# Алгоритм прогнозирования

1. Прогнозирование осуществляется методом АР($p$). Прогнозирование "на шаг вперед". Величина шага $T=1$. Прогнозируемое значение $z_n$ временного ряда выражается через $p$ предыдущих значений:

$$\mathring{z}_n = \varphi_1 \mathring{z}_{n-1} + \dots + \varphi_p \mathring{z}_{n-p} \qquad (1)$$

Предполагается, что в.р. $\{\mathring{z}_n\}$ стационарный, где $\mathring{z}_n = z_n - M_z$, $M_z$ – м.о. в.р. – известно.

2. В первом приближении считается, что $M_z \equiv const$ и его оценка $\bar{z}$ есть

$$\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} z_k, \qquad (2)$$

где $N$ — известное количество членов ряда $\{z_n\}$. (рекомендуется $N \geq 50$, $p \ll N$).

3. Вычисляется оценка дисперсии в.р. $D_z$

$$\hat{D}_z = \hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(z_n - \bar{z})^2 \qquad (3)$$

Предполагается, что $D_z \equiv const$.

4. Вычисляются оценки автокорреляционной функции $\rho_k$

$$\hat{\rho}_k = \underbrace{\frac{1}{N \cdot \hat{D}_z}}_{\varkappa} \cdot \sum_{n=1}^{N-k}(z_n - \bar{z})(z_{n-k} - \bar{z}) = \varkappa \sum_{n=1}^{N-k} \mathring{z}_n \cdot \mathring{z}_{n-k}; \qquad (4)$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$.

$\hat{\rho}_0 = 1$.

При увеличении $k$ $\hat{\rho}_k$ должна либо монотонно убывать по модулю, либо убывать по модулю "в среднем". Это следует из того, что для стационарного процесса (в.р.) $\lim \rho_k = 0$.

(5) Для автокорр. ф-и $\rho_k$ справедливо

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \ldots + \varphi_p \rho_{k-p} \qquad (5)$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ — неизвестные постоянные к-ты.

(6) Выражение (5) должно выполняться с достаточной точностью и для оценок автокор. ф-ии $\hat{\rho}_k$. Подставляя в (5) последовательно $k=1,\ldots,p$ получим систему из $p$ линейных уравнений относительно неизвестных $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ (с учетом четности $\rho_k$)

$$\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 \hat{\rho}_1 + \ldots + \varphi_p \hat{\rho}_{p-1} = \hat{\rho}_1 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1 \hat{\rho}_{p-1} + \varphi_2 \hat{\rho}_{p-2} + \ldots + \varphi_p = \hat{\rho}_p . \end{cases} \qquad (6)$$

это уравнения Юла-Уокера

(7) Проверка матрицы $\hat{P}_p$ системы (6) на невырожденность

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \ldots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \ldots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \ldots & & & & \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-3} & \ldots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{матрица } \hat{P}_p} \neq 0 .$$

(8) Определение решения сист. (6) $\forall$ изв. методом (Крамера, Гаусса, обратной матрицы). Для обратной матрицы получим

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{pmatrix} = \hat{P}_p^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix} . \qquad (7)$$

<u>Замеч.</u> Выбор $p$ зависит от типа исходного в.р. $\{z_n\}$; рекомендовано $1 \le p \le 5$.

## Оценка порядка авторегрессии.

Полагая последовательно $p = 2, 3, \dots$ и вычисляя $\varphi_p$ по прав. Крамера

$$\varphi_p = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \hat\rho_1 & \hat\rho_2 & \dots & \hat\rho_1 \\ \hat\rho_1 & 1 & \hat\rho_1 & \dots & \hat\rho_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat\rho_{p-1} & \hat\rho_{p-2} & \hat\rho_{p-3} & \dots & \hat\rho_p \end{vmatrix}}{\det \hat P_p} \qquad (8)$$

продолжаем эту процедуру до первого обращения $\varphi_p$ в ноль. Порядок $p$, при котором это произошло является порядком авторегрессии $+1$.

<u>Замечание</u>

Определенный данным способом порядок авторегрессии должен быть $\le K$ после которого $\rho_K \equiv 0$.

Рекомендовано $K \le \frac{N}{4}$.

