**Universidad de Costa Rica**
**Facultad de Ingeniería**
**Escuela de Ciencias de la Computación e Informática**

Estructuras de Datos y Análisis de Algoritmos
CI-1221
Grupo 001

# I Tarea programada

**Profesora:**
Sandra Kikut

**Elaborado por:**
Andreína Alvarado González | B40259
Otto Mena Kikut | B03843

**25 de Septiembre del 2015**

# Indice

# 1 Introducción

Una de las partes fundamentales, a la hora de aprender sobre estructuras de datos y análisis de algoritmos, es entender bien como están constituidas las distintas partes que se deben tener en cuenta a la hora de hablar sobre modelos matemáticos, estructuras de datos, algoritmos, ... Esta tarea, consta de cuatro etapas cuyo fin es precisamente, tratar de comprender todas estas partes y la manera correcta de concebirlas.

Una primer etapa, se enfoca en la especificación de los modelos matemáticos. Es decir, su definición formal y el establecimiento de operadores básicos que permitan la implementación de cualquier algoritmo que se desee a partir de estos operadores básicos. Así mismo, a estos operadores se le definiran sus clásulas de efecto, requiere y modifica.

En una segunda etapa, se pretende implementar mediante estructuras de datos específicas, estos modelos con sus operadores básicos específicos a nivel computacional.

La tercer etapa, se basa en la implentación, de igual manera, a nivel computacional de algoritmos para árboles $n$-arios, tomando en cuenta, que estos algoritmos deben funcionar independientemente de qué estructura de datos se esté usando.

Finalmente, durante las lecciones, se han establecido ciertos órdenes de duración para algunos algoritmos y operadores básicos. En la cuarta etapa, se pretende realizar una serie de análisis teórico y de tiempo real de ejecución, con el fin de conocer, establecer y esperimentar respecto a la realidad entre la teoría y la práctica de la duración de estos algoritmos.

# 2 Objetivos

• Definir, especificar, implementar y usar los modelos lógicos Cola, Pila, Árbol $n$-ario tal que sí importa el orden entre los hijos de un nodo.

• Realizar un análisis teórico y un análisis real del tiempo de ejecución de las diferentes estructuras de datos y algoritmos utilizados.

# 3 Enunciado

Para la primer etapa:

Especificar de manera lógica, formal y completa los operadores básicos de la Cola, Pila y Árbol $n$-ario. Para cada operador debe incluir: nombre, parámetros con sus tipos y las cláusulas Efecto (claro, completo y conciso), Requiere y Modifica.

Para la segunda etapa:

- Implementar el modelo Cola utilizando la estructura de datos: arreglo circular.
- Implementar el modelo Pila utilizando la estructura de datos: lista simplemente enlazada.
- Implementar el modelo Árbol n-ario tal que sí importa el orden entre los hijos de un nodo

utilizando las estructuras de datos: arreglo con señalador al padre; lista de hijos por lista implemente enlazada (lista principal) y lista simplemente enlazada (sublistas); hijo más izquierdo-hermano derecho por punteros; e hijo más izquierdo-hermano derecho por punteros, con puntero al padre y al hermano izquierdo.

Para la tercera etapa:

Especificar distintos algoritmos para el modelo árbol tal que sí importa el orden entre los hijos de un nodo, utilizando sus operadores básicos. Para cada algoritmo se debe especificar nombre, parámetros con sus tipos y las cláusulas efecto (claro, completo y conciso), requiere y modifica.

Además, hacer un programa de prueba de los algoritmos implementados. Este programa, deberá permitir usar los operadores básicos del árbol.

Para la cuarta etapa:

Hacer un análisis empírico (tiempo y espacio real) de la complejidad computacional de las estructuras de datos, operadores básicos y algoritmos implementados en esta tarea. Para ello, se deberá hacer cálculos de tiempo real de ejecución de los diferentes operadores y algoritmos, para diferentes tamaños de $n$ ($n$ muy grandes) y para diferentes tipos de árboles (diferentes alturas y anchuras). Dichos cálculos deberán ser mostrados en tablas y gráficos.

Además, se deberá comparar los cálculos reales con los teóricos e incluir una sección de conclusiones sobre la eficiencia de cada estructura de datos.

# 4 Desarrollo

## 4.1 Modelos

### 4.1.1 Modelo cola

#### 4.1.1.1 Definición del modelo cola

Según el libro *Estructura de datos y algoritmos* de Alfred V. Aho, Jeffrey D. Ullman y John E. Hopcroft: una *cola* es un tipo especial de lista en el cual los elementos se insertan en un extremo *el posterior* y se suprimen en el otro *el anterior o frente*. Las colas a menudo se les conoce también como “FIFO” o lista “primero en entrar, primero en salir”.

#### 4.1.1.2 Definición de operadores básicos

Crear(cola $C$):

Cláusulas de Crear(cola $C$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Inicializa la cola $C$ como vacía. |
| Requiere | No aplica. |
| Modifica | Cola $C$. |

Destruir(cola $C$):

| Cláusulas de Destruir(cola $C$) | |
|---|---|
| Efecto | Destruye la cola $C$, dejándola inutilizable. |
| Requiere | Cola $C$ inicializada. |
| Modifica | Cola $C$. |

Vaciar(cola $C$):

| Cláusulas de Vaciar(cola $C$) | |
|---|---|
| Efecto | Vacía cola $C$, dejándola con 0 elementos. |
| Requiere | Cola $C$ inicializada. |
| Modifica | Cola $C$. |

Vacía(cola $C$), devuelve algo de tipo booleano:

| Cláusulas de Vacía(cola $C$) | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve verdadero si cola $C$ vacía y falso si no. |
| Requiere | Cola $C$ inicializada. |
| Modifica | No aplica. |

Agregar(elemento $e$, cola $C$):

| Cláusulas de Agregar(elemento $e$, cola $C$) | |
|---|---|
| Efecto | Agrega un nuevo elemento en la cola $C$, de manera que este elemento quede en la parte de atrás de la cola. |
| Requiere | Cola $C$ inicializada. |
| Modifica | Cola $C$. |

Sacar(cola $C$):

| Cláusulas de Sacar(cola $C$) | |
|---|---|
| Efecto | Borra el primer elemento en cola $C$. |
| Requiere | Cola $C$ inicializada y con al menos un elemento. |
| Modifica | Cola $C$. |

Frente(cola $C$), devuelve algo de tipo elemento:

| Cláusulas de Frente(cola $C$) | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve el primer elemento en cola $C$. |

| | |
|---|---|
| Requiere | Cola $C$ inicializada y con al menos un elemento. |
| Modifica | No aplica. |

### 4.1.2 Modelo pila

#### 4.1.2.1 Definición del modelo pila

Según el libro *Estructura de datos y algoritmos* de Alfred V. Aho, Jeffrey D. Ullman y John E. Hopcroft: una pila es un tipo especial de lista en la que todas las inserciones y supresiones tienen lugar en un extremo denominado *tope*. A menudo a las pilas también se les conoce como "LIFO" o listas "último en entrar, primero en salir".

#### 4.1.2.2 Definición de operadores básicos

Iniciar(pila $P$):

| Cláusulas de Iniciar(pila $P$) | |
|---|---|
| Efecto | Inicializa la pila $P$ como vacía. |
| Requiere | No aplica. |
| Modifica | Pila $P$. |

Destruir(pila $P$):

| Cláusulas de Destruir(pila $P$) | |
|---|---|
| Efecto | Destruye la pila $P$, dejándola inutilizable. |
| Requiere | Pila $P$ inicializada. |
| Modifica | Pila $P$. |

Vaciar(pila $P$):

| Cláusulas de Vaciar(pila $P$) | |
|---|---|
| Efecto | Vacía pila $P$, dejándola con 0 elementos. |
| Requiere | Pila $P$ inicializada. |
| Modifica | Pila $P$. |

Vacía(pila $P$), devuelve algo de tipo booleano:

| Cláusulas de Vacía(pila $P$) | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve verdadero si pila $P$ vacía y falso si no. |
| Requiere | Pila $P$ inicializada. |
| Modifica | No aplica. |

Poner(elemento $e$, pila $P$):

| Cláusulas de Vacía(pila $P$) | |
|---|---|
| Efecto | Agrega un nuevo elemento en la pila $P$. |
| Requiere | Pila $P$ inicializada. |
| Modifica | Pila $P$. |

Quitar(pila $P$):

| Cláusulas de Quitar(pila $P$) | |
|---|---|
| Efecto | Borra el último elemento que se puso en pila $P$. |
| Requiere | Pila $P$ inicializada y con al menos un elemento. |
| Modifica | Pila $P$. |

Tope(pila $P$), devuelve algo de tipo elemento:

| Cláusulas de Tope(pila $P$) | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve el último elemento que se puso en pila $P$. |
| Requiere | Pila $P$ inicializada y con al menos un elemento. |
| Modifica | No aplica. |

