci din $x=\frac{1}{2}(a\pm q\sqrt{d})\in K$ rezultă că şi $\sqrt{d}\in K$ şi de aici $\mathbb{Q}(\sqrt{d})\subseteq K$. Deducem egalitatea $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

9.50. Dacă $a^2+b^2\neq0$ atunci determinantul $\begin{vmatrix} a & b \\ qb & a \end{vmatrix}=a^2-qb^2\neq0$, dacă q nu este pătratul unui număr raţional (matricele cu $b=0$ dar $a\neq0$ sunt evident inversabile).

9.51. Observăm că putem scrie

$M(a,b)=a\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=a\cdot I_2+b\cdot X$, unde matricea X are proprietatea că

$X^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2\cdot I_2$.

Pentru a demonstra că K este corp arătăm mai întâi faptul că aceste matrice formează parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor, adică suma şi produsul a două matrice M(a, b), M(c, d) sunt matrice de aceeaşi formă:

$M(a,b)+M(c,d)=(a\cdot I_2+b\cdot X)+(c\cdot I_2+d\cdot X)=(a+c)\cdot I_2+(b+d)\cdot X=M(a+c,b+d)$,

$M(a,b)\cdot M(c,d)=(a\cdot I_2+b\cdot X)\cdot(c\cdot I_2+d\cdot X)=ac\cdot I_2+ad\cdot X+bc\cdot X+bd\cdot 2I_2=$

$=(ac+2bd)\cdot I_2+(ad+bc)\cdot X=M(ac+2bd,\ ad+bc)$.

Axiomele corpului se verifică uşor. Elementul nul este matricea M(0, 0) iar elementul unitate este matricea M(1, 0). Matricea M(a, b) are determinantul

a^2-2b^2, deci este nenulă dacă şi numai dacă este inversabilă. Inversa matricei M(a, b) este matricea $M\left(\frac{a}{a^2-2b^2}, \frac{-b}{a^2-2b^2}\right)$.

Funcția f: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\to K$, $f(a+b\sqrt{2})=\begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ este bijectivă şi morfism de corpuri. Deci K este izomorf cu corpul $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

9.52. Dacă $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\in K$ şi $M(x,y)=\begin{pmatrix} x+2y & 3y \\ 2y & x-2y \end{pmatrix}\in K$ (cu x, $y\in\mathbb{Q}$), atunci $M(x, y)=x\cdot I_2+y\cdot A$. Să notăm că $A^2=10\cdot I_2$ şi atunci $M(x, y)+M(z, t)=M(x+z, y+t)$, $M(x, y)\cdot M(z, t)=M(xz+10yt, xt+yz)\in K$. Mai mult, dacă $M(x, y)\neq M(0, 0)$ avem $x^2-10y^2\neq 0$ (căci $\sqrt{10}\notin\mathbb{Q}$) şi atunci $M(x,y)^{-1}=M\left(\frac{x}{x^2-10y^2}, -\frac{y}{x^2-10y^2}\right)\in K$, de unde concluzia că (K, +, ·) este corp comutativ. Se verifică prin calcul că $f:K\to\mathbb{Q}(\sqrt{10})$, $f(M(x, y))=x+y\sqrt{10}$ este un izomorfism de corpuri.

9.53. Demonstrăm mai întâi următoarea **Lemă**:

Fie $p\geq 3$ un număr prim. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Există $a, b\in\mathbb{Z}_p$, $a\neq\hat{0}$ sau $b\neq\hat{0}$ a.î. $a^2+b^2=\hat{0}$;

(ii) Există $x\in\mathbb{Z}_p$ a.î. $x^2=-\hat{1}$;

(iii) $p=4k+1$, $k\in\mathbb{N}^*$.

Demonstrația lemei: Arătăm echivalența afirmațiilor (i) şi (ii):

(i)⇒(ii). Să presupunem că $a^2+b^2=\hat{0}$, unde $a, b\in\mathbb{Z}_p$ şi de exemplu $b\neq\hat{0}$.

Înmulțind cu $(b^{-1})^2$ rezultă $(ab^{-1})^2+\hat{1}=\hat{0}$ şi notând $x=ab^{-1}\in\mathbb{Z}_p$ am obținut deci $x^2=-\hat{1}$ (spunem că $-\hat{1}$ este rest pătratic modulo p).

(ii)⇒(i). Dacă există $x\in\mathbb{Z}_p$ a.î. $x^2=-\hat{1}$, atunci $x^2+\hat{1}=\hat{0}$, deci luăm $a=x$, $b=\hat{1}$ şi (i) se verifică.

Arătăm echivalența afirmațiilor (ii) şi (iii):

(ii)⇒(iii). Să presupunem că există $x\in\mathbb{Z}_p$ a.î. $x^2=-\hat{1}$. Ridicând la puterea $\frac{p-1}{2}$ obținem $x^{p-1}=(-\hat{1})^{(p-1)/2}$, dar în grupul $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ avem, conform teoremei lui Fermat, $x^{p-1}=\hat{1}$, încât egalitatea precedentă devine $\hat{1}=(-\hat{1})^{(p-1)/2}$.

Dacă numărul întreg $\frac{p-1}{2}$ ar fi impar am obține $\hat{1}=-\hat{1}$, adică $\hat{2}=\hat{0}$, contradicție cu faptul că p≥3. Deci $\frac{p-1}{2}$ este par, adică $\frac{p-1}{2}=2k$ şi atunci p=4k+1.

(iii)⇒(ii). Să presupunem că p=4k+1. Conform teoremei lui Fermat polinomul $f=X^{p-1}-\hat{1}\in\mathbb{Z}_p[X]$ are toate cele p-1 rădăcini în corpul $\mathbb{Z}_p$ (chiar în $\mathbb{Z}_p^*$).

Dar $f=f_1f_2$, unde $f_1=X^{p-1/2}+\hat{1}$ şi $f_2=X^{p-1/2}-\hat{1}$ şi atunci înseamnă că fiecare dintre polinoamele f_1 şi f_2 au toate cele $\frac{p-1}{2}$ rădăcini în $\mathbb{Z}_p$ (căci rădăcinile lui f_1 şi f_2 sunt şi rădăcini ale lui f).

Fie $\alpha\in\mathbb{Z}_p$ o rădăcină a lui f_1 adică $\alpha^{p-1/2}+\hat{1}=\hat{0}$.

Această egalitate se mai scrie $\alpha^{2k}+\hat{1}=\hat{0}$ şi dacă notăm $x=\alpha^k\in\mathbb{Z}_p$ am obținut $x^2+\hat{1}=\hat{0}$ adică $x^2=-\hat{1}$. Cu aceasta **lema** este demonstrată.

Trecem la soluția problemei:

Se demonstrează uşor că mulțimea K înzestrată cu operațiile de adunare şi înmulțire a matricelor este inel unitar (chiar comutativ). Atunci K este corp dacă şi numai dacă orice matrice nenulă din K are determinantul un element inversabil (adică un element nenul) în corpul $\mathbb{Z}_p$.

Cazul p=2 iese din discuție pentru că matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{1}\\ -\hat{1} & \hat{1}\end{pmatrix}$ este nenulă, dar $\det(A)=\hat{2}=\hat{0}$, deci în acest caz K nu este corp.

Considerăm cazul p≥3.

Să presupunem mai întâi că inelul K este corp şi să demonstrăm că p≡3(mod4).

Dacă prin absurd, p≢3(mod4), deoarece p este prim rezultă p≡1(mod4), adică (iii) din lemă se verifică. Atunci are loc şi (i) din lemă, deci există $a, b\in\mathbb{Z}_p$, $a\neq\hat{0}$ sau $b\neq\hat{0}$ a.î. $a^2+b^2=\hat{0}$.

Luând $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in K$, rezultă că A este o matrice nenulă din K, dar neinversabilă, căci $\det(A)=a^2+b^2=\hat{0}$.

Aceasta contrazice faptul că în corpul K toate elementele nenule sunt inversabile. Contradicția obținută arată că trebuie să avem p≡3(mod4).

Reciproc, să presupunem că $p\equiv 3(mod4)$ şi să arătăm că inelul K este corp.

Dacă prin reducere la absurd K nu este corp, există $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\in K$ matrice nenulă, neinversabilă, adică având $det(A)=\hat{0}$. Aşadar $a\neq\hat{0}$ sau $b\neq\hat{0}$ dar $a^2+b^2=\hat{0}$, ceea ce înseamnă că se verifică (i) din lemă. Atunci are loc şi (iii) din lemă, deci $p\equiv 1(mod4)$, ceea ce contrazice presupunerea că $p\equiv 3(mod4)$. Contradicția obținută arată că în mod necesar K este corp.

9.54. (i). Faptul că (K, +, ·) este corp comutativ de probează imediat. Elementul nul este matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, elementul unitate este matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar inversa unei matrice nenule $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ este matricea $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aplicația $\varphi: K\to\mathbb{R}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=a$, este un izomorfism de corpuri.

(ii). Inelul K, deşi are element unitate, nu este subinel unitar al inelului $M_2(\mathbb{R})$, căci elementele lor unitate diferă. Inversabilitatea în inelul K nu este legată de inversabilitatea în inelul $M_2(\mathbb{R})$, deci grupul U(K) al unităților lui K nu este subgrup al grupului $U(M_2(\mathbb{R}))$ al unităților lui $M_2(\mathbb{R})$. Acest fapt explică de ce toate elementele nenule din K sunt inversabile în K, în timp ce, dacă le privim în $M_2(\mathbb{R})$ nici unul dintre ele nu este inversabil.

9.55. Considerăm funcția $f:A\to A$, $f(x)=\begin{cases} 0, & pentru\ x=0 \\ 1, & pentru\ x\neq 0 \end{cases}$.

Deoarece f este funcție polinomială, există $a_0, a_1, \ldots, a_n\in A$ a.î. $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, oricare ar fi $x\in A$. Cum $f(0)=0$ rezultă $a_0=0$.

Atunci $f(x)=(a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1})x=g(x)\cdot x$, unde am notat $g(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}$. Vom arăta că orice element nenul din A este inversabil.

Fie într-adevăr, $a\in A\setminus\{0\}$.

Punând $g(a)=b$, avem $b\neq 0$ (căci dacă am avea $g(a)=0$, atunci $f(a)=g(a)\cdot a=0$, ceea ce contrazice definiția funcției f).

Din faptul că $b\neq 0$, deducem $f(b)=1$, adică $g(b)\cdot b=1$. (1)

Dar şi $f(a)=1$, ceea ce se mai scrie $g(a)\cdot a=1$ sau $ba=1$. (2)

Din (1) şi (2) deducem că $g(b)=g(b)\cdot 1=g(b)\cdot ba=1\cdot a=a$ şi atunci (1) devine $ab=1$. (3)

Egalităţile (2) şi (3) arată că elementul a este inversabil în inelul A, inversul său fiind elementul b. Deci $(A, +, \cdot)$ este corp.

9.56. (i). Se verifică imediat prin calcul direct.

(ii). Faptul că f, Δ, N sunt morfisme de grupuri se probează uşor.

Pentru Δ avem $\Delta(AB)=\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)=\Delta(A)\cdot\Delta(B)$, oricare ar fi $A, B\in K_d^*$.

Pentru N avem: $N(z)=z\cdot\bar{z}$, oricare ar fi $z\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})^*$, unde $\bar{z}$ este conjugatul pătratic al lui z, adică putem scrie $N(z_1z_2)=(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})=z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2}=(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})=N(z_1)N(z_2)$, oricare ar fi $z_1, z_2\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})^*$.

Demonstrăm că $\Delta\circ f=N$. Fie $z=a+b\sqrt{d}\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})^*$, oarecare.

Avem:

$$(\Delta\circ f)(z)=\Delta(f(z))=\Delta(f(a+b\sqrt{d}))=\Delta\left(\begin{pmatrix} a & bd \\ b & a\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix} a & bd \\ b & a\end{pmatrix}=a^2-db^2=$$

$$=N(a+b\sqrt{d})=N(z).$$

9.57. Avem de exemplu $(1, 0)\cdot(0, 1)=(0, 0)$, deci $K_1\times K_2$ nu este corp (având divizori ai lui zero).

9. 58. Notăm $A=K_1\times K_2\times K_3$ şi $B=K_4\times K_5$. Considerăm în A elementele $e_1=(1, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0)$, $e_3=(0, 0, 1)$ şi în B elementele $f_1=(1, 0)$, $f_2=(0, 1)$. Aceste elemente satisfac relaţiile: (1) $e_1^2=e_1$, $e_2^2=e_2$, $e_3^2=e_3$, $f_1^2=f_1$, $f_2^2=f_2$ (sunt elemente idempotente);

(2) $e_ie_j=e_je_i=0$, $f_if_j=f_jf_i=0$, pentru $i\neq j$ (elementele e_1, e_2, e_3 respectiv f_1, f_2 sunt ortogonale);

(3) $e_1+e_2+e_3=(1, 1, 1)$, $f_1+f_2=(1, 1)$.

Presupunem prin absurd că există un izomorfism de inele $\varphi:A\to B$. Deoarece realţiile (1), (2), (3) sunt algebrice rezultă că $\varphi(e_i)\in B$ ($i\in\{1, 2, 3\}$) sunt elemente idempotente ortogonale nenule. Fie $(x, y)\in B$ un element idempotent. Atunci $x^2=x$ în K_4 şi $y^2=y$ în K_5. Dar ecuaţia $z^2=z$ echivalentă cu $z(z-1)=0$ are în orice corp K soluţiile $z_1=0$ şi $z_2=1$. Rezultă că singurele elemente idempotente ale lui B sunt 0, f_1, f_2, $1=(1, 1)$. Rezultă că în B nu există trei elemente idempotente ortogonale, nenule, ceea ce contrazice existenţa lui φ.

§10. Inele de polinoame

10.1. Arătăm simultan (i) şi (ii).

Vom analiza întâi cazul când I are un singur element.

Fie P_s mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în A într-o nedeterminată de grad cel mult $s \geq 0$.

P_s este echipotentă cu mulţimea funcţiilor $\{0, 1, \ldots, s\} \to A$, adică cu A^{s+1}.

Obţinem că P_s sunt mulţimi finite dacă A este finit şi au cardinalul lui A în caz contrar (A^q are cardinalul lui A când A este infinită iar $q \geq 1$ este număr natural).

Pe de altă parte, $A[X]=A[X;I]=\bigcup_{s\geq 0} P_s$.

Deci A[X] este cel mult numărabilă dacă A este mulţime finită şi are cardinalul lui A în caz contrar (o reuniune numărabilă de mulţimi finite este cel mult numărabilă, iar o reuniune numărabilă de mulţimi infinite de acelaşi cardinal u are cardinalul u).

Observăm că A[X] nu poate fi finită conţinând $\{X^n\}_{n\geq 0}$, de unde rezultă că A[X] este numărabilă când A este mulţime finită.

Am arătat deci (i) şi (ii) pentru card I=1.

În continuare aplicăm inducţia ţinând cont de faptul că A[X,Y]=A[X][Y].

(iii). Observăm că $A[X;I]= \bigcup_{\substack{J\subset I \\ J \text{ finita}}} A[X;J]$.

Prin (i) A[X;J] sunt toate numărabile. Deci A[X;I] este reuniunea unei familii de mulţimi numărabile indexate de mulţimea părţilor finite ale lui I care are cardinalul lui I (mulţimea părţilor finite ale unei mulţimi M infinite are cardinalul lui M).

