# Inele de întregi pătratici euclidiene în raport cu funcţia normă

Andrei Gasparovici

5 Noiembrie 2020

Fie $m, n \in \mathbb{Z}$ şi $\theta, \theta' \notin \mathbb{Q}$ rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 + mx + n = 0,\ m, n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

şi fie un inel de întregi pătratici

$$\mathbb{Z}[\theta] = \{a + \theta b \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \tag{2}$$

Ne propunem să găsim $\theta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Q}$ pentru care $\mathbb{Z}[\theta]$ este **euclidian**.

Definim pe $\mathbb{Z}[\theta]$ funcţia normă

$$N : \mathbb{Z}[\theta] \to \mathbb{N},\ N(a + \theta b) = |(a + \theta b)(a + \theta' b)| \tag{3}$$

cu proprietăţile cunoscute:

$$N(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0, \quad \forall z \in \mathbb{Z}[\theta] \tag{4}$$

$$N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\theta] \tag{5}$$

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\theta]$, cu $z_2 \neq 0,\ z_1 = a_1 + \theta b_1,\ z_2 = a_2 + \theta b_2$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + \theta b_1}{a_2 + \theta b_2} = \frac{(a_1 + \theta b_1)(a_2 + \theta' b_2)}{(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2)} \tag{6}$$

Calculăm numitorul din raportul (6):

$$(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2) = a_2^2 + a_2 b_2(\theta + \theta') + b_2^2 \theta\theta' \tag{7}$$

Cu relaţiile lui Viete în (1) avem:

$$\begin{cases} \theta + \theta' & = -m \\ \theta \cdot \theta' & = n \end{cases} \tag{8}$$

Relaţia (7) devine:

$$(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2) = a_2^2 - m a_2 b_2 + n b_2^2 \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

Pentru cazul $a_2^2 - m a_2 b_2 + n b_2^2 > 0$, raportul (6) devine:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + \theta b_1)(a_2 + \theta' b_2)}{(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2)} = \frac{(a_1 + \theta b_1)(a_2 + \theta' b_2)}{|(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2)|} = \frac{a_1 a_2 + \theta' a_1 b_2 + \theta a_2 b_1 + \theta\theta' b_1 b_2}{N(z_2)} \tag{10}$$

Aplicând (8), obţinem că

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 - (m+\theta)a_1b_2 + \theta a_2b_1 + nb_1b_2}{N(z_2)} = \frac{q_1 + \theta q2}{N(z_2)} = r + \theta s, \quad r, s \in \mathbb{Q} \tag{11}$$

Analog în cazul $a_2^2 - ma_2b_2 + nb_2^2 < 0$.

Definim

$$\mathbb{Q}[\theta] = \{a + \theta b \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\} \tag{12}$$

şi funcţia

$$\varphi : \mathbb{Q}[\theta] \to \mathbb{N},\ \varphi(a + \theta b) = |(a + \theta b)(a + \theta' b)| \tag{13}$$

Se observă că restricţionând funcţia $\varphi$ la $\mathbb{Z}[\theta]$ obţinem funcţia normă:

$$\varphi|_{\mathbb{Z}[\theta]} = N \tag{14}$$

Inelul $\mathbb{Z}[\theta]$ este **euclidian** în raport cu funcţia normă. Deci

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\theta]\ \exists\, c, r \in \mathbb{Z}[\theta] \text{ a.î. } z_1 = z_2c + r, \text{ cu } r = 0 \text{ sau } N(r) < N(z_2) \\ \Leftrightarrow N(z_1 - z_2c) < N(z_2) \\ \Leftrightarrow \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) < 1 \end{aligned} \tag{15}$$

Fie $c = x + \theta y$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Atunci conform (8), (11) şi (13):

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) &= \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) \\ &= \varphi(r + \theta s - x - \theta y) \\ &= \varphi\left((r - x) + \theta(s - y)\right) \\ &= \left|(r - x)^2 - m(r - x)(s - y) + n(s - y)^2\right| \end{aligned} \tag{16}$$

În continuare, vom studia două cazuri particulare ale ecuaţiei (1).

