

# Inele de întregi pătratici euclidiene în raport cu funcția normă

Andrei Gasparovici

6 Noiembrie 2020

Fie  $m, n \in \mathbb{Z}$  și  $\theta, \theta' \notin \mathbb{Q}$  rădăcinile ecuației

$$x^2 + mx + n = 0, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

și fie un inel de întregi pătratici

$$\mathbb{Z}[\theta] = \{a + \theta b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \quad (2)$$

Definim pe  $\mathbb{Z}[\theta]$  funcția normă

$$N : \mathbb{Z}[\theta] \rightarrow \mathbb{N}, \quad N(a + \theta b) = |(a + \theta b)(a + \theta' b)| \quad (3)$$

cu proprietățile cunoscute:

$$\begin{aligned} N(z) &= 0 \Leftrightarrow z = 0, \quad \forall z \in \mathbb{Z}[\theta] \\ N(z_1 z_2) &= N(z_1) N(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\theta] \end{aligned}$$

Ne propunem să găsim  $\theta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  pentru care  $\mathbb{Z}[\theta]$  este **euclidian** în raport cu funcția normă.

Fie  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\theta]$ ,  $z_2 \neq 0$ . Arătăm că:

$$\frac{z_1}{z_2} = r + \theta s, \quad r, s \in \mathbb{Q}$$

Fie  $z_1 = a_1 + \theta b_1$ ,  $z_2 = a_2 + \theta b_2$ ,  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ . Atunci:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + \theta b_1}{a_2 + \theta b_2} = \frac{(a_1 + \theta b_1)(a_2 + \theta' b_2)}{(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2)} \quad (4)$$

Calculăm numitorul din raportul (4):

$$(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2) = a_2^2 + a_2 b_2(\theta + \theta') + b_2^2 \theta \theta' \quad (5)$$

Cu relațiile lui Viète în (1) avem:

$$\begin{cases} \theta + \theta' &= -m \\ \theta \cdot \theta' &= n \end{cases} \quad (6)$$

Relația (5) devine:

$$(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2) = a_2^2 - ma_2 b_2 + nb_2^2 \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

Pentru cazul  $a_2^2 - ma_2 b_2 + nb_2^2 > 0$ , raportul (4) devine:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + \theta b_1)(a_2 + \theta' b_2)}{(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2)} = \frac{(a_1 + \theta b_1)(a_2 + \theta' b_2)}{|(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2)|} = \frac{a_1 a_2 + \theta' a_1 b_2 + \theta a_2 b_1 + \theta \theta' b_1 b_2}{N(z_2)} \quad (8)$$

Aplicând (6), obținem că

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 - ma_1 b_2 + \theta a_2 b_1 + nb_1 b_2}{N(z_2)} = \frac{q_1 + \theta q_2}{N(z_2)} = r + \theta s, \quad r, s \in \mathbb{Q} \quad (9)$$

Analog în cazul  $a_2^2 - ma_2 b_2 + nb_2^2 < 0$ .

Definim

$$\mathbb{Q}[\theta] = \{a + \theta b \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \quad (10)$$

și funcția

$$\varphi : \mathbb{Q}[\theta] \rightarrow \mathbb{N}, \quad \varphi(a + \theta b) = |(a + \theta b)(a + \theta' b)| \quad (11)$$

Se observă că restricționând funcția  $\varphi$  la  $\mathbb{Z}[\theta]$  obținem funcția normă:

$$\varphi|_{\mathbb{Z}[\theta]} = N \quad (12)$$

Inelul  $\mathbb{Z}[\theta]$  este **euclidian** în raport cu funcția normă. Deci:

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\theta], z_2 \neq 0 \quad \exists c, r \in \mathbb{Z}[\theta] \quad \text{a.î.} \quad z_1 = z_2 c + r, \text{ cu } N(r) < N(z_2) \\ \Leftrightarrow N(z_1 - z_2 c) < N(z_2) \\ \Leftrightarrow \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) < 1 \end{aligned} \quad (13)$$

Fie  $c = x + \theta y$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Atunci conform (6), (9) și (11):

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) &= \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) \\ &= \varphi(r + \theta s - x - \theta y) \\ &= \varphi((r - x) + \theta(s - y)) \\ &= |(r - x)^2 - m(r - x)(s - y) + n(s - y)^2| \end{aligned} \quad (14)$$

În continuare, vom studia două cazuri particulare ale ecuației (1).

