Алгоритм расчёта авторегрессионной модели по методу наименьших квадратов.

engi@sumus.team

18 сентября 2018 г.

1 Алгоритм.

Согласно определению, авторегрессионный процесс порядка p ($AR(p)$ - процесс) выглядит так:

$$X_t = c + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \epsilon_t \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_p$ - параметры модели (коэффициенты авторегрессии), c - постоянная (часто для упрощения предполагается равной нулю), а ϵ_t - белый шум. Для использования авторегрессионной модели в качестве прогноза, выберем формулу:

$$Y_n = a_0 + \sum_{i=1}^{p-1} a_i x_{n-i} \tag{2}$$

где для получения очередного значения Y_n, нам известны значения x_{n-i} не новее x_{n-i}. Метод наименьших квадратов подразумевает минимизацию функции разности квадратов целевой функции и аппроксимирующей на некотором интервале. В качестве приближения вместо функций используем последовательности.

Одиночное значение квадрата разности:

$$\sigma_n = (X_n + Y_n)^2 \tag{3}$$

Минимизируемая функция:

$$\Delta_n = \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{n-j} \tag{4}$$

где N - количество точек для минимизации. N должно быть существенно больше количества коэффициентов p.
Для вычисления коэффициентов a_k произведем взятие частных производных по всем коэффициентам a_k и приравняем полученные формулы к нулю. Получим систему линейных уравнений вида:

$$\bigcup_{k=0}^{p-1} = \begin{cases} k=0,\ a_0 N + \sum\limits_{i=1}^{p-1} a_i \left(\sum\limits_{j=0}^{N-1} X_{n-i-j} \right) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} X_{n-j} \\ k>0,\ a_0 \sum\limits_{j=0}^{N-1} X_{n-k-j} + \sum\limits_{i=1}^{p-1} a_i \left(\sum\limits_{j=0}^{N-1} X_{n-i-j} X_{n-k-j} \right) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} X_{n-j} X_{n-k-j} \end{cases} \tag{5}$$

2 Анализ реализации.

Произведен расчет прогноза по данному алгоритму на наборах реальных данных. Были использованы ежедневные курсы SDR к трём основным валютам: USD, GBP, CAD. Полученные результаты оказались независимы от набора данных.

При задание порядка авторегресии выше 8, параметры модели становятся неустойчивыми - возникают ситуации неразрешимости системы уравнений.

Свободный член - коэффициент a_0, а также коэффициенты выше 2 порядка, выглядят незначительными. Соответственно, функция "прогноза"существенно похожа на аппроксимируемую функцию, задержанную на 1 отсчёт. При этом, "прогноз"порядка выше 1 оказывается всегда лучше "прогноза"порядка 1 как по максимальному отклонению, так и по интегральному отклонению.