### 4.1.3 Modelo árbol $n$-ario

#### 4.1.3.1 Definición del árbol $n$-ario

Según el libro *Estructura de datos y algoritmos* de Alfred V. Aho, Jeffrey D. Ullman y John E. Hopcroft: en general, un árbol impone una estructura jerárquica sobre una colección de objetos. En específico, un árbol es una colección de elementos llamados *nodos*, uno de los cuales se distingue como *raíz*, junto con una relación de "paternidad" que impone una estructura jerárquica sobre los nodos. Un nodo, como un elemento de una lista, puede ser del tipo que se desee. A menudo se representa un nodo por medio de una letra, una cadena de caracteres o un círculo con un número en su interior. Formalmente, un árbol se puede definir de manera recursiva como sigue:

(1) Un solo nodo es, por sí mismo, un árbol. Ese nodo es también la raíz de dicho árbol.
(2) Supóngase que $n$ es un nodo y que $A_1, A_2, ..., A_k$ son árboles con raíces $n_1, n_2, ..., n_k$, respectivamente. Se puede construir un nuevo árbol haciendo que $n$ se constituya en el padre de los nodos $n_1, n_2, ..., n_k$. En dicho árbol, $n$ es la raíz y $A_1, A_2, ..., A_k$ son los *subárboles* de la raíz. Los nodos $n_1, n_2, ..., n_k$ reciben el nombre de *hijos* del nodo $n$.

Además, dos árboles $A_1$ y $A2$, son iguales sí y solo sí todos los hijos de cada nodo $n_{1,1}, n_{1,2}, ..., n_{1,m}$ del árbol $A_1$, se encuentra en el mismo orden que los hijos de los nodos $n_{2,1}, n_{2,2}, ..., n_{2,m}$ del árbol $A_2$. Es decir, importa el orden entre los hijos.

#### 4.1.3.2 Definición de operadores básicos

Crear(árbol $A$):

| Cláusulas de Crear(árbol $A$) | |
|---|---|
| Efecto | Inicializa el árbol $A$ como vacío. |
| Requiere | No aplica. |
| Modifica | Árbol $A$. |

Destruir(árbol $A$):

| Cláusulas de Destruir(árbol $A$) | |
|---|---|
| Efecto | Destruye el árbol $A$, dejándolo inutilizable. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado. |
| Modifica | Árbol $A$. |

Vaciar(árbol $A$):

| Cláusulas de Vaciar(árbol $A$) | |
|---|---|
| Efecto | Vacía árbol $A$, dejándolo sin etiquetas. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado. |
| Modifica | Árbol $A$. |

Vacío(árbol $A$), devuelve algo de tipo booleano:

| Cláusulas de Vacío(árbol $A$) | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve verdadero si árbol $A$ vacío y falso si no. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado. |
| Modifica | No aplica. |

PonerRaíz(elemento $e$, árbol $A$):

| Cláusulas de PonerRaíz(elemento $e$, árbol $A$) | |
|---|---|
| Efecto | Agrega la raíz de árbol $A$. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado y con 0 elementos. |
| Modifica | Árbol $A$. |

AgregarHijo(elemento $e$, nodo $n$, árbol $A$):

| Cláusulas de AgregarHijo(etiqueta $e$, nodo $n$, árbol $A$) | |
|---|---|
| Efecto | Le agrega un nuevo hijo al nodo $n$ con etiqueta $e$ en árbol $A$. |

Requiere Árbol $A$ inicializado y $n$ válido en $A$.
Modifica Árbol $A$.

BorrarHoja(nodo $n$, árbol $A$):

| Cláusulas de BorrarHoja(nodo $n$, árbol $A$) |
|---|
| Efecto Elimina la hoja $n$ en árbol $A$. |
| Requiere Árbol $A$ inicializado, $n$ válido en $A$ y $n$ hoja. |
| Modifica Nodo $n$ en árbol $A$. |

ModificarEtiqueta(etiqueta $e$, nodo $n$, árbol $A$):

| Cláusulas de ModificarEtiqueta(etiqueta $e$, nodo $n$, árbol $A$) |
|---|
| Efecto Modifica la etiqueta del nodo $n$ por $e$ en árbol $A$. |
| Requiere Árbol $A$ inicializado y nodo $n$ válido en $A$. |
| Modifica Nodo $n$ en árbol $A$. |

Raíz(árbol $A$), devuelve algo de tipo nodo:

| Cláusulas de Raíz(árbol $A$) |
|---|
| Efecto Devuelve el nodo raíz en árbol $A$. |
| Requiere Árbol $A$ inicializado y con al menos 1 elemento. |
| Modifica No aplica. |

Padre(nodo $n$, árbol $A$), devuelve algo de tipo nodo:

| Cláusulas de Padre(nodo $n$, árbol $A$) |
|---|
| Efecto Devuelve el nodo padre del nodo $n$ en árbol $A$. |
| Requiere Árbol $A$ inicializado y nodo $n$ válido en $A$. |
| Modifica No aplica. |

HijoMásIzquierdo(nodo $n$, árbol $A$), devuelve algo de tipo nodo:

| Cláusulas de HijoMásIzquierdo(nodo $n$, árbol $A$) |
|---|
| Efecto Devuelve el hijo más izquierdo del nodo $n$ en árbol $A$. |
| Requiere Árbol $A$ inicializado y $n$ válido en $A$. Si el nodo $n$ no tiene hijos, este método devuelve *nodoNulo*. |
| Modifica No aplica. |

HermanoDerecho(nodo $n$, árbol $A$), devuelve algo de tipo nodo:

| Cláusulas de HermanoDerecho(nodo $n$, árbol $A$) | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve el hermano derecho del nodo $n$ en árbol $A$. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado y $n$ válido en $A$. Si el nodo $n$ no tiene hermanos derechos, este método devuelve *nodoNulo*. |
| Modifica | No aplica. |

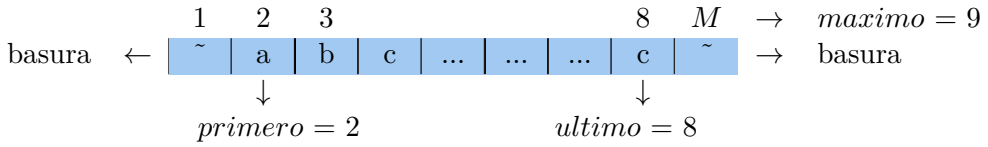
Etiqueta(nodo $n$, árbol $A$), devuelve algo de tipo etiqueta:

| Cláusulas de Etiqueta(nodo $n$, árbol $A$) | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve la etiqueta del nodo $n$ en árbol $A$. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado y $n$ válido en $A$. |
| Modifica | No aplica. |

## 4.2 Estructuras de datos

### 4.2.1 Arreglo circular

#### 4.2.1.1 Diagrama y descripción




La estructura de datos arreglo circular, es una estructura implementada en memoria estática. Esta consiste, en un arreglo normal, que de manera lógica se le convierte en un arreglo circular, es decir, lo que lo hace circular es la manera en la que se manejan los elementos en el arreglo. Para poder darle la lógica circular a un arreglo, es necesario hacer varias cosas:

- Debe haber un apuntador al primero (*primer*).
- Debe haber un apuntador al último (*ultimo*).
- En caso de que $ultimo = maximo$, pero $maximo \; ! = n$, entonces, se deberá agregar apartir del índice 1.
- Cuando el arreglo se encuentre vacío, $ultimo = 0$ y $primero = 1$.
- Cuando el arreglo se encuentre lleno, $ultimo = 0$ y $primero = 1$. Como no se hace distinción del arreglo lleno o vacío, se pueden tomar tres caminos:
  - Definir el arreglo de tamaño $M + 1$.
  - Agregarle un tipo booleano a la estructura, que indique si está o no vacía.
  - Agregarle un tipo entero a la estructura, que indique el número de elementos.

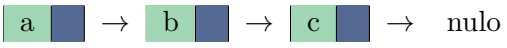
#### 4.2.1.2 Descripción en C++

modeloCola.h:

```
1     class modeloCola{
2
3               private:
4
5          int numElem;
6          int primero;
7           int ultimo;
8     int arreglo[100];
9
10               public:
11
12     modeloCola();
13     void crear();
14     void destruir();
15     void vaciar();
16     bool vacia();
17     void agregar(int elemento);
18     void sacar();
19     int frente();
20
21 };
```

### 4.2.2 Lista simplemente enlazada

#### 4.2.2.1 Diagrama y descripción




La estructura de datos lista simplemente enlazada, es una estructura en memoria dinámica implementada por punteros. Consiste en definir un primer puntero, el cual apuntará a un segundo puntero y así sucesivamente.

