Inele de întregi pătratici euclidiene în raport cu funcţia normă

Andrei Gasparovici

6 Noiembrie 2020

Fie $m, n \in \mathbb{Z}$ şi $\theta, \theta' \notin \mathbb{Q}$ rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 + mx + n = 0, \; m, n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

şi fie un inel de întregi pătratici

$$\mathbb{Z}[\theta] = \{a + \theta b \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \tag{2}$$

Ne propunem să găsim $\theta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Q}$ pentru care $\mathbb{Z}[\theta]$ este **euclidian**.

Definim pe $\mathbb{Z}[\theta]$ funcţia normă

$$N : \mathbb{Z}[\theta] \to \mathbb{N}, \; N(a + \theta b) = |(a + \theta b)(a + \theta' b)| \tag{3}$$

cu proprietăţile cunoscute:

$$N(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0, \quad \forall z \in \mathbb{Z}[\theta]$$
$$N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\theta]$$

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\theta]$, $z_2 \neq 0$. Arătăm că:

$$\frac{z_1}{z_2} = r + \theta s, \quad r, s \in \mathbb{Q}$$

Fie $z_1 = a_1 + \theta b_1, \; z_2 = a_2 + \theta b_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$. Atunci:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + \theta b_1}{a_2 + \theta b_2} = \frac{(a_1 + \theta b_1)(a_2 + \theta' b_2)}{(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2)} \tag{4}$$

Calculăm numitorul din raportul (4):

$$(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2) = a_2^2 + a_2 b_2(\theta + \theta') + b_2^2 \theta\theta' \tag{5}$$

Cu relaţiile lui Viète în (1) avem:

$$\begin{cases} \theta + \theta' & = -m \\ \theta \cdot \theta' & = n \end{cases} \tag{6}$$

Relaţia (5) devine:

$$(a_2 + \theta b_2)(a_2 + \theta' b_2) = a_2^2 - m a_2 b_2 + n b_2^2 \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

Pentru cazul $a_2^2 - ma_2b_2 + nb_2^2 > 0$, raportul (4) devine:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1+\theta b_1)(a_2+\theta' b_2)}{(a_2+\theta b_2)(a_2+\theta' b_2)} = \frac{(a_1+\theta b_1)(a_2+\theta' b_2)}{|(a_2+\theta b_2)(a_2+\theta' b_2)|} = \frac{a_1a_2+\theta' a_1b_2+\theta a_2b_1+\theta\theta' b_1b_2}{N(z_2)} \tag{8}$$

Aplicând (6), obţinem că

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 - ma_1b_2 + \theta a_2b_1 + nb_1b_2}{N(z_2)} = \frac{q_1+\theta q_2}{N(z_2)} = r + \theta s, \quad r, s \in \mathbb{Q} \tag{9}$$

Analog în cazul $a_2^2 - ma_2b_2 + nb_2^2 < 0$.

Definim

$$\mathbb{Q}[\theta] = \{a + \theta b \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\} \tag{10}$$

şi funcţia

$$\varphi : \mathbb{Q}[\theta] \to \mathbb{N},\ \varphi(a+\theta b) = |(a+\theta b)(a+\theta' b)| \tag{11}$$

Se observă că restricţionând funcţia φ la $\mathbb{Z}[\theta]$ obţinem funcţia normă:

$$\varphi|_{\mathbb{Z}[\theta]} = N \tag{12}$$

Inelul $\mathbb{Z}[\theta]$ este **euclidian** în raport cu funcţia normă. Deci:

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\theta], z_2 \neq 0 \quad \exists\, c, r \in \mathbb{Z}[\theta] \quad \text{a.î.} \quad & z_1 = z_2c + r,\ \text{cu } N(r) < N(z_2) \\ & \Leftrightarrow N(z_1 - z_2c) < N(z_2) \\ & \Leftrightarrow \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) < 1 \end{aligned} \tag{13}$$

Fie $c = x + \theta y$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Atunci conform (6), (9) şi (11):

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) &= \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) \\ &= \varphi(r + \theta s - x - \theta y) \\ &= \varphi\left((r-x) + \theta(s-y)\right) \\ &= \left|(r-x)^2 - m(r-x)(s-y) + n(s-y)^2\right| \end{aligned} \tag{14}$$

În continuare, vom studia două cazuri particulare ale ecuaţiei (1).