# Cazul 1

$$x^2 - d = 0,\ d \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = -d \end{cases} \tag{17}$$

Relaţia (16) devine:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) = \left|(r - x)^2 - d(s - y)^2\right| \Rightarrow \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) \le (r - x)^2 + |d|(s - y)^2 \tag{18}$$

Alegem

$$x = \left[r + \frac{1}{2}\right] \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \leq r + \frac{1}{2} < x + 1$$
$$-\frac{1}{2} \leq r - x < \frac{1}{2} \tag{19}$$
$$\boxed{|r - x| \leq \frac{1}{2}}$$

şi

$$y = \left[s + \frac{1}{2}\right] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{|s - y| \leq \frac{1}{2}} \tag{20}$$

Inecuaţia din (18) devine:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) \leq \frac{1}{4}(1 + |d|) \tag{21}$$

Aplicând (15) rezultă că:

$$1 + |d| < 4 \Leftrightarrow |d| < 3 \tag{22}$$

Conform (17):

$$d \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

Pentru $d = 1$:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \theta, \theta' = \pm 1 \in \mathbb{Q}$$

Pentru $d = -1$:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \theta, \theta' = \pm i \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}[i] \text{ euclidian}} \tag{23}$$

Pentru $d = 2$:

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \theta, \theta' = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \text{ euclidian}} \tag{24}$$

Pentru $d = -2$:

$$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow \theta, \theta' = \pm i\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] \text{ euclidian}} \tag{25}$$

# Cazul 2

$$x^2 + x + \frac{1-d}{4} = 0,\ d \in \mathbb{Z},\ \text{ cu } d \equiv 1 (\text{mod } 4), d \text{ liber de pătrate } \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = \frac{1-d}{4} \end{cases} \tag{26}$$

Relaţia (16) devine:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{z_1}{z_2}-c\right) &= \left|(r-x)^2-(r-x)(s-y)+\frac{1-d}{4}(s-y)^2\right| \\ &= \left|\left(r+\frac{s}{2}-x-\frac{1}{2}y\right)^2-\frac{d}{4}(s-y)^2\right|\end{aligned} \tag{27}$$

Notând

$$\begin{aligned} r' &= r+\frac{s}{2} \\ s' &= \frac{s}{2}\end{aligned} \tag{28}$$

Relaţia (27) devine:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2}-c\right) = \left|\left(r'-x-\frac{1}{2}y\right)^2+|d\left(s'-\frac{1}{2}y\right)^2\right| \tag{29}$$

Alegem

$$\begin{aligned} y=\left[2s'+\frac{1}{2}\right]\in\mathbb{Z}\Rightarrow & y\le 2s'+\frac{1}{2}<y+1 \\ & -\frac{1}{2}\le 2s'-y<\frac{1}{2} \\ & |2s'-y|\le\frac{1}{2} \\ & \boxed{\left|s'-\frac{y}{2}\right|\le\frac{1}{4}}\end{aligned} \tag{30}$$

şi

$$x=\left[r'-\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right]\in\mathbb{Z}\Rightarrow\boxed{|r'-x-\frac{1}{2}y|\le\frac{1}{2}} \tag{31}$$

Din (29) rezultă:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2}-c\right)\le\left(r'-x-\frac{1}{2}y\right)^2+|d|\left(s'-\frac{y}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}+\frac{1}{16}|d| \tag{32}$$

Aplicând (15), obţinem:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}|d|<1\Leftrightarrow|d|<12 \tag{33}$$

Conform (26):

$$d\in\{\pm3,\pm5,\pm7,\pm11\}$$

Pentru $d=3$:

$$x^2-x+\frac{1-3}{4}=0\Leftrightarrow x^2-x-\frac{1}{2}=0;\ -\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$$

Pentru $d = -3$:

$$x^2-x+\frac{1+3}{4}=0 \Leftrightarrow x^2-x+1=0 \Leftrightarrow \theta,\theta'=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\notin\mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right] \text{ euclidian}} \quad (34)$$

Pentru $d = 5$:

$$x^2-x+\frac{1-5}{4}=0 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \theta,\theta'=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\notin\mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \text{ euclidian}} \quad (35)$$

Pentru $d = -5$:

$$x^2-x+\frac{1+5}{4}=0 \Leftrightarrow x^2-x+\frac{3}{2}=0;\ \frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$$

Pentru $d = 7$:

$$x^2-x+\frac{1-7}{4}=0 \Leftrightarrow x^2-x-\frac{3}{2}=0;\ -\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$$

Pentru $d = -7$:

$$x^2-x+\frac{1+7}{4}=0 \Leftrightarrow x^2-x+2=0 \Leftrightarrow \theta,\theta'=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}\notin\mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right] \text{ euclidian}} \quad (36)$$

Pentru $d = 11$:

$$x^2-x+\frac{1-11}{4}=0 \Leftrightarrow x^2-x-\frac{5}{2}=0;\ -\frac{5}{2}\notin\mathbb{Z}$$

Pentru $d = -11$:

$$x^2-x+\frac{1+11}{4}=0 \Leftrightarrow x^2-x+3=0 \Leftrightarrow \theta,\theta'=\frac{1\pm i\sqrt{11}}{2}\notin\mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right] \text{ euclidian}} \quad (37)$$

# Concluzie

Am găsit că inelele $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]$ şi $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]$ sunt euclidiene în raport cu funcţia normă.