En una lista simplemente enlazada, los accesos se hacen a través de punteros, a diferencia del arreglo, en el cual se hacen mediante índices. Además, en la lista simplemente enlazada los elementos son contiguos, es decir, no hay posiciones vacías.

#### 4.2.2.2 Descripción en C++

cajita.h:

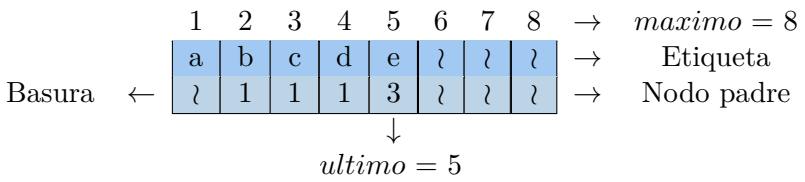
```
1  class modeloPila{
2
3  private:
4
5      cajita* siguiente;
6      int elemento;
7
8  public:
9
10     cajita();
11     cajita(int e);
12      cajita();
13     void setSiguiente;
14     cajita* getSiguiente();
15     void setElemento(int e);
16     int getElemento();
17
18 };
```

modeloPila.h:

```
1  class modeloPila{
2
3  private:
4
5      cajita* primero;
6
7  public:
8
9      modeloPila();
10     void crear();
11     void destruir();
12     void vaciar();
13     bool vacia();
14     void poner(int elemento);
15     void quitar();
16     int tope();
17
18 };
```

### 4.2.3 Arreglo con señalador al padre

#### 4.2.3.1 Diagrama y descripción




Un arreglo con señalador al padre, es un arreglo normal en memoria dinámica, pero donde una posición contiene dos tipos distintos, que son la etiqueta y el nodo padre de esa etiqueta.

- Hay un señalador al último lleno.
- La raíz está en la primer posición, y en el campo del padre de la raíz, siempre hay basura (el espacio se desperdicia).
- Los hijos siempre están después del padre.

#### 4.2.3.2 Descripción en C++

cajitasap.h:

```
1  class cajitasap{
2
3  private:
4
5      int etiqueta;
6      int padre;
7
8  public:
9
10     void setEtiqueta(int e);
11     int getEtiqueta();
12     void setPadre();
13     int getPadre();
14
15 };
```

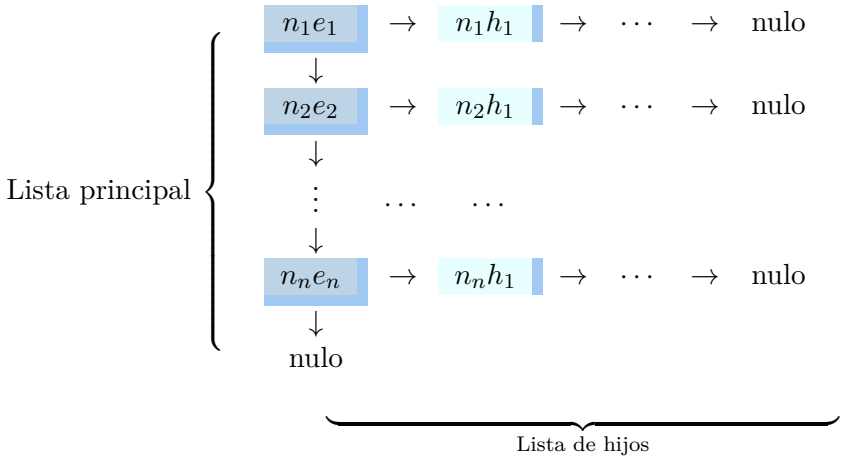
ArregloSeñAlPadre.h:

```
1  typedef int nodo;
2
3  class arbol{
4
5  private:
6
7      nodo ultimo;
8      cajitasap arreglo[100];
9      int numElem;
```

```
10
11  public:
12
13      arbol();
14      ~arbol();
15      void crear();
16      void destruir();
17      void vaciar();
18      bool vacio();
19      void ponerRaiz();
20      void arregarHijo();
21      void borrarHoja(nodo n);
22      nodo raiz();
23      nodo padre(nodo n);
24      nodo hijoMasIzq(nodo n);
25      nodo hermanoDer(nodo n);
26      nodo etiqueta(nodo n);
27      int nodo(int etiqueta);
28
29  };
```

### 4.2.4 Lista de hijos

#### 4.2.4.1 Diagrama y descripción




La lista de hijos implementada por punteros, es una estructura de datos que consiste en una lista, que contiene todos los nodos y en donde cada nodo, señala a una lista donde están sus hijos.

Debido a que de la cantidad de nodos $n$, solo $n-1$ pueden ser hijos de alguien (la raíz no tiene padre), el tamaño máximo que puede tomar la lista de hijos, es de $n-1$, que es el caso en que la raíz es el padre de todos los $n-1$ nodos.

Además, en una lista de hijos, el primer nodo siempre es la raíz.

#### 4.2.4.2 Descripción en C++

cajitahijos.h:

```
1  class cajitaprincipal;{
2
3  class cajitahijos{
4
5  private:
6
7      cajitaprincipal* estenodo;
8      cajitahijos* siguiente;
9
10 public:
11
12     cajitahijos(cajitaprincial* en);
13     cajitahijos();
14     ~cajitahijos();
15     void setEsteNodo(cajitaprincipal* en);
16     cajitaprincipal* getEsteNodo();
17     void setSiguiente(cajitahijos* s);
18     cajitahijos* getSiguiente();
19
20 };
```

cajitaprincipal.h:

```
1  class cajitahijos;{
2
3  class cajitaprincipal{
4
5  private:
6
7      int etiqueta;
8      cajitaprincipal* siguiente;
9      cajitahijos* primero;
10
11 public:
12
13     cajitaprincipal(int e);
14     cajitaprincipal();
15     ~cajitaprincial();
16     void setEtiqueta(int e);
17     int getEtiqueta();
18     void setSiguiente(cajitaprincipal* s);
19     cajitaprincipal* getSiguiente();
20     void setPrimero(cajitahijos* p);
```

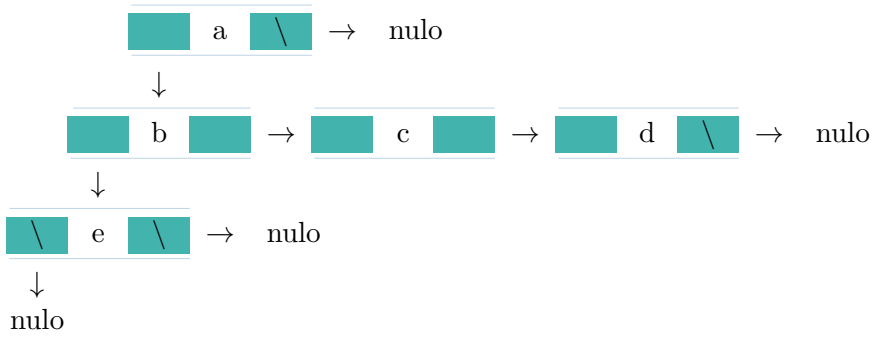
```
21      cajitahijos* getPrimero();
22
23  };
```

ListaHijos.h:

```
1   typedef cajitaprincipal* nodo;
2
3   class arbol{
4
5   private:
6
7       nodo raiz;
10
11  public:
12
13      arbol();
14      ~arbol();
15      void crear();
16      void destruir();
17      void vaciar();
18      bool vacio();
19      void ponerRaiz();
20      void arregarHijo();
21      void borrarHoja(nodo n);
22      nodo raiz();
23      nodo padre(nodo n);
24      nodo hijoMasIzq(nodo n);
25      nodo hermanoDer(nodo n);
26      nodo etiqueta(nodo n);
27      int nodo(int etiqueta);
28
29  };
```

### 4.2.5 Hijo más izquierdo- hermano derecho

#### 4.2.5.1 Diagrama y descripción



La estructura de datos Hijo más izquierdo- hermano derecho, es una estructura de datos recursiva, implementada mediante punteros.

Esta esstructura consiste en un serie de “cajitas” conformadas por tres campos: un puntero al hijo más izquierdo, la etiqueta y un puntero al hermano derecho.

En el caso de la raíz, como no tiene hermanos, el puntero correspondiente estará siempre en nulo.

