Prezentarea Interpolării cu funcții raționale folosind algoritmul Bulirsch Stoer.

Se pleacă de la ideea că între două puncte există o singură linie, între trei astfel de puncte există un polinom de gradul doi. Astfel prin N puncte yi = f(xi), i=1,n există un unic polinom de gradul N-1.

Unele funcții nu sunt bine aproximate de polinoame, dar sunt bine aproximate de funcții raționale.

În specificarea unei funcții raționale de interpolare, trebuie dată ordinea dorită atât pentru numărător, cât și pentru numitor.

Funcțiile rationale sunt superioare polinoamelor datorită abilității acestora de a modela funcții cu poli (soluție a numitorului, când funcția nu se mai poate simplifica). Uneori pot să existe poli complecși și chiar dacă funcția f(x) este finită pentru orice x real, aceasta poate să aibă o continuare în planul complex(unde poate să tindă chiar la infinit). Acest lucru poate să ruineze aproximarea unui polinom si din această cauză a fost introdusă metoda funcțiilor raționale.

Soluția lui Bulirsch-Stoer :

Se crează un tabel de strămoși astfel: P1 este constant egal cu y1 și reprezintă valoarea din x1 a lui P. La fel P2,…PN. Se trece apoi la P12 care reprezintă polinomul care trece prin primele 2 puncte (x1,y1) și (x2,y2): P(x1) = y1 și P(x2) = y2. La fel P23,…P(N-1)N. Similar se crează polinoamele de grad mai mare pană la P123…N care este unica valoarea a polinomului de interpolare care trece prin toate cele N puncte, adică ceea ce trebuie ca soluție.

Exemplu tablou de strămoși pentru N=4 : este contruit coloană cu coloană de la stânga la dreapta și duce la un rezultat si o eroare de estimare .

$x_1 : y_1 = P_1$			
	P_{12}		
$x_2 : y_2 = P_2$		P_{123}	
	P_{23}		P_{1234}
$x_3 : y_3 = P_3$		P_{234}	
	P_{34}		
$x_4 : y_4 = P_4$			

Algoritmul este rezumat de urmatoarea relație de recurență :

$$R_{i(i+1)\ldots(i+m)} = R_{(i+1)\ldots(i+m)} + \frac{R_{(i+1)\ldots(i+m)} - R_{i\ldots(i+m-1)}}{\left(\frac{x-x_i}{x-x_{i+m}}\right)\left(1 - \frac{R_{(i+1)\ldots(i+m)} - R_{i\ldots(i+m-1)}}{R_{(i+1)\ldots(i+m)} - R_{(i+1)\ldots(i+m-1)}}\right) - 1}$$

Această recurență generează funcția rațională prin m+1 puncte din cele prin m puncte.

Se incepe cu Ri = yi și cu R = [Ri(i+1)…(i+m) cu m=-1] = 0;

O îmbunătățire a recurenței este să se țină cont de micile diferențe dintre părinți si copii din tablou:

$C_{m,i} \equiv R_{i\ldots(i+m)} - R_{i\ldots(i+m-1)}$ (de exemplu pe prima poziție o sa fie P21 – P11)

$D_{m,i} \equiv R_{i\ldots(i+m)} - R_{(i+1)\ldots(i+m)}$ (de exemplu pe prima poziție o sa fie P21 – P22)

Este satisfăcută si relația:

$$C_{m+1,i} - D_{m+1,i} = C_{m,i+1} - D_{m,i}$$

Această relație ajută la demonstrarea recurențelor care ajută la crearea programului:

$$D_{m+1,i} = \frac{C_{m,i+1}(C_{m,i+1} - D_{m,i})}{\left(\frac{x-x_i}{x-x_{i+m+1}}\right) D_{m,i} - C_{m,i+1}}$$

$$C_{m+1,i} = \frac{\left(\frac{x-x_i}{x-x_{i+m+1}}\right) D_{m,i}(C_{m,i+1} - D_{m,i})}{\left(\frac{x-x_i}{x-x_{i+m+1}}\right) D_{m,i} - C_{m,i+1}}$$

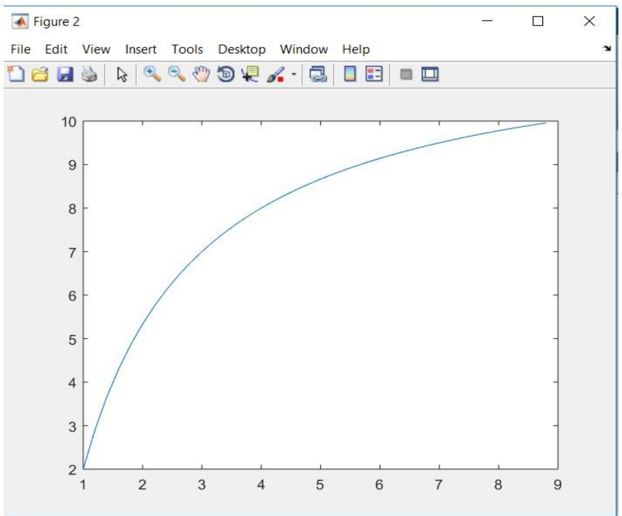
Soluția se bazează pe crearea tabloului de strămoși pe coloane, începând de la stânga. La început au fost complatați vectorii cu erori(care conțin diferența dintre parinți si copii). Aceștia vor fi updatați pe parcurs, urmând să se decidă care corecție(c sau d) o să fie adăugată la soluția căutată .

