Repartiţia Poisson $\mathbf{P}_0(\lambda)$

Definiţie 1. *O variabilă aleatoare X are o repartiţie Poission de parametru λ, $\lambda > 0$ dacă*

$$X\begin{pmatrix} k \\ \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \end{pmatrix}_{k\in\mathbb{N}}$$

Evident $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

Funcţia caracteristică: $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

Demonstraţie.

$$\varphi(t) = M(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}e^{e^{it}\lambda} \Longrightarrow$$

$$\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

□

Media: $M(X) = \lambda$

Demonstraţie.

$$M(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0)$$

$$\varphi'(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}\lambda e^{it}i \Longrightarrow \varphi'(0) = \lambda i \Longrightarrow M(X) = \lambda$$

□

Dispersia: $D^2(X) = \lambda$

Demonstraţie.

$$M(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0)$$

$$\varphi''(t) = \lambda i\left[e^{\lambda(e^{it}-1)}\lambda e^{it}ie^{it} + e^{\lambda(e^{it}-1)}e^{it}i\right] \Longrightarrow \varphi''(0) = \lambda i(\lambda i + i) = i^2(\lambda^2 + \lambda)$$

$$\Longrightarrow M(X^2) = \lambda^2 + \lambda \Longrightarrow D^(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \Longrightarrow D^2(X) = \lambda$$

□

Abaterea pătratică medie: $\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{\lambda}$

Repartiţia uniformă continuă

Definiţie 2. *O variabilă aleatoare X are o repartiţie uniformă continuă de parametri a şi b dacă densitatea sa de repartiţie este:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a,b], 0 \leq a < b \\ 0 & , \textit{în rest} \end{cases}$$

Avem că $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\, x|_a^b = 1$$

Media unei variabile aleatoare X cu repartiţia uniformă continuă este:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$M(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Dispersia unei variabile aleatoare X cu repartiţia uniformă continuă este:

$$D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$M(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\Longrightarrow D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare cu repartiţia uniformă continuă este:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, a] \\ \frac{x-a}{b-a} & , x \in (a,b] \\ 1 & , x \in (b, \infty) \end{cases}$$

Funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare cu repartiţia uniformă continuă este:

$$\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \cdot f(x)dx = \int_a^b e^{itx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{e^{itx}}{it} \right|_a^b = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

Sisteme de ecuaţii liniare

Un ansamblu de egalităţi de forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

se numeşte *sistem de ecuaţii liniare cu n necunoscute* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Elementele $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$ se numesc *coeficienţi*, iar elementele $b_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$ se numesc *termeni liberi.*

Teorema 1 (Regular lui Cramer)**.** *Un sistem de ecuaţii de forma* (1) *cu coeficienţi reali pentru care matricea coeficienţilor* $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ *are determinantul* $\Delta \neq 0$ *are o soluţie unică dată de egalităţile:*

$$x_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta},$$

unde Δx_i *se obţine din* Δ *înlocuind coloana i cu coloana termenilor liberi.*

Dacă sistemul admite:

- o singură soluţie $\to$ sistem compatibil determinat
- mai multe soluţii $\to$ sistem compatibil nedeterminat
- nici o soluţie $\to$ sistem incompatibil