Deci A[X;I] are cardinalul lui I (reuniunea unei familii de mulţimi numărabile indexate de o mulţime infinită de cardinal u are cardinalul u).

10.2. Fie A o mulţime finită cu n elemente iar $u:\mathbb{Z}_n \to A$ o bijecţie oarecare. Considerăm pe A structura de inel dată de problema **7.2.**.

Dacă A este o mulţime infinită atunci considerăm inelul $\mathbb{Z}[X;A]$ al polinoamelor în nedeterminatele $\{X_a\}_{a\in A}$ cu coeficienţi întregi. Conform problemei **10.1.**, inelul $\mathbb{Z}[X;A]$ are cardinalul lui A, adică există o bijecţie

u:$\mathbb{Z}[X;A]\to A$. Structura de inel a lui $\mathbb{Z}[X;A]$ induce prin u o structură de inel pe A.

10.3. Fie G un subgrup de ordin n al lui U(A) şi d=cel mai mic multiplu comun al ordinelor elementelor din G. Evident d|n.

Fie $d=p_1^{\alpha_1}....p_r^{\alpha_r}$ descompunerea în factori primi a lui d. Atunci există elementele $x_1, \ldots, x_r\in G$ a.î. $p_i^{\alpha_i}$ |ord x_i, adică ord $x_i=p_i^{\alpha_i}\cdot t_i$, $t_i\in\mathbb{N}$. Se verifică uşor că $x=x_1^{t_1}....x_r^{t_r}$ are ordinul d.

Ecuația $X^d-1=0$ are cel mult d rădăcini în corpul de fracții al lui A.

Cum toate elementele lui G constituie rădăcini ale ecuației date, deducem că n=d. Deci G este ciclic.

10.4. (i). Fie K un corp finit. Conform teoremei lui Wedderburn corpul K este comutativ. Considerăm grupul abelian finit $(K^*, \cdot)$ şi calculăm produsul elementelor sale.

În orice grup abelian finit produsul elementelor grupului este egal cu produsul elementelor de ordin 2 (căci elementele de ordin mai mare ca 2 se pot grupa în perechi, fiecare cu inversul său şi astfel produsul lor este egal cu elementul unitate; de asemenea, mai observăm că singurul element de ordin 1 este elementul unitate şi în felul acesta produsul elementelor de ordin diferit de 2 este egal cu elementul unitate).

Căutăm elementele de ordin 2 din grupul $(K^*, \cdot)$. Fie x un astfel de element. Atunci $x^2=1$ şi $x\neq 1$. Dar polinomul $X^2-1\in K[X]$ are în corpul K doar rădăcinile ± 1 şi vom avea $x=-1$. Deci unicul element de ordin 2 din grupul $(K^*, \cdot)$ este -1 şi astfel produsul elementelor acestui grup este egal cu -1.

(ii). Considerăm corpul $\mathbb{Z}_p$ al claselor de resturi modulo p.

Conform punctului (i) avem $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\overset{\wedge}{p-1}=-\hat{1}$, adică $(p-1)!\equiv -1 \pmod p$, deci $p|(p-1)!+1$.

Observație. Este valabilă şi *reciproca teoremei lui Wilson*: Dacă $p\geq 2$ este un număr natural a.î. $p|(p-1)!+1$, atunci p este număr prim.

Într-adevăr, fie q un divizor al lui p, $0<q<p$. Cum $p|(p-1)!+1$ rezultă că şi $q|(p-1)!+1$. Dar $q|(p-1)!$. Scăzând cele două relații obținem $q|1$, adică $q=1$.

Deci singurul divizor al lui p, mai mic decât p este 1, şi în consecință p este prim.

10.5. (i). Să presupunem că polinomul f este inversabil în A[X] şi fie $g=b_0+b_1X+...+b_mX^m \in A[X]$ inversul său. Din fg=1 deducem relaţiile următoare, ce leagă coeficienţii celor două polinoame:

$$\begin{cases} a_0b_0 = 1 \\ a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1} = 0 \\ a_nb_m = 0 \end{cases}$$

Din ultimele două relaţii (înmulţind ambii membrii ai penultimei relaţii cu a_n şi folosind ultima) obţinem $a_n^2b_{m-1}=0$. Înmulţind ambii membri ai antepenultimei relaţii cu a_n obţinem $a_n^3b_{m-2}=0$. Din aproape în aproape, obţinem relaţiile $a_n^kb_{m-k+1}=0$ ($k\geq 1$) şi, în final, pentru k=m+1, $a_n^{m+1}b_0=0$. Acum, înmulţind ambii membri ai acestei relaţii cu a_0 obţinem că $a_n^{m+1}=0$, adică a_n este nilpotent. Polinomul a_nX^n fiind nilpotent, rezultă acum că $f-a_nX^n= a_0+a_1X+...+a_{n-1}X^{n-1}$ este inversabil (şi are gradul mai mic decât gradul lui f). Aşadar un raţionament inductiv ne conduce la concluzia că a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1 sunt nilpotente în A; a_0 este evident inversabil în A.

Reciproc, dacă a_0 este inversabil în A, el rămîne inversabil şi ca element al lui A[X]. Dacă a_1 este nilpotent în A, atunci a_1X este nilpotent în A[X]; aşadar, polinomul a_0+a_1X este inversabil. Dacă a_2 este nilpotent în A, atunci a_2X^2 este nilpotent în A[X]; aşadar, polinomul $a_0+a_1X+a_2X^2$ este inversabil. Din aproape în aproape, obţinem că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt nilpotente (în A), atunci polinomul f este inversabil în A[X].

(ii). Conform celor stabilite în problema **6.36.**, dacă f este nilpotent în A[X] atunci polinomul $1+fX=1+a_0X+a_1X^2+...+a_nX^{n+1}$ este inversabil în A[X]. Deci $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt elemente nilpotente în A. Reciproc, este evident, căci elementele nilpotente formează un ideal.

(iii). Polinomul f, având gradul ≥ 0, este nenul. Dacă există $a\in A$, $a\neq 0$, a.î. $a\cdot f=0$, interpretând pe a ca polinom de gradul zero, rezultă că f este divizor al lui zero.

Să presupunem că f este divizor al lui zero şi fie $g=b_0+b_1X+...+b_mX^m$ un polinom nenul, de grad minim, pentru care $f\cdot g=0$. Atunci $a_n\cdot b_m=0$; de aici rezultă că $a_n\cdot g$ este un polinom de grad mai mic decât gradul lui g, iar $(a_n\cdot g)\cdot f=0$; deci $a_n\cdot g=0$. Printr-un raţionament inductiv putem stabili că $a_{n-1}\cdot g=0$, $a_{n-2}\cdot g=0$, …, $a_1\cdot g=0$, $a_0\cdot g=0$. De aici, $a_ib_j=0$ pentru orice indici i, j. Întrucât am presupus că $g\neq 0$, există un coeficient $b_k\neq 0$.

Însă $a_0\cdot b_k = a_1\cdot b_k =\ldots=a_n\cdot b_k=0$, astfel că avem $b_k\cdot f=0$.

10.6. Fie (x, y) o soluție a ecuației date. Dacă $x=\hat{0}$ rezultă şi $y=\hat{0}$ şi reciproc. Aşadar o soluție este $(\hat{0},\hat{0})$, iar celelalte soluții (dacă există) vor avea ambele componente nenule.

Vom încerca să caracterizăm aceste soluții.

Conform teoremei lui Fermat, avem $\alpha^{p-1}=\hat{1}$, pentru orice $\alpha\in\mathbb{Z}_p\setminus\{\hat{0}\}$. Aceasta înseamnă că polinomul $f=X^{p-1}-\hat{1}\in\mathbb{Z}_p[X]$ are toate cele p-1 rădăcini în corpul $\mathbb{Z}_p$. Dar putem scrie

$$f=X^{p-1}-\hat{1}=\left(X^{\frac{p-1}{2}}\right)^2-\hat{1}=\left(X^{\frac{p-1}{2}}-\hat{1}\right)\left(X^{\frac{p-1}{2}}+\hat{1}\right)=f_1\cdot f_2,$$

unde $f_1=\left(X^{\frac{p-1}{2}}-\hat{1}\right)$ şi $f_2=\left(X^{\frac{p-1}{2}}+\hat{1}\right)$. Fiecare dintre polinoamele f_1 şi f_2 au gradul $\frac{p-1}{2}$, deci au câte $\frac{p-1}{2}$ rădăcini în corpul $\mathbb{Z}_p$.

Notând $A=\{\alpha\in\mathbb{Z}_p^* \mid f_1(\alpha)=\hat{0}\}=\{\alpha\in\mathbb{Z}_p^* \mid \alpha^{\frac{p-1}{2}}=\hat{1}\}$ şi

$$B=\{\alpha\in\mathbb{Z}_p^* \mid f_2(\alpha)=\hat{0}\}=\{\alpha\in\mathbb{Z}_p^* \mid \alpha^{\frac{p-1}{2}}=-\hat{1}\}$$

avem $\mathbb{Z}_p^*=A\cup B$, unde mulțimile A şi B sunt disjuncte, fiecare având câte $\frac{p-1}{2}$ elemente.

Arătăm acum că dacă $x, y\in\mathbb{Z}_p^*$, cuplul (x, y) este soluție a ecuației considerate dacă şi numai dacă $(x, y)\in(A\times B)\cup(B\times A)$.

Într-adevăr, dacă (x, y) este soluție cu $x, y\in\mathbb{Z}_p^*=A\cup B$, dacă de exemplu $x\in A$ avem $x^{\frac{p-1}{2}}=\hat{1}$ şi atunci din ecuație rezultă $y^{\frac{p-1}{2}}=-\hat{1}$, deci $y\in B$, adică $(x, y)\in A\times B$. Dacă am fi presupus $x\in B$, rezultă $y\in A$, adică $(x, y)\in B\times A$.

Prin urmare, orice soluție (x, y) cu componente nenule aparține mulțimii $(A\times B)\cup(B\times A)$.

Reciproc, dacă $(x, y)\in(A\times B)\cup(B\times A)$, avem $x^{\frac{p-1}{2}}=\hat{1}$, $y^{\frac{p-1}{2}}=-\hat{1}$ sau $x^{\frac{p-1}{2}}=-\hat{1}$, $y^{\frac{p-1}{2}}=\hat{1}$, deci oricum $x^{\frac{p-1}{2}}+y^{\frac{p-1}{2}}=\hat{0}$, adică (x, y) este soluție pentru ecuația considerată.

În urma acestor considerații rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației date este $\{(\hat{0},\hat{0})\}\cup(A\times B)\cup(B\times A)$.

Cardinalul acestei mulțimi este $2\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+1=\frac{(p-1)^2}{2}+1$, deoarece cele trei mulțimi ce apar în reuniunea de mai sus sunt disjuncte două câte două.

10.7. Pentru fiecare $k\in\mathbb{N}^*$, scriind matricea $A_k+\alpha B_k$ şi dezvoltând conform definiției, constatăm că $\det(A_k+\alpha B_k)$ este un polinom în α, în care termenul ce conține pe α^n are coeficientul $\det(B_k)\neq 0$. Deci acest polinom este nenul (are gradul n) şi în consecință mulțimea rădăcinilor sale reale este finită (eventual poate fi mulțimea vidă).

Să notăm $X_k=\{\alpha\in\mathbb{R} \mid \det(A_k+\alpha B_k)=0\}$, $k=1, 2, 3, \ldots$

Mulțimea $X=\bigcup_{k\in N^*} X_k$ este o reuniune numărabilă de mulțimi finite, deci este numărabilă.

Deoarece $\mathbb{R}$ nu este numărabilă, rezultă că mulțimea $\mathbb{R}\setminus X$ este infinită. Dar pentru $\alpha\in\mathbb{R}\setminus X$, avem $\alpha\notin X_k$, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*$, deci $\det(A_k+\alpha B_k)\neq 0$, adică $A_k+\alpha B_k$ este inversabilă, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*$.

10.8. (i)⇒(ii). Fie $A=\{a_1, \ldots, a_k\}$ un corp finit, deci comutativ. Un polinom $P\in A[X]$ de grad $n>1$ admite în corpul comutativ A cel mult n rădăcini distincte.

Fie acum $f:A\to A$ o funcție arbitrară. Considerăm polinomul de interpolare al lui Lagrange:

$$Q=\sum_{i=1}^{k}\frac{(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\ldots(X-a_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}\cdot f(a_i)\,.$$

Avem $Q\in A[X]$ şi notând $\widetilde{Q}$ funcția polinomială asociată lui Q, se observă uşor că $\widetilde{Q}(a_i)=f(a_i)$, $i=1, \ldots, k$.

Aceasta înseamnă că $f=\widetilde{Q}$, deci funcția f este polinomială.

(ii)⇒(i). Presupunem îndeplinite ipotezele de la (ii).

Demonstrăm mai întâi că A este inel finit.

Să presupunem prin reducere la absurd că A este infinit şi să considerăm funcția $f:A\to A$, $f(x)=\begin{cases}0, & pentru\ x\neq 0\\ 1, & pentru\ x=0\end{cases}$.

Conform lui (ii) există un polinom $P=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n\in A[X]$ cu $f=\widetilde{P}$ **.**

Avem $n \geq 1$, căci dacă $n \leq 0$, ar însemna că P este un polinom constant, deci $\widetilde{P}$ = f ar fi o funcție constantă, ceea ce nu este posibil, deoarece inelul A având cel puțin două elemente, avem $0 \neq 1$.

Aşadar polinomul P de grad $n \geq 1$ are în A o infinitate de rădăcini (toate elementele nenule din A), contradicție cu (ii). Deci A este finit.

Demonstrăm că A este un domeniu de integritate.

Să presupunem, prin reducere la absurd, că există a, $b \in A$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ cu $ab = 0$. Atunci polinomul $P \in A[X]$, $P = aX$, care are gradul 1, admite în A două rădăcini distincte şi anume 0 şi b, contradicție cu (ii).

Deci A este domeniu de integritate.

Dar un domeniu de integritate finit este corp, deci A este corp finit.

10.9. (i). Să presupunem mai întâi că $f = \hat{a} + \hat{b}X$ este inversabil. Atunci există polinomul $\hat{c}_0 + \hat{c}_1 X + ... + \hat{c}_m X^m$ a.î. $(\hat{a} + \hat{b}X)(\hat{c}_0 + \hat{c}_1 X + ... + \hat{c}_m X^m) = \hat{1}$.

Rezultă $\hat{a}\hat{c}_0 = \hat{1}$ (0)

$\hat{a}\hat{c}_1 + \hat{b}\hat{c}_0 = \hat{0}$ (1)

$\hat{a}\hat{c}_2 + \hat{b}\hat{c}_1 = \hat{0}$ (2)

……..

$\hat{a}\hat{c}_m + \hat{b}\hat{c}_{m-1} = \hat{0}$ (m)

$\hat{b}\hat{c}_m = \hat{0}$ (m+1)

Din (0) deducem că $\hat{a}$ şi $\hat{c}_0$ sunt inversabile, ceea ce este echivalent cu $p \nmid a$ şi $p \nmid c_0$.

Dacă am presupune că $p \nmid b$, atunci din (1), (2), …, (m) rezultă succesiv că $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, …, $\hat{c}_m$ sunt inversabile şi atunci din (m+1) rezultă $\hat{b} = \hat{0}$, de unde deducem că $p^r | b$, adică $p | b$, contradicție.