#### 4.2.5.2 Descripción en C++

cajitahmi-hd.h:

```
1  class cajitahmihd{
2
3  private:
4
5      int etiqueta;
6      cajitahmihd* hijoMasIzq;
7      cajitahmihd* hermanoDer;
8
9  public:
10
11     cajitahmihd() :  hijoMasIzq(0), hermanoDer(0);
12     cajitahmihd(int e) :  etiqueta(e), hijoMasIzq(0)
       , hermanoDer(0);
13     ~cajitahmihd();
14     void setEtiqueta(int e);
15     int getEtiqueta();
16     void setHijoMasIzq(cajitahmihd* h);
17     cajitahmihd* getHijoMasIzq();
18     void setHermanoDer(cajitahmihd* h);
19     cajitahmihd* getHermanoDer();
20
21 };
```

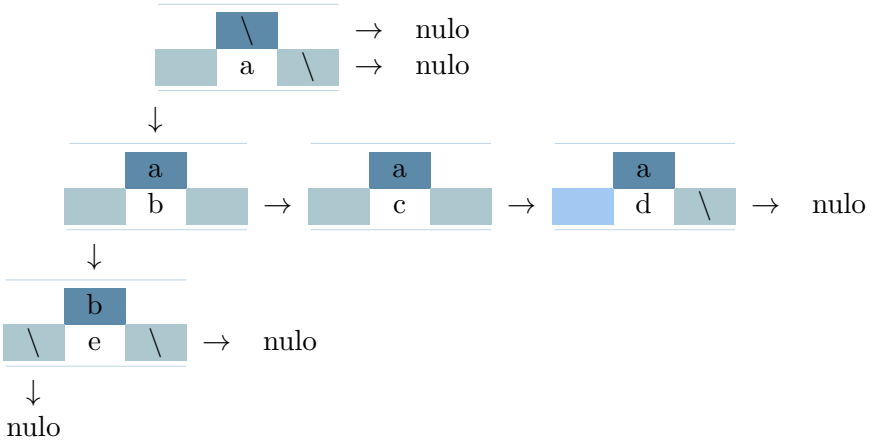
LMI-HD.h:

```
1  typedef cajitahmihd* nodo;
2
3  class arbol{
4
5  private:
6
7      nodo raiz;
8
9      destruirRec(nodo n);
10     vaciarRec(nodo n);
11     borrarHojaRec(nodo n);
12
```

```
13  public:
14
15      arbol();
16      ~arbol();
17      void crear();
18      void destruir();
19      void vaciar();
20      bool vacio();
21      void ponerRaiz();
22      void arregarHijo();
23      void borrarHoja(nodo n);
24      nodo raiz();
25      nodo padre(nodo n);
26      nodo hijoMasIzq(nodo n);
27      nodo hermanoDer(nodo n);
28      nodo etiqueta(nodo n);
29      int nodo(int etiqueta);
30
31  };
```

### 4.2.6 Hijo más izquierdo- hermano derecho-padre

#### 4.2.6.1 Diagrama y descripción




La estructura de datos Hijo más izquierdo- hermano derecho, con puntero al padre, es de igual manera una estructura de datos recursiva, implementada mediante punteros.

Esta esstructura consiste en un serie de "cajitas" conformadas por cuatro campos: un puntero al hijo más izquierdo, un puntero al padre, la etiqueta y un puntero al hermano derecho.

En el caso de la raíz, como no tiene hermanos, ni tampoco padre, los punteros correspondientes estarán siempre en nulo.

#### 4.2.6.2 Descripción en C++

cajitahmi-hd-p.h:

```
1  class cajitahmihdp{
2
3  private:
4
5      int etiqueta;
6      cajitahmihdp* hijoMasIzq;
7      cajitahmihdp* hermanoDer;
8      cajitahmihdp* padre;
9
10 public:
11
12     cajitahmihdp() :  hijoMasIzq(0), hermanoDer(0)
       , padre(0);
13     cajitahmihdp(int e, cajitahmihdp p) :  etiqueta(e)
       , hijoMasIzq(0), hermanoDer(0), padre(0);
14     ~cajitahmihdp();
15     void setEtiqueta(int e);
16     int getEtiqueta();
17     void setHijoMasIzq(cajitahmihdp* h);
18     cajitahmihdp* getHijoMasIzq();
19     void setHermanoDer(cajitahmihdp* h);
20     cajitahmihdp* getHermanoDer();
21     void setPadre(cajitahmihdp* p);
22     cajitahmihdp* getPadre();
23
24 };
```

LMI-HD-Padre.h:

```
1  typedef cajitahmihdp* nodo;
2
3  class arbol{
4
5  private:
6
7      nodo raiz;
8
9      destruirRec(nodo n);
10     vaciarRec(nodo n);
11
12 public:
13
```

```
14      arbol();
15      ~arbol();
16      void crear();
17      void destruir();
18      void vaciar();
19      bool vacio();
20      void ponerRaiz();
21      void arregarHijo();
22      void borrarHoja(nodo n);
23      nodo raiz();
24      nodo padre(nodo n);
25      nodo hijoMasIzq(nodo n);
26      nodo hermanoDer(nodo n);
27      nodo etiqueta(nodo n);
28      int nodo(int etiqueta);
29
30  };
```

## 4.3 Algoritmos

### 4.3.1 Hermano izquierdo

#### 4.3.1.1 Definición y especifiación

El algoritmo busca el hermano izquierdo de un nodo $n$, en el árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de HerIzq(nodo $n$, árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve el hermano izquierdo del nodo $n$ en el árbol $A$. |
| Requiere | Nodo $n$ válido en árbol $A$ y $n$ en posición distinta de 1. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.1.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo utiliza el operadore básicos para obtener el padre del nodo $n$, luego recorre los hijos del padre hasta llenar al nodo anterior al nodo $n$, de manera que ese nodo, será el hermano izquierdo del nodo $n$.

### 4.3.2 Etiquetas repetidas

#### 4.3.2.1 Definición y especifiación

El algoritmo busca si el árbol $A$ tiene etiquetas retetidas, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de EtiquetasRepetidas(árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve verdadero si el árbol $A$ tiene etiquetas repetidas y falso si no. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.2.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo hace un recorrido en pre-orden por cada nodo en el árbol, de manera que determine si el nodo $n_1$ tiene la misma etiqueta que el nodo $n_2$, para $n_1 \neq n_2$.

### 4.3.3 Altura del nodo $n$

#### 4.3.3.1 Definición y especifiación

Averigua la altura del nodo $n$, en el árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de Altura(nodo $n$, árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve la altura del nodo $n$ en el árbol $A$. |
| Requiere | Nodo $n$ válido en árbol $A$. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.3.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo hace un recorrido en pre-orden y con ayuda de un contador, determina la altura de un nodo.

### 4.3.4 Profundidad del nodo $n$

#### 4.3.4.1 Definición y especifiación

Averigua la profundidad del nodo $n$, en el árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de Profundidad(nodo $n$, árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve la profundidad del nodo $n$ en el árbol $A$. |
| Requiere | Nodo $n$ válido en árbol $A$. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.4.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo se devuelve de padre en padre, a partir de nodo $n$, llevando un contador para

determinar la altura del nodo $n$.

### 4.3.5 Niveles del árbol

#### 4.3.5.1 Definición y especifiación

Averigua los niveles del árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de Niveles(nodo $n$, árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve los niveles del árbol $A$. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.5.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo recorre en pre-orden el árbol, llevando un contador, de manera que cuando llegue a una raíz, compruebe si la mayor nivel hasta el momento es menor al nivel hasta esa hoja y de esta manera, modificarlo.

### 4.3.6 Etiquetas del $i$-ésimo nivel

#### 4.3.6.1 Definición y especifiación

Lista las etiquetas del nodos en el $i$-ésimo nivel en el árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de EtiquetasNivel(nivel $i$, árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Lista los nodos del $i$-ésimo nivel en el árbol $A$. |
| Requiere | Nivel $i$ válido en árbol $A$. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.6.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo llegar al $i$-ésimo nivel y a partir de ahí, hace un recorrido secuencial, listando las etiquetas de ese nivel.

### 4.3.7 Listar hijos del nodo $n$

#### 4.3.7.1 Definición y especifiación

Lista las etiquetas de los hijos del nodo $n$, en el árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de EtiquetasHijos(nodo $n$, árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Listar los hijos del nodo $n$ en el árbol $A$. |
| Requiere | Nodo $n$ válido en árbol $A$ y $n$ con al menos un hijo. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.7.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo hace un recorrido secuencial a partir del hijo más izquierdo del nodo $n$, hasta listar todos sus hijos.

### 4.3.8 Cantidad de nodos del árbol

#### 4.3.8.1 Definición y especifiación

Averigua la cantidad de nodos del árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de CantidadNodos(árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve la cantidad de nodos del árbol $A$. |
| Requiere | Árbol $A$ con al menos un nodo. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.8.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo hace un recorrido en pre-orden y con ayuda de un contador determina la cantidad de nodos que tiene el árbol.

### 4.3.9 Borrar a partir del nodo $n$

#### 4.3.9.1 Definición y especifiación

Borra el sub-árbol generado a partir del nodo $n$, en el árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de BorrarSubArbol(nodo $n$, árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Borra el sub-árbol que se genera a partir del nodo $n$ en el árbol $A$. |
| Requiere | Nodo $n$ válido en árbol $A$ y $n$ con al menos un hijo. |
| Modifica | Árbol $A$. |

#### 4.3.9.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo hace un recorrido en pre-orden a partir de nodo $n$, de manera que borra desde las primeras hojas, para lograr que en algún momento todos los nodos sean hojas y así borrarlos.

