Вероятность закрытия блока за 1 раунд, если из n узлов m отключены.

noise@sumus.team

25 июня 2019 г.

Аннотация

...

Допущение

а) Вероятность закрытия блока при $m = 0$ равна 1.

б) Эскорт выбирается 1 раз для закрытия 1 блока.

Следствие 1 Если допущение а верно, то если при выборе из B_n эскорта $B_{n'}$ все n' узлов подряд оказались неотключёнными, то консенсус достигается за 1 раунд.

Вероятность $p = \frac{n-m}{n}$ – того, что при m отключенных узлах за одно испытание будет выбран подключённый узел. $q = 1 - p = \frac{m}{n}$ – вероятность противоположного исхода.

Это эквивалентно схеме испытаний без "возврата". Так, у нас в урне n шаров из которых m чёрных и $n-m$ белых. Какова вероятность того, что можно вытащить за n' попыток n' белых шаров (то есть "подряд"), если после каждой попытки шар не возвращается в урну. Здесь подразумевается, что "набор" одного эскорта $B_{n'}$ это вытаскивание подряд n' шаров из урны

В $B_{n'}$ может быть $< \left[\frac{n'}{3}\right]$ неподключённых узлов (по сравнению со следствием 1).

Дополнение. B_n статистически подобно A_n

Вероятность того, что за n' попыток будет выбрано из n узлов n' неотключённых равна

$$p_{n'} = \frac{n'!}{n'!(n'-n')!} \cdot p^{n'} \cdot (1-p)^{n'-n'} =$$

$$C_{n'}^{n'}$$

$$p_{n'} = \left(\frac{n-m}{n}\right)^{n'} \tag{1}$$

– с "возвратом".

На самом деле – без "возврата". Тогда

$$p_{n'} = \frac{C_{n-m}^{n'} \cdot C_m^{n'-n'}}{C_n^{n'}} = \frac{\frac{(n-m)!}{n! \; ? \; (n-m-n')!} \cdot \frac{m!}{0!m!}}{\frac{n!}{n'!(n-n')!}} = \frac{(n-m)!(n-n')!}{n'(n-m-n')!} \tag{2}$$

Если число попыток $k \geq n'$, ($k \leq n' + m$ – физическое ограничение) то формула (2) примет вид

$$p_k = \frac{C_{n-m}^{n'} \cdot C_m^{k-n'}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-m)!}{n!(n-m-n')!} \cdot \frac{m!}{(k-n'!)(m-k+n')!}}{\frac{n!}{n'!(n-n')!}} = \frac{(n-m)!(n-n')!m!}{n!(n-m-n')!(k-n')!(m-k+n')!} \tag{3}$$

Вероятность того, что без "возврата" при m отключённых узлах за k попыток в $B_{n'}$ попадёт $\hat{n}$ подключённых узлов $k \leq \widehat{n} + m$; $k \geq n'$

$$p_k = \frac{C_{n-m}^{\widehat{n}} \cdot C_m^{k-\widehat{n}}}{C_n^k}$$

1 Вторая постановка задачи о вероятности закрытия блока за 1 раунд, когда из n узлов в B_n отключены m узлов.

а) Вероятность закрытия блока за 1 раунд равна 1 только при $m = 0$.

б) Эскорт $B_{n'}$ выбирается 1 раз для закрытия 1 блока.

в) 1 блок может быть закрыт за 1 раунд, если в эскорт первым попал неотключённый узел, и в целом за n' попыток в эскорт попало $n^* + 1$ неотключённых узлов : $n_1 \leq n^* + 1 \leq n_2$, включая мастер-узел.

2 Алгоритм

1. Вероятность того, что с первой попытки в эскорт попадёт неотключённый узел и станет мастер-узлом равна $p_1 = \frac{n-m}{n}$.

2. Вероятность того, что из оставшихся $n-1$ узлов за оставшиеся $n'-1$ попытку будет выбрано $n^* \leq n'-1$ неоключённых узлов.

$$p_{n^*} = \frac{C_{n-m}^{n^*} \cdot C_m^{n'-n^*-1}}{C_n^{n'-1}} = \frac{(n-m)!(n-n^*)!m!}{n!(n-m-n^*)!(n'-n^*-1)!(m-n'+n^*+1)!}$$

$$n'-1 \leq n^* + m$$

$$n^* > \left\lceil \frac{3}{4} n' \right\rceil - 1$$

$\lceil \bullet \rceil$ “Потолок” – округляется в сторону ближайшего большего целого числа.

3. Вероятность того, что в $B_{n'}$ попадёт с первой попытки неотключённый узел, с остальных $n'-1$ попыток n^* неотключённых узлов, есть произведение p_1 на p_{n^*}

$$p = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{(n-m)!(n-n^*)!m!}{n!(n-m-n^*)!(n'-n^*-1)!(m-n'+n^*+1)!} \tag{4}$$

2'. Если вместо п.2 алгоритма потребовать, чтобы за оставшуюся $n'-1$ попытку (опыт) из $n-1$ узла будет выбрано $\lceil \frac{3}{4} n' \rceil \leq n^* \leq n'-1$ $(n_1 = \lceil \frac{3}{4} n' \rceil;\ n_2 = n'-1)$ неотключённых узлов, то искомая вероятность есть сумма p_{n^*} при $n^* = \lceil \frac{3}{4} n' \rceil, \ldots, n'-1$:

$$p_{n_1 \leq n^* \leq n_2} = \sum_{n^*=n_1}^{n_2} p_{n^*}$$

Тогда вместо формулы (4) будет получено:

$$p = \frac{n-m}{n} \cdot \sum_{n^*=\lceil \frac{3}{4} n' \rceil}^{n'-1} \frac{(n-m)!(n-n^*)!m!}{n!(n-m-n^*)!(n'-n^*-1)!(m-n'+n^*+1)!} \tag{5}$$