Prin urmare, în mod necesar $p | b$.

Reciproc, să presupunem că $p \nmid a$ şi $p | b$ şi să arătăm că polinomul $\hat{a} + \hat{b}X$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}_{p^r}[X]$.

Fie $b = pc$; atunci $\hat{b}^r = \hat{p}^r \cdot \hat{c}^r = \hat{0}$ şi rezultă

$$\hat{a}^r = \hat{a}^r + \hat{0} = \hat{a}^r + \left(\hat{b}X\right)^r = (\hat{a} + \hat{b}X - \hat{b}X)^r + (\hat{b}X)^r = M_{(\hat{a}+\hat{b}X)}.$$

Deci există $g\in\mathbb{Z}_{p^r}[X]$ a.î. $\hat{a}^r=(\hat{a}+\hat{b}X)g(X)$ sau $(\hat{a}+\hat{b}X)[(\hat{a}^{-1})^r\ g(X)]=\hat{1}$, ceea ce arată că polinomul $f=\hat{a}+\hat{b}X$ este inversabil.

(ii). Fie $A=\{a|0\le a\le p^r-1,\ p\nmid a\}$ şi $B=\{b|0\le b\le p^r-1,\ p|b\}$.

Evident B are p^{r-1} elemente iar A are p^r-p^{r-1} elemente.

Notând F mulţimea polinoamelor de gradul cel mult 1, inversabile din inelul $\mathbb{Z}_{p^r}[X]$, deducem pe baza punctului (i) că aplicaţia $\varphi:F\to A\times B$, $\varphi(\hat{a}+\hat{b}X)=(a, b)$ este o bijecţie.

Rezultă atunci egalitatea:

$$\text{card}(F)=\text{card}(A)\cdot\text{card}(B)=(p^r-p^{r-1})p^{r-1}=p^{2(r-1)}(p-1).$$

10.10. Evident $\varphi_n(fg)=\varphi_n(f)\varphi_n(g)$, oricare ar fi $f, g\in A[X]$. Aceasta arată că φ_n este endomorfism al inelului de polinoame A[X] dacă şi numai dacă $\varphi_n(f+g)=\varphi_n(f)+\varphi_n(g)$, adică echivalent $(f+g)^n=f^n+g^n$, oricare ar fi $f,g\in A[X]$. Cum $M\neq\emptyset$ există $n_0\in M$, deci avem $(f+g)^{n_0}=f^{n_0}+g^{n_0}$, oricare ar fi $f,g\in A[X]$. Luând $f=g=1$ obţinem $(1+1)^{n_0}=1+1$, adică $(2^{n_0}-2)\cdot 1=0$.

Există aşadar numerele întregi $k\ge 2$ pentru care $k\cdot 1=0$ (de exemplu $k=2^{n_0}-2$) şi fie atunci $p\ge 2$ minim cu $p\cdot 1=0$. Arătăm că p este număr prim.

Într-adevăr, dacă p nu ar fi prim am avea $p=p_1p_2$ cu $1<p_1<p$ şi $1<p_2<p$ şi din $p\cdot 1=0$ ar rezulta $(p_1\cdot 1)(p_2\cdot 1)=0$ deci $p_1\cdot 1=0$ sau $p_2\cdot 1=0$, (căci A este inel integru) contrar minimalităţii lui p.

Mai remarcăm că pentru $k\in\mathbb{Z}$ avem echivalenţa $k\cdot 1=0\Leftrightarrow k\equiv 0(\text{mod } p)$ căci implicaţia $\Leftarrow$ este evidentă, iar pentru implicaţia $\Rightarrow$ folosim împărţirea cu rest a lui k prin p şi minimalitatea lui p a.î. $p\cdot 1=0$.

Demonstrăm egalitatea de mulţimi cerută prin dublă incluziune, p având semnificaţia de mai înainte (caracteristica inelului A).

„$\subseteq$” Fie $n\in M$, deci $(f+g)^n=f^n+g^n$, oricare ar fi $f,g\in A[X]$. Luând $f=X$, $g=1$ avem $(X+1)^n=X^n+1$, adică $C_n^1X^{n-2}+C_n^2X^{n-3}+\ldots+C_n^{n-2}X+C_n^{n-1}=0$ (am ţinut seama că din A integru rezultă că şi A[X] este integru şi am simplificat prin X).

Ultima egalitate arată că în inelul A avem $C_n^1\cdot 1=0$, $C_n^2\cdot 1=0,\ldots,$ $C_n^{n-2}\cdot 1=0$, $C_n^{n-1}\cdot 1=0$ şi de aici rezultă că în $\mathbb{Z}$ avem: $C_n^1\equiv 0(\text{mod } p)$, $C_n^2\equiv 0(\text{mod } p),\ldots,$ $C_n^{n-1}\equiv 0(\text{mod } p)$.

Se ştie atunci (vezi observaţia din final) că există $k\in\mathbb{Z}$, $k\ge 1$ a.î. $n=p^k$.

„⊇” Fie $n=p^k$ cu $k\geq 1$. Tot datorită observației din final avem $C_n^1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, $C_n^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$,…, $C_n^{n-1} \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, deci:

$$(f+g)^n = f^n + C_n^1 f^{n-1} g + \ldots + C_n^{n-1} f g^{n-1} + g^n = f^n + g^n,$$

ceea ce arată că φ_n este endomorfism al inelului A[X] şi prin urmare $n\in M$.

Unicitatea lui p este clară: Dacă am mai avea $q>0$ număr prim, cu $M=\{q, q^2, q^3, \ldots, q^k,\ldots\}$ din egalitatea $\{p, p^2, p^3,\ldots,p^k,\ldots\}=\{q, q^2, q^3,\ldots,q^k,\ldots\}$ rezultă evident $p=q$.

Observație. Am utilizat rezultatul cunoscut (vezi, de exemplu, [15]) următor:

$$(C_n^1, C_n^2,\ldots, C_n^{n-1}) = \begin{cases} p, \ daca \ n = p^k, \ p \ prim, \ k \geq 1 \\ 1, \ daca \ n \ are \ cel \ putin \ 2 \ factori \ primi \ distincti \end{cases}.$$

10.11. Fie A un astfel de inel. A fiind subinel unitar al lui A[X] el trebuie să fie izomorf cu un subinel unitar al lui $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. În particular, (A,+) trebuie să fie izomorf cu un subgrup nenul al lui $(\mathbb{Z},+)$, deci să existe un $n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $A\simeq n\mathbb{Z}$.

Din $1\in A$ rezultă $n=1$ şi atunci $\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}[X]$ ($\mathbb{Z}$ este ciclic şi evident $\mathbb{Z}[X]$ nu este ciclic), contradicție.

10.12.„⇐”. Presupunem că inelele A şi $\mathbb{Z}$ sunt izomorfe şi demonstrăm că inelele A[X] şi $\mathbb{Z}[X]$ sunt izomorfe.

Într-adevăr, dacă $\varphi:\mathbb{Z}\to A$ este un izomorfism de inele, definim aplicația $\overline{\varphi}:\mathbb{Z}[X]\to A[X]$ prin $\overline{\varphi}(a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n)=\varphi(a_0)+\varphi(a_1)X+\ldots+\varphi(a_n)X^n$, pentru orice polinom $a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n\in\mathbb{Z}[X]$.

Se demonstrează că $\overline{\varphi}$ este izomorfism de inele.

„⇒”. Reciproc, să presupunem că inelele A[X] şi $\mathbb{Z}[X]$ sunt izomorfe şi demonstrăm că inelele $\mathbb{Z}$ şi A sunt izomorfe.

Fie $\psi:\mathbb{Z}[X]\to A[X]$ un izomorfism de inele. Atunci ψ este un morfism unitar de inele, deci $\psi(1)=1_A$. Rezultă imediat că pentru orice $k\in\mathbb{Z}$, $\psi(k)=k\cdot 1_A$, ceea ce arată că $\psi(\mathbb{Z})\subseteq A$.

Deoarece $\mathbb{Z}$ este domeniu de integritate, rezultă că inelul său de polinoame $\mathbb{Z}[X]$ este domeniu de integritate şi cum $A[X]\simeq\mathbb{Z}[X]$, vom avea că şi A[X] este domeniu de integritate şi de aici rezultă că A este domeniu de integritate.

Demonstrăm acum că $\psi^{-1}(A)\subseteq\mathbb{Z}$, unde ψ^{-1} este izomorfismul invers al lui ψ. Să presupunem prin absurd că nu există această incluziune, adică există $\alpha\in A$ cu $\psi^{-1}(\alpha)\notin\mathbb{Z}$.

Atunci $\psi^{-1}(\alpha)= a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n\in\mathbb{Z}[X]$, unde $n\in\mathbb{N}^*$ şi $a_n\neq 0$.

Observăm că $\psi(X)\notin A$, căci în caz contrar, cum avem $\psi(\mathbb{Z})\subseteq A$, rezultă $\psi(\mathbb{Z}[X])\subseteq A$, ceea ce face ca morfismul $\psi:\mathbb{Z}[X]\to A[X]$ să nu fie surjectiv.

Fie deci $\psi(X)= b_0+b_1X+\ldots+b_pX^p\in A[X]$, unde $p>0$ şi $b_p\neq 0_A$.

Avem atunci

$\alpha=\psi(\psi^{-1}(\alpha))=\psi(a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n)=\psi(a_0)+\psi(a_1)\psi(X)+\ldots+\psi(a_n)\psi(X)^n=$

$=\psi(a_0)+\psi(a_1)(b_0+b_1X+\ldots+b_pX^p)+\ldots+\psi(a_n)(b_0+b_1X+\ldots+b_pX^p)^n$. Această egalitate este însă o contradicție, căci α este un polinom de gradul 0, în timp ce polinomul scris ultima dată are gradul $np>0$, căci coeficientul său dominant este $\psi(a_n)\,b_p^n\neq 0_A$ (ținem seama că A este domeniu de integritate).

Deci am demonstrat că $\psi^{-1}(A)\subseteq\mathbb{Z}$.

Notăm cu ψ_1 respectiv ψ_1^{-1} restricțiile lui ψ şi ψ^{-1} respectiv la $\mathbb{Z}$ şi la A. Din cele demonstrate anterior, rezultă că avem $\psi_1:\mathbb{Z}\to A$, $\psi_1^{-1}:A\to\mathbb{Z}$. Evident ψ_1 şi ψ_1^{-1} sunt morfisme de inele şi $\psi_1\circ\psi_1^{-1}=1_A$, $\psi_1^{-1}\circ\psi_1=1_{\mathbb{Z}}$, ceea ce înseamnă că $\psi_1:\mathbb{Z}\to A$ este morfism inversabil de inele, adică izomorfism de inele.

10.13. „$\Leftarrow$". Să presupunem că inelele K şi A sunt izomorfe şi să demonstrăm că şi inelele K[X] şi A[X] sunt izomorfe.

Într-adevăr, dacă $\varphi:K\to A$ este un izomorfism de inele atunci $\psi:K[X]\to A[X]$, $\psi(a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n)=\varphi(a_0)+\varphi(a_1)X+\ldots+\varphi(a_n)X^n$ este un izomorfism de inele.

„$\Rightarrow$". Reciproc, să presupunem că inelele K[X] şi A[X] sunt izomorfe şi să demonstrăm că şi inelele K şi A sunt izomorfe.

Fie $\psi:K[X]\to A[X]$ un izomorfism de inele.

Inelul K[X] fiind domeniu de integritate, rezultă că şi A[X] este domeniu de integritate şi de aici rezultă că A este domeniu de integritate.

Polinoamele inversabile din inelul K[X] sunt elementele nenule din corpul K, iar polinoamele inversabile din A[X] sunt elementele inversabile din inelul A.

Ținând seama că izomorfismul ψ duce elementele inversabile din K[X] în elementele inversabile din A[X] şi că $\psi(0_K)=0_A$, rezultă că $\psi(K)\subseteq A$.

Analog cu demonstrația problemei **10.12.** se arată şi incluziunea $\psi^{-1}(A)\subseteq K$ (reducere la absurd).

Atunci, avem restricțiile ψ_1 şi ψ_1^{-1} ale lui ψ şi ψ^{-1} respectiv la K şi A: $\psi_1:K\to A$, $\psi_1^{-1}:A\to K$. Evident, ψ_1 şi ψ_1^{-1} sunt morfisme de inele şi cum $\psi_1\circ\psi_1^{-1}=1_A$, $\psi_1^{-1}\circ\psi_1=1_K$, ele vor fi inversabile.

Aceasta înseamnă că inelele A şi K sunt izomorfe.

10.14. Dacă inelele k[X] şi K[X] ar fi izomorfe, atunci grupurile elementelor inversabile din cele două inele ar fi izomorfe.

Se arată uşor (prin trecere la grade) că un polinom din inelul K[X] este inversabil dacă şi numai dacă este un polinom de gradul zero, adică dacă şi numai dacă aparține lui K^*. Deci grupul elementelor inversabile din K[X] este $U(K[X])=K^*$. Analog $U(k[X])=k^*$.

Prin urmare, dacă inelele k[X] şi K[X] ar fi izomorfe, ar rezulta că grupurile $(k^*, \cdot)$ şi $(K^*, \cdot)$ ar fi izomorfe, contradicție cu ipoteza.

Deci, în ipoteza dată, cele două inele nu sunt izomorfe.

Luând $k=\mathbb{Q}$ şi $K=\mathbb{R}$ avem $(\mathbb{Q}^*, \cdot)\ncong(\mathbb{R}^*, \cdot)$, căci $\mathbb{Q}^*$ este mulțime numărabilă, iar $\mathbb{R}^*$ nu este numărabilă.

Luând $k=\mathbb{R}$ şi $K=\mathbb{C}$ avem că $(\mathbb{R}^*, \cdot)\ncong(\mathbb{C}^*, \cdot)$, deoarece în $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ singurele elemente de ordin finit sunt ±1 în timp ce în $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ orice rădăcină a unității, complexă, nereală, de ordin mai mare ca 2, este element de ordin finit.

Atunci, conform celor stabilite anterior, deducem că inelele $\mathbb{Q}[X]$ şi $\mathbb{R}[X]$, respectiv $\mathbb{R}[X]$ şi $\mathbb{C}[X]$ nu sunt izomorfe.

10.15. Inelele $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}[X]$ nu pot fi izomorfe pentru că $\mathbb{R}$ este corp în timp ce $\mathbb{R}[X]$ nu este corp (polinoamele inversabile din inelul $\mathbb{R}[X]$ sunt polinoamele constante nenule).

Dacă considerăm însă $\mathbb{Q}$-spațiile vectoriale $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}[X]$, ambele au dimensiunea c, deci sunt spații vectoriale izomorfe.

În particular, rezultă că grupurile abeliene $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{R}[X], +)$ sunt izomorfe.

10.16. Fie φ un automorfism al lui A[X]. Avem $\varphi(0)=0$ şi să presupunem că $\varphi(X)=b_0+b_1X+\ldots+b_mX^m$ are gradul m. Dacă $f=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$ este un polinom de grad $n\geq0$, atunci $\varphi(f)=\varphi(a_0)+\varphi(a_1)\varphi(X)+\ldots+\varphi(a_n)\varphi(X)^n$, deci $\varphi(f)$ este un polinom de gradul mn.