### 4.3.10 Borrar nodo $n$ y trasladar

#### 4.3.10.1 Definición y especifiación

Borra el nodo $n$, tal que el sub-árbol generado a partir de $n$ se traslada al padre de $n$, en el árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de BorrarYTrasladar(nodo $n$, árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Borra el nodo $n$ y tralada el sub-árbol generado a partir del nodo $n$ al padre de $n$, en el árbol $A$. |
| Requiere | Nodo $n$ válido en árbol $A$ y $n$ con al menos un hijo. |
| Modifica | Árbol $A$. |

#### 4.3.10.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo primero copia el sub-árbol generado a partir del nodo $n$ en un árbol auxiliar y a partir de ahí, lo copia de nuevo en árbol original, conservando la posición de los nodos.

### 4.3.11 Averiguar si dos árboles son iguales

#### 4.3.11.1 Definición y especifiación

Averigua si el árbol $A$ es igual al árbol $B$, usando los operadores básicos del árbol $n$-ario.

Cláusulas de Iguales(árbol $A$, árbol $B$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve verdadero si el árbol $A$ es igual al árbol $B$ y falso si no. |
| Requiere | Árboles $A$ y $B$ inicializados. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.11.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo hace un recorrido en pre-orden de ambos árboles a la vez y en el momento en que un nodo $n_a$ del árbol $A$ tenga etiqueta distinta a su nodo $n_b$ correspondiente en el árbol $B$, determina que estos árboles no son iguales. De igual manera, si los árboles no tienen la misma estructura o la misma cantidad de nodos, determina que estos no son iguales.

### 4.3.12 Listar árbol en pre-orden

#### 4.3.12.1 Definición y especifiación

Lista en pre-orden los nodos del árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de ListarPreOrden(árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Lista en pre-orden el árbol $A$. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.12.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo realiza un recorrido en pre-orden, listando las etiquetas de los nodos del árbol $A$.

### 4.3.13 Listar árbol en post-orden

#### 4.3.13.1 Definición y especifiación

Lista en post-orden los nodos del árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de ListarPostOrden(árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Lista en post-orden el árbol $A$. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.13.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo realiza un recorrido en post-orden, listando las etiquetas de los nodos del árbol $A$.

### 4.3.14 Listar árbol en in-orden

#### 4.3.14.1 Definición y especifiación

Lista en in-orden los nodos del árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de ListarInOrden(árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Lista en in-orden el árbol $A$. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.14.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo realiza un recorrido en in-orden, listando las etiquetas de los nodos del árbol $A$.

### 4.3.15 Listar árbol por niveles

#### 4.3.15.1 Definición y especifiación

Lista por niveles los nodos del árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario y el modelo auxiliar cola.

Cláusulas de ListarPorNiveles(árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Lista por niveles el árbol $A$. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.15.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo realiza un recorrido por niveles, con la ayuda del modelo auxiliar pila, listando las etiquetas de los nodos del árbol $A$.

### 4.3.16 Listar árbol en pre-orden, con Pila

#### 4.3.16.1 Definición y especifiación

Lista en pre-orden los nodos del árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario y usando el modelo auxiliar cola, para simular la recursividad.

Cláusulas de ListarPreOrdenPila(árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Lista en pre-orden el árbol $A$, usando el modelo auxiliar pila. |
| Requiere | Árbol $A$ inicializado. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.16.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo realiza un recorrido en pre-orden, simulando la recursividad que provee el compilador, con ayuda del modelo auxiliar pila. De esta manera, lista las etiquetas de los nodos del árbol $A$.

### 4.3.17 Buscar el nodo con etiqueta $e$

#### 4.3.17.1 Definición y especifiación

Busca el nodo correspondiente a la etiqueta $e$, en el árbol $A$, usando los operadores básicos del modelo árbol $n$-ario.

Cláusulas de Nodo(árbol $A$)

| | |
|---|---|
| Efecto | Devuelve el nodo con etiqueta $e$ en el árbol $A$. |
| Requiere | Nodo $n$ válido en arbol $A$. |
| Modifica | No aplica. |

#### 4.3.17.2 Descripción, detalles, pseudolenguaje

El algoritmo realiza un recorrido en pre-orden, preguntando por la etiqueta de cada nodo, hasta encontrar al nodo correspondiente a la etiqueta $e$.

# 5 Manual de usuario

## 5.1 Requerimientos de hardware

- Procesador Inter(R) Core(TM) i5-4200U CPU @ 1.60GHz
- Ram 6,00 GB

## 5.2 Requerimientos de software

- Sistema operativo Windows 10
- Arquitectura 64 bits
- Ambiente Code::Blocks

## 5.3 Requerimientos de software

- 64 bits

## 5.4 Compilación

- GNU GCC compiler

## 5.5 Especificación de las funciones del programa

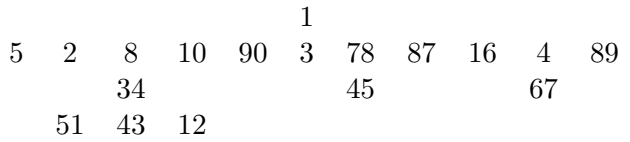
- Antes de utilizar cualquier modelo, es necesario seleccionar la opción “Crear”.
- Los modelos “Cola” y “Pila” trabajan con tipo de datos entero, al agregar un elemento en alguno de estos modelos, asegúrese de que sean enteros.
- El modelo árbol, trabaja por posiciones, al agregar una nueva etiqueta, asegúrese de que la posición que se elija sea una válida para la estructura que tenga el árbol en ese momento.
- El modelo árbol, trabaja con etiquetas de manera que no hayan etiquetas repetidas, asegúrese de no introducir etiquetas repetidas excepto en el caso en que se desee trabajar con el algoritmo que determina si hay etiquetas repetidas.
- En todas las estructuras de datos, asegúrese de hacer sus operaciones con elementos y/o etiquetas que formen parte del modelo.
- Una vez que se regrese a donde esté la opción de trabajar con un modelo, en caso de que no hay estado trabajando con un modelo anteriormente, este modelo se destruirá.

En caso de que no se sigan las indicaciones anteriores, no se asegura el correcto funcionamiento ni de la estructura, ni de las distintas operaciones que desee utilizar.

# 6 Datos de prueba

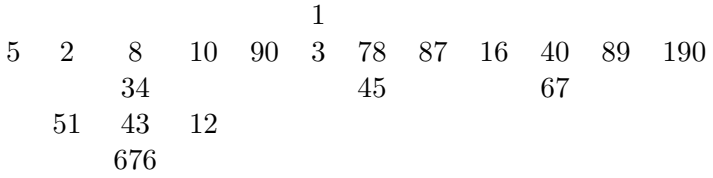
## 6.1 Formato de las prueba

Para las pruebas generales, se eligió un árbol 1 con la siguiente estructura:

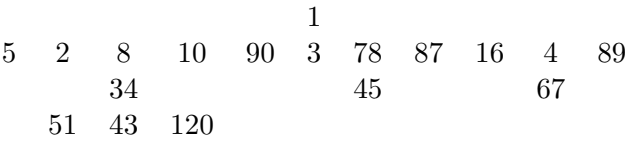



Donde se interpreta como que la raíz del árbol es 1, sus hijos son 5, 2, 8, 10, 90, 3, 78, 87, 16, 4 y 89. 8 tiene un solo hijo que es 34 y este, tiene tres hijos 51, 43 y 12. 78 tiene un único hijo que es 45 y 4 también tiene un único hijo, que es 67.

Además, para las pruebas del algoritmo que determina si dos árboles son iguales, se elijió el árbol 2, con la siguiente estructura:




, el árbol 3, con la siguiente estructura:




y el árbol 2, modificándolo de manera que quede con la misma estructura que el árbol 1.