În final trebuie adăugată si eroarea dy care rezultă tot vectorii c sau d, în funcție de situație.

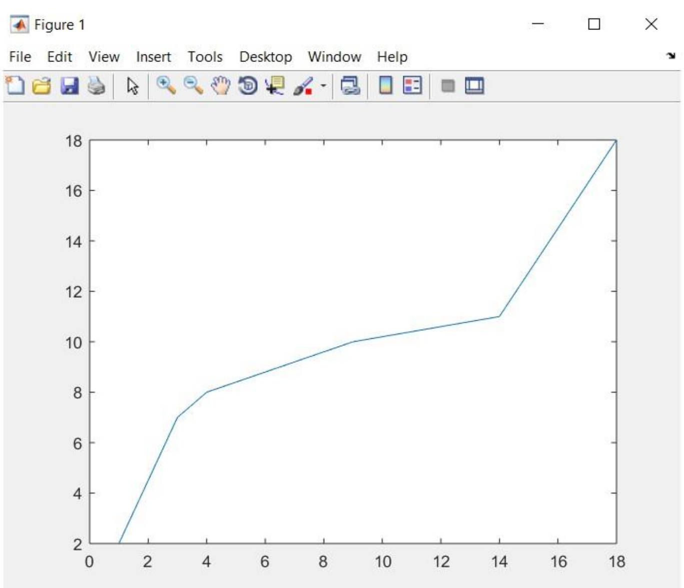
Pentru un set de valori de intrare (cel puțin 3 puncte date), am făcut o buclă între prima si ultima valoare a lui x si am aflat soluția pe care o returnează funcția în multe dintre punctele care se află între aceste valori. Apoi am plotat graficul pentru o acuratețe mare.

Exemple:

1.Fie punctele A1(1,2), A2(3,7), A3(4,8), A4(9,10), A5(14,11), A6(18,18) ca date de intrare.

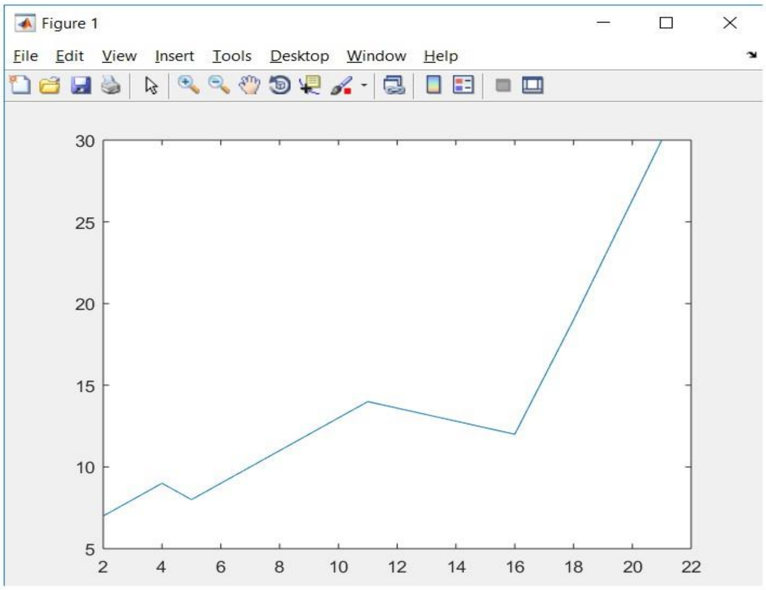


Graficul funcției adevărate

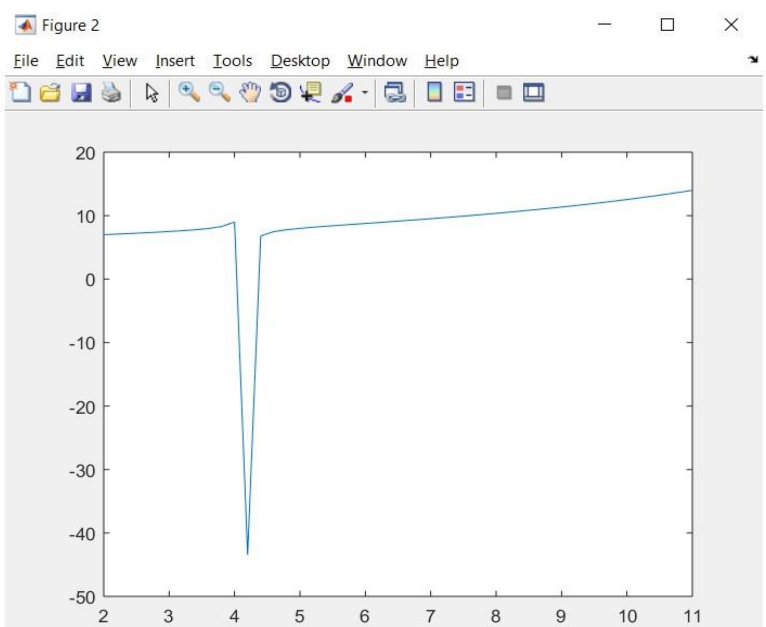


Graficul funcției obținute prin interpolare

2. Fie punctele B1(2,7), B2(4,8), B3(5,9), B4(11,14), B5(16,12), B6(18,19), B7(21,30) ca date de intrare.



Graficul funcției adevărate



Graficul funcției obținute prin interpolare