În particular, dacă f este un element nenul al inelului A (element asimilat cu un polinom de gradul 0), atunci $\varphi(f)$ va fi un polinom de gradul 0, deci va fi şi el un element al inelului A.

Deci putem defini o funcție $\psi:A\to A$, prin $\psi(a)=\varphi(a)$.

Această funcție este un automorfism al inelului A.

Din ipoteză φ este surjectiv, deci există un polinom f a.î. $\varphi(f)=X$.

În consecință, $m\cdot grad(f)=1$, ceea ce înseamnă că $m=1$ şi deci $\varphi(X)=b_0+b_1X$ cu $b_1\neq 0$.

Observăm că automorfismul φ al lui A[X] este perfect determinat de imaginea $\varphi(X)$ şi de automorfismul ψ al lui A, deoarece $\varphi(a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n)=\psi(a_0)+\psi(a_1)\varphi(X)+\ldots+\psi(a_n)\varphi(X)^n$.

Rămâne să precizăm imaginea $\varphi(X)$.

Fie $f=a_0+a_1X$ acel polinom pentru care $\varphi(f)=X$.

Aşadar, $\psi(a_0)+\psi(a_1)\cdot(b_0+b_1X)=X$, de unde deducem că $\psi(a_1)b_1=1$, ceea ce înseamnă că b_1 este inversabil în A.

Aceasta este singura condiție pe care trebuie să o îndeplinească imaginea $\varphi(X)=b_0+b_1X$.

10.17. Dacă a este inversabil vom considera morfismul $\psi:A[X]\to A[X]$ dat prin $\psi(f(X))=f(a^{-1}X-a^{-1}b)$. Morfismul ψ este inversul lui φ.

Reciproc, fie $u:A[X]\to A[X]$ un automorfism cu $u(a)=a$, oricare ar fi $a\in A$ şi fie inversul acestuia $v=u^{-1}$.

Dacă $u=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$ şi $v=b_0+b_1X+\ldots+b_mX^m$ din $(uv)(X)=X$ se obține $mn=1$, de unde rezultă că $m=n=1$, ş.a.m.d.

10.18. (i). $(x+\alpha)^5=x^5$, $x\neq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+\alpha}{x}\right)^5=1$. Rezultă că $\frac{x+\alpha}{x}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ şi apoi $x\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

(ii). Fie $x_1<\ldots<x_n$ rădăcinile lui P şi $y_k\in(x_k, x_{k+1})$ rădăcinile derivatei.

Fie $\beta=\min\{y_k-x_k,\ x_{k+1}-y_k \mid 0\le k\le n-1\}$. Pe fiecare interval $[x_k, x_{k+1}]$ şi pentru orice $0<\alpha<\beta$ definim $g(X)=P(X+\alpha)-P(X)$. Cum y_k este unicul punct de extrem al lui P pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$, presupunând de exemplu că este punct de maxim, avem $g(x_k)=P(x_k+\alpha)-P(x_k)>0$, $g(y_k)=P(y_k+\alpha)-P(y_k)<0$, deci există $z_k\in(x_k, x_{k+1})$ cu $g(z_k)=0$.

Se poate alege orice $\alpha\in(0, \beta)\cap\mathbb{Q}$.

10.19. Dacă $f(1)=\alpha\in\mathbb{R}$, se arată imediat că $f(k)=k\alpha$, pentru orice $k\in\mathbb{N}$, astfel că polinomul $g=f-\alpha X$ are o infinitate de rădăcini în $\mathbb{R}$, de unde concluzia că $g=0$, adică $f=\alpha X$.

10.20. (i). Avem că $f(a)=[f(a)+a]-a$ divide $f(f(a)+a)-f(a)$.

(ii). Alegem $b\in\mathbb{Z}$ a.î. $f(b)\neq 0, \pm 1$. Conform cu (i), $f(b)\mid f(b+f(b))$, astfel că putem alege $a=b+f(b)$.

(iii). Totul rezultă din (ii).

10.21. Pentru $x=0$ egalitatea devine $-3P(1)=0$, deci $P(X)$ este divizibil cu $X-1$. Pentru $x=3$ vom avea $3P(3)=0$, deci $P(X)$ este divizibil cu $X-3$.

Rezultă că $P(X)=(X-1)(X-3)Q(X)$, cu $Q(X)\in\mathbb{R}[X]$ şi înlocuind în relația dată pe $P(X)$ şi $P(X+1)$ obținem $(X-1)Q(X)=(X-2)Q(X+1)$.

Pentru $x=2$, $Q(2)=0$, deci $Q(X)$ este divizibil cu $X-2$ şi atunci

$$P(X)=(X-1)(X-2)(X-3)R(X) \text{ cu } R(X)\in\mathbb{R}[X].$$

Înlocuind în egalitatea din enunț obținem:

$X(X-1)(X-2)(X-3)R(X)=(X-3)X(X-1)(X-2)R(X+1)$,

deci $R(X)=R(X+1)$, adică $R(0)=R(1)=R(2)=\ldots=R(n)=k$, $k\in\mathbb{R}$.

Rezultă că polinomul de grad n, R este egal cu k.

Deci $P=k(X-1)(X-2)(X-3)$.

10.22. (i). Fie $f(X)=(X-1)^m-X^m+1$. Dacă α este o rădăcină a lui X^2-X+1 trebuie ca $f(\alpha)=0$. Cum $\alpha^2-\alpha+1=0$, atunci $f(\alpha)=\alpha^{2m}-\alpha^m+1$.

Dacă $m=6k \Rightarrow f(\alpha)=\alpha^{12k}-\alpha^{6k}+1=1\neq 0$

Dacă $m=6k+1 \Rightarrow f(\alpha)=\alpha^2-\alpha+1=0$

Dacă $m=6k+2 \Rightarrow f(\alpha)=-\alpha^2-\alpha+1\neq 0$

Dacă $m=6k+3 \Rightarrow f(\alpha)=3\neq 0$

Dacă $m=6k+4 \Rightarrow f(\alpha)=\alpha^2+\alpha+1\neq 0$

Dacă $m=6k+5 \Rightarrow f(\alpha)=\alpha^2-\alpha+1=0$.

Valorile căutate ale lui m sunt $m=6k+1$ şi $m=6k+5$, $k\in\mathbb{N}$.

(ii). Se procedează analog cu punctul (i) şi se obține $m=6k+2$ şi $m=6k+4$, $k\in\mathbb{N}$.

10.23. Conform teoremei împărțirii cu rest avem $f(X)=(X-a)(X-b)q(X)+r(X)$ cu $r(X)=\alpha X+\beta$, $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$.

Avem $f(a)=r(a)=\alpha a+\beta$ şi $f(b)=r(b)=\alpha b+\beta$.

Rezolvând sistemul de ecuații: $\begin{cases}\alpha a+\beta=f(a)\\ \alpha b+\beta=f(b)\end{cases}$ obținem $\begin{cases}\alpha=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\\ \beta=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}\end{cases}$. Atunci:

$$r=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}X+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{-f(a)X+f(b)X+bf(a)-af(b)}{b-a}=$$

$$=\frac{(X-a)f(b)-(X-b)f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}X+\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

10.24. „$\Leftarrow$”. Dacă $f=\frac{1}{2}\left[cX^2+(2b-c)X+2a\right]$ cu a, b, $c\in\mathbb{Z}$, atunci $f(n)=\frac{1}{2}\left[cn^2+(2b-c)n+2a\right]=\frac{1}{2}\left[cn(n-1)+2(bn+a)\right]=c\frac{n(n-1)}{2}+(bn+a)$.

Cum $2\mid n(n-1)$, pentru orice $n\in\mathbb{Z}$ avem $f(n)\in\mathbb{Z}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$.

„$\Rightarrow$”. Reciproc, fie $f=aX^2+bX+c$ cu $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Dacă $f(n)\in\mathbb{Z}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$, atunci şi $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)\in\mathbb{Z}$. Dar $f(0)=c$, $f(1)=a+b+c$, $f(-1)=a-b+c$. Deci $c\in\mathbb{Z}$, $a+b+c=k_1\in\mathbb{Z}$, $a-b+c=k_2\in\mathbb{Z}$. Atunci $a=\frac{k_1+k_2-2c}{2}$ şi $b=\frac{k_1-k_2}{2}$. Notăm $k_1+k_2-2c=m$, $k_1-k_2=2n-m$. Atunci $f=\frac{1}{2}\left[mX^2+(2n-m)X+2c\right]$, unde m, $n, c\in\mathbb{Z}$.

10.25. Dacă f este un c.m.m.d.c. al polinoamelor X^n-1 şi X^m-1 atunci orice rădăcină a lui f este rădăcină a lui X^d-1, unde $d=(m,n)$ este c.m.m.d.c. al numerelor n şi m.

Invers, fie f, g două polinoame; dacă d este un c.m.m.d.c. al lui f şi g, atunci există două polinoame u şi v a.î. $d=uf+vg$. Atunci orice rădăcină a lui X^d-1este rădăcină a lui f, deci $f=X^d-1$.

10.26. Fie $d=(m,n)$. Procedând ca la problema **10.25.** se obține că dacă numerele $\frac{m}{d}$ şi $\frac{n}{d}$ sunt ambele impare atunci un c.m.m.d.c. al polinoamelor

date este X^d+a^d, iar dacă cel puțin unul dintre numerele $\frac{m}{d}$ sau $\frac{n}{d}$ este par, un c.m.m.d.c. al polinoamelor date este 1.

10.27. Presupunem prin reducere la absurd că polinomul admite rădăcini multiple. Fie α o astfel de rădăcină. Atunci cel puțin $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$.

Cum $f(\alpha)-f'(\alpha)=\frac{\alpha^n}{n!}$ obținem $\alpha=0$. Dar $f(0)=1$, contradicție.

10.28. Se ştie că orice polinom $f=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$ de gradul $n\geq 1$ cu coeficienți reali este un produs de polinoame de gradul 1 sau 2 cu coeficienți reali, adică poate fi pus sub forma:

$$f = a_n(X-\alpha_1)^{k_1}\ldots(X-\alpha_p)^{k_p}(X^2+b_1X+c_1)^{l_1}\ldots(X^2+b_sX+c_s)^{l_s},$$

unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_p\in\mathbb{R}$ şi $b_1^2-4c_1<0, \ldots, b_s^2-4c_s<0$.

Aplicând această teoremă şi ținând cont de ipoteză, f se poate scrie sub forma $f=g^2h$, unde h nu are nici o rădăcină reală. Vom împărți rădăcinile complexe ale lui h în două grupe: rădăcinile complexe conjugate fac parte din grupe distincte. Făcând produsul factorilor de gradul întâi care corespund rădăcinilor fiecărei grupe obținem polinoamele h_1+ih_2 şi h_1-ih_2, iar $h=(h_1+ih_2)(h_1-ih_2)=h_1^2+h_2^2$. Deci $f=(gh_1)^2+(gh_2)^2$.

10.29. Fie $f=\sum_{i\geq 0}a_iX^i$ şi $g=\sum_{i\geq 0}b_iX^i$.

Presupunem prin reducere la absurd că $p|a_0$, $p|a_1,\ldots$, $p|a_{k-1}$ şi $p\nmid a_k$, şi $p|b_0$, $p|b_1,\ldots$, $p|b_{s-1}$ şi $p\nmid b_s$. Scriem $fg=\sum_{i\geq 0}c_iX^i$, $c_n=\sum_{i+j=n}a_ib_j$.

Avem $c_{k+s}=a_0b_{k+s}+a_1b_{k+s-1}+\ldots+a_kb_s+a_{k+1}b_{s-1}+\ldots+a_{k+s}b_0$. Cum p divide toți termenii în afara lui a_kb_s (căci $p\nmid a_k$ şi $p\nmid b_s$) obținem $p\nmid fg$, contradicție.

10.30. Putem scrie $f=c(f)\cdot f'$, $g=c(g)\cdot g'$ cu $f', g'\in\mathbb{Z}[X]$ şi $c(f')=c(g')=1$. Conform problemei **10.29.** avem $c(f'g')=1$. Atunci $fg=c(f)\cdot f'\cdot c(g)\cdot g'=c(f)\cdot c(g)\cdot f'g'$. Deci $c(fg)=c(f)\cdot c(g)$.

10.31. Rădăcinile polinomului $X^{2n}+X^n+1$ se obțin din $x^n=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ deci $x=\cos\frac{2(3k+1)\pi}{3n}\pm i\sin\frac{2(3k+1)\pi}{3n}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$.

Este suficient să avem $\left[\cos\frac{2(3k+1)\pi}{3n}+i\sin\frac{2(3k+1)\pi}{3n}\right]^m-1=0$, k=0, 1, …, n-1 şi deci $\cos\frac{2m(3k+1)\pi}{3n}=1$, $\sin\frac{2m(3k+1)\pi}{3n}=0$, k=0, 1,…, n-1, adică $\frac{2m(3k+1)\pi}{3n}=2h_k\pi$, de unde $m=\frac{3h_kn}{3k+1}$.

Pentru k=0 avem $m=3h_0n$.

Această condiție este necesară şi suficientă deoarece:

$$X^m-1=X^{3h_0n}-1=(X^{3n})^{h_0}-1=(X^{3n}-1)[X^{3n(h_0-1)}+X^{3n(h_0-2)}+...+1]$$

şi $X^{3n}-1=(X^n-1)(X^{2n}+X^n+1)$. Deci m este multiplu de 3n.

10.32. Deoarece coeficientul dominant al polinomului este 1, el nu admite rădăcini fracționare. Polinomul nu admite nici rădăcini întregi deoarece $P(k)=k^5-k+m=M_5+m$; cum m nu este divizibil prin 5 rezultă că $P(k)\neq M_5$, oricare ar fi $k\in\mathbb{Z}$ şi deci $P(k)\neq 0$.

Deci P nu are factori de gradul întâi.

Presupunem că $P=(X^3+aX^2+bX+c)(X^2+pX+q)$.

Identificând coeficienții găsim: $p=-a$, $q=a^2-b$, $c=2ab-a^3$, $a^4+1=b(a^2+b)$, $a(2b-a^2)(a^2-b)=m$. Cum $m\not\equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow a\not\equiv 0 \pmod 5$, $a^2-2b\not\equiv 0 \pmod 5$, $a^2-b\not\equiv 0 \pmod 5$. Cum $a^5\equiv a \pmod 5$ şi $a\not\equiv 0 \pmod 5$ rezultă că $a^4\equiv 1 \pmod 5$ şi deci din $a^4+1=b(a^2+b)$ rezultă $b(a^2+b)\equiv 2 \pmod 5$. (1)

Din $a^2-2b\not\equiv 0 \pmod 5$, $a^2-b\not\equiv 0 \pmod 5$ rezultă că $(a^2-2b)(a^2-b)\not\equiv 0 \pmod 5$ sau $a^4-3ba^2+2b^2\equiv a^4+2a^2b+2b^2\not\equiv 0 \pmod 5$. Cum $a^4\equiv 1\equiv -4 \pmod 5$ rezultă $-4+2a^2b+2b^2\not\equiv 0 \pmod 5$, adică $b(a^2+b)\not\equiv 2 \pmod 5$, ceea ce contrazice relația (1). Aşadar P este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.33. $X^2+\hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$, dar $X^2+\hat{1}=(X+\hat{2})(X+\hat{3})$ în $\mathbb{Z}_5[X]$.