## 6.2 Salida esperada

Los algoritmos arrojaron las siguientes respuestas:

| Algoritmo | # de prueba | Prueba | Resultado |
|---|---|---|---|
| Hermano izquierdo | Prueba 1 | Hermano izquierdo de 12? | 43 |
| | Prueba 2 | Hermano izquierdo de 89? | 4 |
| Etiquetas repetidas | | | |
| Altura de nodo $n$ | Prueba 1 | Altura de 12? | 0 |
| | Prueba 2 | Altura de 1? | 3 |
| | Prueba 3 | Altura de 78? | 1 |
| Profundidad de nodo $n$ | Prueba 1 | Profundidad de 12? | 3 |
| | Prueba 2 | Profundidad de 1? | 0 |
| | Prueba 3 | Profundidad de 45? | 2 |
| Niveles del árbol | Prueba 1 | $--$ | 4 |
| Etiquetas $i$-ésimo nivel | Prueba 1 | Nivel 2 | 5.2.8.10.90.3.78.87.16.4.89 |
| | Prueba 2 | Nivel 3 | 34.45.67 |
| Etiquetas hijos del nodo $n$ | Prueba 1 | Hijos de 1 | 5.2.8.10.90.3.78.87.16.4.89 |
| | Prueba 2 | Hijos de 34 | 51.43.12 |
| Cantidad de nodos | Prueba 1 | $--$ | 18 |
| Borrar sub-árbol | Prueba 1 | 78 | Funcionó |
| Borrar sub-árbol y trasladar | Prueba 1 | 8 | Funcionó |
| Copiar un árbol | Prueba 1 | Árbol 1 en 2 | Funcionó |
| Son iguales | Prueba 1 | Árbol 1 y 2 | No son iguales |
| | Prueba 2 | Árbol 1 y 2 modificado | Son iguales |
| | Prueba 3 | Árbol 3 y 1 | No son iguales |
| | Prueba 4 | Árbol 2 y 2 | Son iguales |
| Listar pre-orden | Prueba 1 | $--$ | 1.5.2.8.34.51.43.12.10.90.3 78.45.87.16.4.67.89 |
| Listar post-orden | Prueba 1 | $--$ | 5.2.51.43.12.34.8.10.90.3.45 78.87.16.67.4.89.1 |
| Listar in-orden | Prueba 1 | $--$ | 5.1.2.51.34.43.12.8.10.90.3 45.78.87.16.67.4.89 |
| Listar por niveles | Prueba 1 | $--$ | 1.5.2.8.10.90.3.78.87.16.4 89.34.45.67.51.43.12 |
| Listar pre-orden pila | Prueba 1 | $--$ | 1.5.2.8.34.51.43.12.10.90.3 78.45.87.16.4.67.89 |
| Nodo de etiqueta | Prueba 1 | Etiqueta de 90 | Nodo con etiqueta 90 |
| Nodo de etiqueta | Prueba 2 | Etiqueta de 12 | Nodo con etiqueta 12 |

## 6.3 Salida obtenida (análisis en caso de fallo)

Los análisis arrojaron los resultados esperados en todos los casos de prueba.

# 7 Análisis de algoritmos

## 7.1 Listado y justificación de modelos, operadores y estructuras de datos a analizar

### 7.1.1 Listado y justificación de modelos y estructuras de datos

- Modelo árbol
  - Arreglo con señalador al padre
  - Lista de hijos
  - Hijo más izquierdo- hermano derecho
  - Hijo más izquierdo- hermano derecho- señalador al padre
- Modelo cola
- Modelo pila

### 7.1.2 Operadores

- Operadores básicos
  - Padre
  - Hijo más izquierdo
- Algoritmos
  - Listar en pre-orden
  - Listar en pre-orden con modelo auxiliar pila
  - Listar por niveles con modelo auxiliar cola
  - Borrar sub-árbol
  - Listar etiquetas de los hijos del nodo $n$
  - Profundidad

Se tomaron dichos operadoradores básicos ya que son de los utilizados para hacer recorridos por árbol y además sus órdenes de duración varian bastante de estructura a estructura.

Por otro lado, los primeros tres algoritmos (los algoritmos para hacer recorridos por el árbol) se tomaron porque muchos algoritmos ocupan realizar este tipo de recorridos por el árbol. Por ejemplo, el algoritmo de copiar un árbol recorre el árbol por níveles para seleccionar cada nodo. De igual forma el algoritmo de borrar un nodo cualquiera y el sub-árbol que este nodo conforma realiza un recorrido profundidad primero.

Continuando con el argumento anterior, al conocer los órdenes de duración de realizar diferentes recorridos, conocemos el orden de duración de muchos otros algoritmos, por lo tanto para los otros tres algoritmos intentamos escoger algoritmos que no realizar recorridos por ello escogimos el algoritmo de profundidad y el algoritmo de listar etiquetas de un hijo. Sin embargo, también se quería utilizar el operador borrarHoja.

## 7.2 Casos de estudio, tipos de entrada, tamaños de entrada, diseño de experimentos

El análisis realizado, se basó en dos operadores básicos (padre, hijo más izquierdo) y seis algoritmos (listar en pre-orden, listar en pre-orden con modelo auxiliar pila, listar por niveles, borrar sub-árbol, listar etiquetas de los hijos del nodo $n$ y profundidad), además de trabajar con las distintas estructuras de datos.

Para realizar este análisis, las $n$'s tomadas, varian de una estructura a otra y de un algoritmo a otro. Lo anterior, debido a que no todas las estructuras soportan los mismos valores de $n$'s (por ejemplo el arreglo con señalador al padre) y no todos los algoritmos, soportan, de igual manera, los mismos valores de $n$'s. De haber tomado los mismos valores (un valor que todas las estructuras y algoritmos pudieran aguantar) no se hubiera podido observar ningún tipo de comportambiento. En general se trato de utilizar valores donde se pudiera apreciar una diferencia notable en los tiempos dados por el compilador.

Además de realizar el análisis para las cuatro estructuras de datos, para cada estructura se usó tres tipos distintos de árboles. Se trabajo con un árbol generado aleatoriamente (esto se logró utilizando un recorrido por níveles por el árbol conforme se iba creando: ver documento anexo para el código), de manera que cada nodo tiene entre 1 y 10 hijos y así sucesivamente hasta llegar al máximo de nodos. También se trabajó con un árbol que se extiende solamente a lo ancho, y la cantidad de niveles es solamente 2, esto quiere decir que todos los nodos son hijos de la raíz. Finalmente se trabajó con un árbol que solamente crece en profundidad, esto quiere decir que cada nodo solamente tiene un hijo y que este árbol tiene tantos níveles como nodos.

Esto con el fin de apreciar el comportamiento en los casos extremos que muchas veces son también peores casos para distintos algoritmos.

Los siguientes fueron las distintas $n$'s utilizadas:

| | Algoritmos recursivos | Algoritmos u opera. no recursivos | Arreglo con señalador al padre (árbol desbalan.) | Modelo auxiliar pila pila |
|---|---|---|---|---|
| Pequeña | 4 000 | 500 000 | 500 | 500 |
| Mediana | 16 000 | 5 000 000 | 5 000 | 1 500 |
| Grande | 32 000 | 50 000 000 | 50 000 | 3 500 |

## 7.3 Datos encontrados, tiempos y espacio presentados en tablas y gráficos

Los tiempos reales de duración medidos por el programa fueron:
**Tiempos reales de ejecución para el árbol desbalanceado.**

Operadores básico Padre:

Table 1

| Tiempos reales para el operador básico en el árbol desbalanceado | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de elemento | Resultados |
| Array con Señalador al padre | Prueba 1. 49 998 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 4 998 | 0 segundos |

| | | |
|---|---|---|
| | Prueba 3. 498 | 0 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 49 999 998 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 4 999 998 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 499 998 | 0 segundos |
| Hijo más izquierdo-hermano derecho | Prueba 1. 49 999 998 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 4 999 998 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 499 998 | 0 segundos |
| Hijo más izquierdo-Hermano derecho-selañador al padre | Prueba 1. 49 999 998 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 4 999 998 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 499 998 | 0 segundos |

Operadores básico Hijo más izquierdo:

Table 2

| Tiempos reales para el operador básico en el árbol desbalanceado | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de elemento | Resultados |
| Array con Señalador al padre | Prueba 1. 49 998 | 0.002 segundos |
| | Prueba 2. 4 998 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 498 | 0 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 49 999 998 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 4 999 998 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 499 998 | 0 segundos |
| Hijo más izquierdo-hermano derecho | Prueba 1. 49 999 998 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 4 999 998 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 499 998 | 0 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 49 999 998 | 0 segundos |
| Hermano derecho-selañador al padre | Prueba 2. 4 999 998 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 499 998 | 0 segundos |

Algoritmo de listar pre-orden:

Table 3

| Tiempos reales para el algoritmo en el árbol desbalanceado | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de elementos | Resultados |
| Array con Señalador al padre | Prueba 1. 32 000 elementos | 12.022 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 7.902 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 2.982 segundos |
| | Prueba 4. 3 500 elementos | 2.989 segundos |
| | Prueba 5. 1 500 elementos | 1.589 segundos |
| | Prueba 6. 100 elementos | 0.020 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 32 000 elemento | 11.7422 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 6.41 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 1.9074 segundos |
| | Prueba 4. 3 500 elementos | 1.875 segundos |

| | | |
|---|---|---|
| | Prueba 5. 1 500 elementos | 0.718 segundos |
| | Prueba 6. 100 elementos | 0.046 segundos |
| Hijo más izquierdo-hermano derecho | Prueba 1. 32 000 elementos | 9.382 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 5.480 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 1.203 segundos |
| | Prueba 4. 3 500 elementos | 1.001 segundos |
| | Prueba 5. 1 500 elementos | 0.549 segundos |
| | Prueba 6. 100 elementos | 0.010 segundos |
| Hijo más izquierdo-Hermano derecho-selañador al padre | Prueba 1. 32 000 elementos | 13.390 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 6.384 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 1.398 segundos |
| | Prueba 4. 3 500 elementos | 1.495 segundos |
| | Prueba 5. 1 500 elementos | 0.893 segundos |
| | Prueba 6. 100 elementos | 0.009 segundos |