Cazul 1

$$x^2 - d = 0,\ d \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = -d \end{cases} \tag{15}$$

Relaţia (14) devine:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) = \left|(r-x)^2 - d(s-y)^2\right| \Rightarrow \varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) \leq (r-x)^2 + |d|(s-y)^2 \tag{16}$$

Alegem

$$\begin{aligned} x = \left[r + \frac{1}{2}\right] \in \mathbb{Z} \Rightarrow & x \leq r + \frac{1}{2} < x + 1 \\ & -\frac{1}{2} \leq r - x < \frac{1}{2} \\ & \boxed{|r - x| \leq \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

şi

$$y = \left[s + \frac{1}{2}\right] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{|s - y| \leq \frac{1}{2}}$$

Inecuaţia din (16) devine:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2} - c\right) \leq \frac{1}{4}(1 + |d|)$$

Aplicând (13) rezultă că:

$$1 + |d| < 4 \Leftrightarrow |d| < 3$$

Cum $d \in \mathbb{Z}$ (15), obţinem:

$$d \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

Pentru $d = 1$:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \theta, \theta' = \pm 1 \in \mathbb{Q}$$

Pentru $d = -1$:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \theta, \theta' = \pm i \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}[i] \text{ euclidian}}$$

Pentru $d = 2$:

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \theta, \theta' = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \text{ euclidian}}$$

Pentru $d = -2$:

$$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow \theta, \theta' = \pm i\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] \text{ euclidian}}$$

Cazul 2

$$x^2 + x + \frac{1-d}{4} = 0,\ d \in \mathbb{Z},\ \text{cu } d \equiv 1 \pmod 4,\ d \text{ liber de pătrate } \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = \frac{1-d}{4} \end{cases} \tag{17}$$

Relaţia (14) devine:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{z_1}{z_2}-c\right) &= \left|(r-x)^2-(r-x)(s-y)+\frac{1-d}{4}(s-y)^2\right| \\ &= \left|\left(r+\frac{s}{2}-x-\frac{1}{2}y\right)^2-\frac{d}{4}(s-y)^2\right|\end{aligned} \tag{18}$$

Notând

$$\begin{aligned} r' &= r+\frac{s}{2} \\ s' &= \frac{s}{2}\end{aligned}$$

Relaţia (18) devine:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2}-c\right) = \left|\left(r'-x-\frac{1}{2}y\right)^2+d\left(s'-\frac{1}{2}y\right)^2\right| \tag{19}$$

Alegem

$$\begin{aligned} y=\left[2s'+\frac{1}{2}\right]\in\mathbb{Z} \Rightarrow & y\le 2s'+\frac{1}{2}<y+1 \\ & -\frac{1}{2}\le 2s'-y<\frac{1}{2} \\ & |2s'-y|\le\frac{1}{2} \\ & \boxed{\left|s'-\frac{y}{2}\right|\le\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

şi

$$x=\left[r'-\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right]\in\mathbb{Z}\Rightarrow \boxed{|r'-x-\frac{1}{2}y|\le\frac{1}{2}}$$

Din (19) rezultă:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2}-c\right)\le\left(r'-x-\frac{1}{2}y\right)^2+|d|\left(s'-\frac{y}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}+\frac{1}{16}|d|$$

Aplicând (13), obţinem:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}|d|<1\Leftrightarrow|d|<12$$

Conform $d\equiv 1 \pmod 4$, d liber de pătrate (17):

$$d\in\{\pm3,\pm5,\pm7,\pm11\}$$

Pentru $d=3$:

$$x^2-x+\frac{1-3}{4}=0\Leftrightarrow x^2-x-\frac{1}{2}=0;\ -\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$$

Pentru $d = -3$:

$$x^2 - x + \frac{1+3}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \theta, \theta' = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right] \text{ euclidian}}$$

Pentru $d = 5$:

$$x^2 - x + \frac{1-5}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \theta, \theta' = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \text{ euclidian}}$$

Pentru $d = -5$:

$$x^2 - x + \frac{1+5}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3}{2} = 0;\ \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Pentru $d = 7$:

$$x^2 - x + \frac{1-7}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{3}{2} = 0;\ -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Pentru $d = -7$:

$$x^2 - x + \frac{1+7}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \theta, \theta' = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right] \text{ euclidian}}$$

Pentru $d = 11$:

$$x^2 - x + \frac{1-11}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{5}{2} = 0;\ -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Pentru $d = -11$:

$$x^2 - x + \frac{1+11}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow \theta, \theta' = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right] \text{ euclidian}}$$

Concluzie

Am găsit că inelele de întregi pătratici $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]$ şi $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]$ sunt euclidiene în raport cu funcţia normă.