Al doilea polinom este reductibil şi în $\mathbb{Z}_3[X]$ şi în $\mathbb{Z}_5[X]$:

Avem $X^3+X+\hat{2}=(X+\hat{1})(X^2-X+\hat{2})$.

10.34. $\mathbb{Z}_5$ fiind corp, $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ este grup cu patru elemente, deci conform teoremei lui Lagrange obținem $t^4=1$, oricare ar fi $\hat{0}\neq t\in\mathbb{Z}_5$.

Avem $f(t)=t^4+at+\hat{1}=at+\hat{2}$ şi evident pentru fiecare $a\neq\hat{0}$ polinomul are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$ ($a=\hat{1}$, $t=\hat{3}$; $a=\hat{2}$, $t=\hat{4}$ şi invers).

În cazul a= $\hat{0}$, avem f(X)=$X^4+\hat{1}$ =($X^2+\hat{2}$)($X^2+\hat{3}$).

Deci f este tot timpul reductibil.

10.35. Se verifică uşor că $\widetilde{f}(\hat{0}) = \widetilde{g}(\hat{0}) = \hat{0}$, $\widetilde{f}(\hat{1}) = \widetilde{g}(\hat{1}) = \hat{0}$ şi $\widetilde{f}(\hat{2}) = \widetilde{g}(\hat{2}) = \hat{0}$.

10.36. (i). Cum $p^2+p+1 \equiv 1 \pmod p$, va fi suficient să determinăm restul împărţirii numărului $a = \prod_{k=1}^{p-1}(k^2+k+1)$ la p. Fie $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Atunci $k^2+k+1=(\alpha-k)(\bar{\alpha}-k)$ şi deci

$a = \prod_{k=1}^{p-1}(\alpha-k)\cdot\prod_{k=1}^{p-1}(\bar{\alpha}-k) = f(\alpha)\cdot f(\bar{\alpha})$, unde f=(X-1)(X-2)…(X-p+1)∈ℤ[X].

Fie $g=X^{p-1}-1 \in \mathbb{Z}[X]$, $\bar{f} = (X-\hat{1})(X-\hat{2})...(X-\hat{p-1})$ şi

$\bar{g} = X^{p-1}-\hat{1} \in \mathbb{Z}_p[X]$. Cum $\bar{f}$ şi $\bar{g}$ au aceleaşi rădăcini $\hat{1}$, $\hat{2}$,..., $\hat{p-1}$ în $\mathbb{Z}_p$ rezultă $\bar{f} = \bar{g}$ şi deci există h∈ℤ[X] a.î. f=g+p·h. Obţinem:

$a=f(\alpha)f(\bar{\alpha})=[g(\alpha)+ph(\alpha)][g(\bar{\alpha})+ph(\bar{\alpha})]=g(\alpha)g(\bar{\alpha})+p[g(\alpha)h(\bar{\alpha})+g(\bar{\alpha})h(\alpha)]+$
$+p^2h(\alpha)h(\bar{\alpha})=g(\alpha)g(\bar{\alpha})+pb+p^2b_1$ unde $b=g(\alpha)h(\bar{\alpha})+g(\bar{\alpha})h(\alpha)$ şi $b_1=h(\alpha)h(\bar{\alpha})$.

Cum g şi h∈ℤ[X], rezultă $b=u+v\alpha$ cu u, v∈ℤ. Dar $b=\bar{b} \Rightarrow u+v\alpha=u+v\bar{\alpha} \Rightarrow v(\alpha-\bar{\alpha})=0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow b=u\in\mathbb{Z}$. Analog $b_1\in\mathbb{Z}$. Cum $g(\alpha)g(\bar{\alpha})=(\alpha^{p-1}-1)(\bar{\alpha}^{p-1}-1)=$
$=2-(\alpha^{p-1}+\bar{\alpha}^{p-1})=2-2\mathrm{Re}(\alpha^{p-1})=2-2\cos\left(\frac{2\pi(p-1)}{3}\right)$ rezultă

$a \equiv 2-2\cos\left(\frac{2\pi(p-1)}{3}\right) \pmod p$.

Dacă $p\equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow a\equiv 0 \pmod p$.

Dacă $p\equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow a\equiv 3 \pmod p$.

(ii). $X^2+X+\hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_p[X] \Leftrightarrow X^2+X+\hat{1}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_p$ $\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{p-1}(k^2+k+1)$ nu este congruent cu 0(mod p) $\Leftrightarrow p\equiv 2 \pmod 3$.

10.37. În condiţiile enunţului funcţia f:K→K, $f(x) = x^{p^n}$, oricare ar fi x∈K este morfism de corpuri (deci funcţie injectivă), astfel că dacă pentru x∈K există y∈K a.î. $y^{p^n} = x$, atunci y este unic cu acestă proprietate.

10.38. Se ştie că orice corp finit este comutativ. Fie A mulţimea din enunţ şi m numărul elementelor lui K. Vom arăta că A={2, 3}. Pentru început să arătăm că 2 şi 3 aparţin lui A.

Fie M={f=X^2+aX+b | a, b∈K}. Avem echivalenţa f=g ⇔ f şi g au aceleaşi rădăcini. Numărul polinoamelor din M care au rădăcini egale (de forma $(X-a)^2$) este m, iar cel al polinoamelor din M care au rădăcini distincte (de forma (X-a)(X-b) cu a≠b) este $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$. Deci numărul polinoamelor din M care au rădăcini în K este $m + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2} < m^3$=numărul elementelor lui M. Rezultă că există polinoame din M care nu au rădăcini în K, iar numărul lor este $\frac{m(m-1)}{2}$. Evident 2∈A.

Fie N={f=X^3+aX^2+bX+c | a, b, c∈K}. Numărul polinoamelor din N care au o rădăcină simplă în K (de forma (X-a)h, unde h∈M şi nu are rădăcini în K este $m \cdot \frac{m(m-1)}{2}$ (conform etapei anterioare). Numărul polinoamelor din N care au trei rădăcini în K, nu toate distincte se obţine astfel:

i) polinoame cu o rădăcină triplă (de forma $(X-a)^3$) în număr de m;

ii) polinoame cu o rădăcină dublă şi una simplă (de forma $(X-a)^2(X-b)$ cu a≠b) în număr de $2 \cdot C_m^2 = m(m-1)$. În total avem m+m(m-1)=m^2 polinoame cu trei rădăcini nedistincte în K. Numărul polinoamelor din N care au trei rădăcini distincte în K este $C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$. Deci numărul polinoamelor din N care au rădăcini în K este $\frac{m^2(m-1)}{2} + m^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} = \frac{2m^3+m}{3} < m^3$= numărul elementelor din N. Deci există polinoame din N care nu au rădăcini în K, de unde în final vom arăta că pentru orice n≥4, rezultă n∉A. Fie n≥4. Atunci există p, q∈ℕ a.î. n=2p+3q (dacă n este par ⇒ n=2p, iar dacă n este impar ⇒ n=2k+1, k≥2 ⇒n=2(k-1)+3). Fie f∈M şi g∈N, polinoame care nu au rădăcini în K. Atunci vom lua polinomul h=$f^p \cdot g^p$∈K[X] de grad 2p+3q=n (dacă q=0 luăm h=f^p şi p≥2). Polinomul h nu are rădăcini în K şi este reductibil în K[X], deci n∉A.

10.39. (i). În orice corp comutativ de caracteristică diferită de 2 funcţionează formula obişnuită de rezolvare a ecuaţiei de gradul al doilea. Mai precis, dacă considerăm ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, cu a, b, c∈K, a≠0 (K corp

comutativ cu car(K)≠2), această ecuație are soluții în K dacă şi numai dacă există u∈K a.î. $b^2-4ac=u^2$ şi soluțiile sale sunt: $x_{1,2}=(-b\pm u)(2a)^{-1}$.

Folosind aceste considerații se obține că ecuația $3x^2-4x+1=0$ se comportă astfel în corpurile considerate:

1) în $\mathbb{Z}_5$ are rădăcinile $x_1=\hat{1}$, $x_2=\hat{2}$;

2) în $\mathbb{Z}_7$ are rădăcinile $x_1=\hat{1}$, $x_2=\hat{5}$;

3) în $\mathbb{Z}_{11}$ are rădăcinile $x_1=\hat{1}$, $x_2=\hat{4}$;

4) în $\mathbb{Z}_{13}$ are rădăcinile $x_1=\hat{1}$, $x_2=\hat{9}$;

5) în $\mathbb{Z}_{17}$ are rădăcinile $x_1=\hat{1}$, $x_2=\hat{6}$;

6) în $\mathbb{Z}_{19}$ are rădăcinile $x_1=\hat{1}$, $x_2=\hat{13}$;

(ii). Analog, ecuația $x^2-x+5=0$ are următoarea comportare în corpurile considerate:

1) în $\mathbb{Z}_7$ are rădăcinile $x_1=\hat{2}$, $x_2=\hat{6}$;

2) în $\mathbb{Z}_{11}$ are rădăcinile $x_1=\hat{3}$, $x_2=\hat{9}$;

3) în $\mathbb{Z}_{17}$ are rădăcinile $x_1=\hat{4}$, $x_2=\hat{14}$;

4) în $\mathbb{Z}_{19}$ are rădăcinile $x_1=x_2=\hat{10}$.

10.40. Dacă a=0 atunci Q(X)=2P(X) şi afirmația este evidentă.

Fie acum a≠0 şi y o rădăcină a polinomului Q. Atunci Q(y)=P(y+ia)+P(y-ia)=0, deci (1) P(y+ia)=-P(y-ia).

Dacă $x_1, \ldots, x_n$ sunt cele n rădăcini reale ale polinomului P, atunci

$$P(X)=(X-x_1)(X-x_2)\ldots(X-x_n)$$

şi (1) se scrie $(y+ia-x_1)(y+ia-x_2)\ldots(y+ia-x_n)=-(y-ia-x_1)(y-ia-x_2)\ldots(y-ia-x_n)$, de unde obținem relația: (2)

$$|y-(x_1-ia)|\cdot|y-(x_2-ia)|\cdot\ldots\cdot|y-(x_n-ia)|=|y-(x_1+ia)|\cdot|y-(x_2+ia)|\cdot\ldots\cdot|y-(x_n+ia)|$$

Din (2) se deduce că numărul y este real.

Într-adevăr, este evident că polinomul Q are coeficienți reali. Dacă Im(y)≠0, obținem Im(y)>0 sau Im(y)<0.

Să presupunem de exemplu că Im(y)>0.

Atunci dacă a>0, notând $z_j=x_j+ia$, pentru j=1, …, n, obținem că $|y-z_j|<|y-\overline{z_j}|$, ceea ce contrazice (2). La fel dacă a<0, $|y-z_j|>|y-\overline{z_j}|$, ceea ce contrazice de asemenea (2).

Deci y nu poate fi o rădăcină complexă cu Im(y)>0. La fel, y nu poate fi o rădăcină complexă cu Im(y)<0 deoarece în acest caz $\bar{y}$ ar fi o rădăcină complexă cu Im($\bar{y}$)>0, ceea ce este imposibil.

10.41. Fie $k_1=0_K$, $k_2=1_K$. În grupul finit multiplicativ $K^*=\{k_2, k_3, \ldots, k_n\}$ avem $k_i^{n-1}=1_K$, adică $k_i^n=k_i$ sau încă $k_i^n-k_i=0$, pentru orice $i\in\{2, \ldots, n\}$.

Dar ultima egalitate este evident satisfăcută şi pentru $k_1=0_K$, a.î. putem afirma că polinomul $f=X^n-X\in K[X]$ are ca rădăcini pe $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Corpul K fiind finit, este comutativ (teorema lui Wedderburn). Dar se ştie că un polinom de grad n cu coeficienți într-un corp comutativ, care are exact n rădăcini în acel corp, se descompune într-un produs de n factori de gradul întâi peste acel corp. În acest caz, cum f are n rădăcini în corpul de coeficienți K, se descompune în factori de gradul întâi în inelul K[X] sub forma $X^n-X=\prod_{i=1}^{n}(X-k_i)$.

10.42. Fie $\alpha\in\mathbb{Z}$ rădăcina comună. Avem relațiile: $\alpha^3+2\alpha^2+a\alpha+b=0$ şi $\alpha^3-\alpha^2+b\alpha+a=0$. Prin scădere obținem $3\alpha^2+(a-b)(\alpha-1)=0$.

Cum $\alpha=1$ nu verifică simultan ecuațiile date avem $\alpha\neq1$ şi deci $b-a=\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}=3(\alpha+1)+\frac{3}{\alpha-1}\in\mathbb{Z}$, deci $\alpha-1\in\{-1, 1, -3, 3\}$.

Dacă $\alpha-1=1\Rightarrow\alpha=2\Rightarrow\begin{cases}2a+b=-16\\2b+a=-4\end{cases}\Rightarrow a, b\notin\mathbb{Z}$;

Dacă $\alpha-1=-1\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow a=b=0$;

Dacă $\alpha-1=-3\Rightarrow\alpha=-2\Rightarrow\begin{cases}-2a+b=0\\-2b+a=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=-8\end{cases}$

Dacă $\alpha-1=3\Rightarrow\alpha=4\Rightarrow\begin{cases}4a+b=-96\\4b+a=-48\end{cases}\Rightarrow a, b\notin\mathbb{Z}$.

10.43. $P(1)=a_0+a_1+\ldots+a_n=$impar. Cum a_0, a_n sunt impare rezultă că $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=2k+1$ (impar), $k\in\mathbb{N}$.

Presupunem prin reducere la absurd că există $\frac{p}{q}$ o rădăcină rațională a lui P(X), $p, q\in\mathbb{Z}^*$. Cum $p|a_n$ şi $q|a_0$ rezultă că p şi q sunt impare.

$P\left(\frac{p}{q}\right)=0 \Leftrightarrow a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0$ şi deci

$$a_0p^n+a_nq^n+a_1(p^{n-1}q-1)+\ldots+a_{n-1}(pq^{n-1}-1)=-2k-1.$$

Însă $a_0p^n+a_nq^n$ este un număr par.

La fel, $p^{n-k}q^k-1$, oricare ar fi $k\in\{1, \ldots, n-1\}$ sunt numere pare, contradicție.

10.44. Fie $P\in\mathbb{Q}[X]$. Avem, în baza teoremei împărțirii cu rest,

$$P(X)=C(X)(X^3-2)+aX^2+bX+c,\ a, b, c\in\mathbb{Q}.$$

Cum $P(\sqrt[3]{2})=0$ avem $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0$. (1)

Înmulțind (1) cu $\sqrt[3]{2}$ obținem $b\sqrt[3]{4}+c\sqrt[3]{2}+2a=0$. (2)

Eliminând pe $\sqrt[3]{4}$ din (1) şi (2) avem $(b^2-ac)\sqrt[3]{2}=2a^2-bc$. (3)

Dacă $b^2-ac\neq 0$ atunci obținem contradicția $\sqrt[3]{2}=\frac{2a^2-bc}{b^2-ac}\in\mathbb{Q}$.

Dacă $b^2-ac=0$ atunci $2a^2-bc=0$.

Pentru $a=0$, (1) devine $b\sqrt[3]{2}+c=0$ şi deci $b=c=0$.