## Cazul 1

$$x^2 - d = 0, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = -d \end{cases} \quad (15)$$

Relația (14) devine:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) = |(r-x)^2 - d(s-y)^2| \Rightarrow \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) \leq (r-x)^2 + |d|(s-y)^2 \quad (16)$$

Alegem

$$\begin{aligned} x = \left[r + \frac{1}{2}\right] \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \leq r + \frac{1}{2} < x + 1 \\ -\frac{1}{2} \leq r - x < \frac{1}{2} \\ \boxed{|r - x| \leq \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

și

$$y = \left[s + \frac{1}{2}\right] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{|s - y| \leq \frac{1}{2}}$$

Inecuația din (16) devine:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) \leq \frac{1}{4}(1 + |d|)$$

Aplicând (13) rezultă că:

$$1 + |d| < 4 \Leftrightarrow |d| < 3$$

Cum  $d \in \mathbb{Z}$  (15), obținem:

$$d \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

Pentru  $d = 1$ :

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \theta, \theta' = \pm 1 \in \mathbb{Q}$$

Pentru  $d = -1$ :

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \theta, \theta' = \pm i \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}[i] \text{ euclidian}}$$

Pentru  $d = 2$ :

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \theta, \theta' = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \text{ euclidian}}$$

Pentru  $d = -2$ :

$$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow \theta, \theta' = \pm i\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] \text{ euclidian}}$$

## Cazul 2

$$x^2 + x + \frac{1-d}{4} = 0, d \in \mathbb{Z}, \text{ cu } d \equiv 1 \pmod{4}, d \text{ liber de pătrate} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = \frac{1-d}{4} \end{cases} \quad (17)$$

Relația (14) devine:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) &= \left| (r-x)^2 - (r-x)(s-y) + \frac{1-d}{4}(s-y)^2 \right| \\ &= \left| \left(r + \frac{s}{2} - x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{d}{4}(s-y)^2 \right| \end{aligned} \quad (18)$$

Notând

$$\begin{aligned} r' &= r + \frac{s}{2} \\ s' &= \frac{s}{2} \end{aligned}$$

Relația (18) devine:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) = \left| \left(r' - x - \frac{1}{2}y\right)^2 + d\left(s' - \frac{1}{2}y\right)^2 \right| \quad (19)$$

Alegem

$$\begin{aligned} y = \left[2s' + \frac{1}{2}\right] \in \mathbb{Z} &\Rightarrow y \leq 2s' + \frac{1}{2} < y + 1 \\ -\frac{1}{2} &\leq 2s' - y < \frac{1}{2} \\ |2s' - y| &\leq \frac{1}{2} \\ \boxed{\left|s' - \frac{y}{2}\right|} &\leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

și

$$x = \left[r' - \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\left|r' - x - \frac{1}{2}y\right| \leq \frac{1}{2}}$$

Din (19) rezultă:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) \leq \left(r' - x - \frac{1}{2}y\right)^2 + |d|\left(s' - \frac{y}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{16}|d|$$

Aplicând (13), obținem:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16}|d| < 1 \Leftrightarrow |d| < 12$$

Conform  $d \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $d$  liber de pătrate (17):

$$d \in \{\pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 11\}$$

Pentru  $d = 3$ :

$$x^2 - x + \frac{1-3}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{1}{2} = 0; -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Pentru  $d = -3$ :

$$x^2 - x + \frac{1+3}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \theta, \theta' = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z} \left[ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right] \text{ euclidian}}$$

Pentru  $d = 5$ :

$$x^2 - x + \frac{1-5}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \theta, \theta' = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z} \left[ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right] \text{ euclidian}}$$

Pentru  $d = -5$ :

$$x^2 - x + \frac{1+5}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3}{2} = 0; \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Pentru  $d = 7$ :

$$x^2 - x + \frac{1-7}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{3}{2} = 0; -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Pentru  $d = -7$ :

$$x^2 - x + \frac{1+7}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \theta, \theta' = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z} \left[ \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \right] \text{ euclidian}}$$

Pentru  $d = 11$ :

$$x^2 - x + \frac{1-11}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{5}{2} = 0; -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Pentru  $d = -11$ :

$$x^2 - x + \frac{1+11}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow \theta, \theta' = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z} \left[ \frac{1+i\sqrt{11}}{2} \right] \text{ euclidian}}$$

## Concluzie

Am găsit că inelele de întregi pătratici  $\mathbb{Z}[i]$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ,  $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ ,  $\mathbb{Z} \left[ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right]$ ,  $\mathbb{Z} \left[ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$ ,  $\mathbb{Z} \left[ \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \right]$  și  $\mathbb{Z} \left[ \frac{1+i\sqrt{11}}{2} \right]$  sunt euclidiene în raport cu funcția normă.