# Алгоритм коррекции прогноза

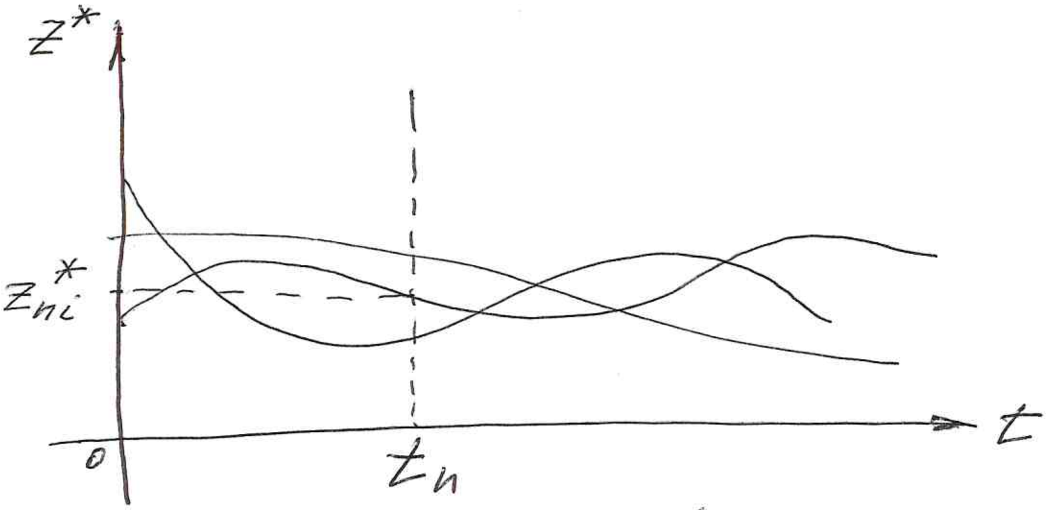


рис. 1.

1. Первоначально $\{z_н\}$ — в.р., с помощью которого отлаживается и настраивается система. Алгоритм прогнозирования вычисляет прогноз $z_н$ на момент $t_н$.

2. Вычисляется оценка м.о. $\overline{Z}_н$ для случайной величины $z_н^*$ с известными значениями $z_{н1}^*, \dots, z_{нN}^*$, являющейся сечением случайного процесса, реализациями которого полагаем "пользовательские" в.р. $\{z_{ki}^*\}$, $i=1,\dots,N^*$; $k=1,\dots,н$.

$$\overline{Z}_н = \frac{1}{N^*}\sum_{i=1}^{N^*} z_{нi} \,, \qquad (9)$$

где $N^*$ — количество пользователей системы. Значение $\overline{Z}_н$ вычисляется на каждом шаге по времени.

3. Проверка выполнения неравенства

$$z_н - \varepsilon z_н \le \overline{Z}_н \le z_н + \varepsilon z_н \,, \qquad (10)$$

где $\varepsilon \in (0,1)$ — значение допустимого относительного отклонения $\overline{Z}_н$ от прогноза $z_н$. $\varepsilon$ задается проектировщиком

4. Если значения $\overline{Z}_n$ выходят за левую границу (10), то "рабочим" значением $Z$ на момент $t_n$ принимается значение $z_n = z_n - \varepsilon z_n$ (в правой части $z_n$ — прогноз), в левой части — новое значение $z_n$. если за правую границу, то $z_n + \varepsilon z_n$.

5. Если п. 4) повторяется подряд $\ell > p$ раз ($\ell$ задается проектировщиком), то принимается решение о перерасчете к-тов АР$_p$ $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, включая обновление значения $p$.

6. Перерасчет указанных в п. 5) величин происходит следующим образом:

а) Если решение о перерасчете принято в момент $t_n$, то создается новый в. р. $\{z_n\}$ из оценок м.о.

$$z_n = \overline{Z}_n;\ z_{n-1} = \overline{Z}_{n-1};\ \dots;\ z_{n-p} = \overline{Z}_{n-p};\ \dots;\ z_k = \overline{Z}_k$$

б) Вычисление

$$\overline{Z} = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} z_\nu ,$$

К начинается

где $N = n - k + 1$.

в) Переход к п. 1) алгоритма прогнозирования.