Pentru $a\neq 0$, avem $c=\frac{b^2}{a}$ şi $2a^2-\frac{b^3}{a}=0$. Rezultă că, $\sqrt[3]{2}=\frac{b}{a}$, contradicție cu faptul că $\sqrt[3]{2}\notin\mathbb{Q}$ şi $\frac{b}{a}\in\mathbb{Q}$. Deci $a=b=c=0$ şi deci $P(X)=C(X)(X^3-2)$.

10.45. Pentru $X\neq 1$ avem:

$$P(X)=\left(\frac{X^{n+1}-1}{X-1}\right)^2-X^n=\frac{X^{2n+2}-2X^{n+1}+1}{(X-1)^2}-X^n=\frac{X^{2n+2}+1-X^{n+2}-X^n}{(X-1)^2}=$$

$$=\frac{(X^n-1)(X^{n+2}-1)}{(X-1)^2}=(X^{n-1}+X^{n-2}+\ldots+X+1)(X^{n+1}+X^n+\ldots+X+1)$$

Identitatea este evident adevărată şi pentru $X=1$.

Deci P este reductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.46. Polinomul P se mai scrie:

$$P=\left[\left(X^n-X-2\right)+X\right]^n-X-2=(X^n-X-2)^n+C_n^1(X^n-X-2)^{n-1}X+\ldots+$$

$$+C_n^{n-1}(X^n-X-2)X^{n-1}+X^n-X-2=(X^n-X-2)Q$$

unde Q este un polinom cu coeficienți întregi.

10.47. Conform problemei **10.5.**, un polinom $f = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X + \hat{a}_2 X^2 + ... + \hat{a}_n X^n$ este inversabil în $\mathbb{Z}_{p^k}$[X] dacă şi numai dacă are coeficientul $\hat{a}_0$ inversabil în $\mathbb{Z}_{p^k}$, iar coeficienţii $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$,…, $\hat{a}_n$ nilpotenţi în $\mathbb{Z}_{p^k}$.

Însă în $\mathbb{Z}_{p^k}$ avem $\varphi(p^k)=(p-1)p^{k-1}$ elemente inversabile.

Orice element care nu este inversabil este de forma $\hat{b}$ cu b număr întreg divizibil prin p; El poate fi scris $\hat{b} = m \cdot p^r$, cu $0 \le m < p$ şi $0 \le r < k$.

Se observă că un asemenea element este nilpotent (căci $\hat{p}^k = \hat{0}$). Aşadar, în inelul $\mathbb{Z}_{p^k}$ orice element care nu este inversabil este nilpotent, iar numărul elementelor nilpotente din $\mathbb{Z}_{p^k}$ este deci $p^k-\varphi(p^k)=p^{k-1}$.

Pentru a obţine un polinom f inversabil, de grad$\le$n, putem alege pe $\hat{a}_0$ printre cele $(p-1)p^{k-1}$ elemente inversabile din $\mathbb{Z}_{p^k}$ iar pe $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$,…, $\hat{a}_n$ printre cele p^{k-1} elemente nilpotente din $\mathbb{Z}_{p^k}$.

În total avem $(p-1)p^{(k-1)(n+1)}$ posibilităţi de alegere.

De exemplu, în inelul $\mathbb{Z}_4$ avem ca elemente inversabile pe $\hat{1}$ şi pe $\hat{3}$, iar ca elemente nilpotente pe $\hat{0}$ şi pe $\hat{2}$.

Aşadar numărul polinoamelor inversabile de grad mai mic sau egal cu n din inelul $\mathbb{Z}_4$[X] este 2^{n+1}.

10.48. Egalitatea $(\hat{1}+\hat{2}X)(\hat{1}+\hat{2}X) = \hat{1}+\hat{4}X+\hat{4}X^2 = \hat{1}$, ne arată că polinomul $\hat{1}+\hat{2}X$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}_4$[X].

10.49. Cum grad P=3, dacă el nu ar fi ireductibil ar avea obligatoriu o rădăcină.

$a \in \mathbb{Z}_3$ deci $a \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$.

Pentru $a=\hat{0}$, $P = \hat{2}X^3 + \hat{2}X + \hat{1}$ şi $P(\hat{2}) = \hat{0}$ deci P este reductibil.

Pentru $a=\hat{1}$, $P = \hat{2}X^3 + \hat{1}$ şi $P(\hat{1}) = \hat{0}$ deci şi în acest caz P este reductibil.

Pentru a$=\hat{2}$, rezultă $P=\hat{2}X^3+X+\hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_3$[X] pentru că avem $P(\hat{0})=\hat{1},\ P(\hat{1})=\hat{1},\ P(\hat{2})=\hat{1}$.

10.50. Conform teoremei lui Fermat, $\hat{x}^{6}=\hat{1}$, pentru orice $\hat{x}\in\mathbb{Z}^{*}_{7}$.

Dacă $\hat{a}\neq\hat{0}$ atunci există $\hat{a}^{-1}$ inversul său ($\mathbb{Z}_7$ fiind corp).

$P(\hat{a}^{-1})=(\hat{a}^{-1})^6+\hat{a}\cdot\hat{a}^{-1}+\hat{5}=\hat{1}+\hat{1}+\hat{5}=\hat{0}$. Deci $\hat{a}^{-1}$ este rădăcină a lui P, pentru $\hat{a}\neq\hat{0}$, deci P este în acest caz reductibil.

Dacă $\hat{a}=\hat{0}$ atunci $P=X^6+\hat{5}=(X^3+\hat{4})(X^3+\hat{3})$ este reductibil.

10.51. 1) P_1 este ireductibil în $\mathbb{Z}_2$[X], pentru că fiind de gradul 3 ar trebui să aibă cel puțin o rădăcină pentru a fi reductibil, dar $P_1(\hat{0})=\hat{1},\ P_1(\hat{1})=\hat{1}$.

2) $P_2(\hat{0})=\hat{1},\ P_2(\hat{1})=\hat{1}$, deci P_2 nu are rădăcini. Dacă P_2 ar fi reductibil în $\mathbb{Z}_2$[X] el s-ar descompune în produs de două polinoame de gradul doi $P_2=(X^2+\hat{a}X+\hat{b})(X^2+\hat{c}X+\hat{d})$, cu $\hat{a},\ \hat{b},\ \hat{c},\ \hat{d}\in\mathbb{Z}_2$.

Identificând coeficienții obținem:

$$\begin{cases} a+c=\hat{1} \\ d+b+ac=\hat{0} \\ ad+bc=\hat{0} \\ bd=\hat{1} \end{cases}$$

Din ultima relație rezultă $b=d=\hat{1}$ şi înlocuind avem $\begin{cases} a+c=\hat{1} \\ ac=\hat{0} \\ a+c=\hat{0} \end{cases}$,

imposibil deci P_2 este ireductibil în $\mathbb{Z}_2$[X].

3) $P_3=X^5+\hat{1}=(X+\hat{1})(X^4+\hat{2}X^3+X^2+\hat{2}X+\hat{1})$. Analog cu 2) se probează că $X^4+\hat{2}X^3+X^2+\hat{2}X+\hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_3$[X].

4) $P_4=X^4-\hat{1}=(X+\hat{1})(X-\hat{1})(X^2+\hat{1})$.

10.52. Să presupunem prin reducere la absurd că f este reductibil în $\mathbb{Z}$[X], adică putem scrie f=(b_0+b_1X+…+b_mX^m)(c_0+c_1X+…+c_kX^k) cu m, k≥1 şi m+k=n. Identificând coeficienții lui f deducem că:

$$(*)\qquad \begin{cases} a_0 = b_0c_0 \\ a_1 = b_0c_1 + b_1c_0 \\ a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} = b_{m-1}c_k + b_mc_{k-1} \\ a_n = b_mc_k \end{cases}$$

Cum $p|a_0$ iar $p^2 \nmid a_0$ deducem că $p|b_0$ şi $p \nmid c_0$ sau $p|c_0$ şi $p \nmid b_0$.

Să presupunem de exemplu că $p|b_0$ şi $p \nmid c_0$.

Dacă ținem cont de relațiile $(*)$ deducem din aproape în aproape că $p|b_1$, $p|b_2$, …, $p|b_m$ şi din ultima relație din $(*)$ am deducem că $p|a_n$, absurd.

Analog dacă $p|c_0$ şi $p \nmid b_0$ am deduce că $p|c_1$, $p|c_2$, …, $p|c_k$ şi din ultima relație din $(*)$ am deducem că $p|a_n$, absurd.

10.53. Sub această formă nu putem aplica criteriul lui Eisenstein dar se vede imediat că f este ireductibil dacă polinomul g(X)=f(X+1) este ireductibil. Cum $f(X) = \dfrac{X^p - 1}{X - 1}$ obținem că:

$$g(X) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = X^{p-1} + C_p^1 X^{p-2} + C_p^2 X^{p-3} + \ldots + C_p^{p-1} =$$
$$= X^{p-1} + C_p^1 X^{p-2} + C_p^2 X^{p-3} + \ldots + C_p^{p-2} X + p.$$

Deoarece p este prim avem că $p \mid C_p^k$, oricare ar fi $1 \le k \le p-1$ şi deci conform criteriului lui Eisenstein, g este un polinom ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.54. Se aplică problema **10.53.** pentru numărul prim p=53.

10.55. Se aplică criteriul lui Eisenstein pentru numărul prim p=3 sau p=5.

10.56. Se aplică criteriul lui Eisenstein pentru numărul prim p.

10.57. Sub această formă nu putem aplica criteriul lui Eisenstein.

Vom arăta în schimb că polinomul $g=f(X+1)=(X+1)^{2^n}+1$ este ireductibil.

Într-adevăr, avem $g = X^{2^n} + \sum_{1 \le k \le 2^n - 1} C_{2^n}^k X^k + 2$.

Vom dovedi că $2 \mid C_{2^n}^k$, oricare ar fi $1 \le k \le 2^n-1$.

Avem că $C_{2^n}^k = \frac{2^n(2^n-1)(2^n-2)...(2^n-k+1)}{k!}$.

Fie $1 \le k' < k$; putem scrie atunci $k' = 2^p r$, unde $p < n$ şi r este un număr impar. Deoarece $\frac{2^n-k'}{k'} = \frac{2^p(2^{n-p}-r)}{2^p r} = \frac{2^{n-p}-r}{r}$, atunci $\frac{2^n-k'}{k'}$ este egal cu câtul a două numere impare. Deci expresia $\frac{(2^n-1)(2^n-2)...(2^n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (k-1)}$ este câtul a două numere impare. Cum $k < 2^n$, atunci în câtul $\frac{2^n}{k}$ apare cel puțin un factor egal cu 2. Deci $2 \mid C_{2^n}^k$.

Luând numărul prim $p=2$ şi aplicând criteriului lui Eisenstein obținem că polinomul g(X) este ireductibil. Aceasta arată că $f = X^{2^n}+1$ este un polinom ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

10.58. Vom proceda ca la problema **10.57.**. Pentru a arăta că f este ireductibil este suficient să dovedim că $g = f(X+1)$ este ireductibil.

Într-adevăr, avem

$$g(X) = (X+1)^{p^n} + p - 1 = X^{p^n} + \sum_{1 \le k \le p^n-1} C_{p^n}^k X^k + 1 + p - 1 =$$

$$= X^{p^n} + \sum_{1 \le k \le p^n-1} C_{p^n}^k X^k + p .$$

Vom dovedi că $p \mid C_{p^n}^k$, oricare ar fi $1 \le k \le p^n-1$.

Avem că $C_{p^n}^k = \frac{p^n(p^n-1)(p^n-2)...(p^n-k+1)}{k!}$.

Fie $1 \le k' < k$; putem scrie atunci $k' = p^t r$, unde $t < n$ şi $(p,r)=1$.

Deoarece $\frac{p^n-k'}{k'} = \frac{p^t(p^{n-t}-r)}{p^t r} = \frac{p^{n-t}-r}{r}$ se observă că din condiția că $(p,r)=1$ rezultă că în fracția $\frac{p^n-k'}{k'}$ după simplificare, numărătorul şi numitorul nu se mai divid cu p. Deci fracția $\frac{(p^n-1)(p^n-2)...(p^n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (k-1)}$, după simplificare este câtul a două numere naturale în care atât numitorul cât şi numărătorul nu se mai divid cu p. Cum $k < p^n$, atunci putem scrie $k = p^s k_1$, unde

s<n şi (p, k_1)=1. Deci $\frac{p^n}{k}=\frac{p^{n-s}}{k_1}$. Deci numărul întreg $C_{p^n}^k$ este câtul a două numere naturale în care numărătorul se divide cu p (de fapt cu p^{n-s}) şi numitorul nu se divide cu p. Deci $p| C_{p^n}^k$.

Aplicând criteriului lui Eisenstein pentru numărul prim p obţinem că polinomul g este ireductibil. Aceasta arată că f= $X^{p^n}+p-1$ este un polinom ireductibil în $\mathbb{Z}$[X].

10.59. Fie $u_i=q_im+r_i$, $0\le r_i<m$. Observăm că $X^m-1=(X-1)P(X)$.

Apoi, $X^{u_i}=X^{q_im+r_i}=X^{r_i}(X^{q_im}-1)+X^{r_i}$. Cum $X^m=(X-1)P(X)+1$, obţinem că $X^{q_im}=A_i(X)P(X)+1$, unde $A_i(X)$ este un polinom în nedeterminata X.

Deci $Q(X)=G(X)\cdot P(X)+(X^{r_1}+X^{r_2}+...+X^{r_n})$.

Aşadar $P|Q \Leftrightarrow P|\underbrace{X^{r_1}+X^{r_2}+...+X^{r_n}}_{not}=H$.

Dar cum $H=n_0+n_1X+\ldots+n_{m-1}X^{m-1}$ are gradul mai mic sau egal cu gradul lui P, rezultă că P|H dacă şi numai dacă există $\alpha\in\mathbb{R}$ a.î. $H=\alpha P$. De aici rezultă că $n_0=n_1=\ldots=n_{m-1}$.

10.60. Demonstrăm prin inducţie după n următoarea **Propoziţie:** Oricare ar fi $x_1, x_2, \ldots, x_n\in[0, 1]$, oricare ar fi k, $1\le k\le n$, are loc inegalitatea:

$$(-1)^k[P_n(1)-1+S_1-S_2+\ldots+(-1)^kS_{k-1}]\ge 0; \quad (1)$$

unde $P_n(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ şi $S_l(x_1, \ldots, x_n)=\sum x_1x_2\ldots x_l=a_l$.

Pentru n=1 inegalitatea este evidentă (aici k=1). Presupunem că

$$(-1)^k[P_n(1)-1+S_1-S_2+\ldots+(-1)^kS_{k-1}]\ge 0 \quad (*)$$

şi să demonstrăm că:

$(-1)^k[P_{n+1}(1)-1+S_1(x_1, \ldots, x_{n+1})-S_2(x_1, \ldots, x_{n+1})+\ldots+(-1)^kS_{k-1}(x_1, \ldots, x_{n+1})]\ge 0$, oricare ar fi $k\le n+1$. Înmulţind (*) cu $1-x_{n+1}\ge 0$ rezultă:

$$(-1)^k[P_n(1)(1-x_{n+1})-(1-x_{n+1})+a_1(1-x_{n+1})-a_2(1-x_{n+1})+\ldots+(-1)^ka_{n-1}(1-x_{n+1})]\ge 0$$

$(-1)^k[P_{n+1}(1)-1+(a_1+x_{n+1})-(a_2+a_1x_{n+1})+\ldots+(-1)^k(a_{k-1}+a_{k-2}x_{n+1})-(-1)^ka_{k-1}x_{n+1}]\ge 0$, de unde rezultă că:

$$(-1)^k[P_{n+1}(1)-1+S_1(x_1, \ldots, x_{n+1})-S_2(x_1, \ldots, x_{n+1})+\ldots+(-1)^{k+1}S_{k-1}(x_1, \ldots, x_{n+1})]\ge a_{k-1}x_{n+1},$$

oricare ar fi $k\le n$. Pentru k=n+1 relaţia este imediată din enunţ (s-a folosit relaţia $S_k(x_1, \ldots, x_n)=S_k(x_1, \ldots, x_{n-1})+x_nS_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$).

10.61. În rezolvare vom folosi faptul că:

$$(1)\ D_n(z)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ za_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ za_{n-1} & za_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ za_2 & za_3 & za_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2 z_k + a_3 z_k^2 + \dots + a_n z_k^{n-1})$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n, z\in\mathbb{C}$, iar z_k ($k\in\{0, \dots, n-1\}$) sunt rădăcinile de ordinul n ale numărului z. Intr-adevăr, să notăm cu V_n determinantul Vandermonde de ordinul n asociat numerelor z_k ($k\in\{0, \dots, n-1\}$). Avem:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & \dots & z_{n-1} \\ z_0^2 & z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^{n-1} & z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \overset{not}{=} \left|v_{ij}\right|_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Calculând în continuare $D_n(z)\cdot V_n$ vom deduce formula (1).

Fie $P_n=D_n(z)\cdot V_n \overset{not}{=} \left|p_{ij}\right|_{i,j=\overline{1,n}}$ Avem:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} v_{kj}$$

$$= za_{n-i+2} + za_{n-i+3} z_{j-1} + za_{n-i+4} z_{j-1}^2 + \dots + za_n z_{j-1}^{i-2} + a_1 z_{j-1}^{i-1} + a_2 z_{j-1}^{i} + \dots + a_{n-i+1} z_{j-1}^{n-1}$$

$$= a_{n-i+2} z_{j-1}^{n} + a_{n-i+3} z_{j-1}^{n+1} + a_{n-i+4} z_{j-1}^{n+2} + \dots + a_n z_{j-1}^{n+i-2} + a_1 z_{j-1}^{i-1} + a_2 z_{j-1}^{i} + \dots + a_{n-i+1} z_{j-1}^{n-1}$$

$$= z_{j-1}^{i-1}(a_{n-i+2} z_{j-1}^{n-i+1} + a_{n-i+3} z_{j-1}^{n-i+2} + a_{n-i+4} z_{j-1}^{n-i+3} + \dots +$$
$$+ a_n z_{j-1}^{n-1} + a_1 + a_2 z_{j-1} + \dots + a_{n-i+1} z_{j-1}^{n-1})$$
$$= z_{j-1}^{i-1}(a_1 + a_2 z_{j-1} + a_3 z_{j-1}^2 + \dots + a_{n-i+1} z_{j-1}^{n-1} + \dots + a_n z_{j-1}^{n-1})$$
$$= v_{ij}(a_1 + a_2 z_{j-1} + a_3 z_{j-1}^2 + \dots + a_n z_{j-1}^{n-1})$$

Deci elementele coloanei j din P_n se obțin prin înmulțirea elementelor coloanei j din V_n cu factorul $a_1 + a_2 z_{j-1} + a_3 z_{j-1}^2 + \dots + a_n z_{j-1}^{n-1}$. Deducem astfel că:

$$D_n(z)\cdot V_n = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2 z_k + a_3 z_k^2 + \dots + a_n z_k^{n-1})\cdot V_n$$

Cum $V_n\neq 0$, rezultă că: $D_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2 z_k + a_3 z_k^2 + \dots + a_n z_k^{n-1})$.

Caz particular z=1. Avem:

$D_n(1)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & ... & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & ... & a_{n-2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_2 & a_3 & a_4 & ... & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2\varepsilon_k + a_3\varepsilon_k^2 + ... + a_n\varepsilon_k^{n-1})$,

$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$. Conform celor stabilite anterior, cu notația $P(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+ \ldots+a_nx^{n-1}$ vom obține că ecuațiile $x^n-1=0$ şi $P(x)=0$ au cel puțin o rădăcină comună dacă şi numai dacă $P(\varepsilon_1)\cdot ... \cdot P(\varepsilon_n) = 0 \Leftrightarrow D_n(1)=0$.

10.62. Fie $s_i = \sum x_1x_2...x_i$, i=1, 2, …, n. Atunci, elementele x_i, i=1, 2, …, n sunt soluții ale ecuației:

$$P(X) = X^n - s_1X^{n-1} + s_2X^{n-2} - ... + (-1)^n s_n = 0 .$$

Cum implicația de la stânga la dreapta este banală, să presupunem că numerele s_1, s_2, …, s_n sunt pozitive şi să demonstrăm că x_1, x_2, …, $x_n \geq 0$. Dacă, prin absurd există $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$ a.î. $x_i<0$, atunci (dacă de exemplu, n este impar) deducem că $P(x_i)<0 \Leftrightarrow 0<0$, absurd. Dacă n este par, obținem contradicția $P(x_i)>0 \Leftrightarrow 0>0$.

10.63. Să considerăm $q(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})$.

Observăm că $q'(x_k)=(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n+1})$, k=1, 2,…, n+1. Atunci relația din enunț devine:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{P(x_k)}{q'(x_k)} = \begin{cases} 0, & daca\ grad(P) \leq n-1 \\ a_0, & daca\ grad(P) = n \end{cases} .$$

Pentru aceasta, scriem polinomul de interpolare Lagrange pentru polinomul x^s, cu $0\leq s\leq n$ şi avem:

$$x^s = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_{n+1})}{q'(x_i)}\cdot x_i^s \ . \ (1)$$

Dacă $s\leq n-1$, identificând coeficientul lui x^n în (1), obținem: $\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i^n}{q'(x_i)} = 0$ $(0\leq s\leq n-1)$.

Dacă s=n, procedând la fel deducem că: $\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i^n}{q'(x_i)} = 1$.

Fie $P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$, cu $m\leq n$. Având în vedere cele de mai sus putem scrie:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{P(x_i)}{q'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{q'(x_i)}\cdot\sum_{k=0}^{m}a_k x_i^{m-k}=\sum_{k=0}^{m}a_k\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i^{m-k}}{q'(x_i)}\right)=\begin{cases}0, & daca\ \ m\le n-1\\ a_0, & daca\ \ m=n\end{cases}.$$

10.64. Să presupunem că există n+1 numere distincte $x_1, \ldots, x_{n+1}\in\{0, 1,\ldots, p-1\}$ a. î. $P(x_i)$ se divide la p pentru orice i=1, 2, …, n+1. Folosind formula din enunțul problemei **10.63.** şi aducând la acelaşi numitor obținem o relație de forma: $A_1P_1(x_1)+\ldots+A_{n+1}P(x_{n+1})=a_0\cdot\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}(x_i-x_j)$, cu $A_1, \ldots, A_{n+1}$ numere întregi.

Cum $P(x_1), \ldots, P(x_{n+1})$ sunt divizibile prin p, rezultă că membrul drept al egalității anterioare este divizibil prin p. Dar $0<|x_i-x_j|<p$, pentru orice $i, j\in\{1, 2, \ldots, n+1\}$ şi, cum p este prim, avem că $p\nmid|x_i-x_j|$ şi atunci, a_0 se divide la p, absurd.

10.65. Rezultă imediat din problema **10.64.**, considerând $P(x)=f^{(r)}(x)$, iar $q(x)=f(x)$.

10.66. Deoarece $s_1=s_2=\ldots=s_6=0$ şi $s_7=1$, conform formulelor lui Newton vom avea $S_1=S_2=\ldots=S_6=0$ şi cum din ecuația dată avem:

$x_k^{7+\alpha}-x_k^{\alpha}=0$, k=1, …, 7, $\alpha\in\mathbb{N}$, deducem că $S_7=7$.

De asemenea, rezultă că $S_i=\begin{cases}0, & pentru\ \ i\neq 7m\\ 7, & pentru\ \ i=7m\end{cases}$, $m\in\mathbb{N}$.

În acest caz, $S_7=S_{14}=7$ şi $S_i=0$ pentru $i\in\{1, \ldots, 20\}\setminus\{7, 14\}$.

Atunci pentru suma cerută avem:

$$S=\sum(x_1+x_2)^{20}=\sum\left(\sum_{i=0}^{20}C_{20}^i x_1^{20-i}x_2^i\right)=\sum_{i=0}^{20}C_{20}^i\left(\sum x_1^{20-i}x_2^i\right)=\sum_{i=0}^{20}C_{20}^i\left(S_{20-i}S_i-S_{20}\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{20}C_{20}^i S_{20-i}S_i=C_{20}^7S_{13}S_7+C_{20}^{14}S_6S_{14}=0.$$

Observație. Am notat $s_1=x_1+\ldots+x_n, \ldots, s_n=x_1\cdot\ldots\cdot x_n$ şi $S_k=x_1^k+\ldots+x_n^k$, $k\in\mathbb{N}$.

10.67.

(i). $S_p\cdot S_q=(x_1^p+\ldots+x_n^p)(x_1^q+\ldots+x_n^q)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{p+q}+\sum_{i\neq j}x_i^p x_j^q=S_{p+q}+\sum_{i\neq j}x_i^p x_j^q$

$\Rightarrow \sum_{i\neq j} x_i^p x_j^q = S_p \cdot S_q - S_{p+q}$.

Suma din membrul stâng reprezintă un polinom în nedeterminatele $x_1,\ldots,x_n$ simetric şi omogen de gradul p+q.

(ii). În particular, dacă în (i) punem p=q obţinem $\sum_{i\neq j} x_i^p x_j^p = \frac{1}{2}\cdot[(S_p)^2 - S_{2p}]$, i, j∈{1, …, n}.

(iii).

$$S_p \cdot S_q \cdot S_r = (x_1^p + \ldots + x_n^p)(x_1^q + \ldots + x_n^q)(x_1^r + \ldots + x_n^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{p+q+r} + \sum_{i\neq j} x_i^{p+q} x_j^r +$$

$$+ \sum_{i\neq j} x_i^{p+r} x_j^q + \sum_{i\neq j} x_i^{q+r} x_j^p + \sum_{i\neq j\neq k} x_i^p x_j^q x_k^r = S_{p+q+r} + S_{p+q}S_r - S_{p+q+r} + S_{p+r}S_q -$$

$$-S_{p+q+r} + S_{q+r}S_p - S_{p+q+r} + \sum_{i\neq j\neq k} x_i^p x_j^q x_k^r$$

$$\Rightarrow \sum_{i\neq j\neq k} x_i^p x_j^q x_k^r = S_p \cdot S_q \cdot S_r - S_{p+q} \cdot S_r - S_{p+r} \cdot S_q - S_{r+q} \cdot S_p + 2S_{p+q+r},$$

i, j, k∈{1, …, n}.

În particular, pentru p=q=r avem:

$$\sum_{i\neq j\neq k} x_i^p x_j^p x_k^p = \frac{1}{6}[(S_p)^3 - 3S_{2p} \cdot S_p + 2S_{3p}],\ i, j, k\in\{1, \ldots, n\}.$$

10.68. Conform formulelor demonstrate la problema **10.67.** avem $\sum_{i\neq j} x_i^3 x_j^2 = S_3 \cdot S_2 - S_5$ şi cum în acest caz $s_1=x_1+x_2+x_3=0$, $s_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3$, $s_3=x_1x_2x_3=5$, obţinem $S_2=-6$, $S_3=15$, $S_5=-75$, ($S_2=s_1^2-2s_2=-6$, $S_3=-3S_1+15=-3s_1+15=15$, $S_5=-3S_3+5S_2=-75$).

Atunci $\sum_{i\neq j} x_i^3 x_j^2 = -90+75=-15$.

10.69. Notez $s_1=x_1+x_2+x_3$, $s_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $s_3=x_1x_2x_3$ şi considerând $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ avem:

$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s_1^2 - 2s_2 = 4-2s_2$,

$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = s_1S_2 - s_2S_1 + 3s_3 = 8-6s_2+3s_3$,

$S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = s_1S_3 - s_2S_2 + s_3S_1 = 16 - 12s_2 + 6s_3 - 4s_2 + 2s_2^2 + 2s_3 = 2s_2^2 -$

$-16s_2 + 8s_3 + 16$, şi cum $S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 8$, rezultă că $2s_2^2 - 16s_2 + 8s_3 + 16 = 8$ deci $s_2^2 - 8s_2 + 4s_3 + 4 = 0$.

De asemenea, $S_5 = s_1S_4 - s_2S_3 + s_3S_2 = 16 - 8s_2 - 3s_2s_3 + 4s_3 + 6s_2^2 - 2s_2s_3 =$

$= 6s_2^2 - 5s_2s_3 - 8s_2 + 4s_3 + 16$ şi cum $S_5 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 32$ rezultă că $6s_2^2 - 5s_2s_3 - 8s_2 + 4s_3 + 16 = 32$, deci $6s_2^2 - 5s_2s_3 - 8s_2 + 4s_3 - 16 = 0$.

Trebuie rezolvat sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 6s_2^2 - 5s_2s_3 - 8s_2 + 4s_3 - 16 = 0 \\ s_2^2 - 8s_2 + 4s_3 + 4 = 0 \end{cases}$$

echivalent, după eliminarea lui s_2^2, cu sistemul:

$$\begin{cases} s_2^2 - 8s_2 + 4s_3 + 4 = 0 \\ 8s_2 - 4s_3 - s_2s_3 - 8 = 0 \end{cases}$$

din care, eliminând pe s_3, avem: $s_2^3 - 4s_2^2 + 4s_2 - 16 = 0$, care se mai scrie $(s_2 - 4)(s_2^2 + 4) = 0$ şi vom avea două cazuri:

1) $s_2 - 4 = 0$. Atunci $s_2 = 4$, $s_3 = 3$ şi prin urmare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4 \\ x_1x_2x_3 = 3 \end{cases}$$

sistem a cărui rezolvare revine la rezolvarea ecuației de gradul trei $t^3 - 2t^2 + 4t - 3 = 0$ ale cărei rădăcini sunt $t_1 = 1$, $t_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$.

Deci o soluție a sistemului va fi $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1 + i\sqrt{11}}{2}$, $x_3 = \frac{1 - i\sqrt{11}}{2}$ şi cum el este simetric în x_1, x_2, x_3 obținem alte cinci soluții ale sale prin permutările acestei soluții.

2) Dacă $s_2^2 + 4 = 0 \Rightarrow s_2 = \pm 2i$.

Dacă $s_2 = 2i$ atunci $s_3 = 4i$ şi deci $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2i \\ x_1x_2x_3 = 4i \end{cases}$

Obținem ecuația $t^3 - 2t^2 + 2it - 4i = 0$, adică $(t - 2)(t^2 + 2i) = 0$.

Avem soluțiile $x_1 = 2$, $x_2 = \sqrt{-2i}$, $x_3 = -\sqrt{-2i}$ şi permutările acestora.

Dacă $s_2 = -2i$ atunci $s_3 = -4i$ adică $(t - 2)(t^2 - 2i) = 0$ şi vom avea soluțiile $x_1 = 2$, $x_2 = \sqrt{2i}$, $x_3 = -\sqrt{2i}$ şi permutările acestora.

10.70. Demonstrăm că P este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

Presupunem prin absurd că $P=P_1\cdot P_2$, cu P_1, $P_2\in\mathbb{Z}[X]$, neconstante. Deoarece $P(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, rezultă că P_1 şi P_2 nu au rădăcini reale şi deci păstrează semn constant pe $\mathbb{R}$; Să zicem P_1, $P_2>0$ (analog, se va raționa dacă P_1, $P_2<0$).

Vom demonstra că grad P_1 = grad P_2 = n.

Să presupunem de exemplu că grad P_1<grad P_2 şi deci grad P_1<n iar grad P_2 >n.

Făcând $x= a_1, \ldots, a_n$ avem:

$P_1(a_1)\cdot P_2(a_1)=1$

……

$P_1(a_n)\cdot P_2(a_n)=1$.

Deoarece $P_1(x)>0$ şi $P_2(x)>0$ rezultă

$P_1(a_1)=P_2(a_1)=1$

……..

$P_1(a_n)\cdot P_2(a_n)=1$. (1)

Polinomul $P_1(X)$-1 de grad mai mic decât n are n rădăcini $a_1, \ldots, a_n$ deci este polinomul identic nul. Deci $P_1(x)=1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, absurd!.

Deci grad P_1=grad P_2=n şi din relațiile (1) deducem că $P_1(X)-1=$ $=\alpha(X-a_1)\ldots(X-a_n)$ şi $P_2(X)-1=\beta(X-a_1)\ldots(X-a_n)$, cu $\alpha, \beta\in\mathbb{Z}$. Din $P=P_1P_2$ deducem că

$$P=\alpha\beta(X-a_1)^2\ldots(X-a_n)^2+(\alpha+\beta)(X-a_1)\ldots(X-a_n)+1,$$

de unde $\alpha\beta=1$ şi $\alpha+\beta=0$, adică $-\alpha^2=1$, absurd!.

Demonstrăm că Q este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

Se observă că $Q(a_i)=-1$, oricare ar fi i cu $1\le i\le n$.

Presupunem prin reducere la absurd că $Q=Q_1\cdot Q_2$, cu Q_1, $Q_2\in\mathbb{Z}[X]$ neconstante şi grad(Q_1), grad(Q_2)<n=grad(Q).

Cum $Q(a_i)=-1$ rezultă că $Q_1(a_i)Q_2(a_i)=-1$ deci $Q_1(a_i)=1$ şi $Q_2(a_i)=-1$ sau $Q_1(a_i)=-1$ şi $Q_2(a_i)=1$ pentru un $i\in\{1, \ldots, n\}$.

În ambele cazuri $Q_1(a_i)+Q_2(a_i)=0$, oricare ar fi i cu $1\le i\le n$ şi grad(Q_1+Q_2)<n. Cum polinomul Q_1+Q_2 are gradul mai mic decât n şi n rădăcini obținem că $Q_1+Q_2=0$. Deci $Q_1=-Q_2$.

Putem scrie $-Q_1^2(X)=(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_n)-1$.

Identificând coeficienții lui X^n din cei doi membrii obținem $1=-1$, contradicție, deci Q este ireductibil.

10.71. Este clar că (0) şi (X^n), $n\in\mathbb{N}$, sunt ideale ale lui K[[X]]. Se arată acestea sunt singurele ideale ale sale. Dacă $I\neq(0)$ este un ideal, atunci fie $ord(I)=\min\{ord(f)|f\in I\}$. Se demonstrează că $I=(X^{(ord(I))})$.

10.72. Termenul principal al polinomului f este $X_1^4X_2^2$.

Atunci exponenţii termenilor principali ai polinoamelor care vor rămâne după eliminarea succesivă a termenilor principali vor fi (4,2,0), (4,1,1), (3,3,0), (3,2,1) şi (2,2,2).

Deci $f=S_1^2S_2^2+aS_1^3S_3+bS_2^3+cS_1S_2S_3+dS_3^2$, unde a, b, c, d sunt numere reale. Determinăm aceşti coeficienţi dând valori numerice nedeterminatelor X_1, X_2, X_3.

X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	f
1	1	0	2	1	0	0
2	−1	−1	0	−3	2	0
1	−2	−2	−3	0	4	0
1	−1	−1	−1	−1	1	0

Obţinem astfel sistemul de ecuaţii: $\begin{cases}4+b=0\\-27b+4d=0\\-108a+16d=0\\1-a-b+c+d=0\end{cases}$ de unde $\begin{cases}a=-4\\b=-4\\c=18\\d=-27\end{cases}$.

Prin urmare,

$f=(X_1-X_2)^2(X_1-X_3)^2(X_2-X_3)^2=S_1^2S_2^2-4S_1^3S_3-4S_2^3+18S_1S_2S_3-27S_3^2$.

10.73. Notând $X_1+X_2+\ldots+X_n=S_1$, $X_1X_2+\ldots+X_{n-1}X_n=S_2$, …, $X_1X_2\ldots X_n=S_n$, avem

$$f=(S_1-2X_1)\ldots(S_1-2X_n)=S_1^n-2(X_1+\ldots+X_n)S_1^n-\ldots+(-2)^nS_n=$$
$$=-S_1^n+4S_1^{n-2}S_2-8S_1^{n-3}S_3+\ldots+(-2)^nS_n.$$

La acelaşi rezultat se ajunge şi folosind procedeul descris în teorema fundamentală a polinoamelor simetrice.

10.74. Avem $Z^2=Y^2X^2-(XY-Z)(YX+Z)\in(X^2, XY-Z)$ şi deci $Z^2K[X,Y]\subseteq(X^2, XY-Z)\cap K[X,Y]$.

Reciproc, dacă P este un polinom din K[Y,Z] de forma $X^2g+(XY-Z)(t_0+t_1X+t_2X^2)$ cu g, $t_2\in K[X,Y,Z]$ şi t_0, $t_1\in K[Y,Z]$ atunci avem $P=X^2(g+(XY-Z)t_2+t_1Y)+X(t_0Y-t_1Z)-t_0Z$, de unde rezultă $g+(XY-Z)t_2+t_1Y=0$ şi $t_0Y-t_1Z=0$.

Deci $Z|t_0$ şi deducem că $P=-t_0Z\in Z^2K[Y,Z]$.

În concluzie, dacă g este compunerea morfismelor de inele $K[Y,Z]\to K[X,Y,Z]$ (incluziunea canonică) şi $K[X,Y,Z]\to K[X,Y,Z]/(X^2, XY-Z)$ (surjecția canonică) atunci avem $Ker(g)=Z^2K[Y,Z]$.

Deci g induce o injecție $K[Y,Z]/(Z^2)\to K[X,Y,Z]/(X^2,XY-Z)$ care aplică $K[Y,Z]/(Z^2)$ izomorf pe Im(g).

10.75. Morfismul de inele $f:K[X]\to K$, $f(a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n)=a_0$ este surjectiv şi $Ker(f)=(X)$. Atunci $K\simeq K[X]/(X)$ şi K[X]/(X) fiind inel, (X) este ideal maximal.

10.76. Aplicăm teorema fundamentală de izomorfism pentru inele morfismului de inele $\varphi:A[X_1, \ldots, X_n]\to A$, dat prin $\varphi(P)=P(a_1, \ldots, a_n)$.

10.77. Fie $f:\mathbb{Z}[X]\to\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ morfismul de $\mathbb{Z}-$algebre dat prin $f(X)=\sqrt{d}$. Evident, $Ker(f)\supseteq(X^2-d)$. Fie $P\in\mathbb{Z}[X]$ a.î. $f(P)=P(\sqrt{d}\,)=0$ şi $R(X)=aX+b\in\mathbb{Z}[X]$ restul împărțirii lui P(X) la X^2-d. Obținem $R(\sqrt{d}\,)=0$ şi rezultă $R\equiv 0$, adică $Ker(f)=(X^2-d)$. Aplicăm în continuare prima teoremă de izomorfism.

10.78. Aplicăm problema **8.39.**, pentru cazul $x=clsX$ mod $(X^2+X+\hat{2}\,)$.

Fie surjecția canonică $f_2:\mathbb{Z}_8[X]/(X^2+X+\hat{2}\,)\to\mathbb{Z}_4[X]/(X^2+X+\overline{2}\,)$, unde „-” notează clasele modulo 4.

Conform problemei **8.39.**, clasa modulo $(X^2+X+\overline{2}\,)$ a elementului

$X+(X^2-X)(\overline{1}+\overline{2}X-\overline{12}X^2+\overline{8}X^3)=-X-\overline{2}$ (egalitatea se obține înlocuind X^2 cu $-X-\overline{2}\,$) constituie un element idempotent al inelului $\mathbb{Z}_4[X]/(X^2+X+\overline{2}\,)$.

La fel, clasa modulo $(X^2+X+\overline{2}\,)$ a elementului

$$(-X-\hat{2})+[(-X-\hat{2})^2-(-X-\hat{2})][\hat{1}+\hat{2}(-X-\hat{2})-\hat{12}(-X-\hat{2})^2]=$$
$$=(-X-\hat{2})+(\hat{4}X+\hat{4})(\hat{2}X-\hat{3})=\hat{3}X+\hat{2}$$

este un element idempotent diferit de 0 şi 1 în inelul $\mathbb{Z}_8[X]/(X^2+X+\hat{2})$.

10.79. (i). Într-adevăr, dacă f(a) este inversabil atunci există $a' \in A$ a.î. $aa'=1+n$, unde $n \in A$ este un nilpotent. Dar 1+n este inversabil (suma dintre un element inversabil şi unul nilpotent este element inversabil) deci şi a este inversabil.

Reciproc este evident, pentru că morfismele de inele unitare transportă elementele inversabile în elemente inversabile.

(ii). Suficienţa nu este adevărată.

De exemplu, pentru $A=\mathbb{Q}[X,Y]/(X^2,XY)$, $A'=\mathbb{Q}[Y]$ şi f definit prin $f(P(\hat{X},Y))=P(0,Y)$, observăm că $\hat{Y}$ este divizor al lui zero în A dar $f(\hat{Y})$ nu este divizor al lui zero.

În plus, Ker(f)=(X) este format din elemente nilpotente.

Nici necesitatea nu este adevărată.

De exemplu, pentru $B=\mathbb{Q}[X,Y,Z]/(X^2,XY-Z)$ şi $g:B\to A$, definit prin $g(\text{cls } P(X,Y,Z))=P(X,Y,0)$ observăm că $g(\text{cls } Y)=\hat{Y}$ este divizor al lui zero dar nu şi clsY.

Într-adevăr, dacă $(\text{clsY})\cdot(\text{cls}(a_1X+G(Y)Z+H(Y)))=0$, $a_1 \in \mathbb{Q}$ şi $G(Y), H(Y) \in \mathbb{Q}[Y]$ atunci rezultă $\text{cls}(-a_1Z+G(Y)YZ+YH(Y))=0$, adică $-a_1Z+G(Y)YZ+YH(Y) \in (X^2,XY-Z) \cap \mathbb{Q}[Y,Z]=(Z^2)$ (vezi problema **10.74.**), ceea ce implică $a_1=G(Y)=H(Y)=0$.

Deci clsY nu este divizor al lui zero (am utilizat faptul că elementele lui B pot fi scrise sub forma $\text{cls}(a_1X+G(Y)Z+H(Y))$, deoarece $XZ \in (X^2,XY-Z)$ iar XY aparţine lui clsZ).

În plus, Ker(g)=(clsZ), iar clsZ este nilpotent pentru că $Z^2 \in (X^2,XY-Z)$.

(iii). Suficienţa este evidentă.

Necesitatea nu este în general valabilă.

De exemplu, considerăm cazul $A=\mathbb{Z}_4[X]/(X^2+X-\hat{2})$, $A'=\mathbb{Z}_2[X]/(X^2-X)$, $f:A\to A'$ fiind morfismul surjectiv indus de morfismul $\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_2$.

Atunci $f(\hat{X})$ este idempotent deşi $\hat{X}$ nu este idempotent.

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Andrei, C. Caragea, V. Ene : Algebră : *Culegere de probleme pentru examenele de admitere şi olimpiade şcolare*, Ed. Scorpion 7, Bucureşti, 1995.

2. M. Becheanu, C. Vraciu : *Probleme de teoria grupurilor*, Reprografia Universităţii din Bucureşti, 1982.

3. D. Buşneag : *Teoria grupurilor*, Ed. Universitaria, Craiova,1994.

4. D.Buşneag, D. Piciu : *Lecţii de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.

5. G. Călugăreanu, P. Hamburg: *Exercices in Basic Rings Theory*, Kluwer Academic Press, 1998.

6. C. Dan: *Probleme de algebra: Inele. Module. Teorie Galois*, Reprografia Universităţii din Craiova, 2000.

7. A. Dincă: *Lecţii de algebră,* Ed. Universitaria, Craiova, 1999.

8. J. D. Dixon : *Problems in group theory*, Blaisdell Publishing Company, 1967.

9. A. Fadeev, I. Sominsky: *Problems in Higher algebra*, Mir Publishers Moscow, 1968.

10. I. D. Ion, C. Manoil, S. Răianu : *Structuri algebrice* (probleme rezolvate), Reprografia Univ. din Bucureşti, 1981.

11. I. D. Ion, C. Niţă, N. Radu, D. Popescu: *Probleme de algebra*, Ed Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

12. I. D. Ion, N. Radu: *Algebra*, Ed Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

13. C. Năstăsescu, C. Niţă, C Vraciu: *Bazele algebrei*, (vol.1), Ed Academiei, Bucureşti, 1986.

14. C. Năstăsescu, M. Ţena, G. Andrei, I. Odărăşeanu : *Probleme de structuri algebrice*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1988.

15. C. Năstăsescu, C. Niță, M. Brandiburu, D. Joița : *Exerciții de algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1992.

16. C. Niță, T. Spircu : *Probleme de structuri algebrice*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1974.

17. L. Panaitopol, I. C. Drăghicescu: *Polinoame şi ecuații algebrice*, Ed Albatros, Bucureşti, 1980.

18. D. Popescu, C. Vraciu : *Elemente de teoria grupurilor finite*, Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

19. J. S. Rose : *A course în Group Theory*, Cambridge University Press,1978.

20. J. J. Rotman : *The Theory of Groups (An introduction)*, Allyn and Bacon Inc., 1966.

21. M. Suzuki : *Group Theory*, Springer – Verlag, 1982.

22. T. Spircu : *Structuri algebrice prin probleme*, Ed. Ştiințifică, Bucureşti, 1991.

23. I. Tomescu (coordonator) : *Probleme date la olimpiadele de matematică pentru liceu,* (1950 – 1990), Ed. Ştiințifică, Bucureşti, 1992.

24. Gazeta Matematică (1980 – 2002).

Ne face plăcere să amintim aici numele autorilor mai multor probleme cuprinse în această lucrare (împreună cu soluțiile corespunzătoare) : T. Albu, Gh. Andrei, M. Andronache, B. Berceanu, Ş. Buzeţeanu, M. Chiriță, I. Cuculescu, S. Dăscălescu, M. Deaconescu, I. Dinulescu, M. Ghergu, I. D. Ion, D. Miheţ, C. Năstăsescu, C. Niță, L. Panaitopol, M. Piticari, D. Popovici, M. Rădulescu, S. Rădulescu, I. Savu şi M. Țena.