Algoritmo de listar pre-orden con modelo auxiliar pila:

Table 4

| Tiempos reales para el algoritmo en el árbol desbalanceado | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de elementos | Resultados |
| Array con Señalador | Prueba 1. 3 500 elementos | 2.390 segundos |
| | Prueba 2. 1 500 elementos | 1.392 segundos |
| | Prueba 3. 100 elementos | 0.039 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 3 500 elementos | 2.125 segundos |
| | Prueba 2. 1 500 elementos | 1.046 segundos |
| | Prueba 3. 100 elementos | 0.124 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 3 500 elementos | 2.382 segundos |
| | Prueba 2. 1 500 elementos | 1.039 segundos |
| | Prueba 3. 100 elementos | 0.293 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 3 500 elementos | 2.989 segundos |
| | Prueba 2. 1 500 elementos | 1.893 segundos |
| | Prueba 3. 100 elementos | 0.034 segundos |

Algoritmo de listar por niveles con modelo auxiliar cola:

Table 5

| Tiempos reales para algoritmo en el árbol desbalanceado | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de elementos | Resultados |
| Array con Señalador al padre | Prueba 1. 49 998 elementos | 543.049 minutos |
| | Prueba 2. 4 998 elementos | 43.394 minutos |
| | Prueba 3. 498 elementos | 267.987 minutos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 49 999 998 elemento | 567.039 minutos |
| | Prueba 2. 4 999 998 elementos | 46.593 minutos |

| | | |
|---|---|---|
| | Prueba 3. 499 998 elementos | 198.271 minutos |
| Hijo más izquierdo-hermano derecho | Prueba 1. 49 999 998 elementos | 590.219 minutos |
| | Prueba 2. 4 999 998 elementos | 51.990 minutos |
| | Prueba 3. 499 998 elementos | 298.801 minutos |
| Hijo más izquierdo-Hermano derecho-selañador al padre | Prueba 1. 49 999 998 elementos | 543.049 minutos |
| | Prueba 2. 4 999 998 elementos | 43.394 minutos |
| | Prueba 3. 499 998 elementos | 267.978 minutos |

Algoritmo de listar las etiquetas de los hijos del nodo $n$:

Table 6

| Tiempos reales para algoritmo en el árbol desbalanceado | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba | Resultados |
| Array con Señalador al padre | Prueba 1. Elemento aleatorio | 0 segundos |
| | Prueba 2. Elemento aleatorio | 0 segundos |
| | Prueba 3. Elemento aleatorio | 0 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. Elemento aleatorio | 0 segundos |
| | Prueba 2. Elemento aleatorio | 0 segundos |
| | Prueba 3. Elemento aleatorio | 0 segundos |
| Hijo más izquierdo-hermano derecho | Prueba 1. Elemento aleatorio | 0 segundos |
| | Prueba 2. Elemento aleatorio | 0 segundos |
| | Prueba 3. Elemento aleatorio | 0 segundos |
| Hijo más izquierdo-Hermano derecho-selañador al padre | Prueba 1. Elemento aleatorio | 0 segundos |
| | Prueba 2. Elemento aleatorio | 0 segundos |
| | Prueba 3. Elemento aleatorio | 0 segundos |

Algoritmo de borrar sub-árbol generado a partir del nodo $n$:

Table 7

| Tiempos reales para el algoritmo en el árbol desbalanceado | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de nodos | Resultados |
| Array con Señalador | Prueba 1. 32 000 elementos | 3.674 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 1.938 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 0.234 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 32 000 elementos | 4.009 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 2.098 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 0.302 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 32 000 elementos | 6.392 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 2.192 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 0.203 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 32 000 elementos | 6.132 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 4.001 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 0.349 segundos |

Algoritmo de averiguar la profundidad del nodo $n$:

Table 8

| Tiempos reales para el algoritmo en el árbol desbalanceado | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y etiqueta de nodo | Resultados |
| Array con Señalador | Prueba 1. 32 000 elementos | 3.985 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 1.983 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 0.203 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 32 000 elementos | 45.893 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 11.891 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 1.031 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 32 000 elementos | 39.389 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 24.207 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 1.577 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 32 000 elementos | 41.928 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 27.371 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 3.290 segundos |

**Tiempos reales de ejecución para el árbol en el que la raíz tiene de hijos a todos los demás nodos.**

Operadores básico Padre:

Table 9

| Tiempos reales para el operador básico en el árbol ancho | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de elemento | Resultados |
| Array con Señalador al padre | Prueba 1. 50 000 000 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 5 000 000 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 500 000 | 0 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 50 000 000 | 10.94 minutos |
| | Prueba 2. 5 000 000 | 2.38 minutos |
| | Prueba 3. 500 000 | 0.290 segundos |
| Hijo más izquierdo-hermano derecho | Prueba 1. 50 000 000 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 5 000 000 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 500 000 | 0 segundos |
| Hijo más izquierdo-Hermano derecho-selañador al padre | Prueba 1. 50 000 000 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 5 000 000 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 500 000 | 0 segundos |

Operadores básico Hijo más izquierdo:

Table 10

| Tiempos reales para el operador básico en el árbol ancho | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba | Resultados |
| Array con Señalador al padre | Prueba 1 | 0 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1 | 0 segundos |
| Hijo más izquierdo-hermano derecho | Prueba 1 | 0 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1 | 0 segundos |

| | | |
|---|---|---|
| Hermano derecho-selañador al padre | | |

Algoritmo de listar pre-orden:

Table 11

| Tiempos reales para el algoritmo en el árbol ancho | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de elementos | Resultados |
| Array con Señalador al padre | Prueba 1. 32 000 elementos | 28.506 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 11.268 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 1.895 segundos |
| | Prueba 4. 3 500 elementos | 1.742 segundos |
| | Prueba 5. 1 500 elementos | 0.859 segundos |
| | Prueba 6. 100 elementos | 0.205 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 32 000 elemento | 48.54 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 30.439 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 8.344 segundos |
| | Prueba 4. 3 500 elementos | 8.320 segundos |
| | Prueba 5. 1 500 elementos | 5.43 segundos |
| | Prueba 6. 100 elementos | 2.32 segundos |
| Hijo más izquierdo-hermano derecho | Prueba 1. 32 000 elementos | 31.495 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 9.493 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 4.596 segundos |
| | Prueba 4. 3 500 elementos | 3.392 segundos |
| | Prueba 5. 1 500 elementos | 1.29 segundos |
| | Prueba 6. 100 elementos | 0.103 segundos |
| Hijo más izquierdo-Hermano derecho-selañador al padre | Prueba 1. 32 000 elementos | 29.902 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 14.329 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 2.001 segundos |
| | Prueba 4. 3 500 elementos | 1.283 segundos |
| | Prueba 5. 1 500 elementos | 0.909 segundos |
| | Prueba 6. 100 elementos | 0.010 segundos |

Algoritmo de listar pre-orden con modelo auxiliar pila:

Table 12

| Tiempos reales para el algoritmo en el árbol ancho | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de elementos | Resultados |
| Array con Señalador | Prueba 1. 32 000 elementos | 54.566 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 10.905 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 2.177 segundos |
| | Prueba 4. 3 500 elementos | 2.117 segundos |
| | Prueba 5. 1 500 elementos | 1.33 segundos |
| | Prueba 6. 100 elementos | 0.020 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 32 000 elementos | 73.492 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 29.769 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 10.21 segundos |
| | Prueba 4. 3 500 elementos | 10.02 segundos |
| | Prueba 5. 1 500 elementos | 4.24 segundos |
| | Prueba 6. 100 elementos | 0.201 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 32 000 elementos | 32.439 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 11.029 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 3.120 segundos |
| | Prueba 4. 3 500 elementos | 2.129 segundos |
| | Prueba 5. 1 500 elementos | 1.203 segundos |
| | Prueba 6. 100 elementos | 0.403 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 32 000 elementos | 31.28 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 11.332 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 1.992 segundos |
| | Prueba 4. 3 500 elementos | 1.83 segundos |
| | Prueba 5. 1 500 elementos | 0.9912 segundos |
| | Prueba 6. 100 elementos | 0.201 segundos |

Algoritmo de listar por niveles con modelo auxiliar cola:

Table 13

| Tiempos reales para algoritmo en el árbol ancho | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de elementos | Resultados |
| Array con Señalador al padre | Prueba 1. 50 000 000 elementos | 670.049 minutos |
| | Prueba 2. 5 000 000 elementos | 56.394 minutos |
| | Prueba 3. 500 000 elementos | 788.987 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 50 000 000 elemento | 950.049 minutos |
| | Prueba 2. 5 000 000 elementos | 100.394 minutos |
| | Prueba 3. 500 000 elementos | 120.978 segundos |
| Hijo más izquierdo- hermano derecho | Prueba 1. 50 000 000 elementos | 530.129 minutos |
| | Prueba 2. 4 500 000 elementos | 30.230 minutos |
| | Prueba 3. 499 998 elementos | 599.4923 segundos |
| Hijo más izquierdo- Hermano derecho- selañador al padre | Prueba 1. 50 000 000 elementos | 439.949 minutos |
| | Prueba 2. 5 000 000 elementos | 71.391 minutos |
| | Prueba 3. 500 000 elementos | 590.823 segundos |

Algoritmo de listar las etiquetas de los hijos del nodo $n$:

Table 14

| Tiempos reales para algoritmo en el árbol ancho | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de hijos | Resultados |
| Array con Señalador al padre | Prueba 1. 50 000 000 elementos | 450.839 minutos |
| | Prueba 2. 5 000 000 elementos | 102.281 minutos |
| | Prueba 3. Elemento aleatorio | 4.98 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 50 000 000 elementos | 800.239 segundos |
| | Prueba 2. 50 000 elementos | 392.129 segundos |
| | Prueba 3. 500 000 elementos | 120.978 segundos |
| Hijo más izquierdo-hermano derecho | Prueba 1. 50 000 000 elementos | 530.129 minutos |
| | Prueba 2. 50 000 elementos | 110.324 minutos |
| | Prueba 3. 500 000 elementos | 2.39 segundos |
| Hijo más izquierdo-Hermano derecho-selañador al padre | Prueba 1. 50 000 000 elementos | 399.312 minutos |
| | Prueba 2. 50 000 elementos | 130.219 minutos |
| | Prueba 3. 500 000 elementos | 5.32 segundos |

Algoritmo de borrar sub-árbol generado a partir del nodo $n$:

Table 15

| Tiempos reales para el algoritmo en el árbol ancho | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de hijos | Resultados |
| Array con Señalador | Prueba 1. 32 000 elementos | 43.73 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 26.532 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 15.43 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 32 000 elementos | 102.73 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 79.523 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 20.13 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 32 000 elementos | 30.33 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 10.233 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 7.23 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 32 000 elementos | 102.32 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 elementos | 49.493 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 elementos | 10.33 segundos |

Algoritmo de averiguar la profundidad del nodo $n$:

Table 16

| Tiempos reales para el algoritmo en el árbol ancho | | |
|---|---|---|
| Estructura de datos | Prueba y # de elemento | Resultados |
| Array con Señalador | Prueba 1. 32 000 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 | 0 segundos |
| Lista de Hijos | Prueba 1. 32 000 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 4 000s | 0 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 32 000 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 | 0 segundos |
| Hijo más izquierdo- | Prueba 1. 32 000 | 0 segundos |
| | Prueba 2. 16 000 | 0 segundos |
| | Prueba 3. 4 000 | 0 segundos |

**Tiempos reales de ejecución para el árbol semibalanceado.**

Table 17

| Tiempos reales de los algoritmos pre-orden, pre-orden pila, por niveles | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Estructura de datos | Tamaño $n$ | Pre-orden | Pre-orden | Por niveles |
| Arreglo con señalador al padre | 25 000 | 5 segundos | 8 segundos | 1 segundos |
| | 50 000 | 7 segundos | 14 segundos | 2 segundos |
| | 60 000 | 10 segundos | 19 segundos | 2 segundos |
| Lista de hijos | 10 000 | 1 segundos | 2 segundos | 2 segundos |
| | 20 000 | 5 segundos | 10 segundos | 5 segundos |
| | 40 000 | 21 segundos | 38 segundos | 21 segundos |
| | 80 000 | 86 segundos | 158 segundos | 87 segundos |
| Hijo más izquierdo- hermano derecho | 1 000 000 | 0 segundos | 1 segundos | 0 segundos |
| | 5 000 000 | 0 segundos | 8 segundos | 0 segundos |
| | 10 000 000 | 1 segundos | 15 segundos | 0 segundos |
| Hijo más izquierdo- hermano derecho- señalador al padre | 500 000 | 1 segundos | 8 segundos | 0 segundos |
| | 1 000 000 | 1 segundos | 15 segundos | 0 segundos |
| | 2 000 000 | 2 segundos | 29 segundos | 1 segundos |

Table 18

| Tiempos reales de borrar sub-árbol, listar hijos y profundidad | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Estructura | Tamaño $n$ | Borrar sub-árbol | Listar hijos | Profundidad |
| | | 10 corridas | 10 corridas | 10 corridas |
| Arreglo con | 1000000 | 2.05 segundos | 0 segundos | 0 segundos |

Table 19

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| señalador al padre | 50 000 | 3.1 segundos | 0 segundos | 0 segundos |
| | 60 000 | 4.3 segundos | 0 segundos | 2 segundos |
| Lista de hijos | 10 000 | 0 segundos | 0 segundos | 0 segundos |
| | 20 000 | 0 segundos | 0 segundos | 0 segundos |
| | 40 000 | 0 segundos | 0 segundos | 0 segundos |
| | 80 000 | 7.2 segundos | 0 segundos | 1 segundos |
| Hijo más izquierdo-hermano derecho | 100 000 | 2 segundos | 0 segundos | 1 segundos |
| | 150 000 | 7 segundos | 0 segundos | 3 segundos |
| | 250 000 | 22.4 segundos | 0 segundos | 9 segundos |
| Hijo más izquierdo-hermano derecho-señalador al padre | 50 000 000 | 0 segundos | 0 segundos | 0 segundos |
| | 10 000 000 | 0 segundos | 0 segundos | 0 segundos |
| | 20 000 000 | 0 segundos | 0 segundos | 0 segundos |

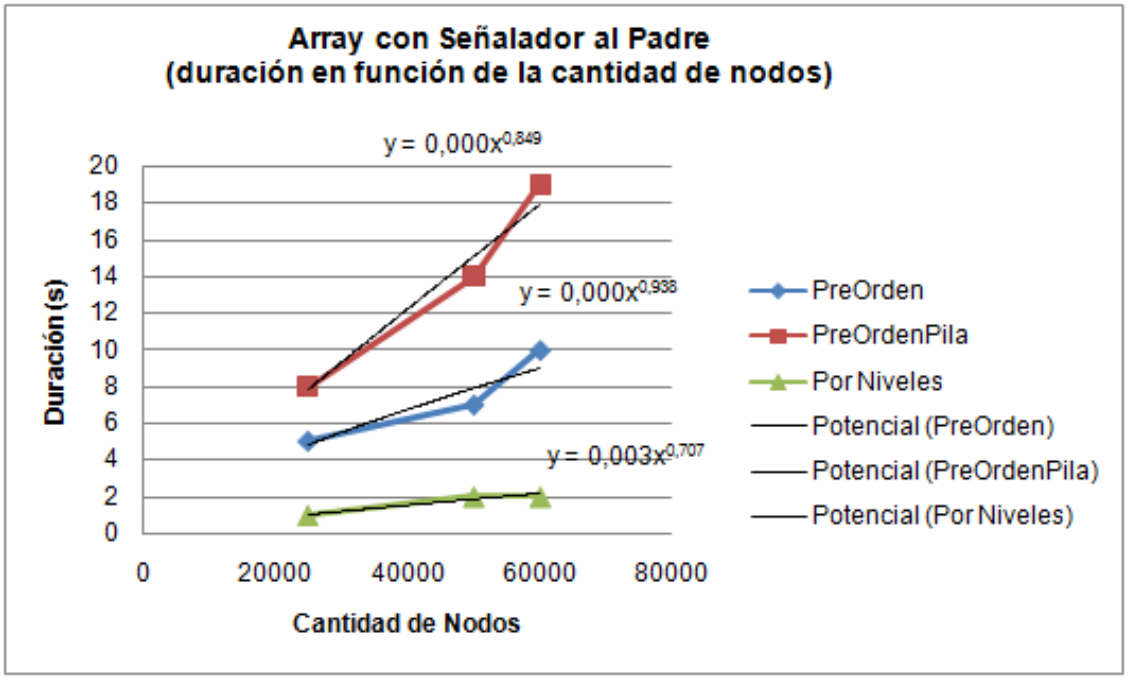



Figure 1: Tiempos de duración dados por el compilador para diferentes recorridos del árbol implementado por Array con Señalador al Padre

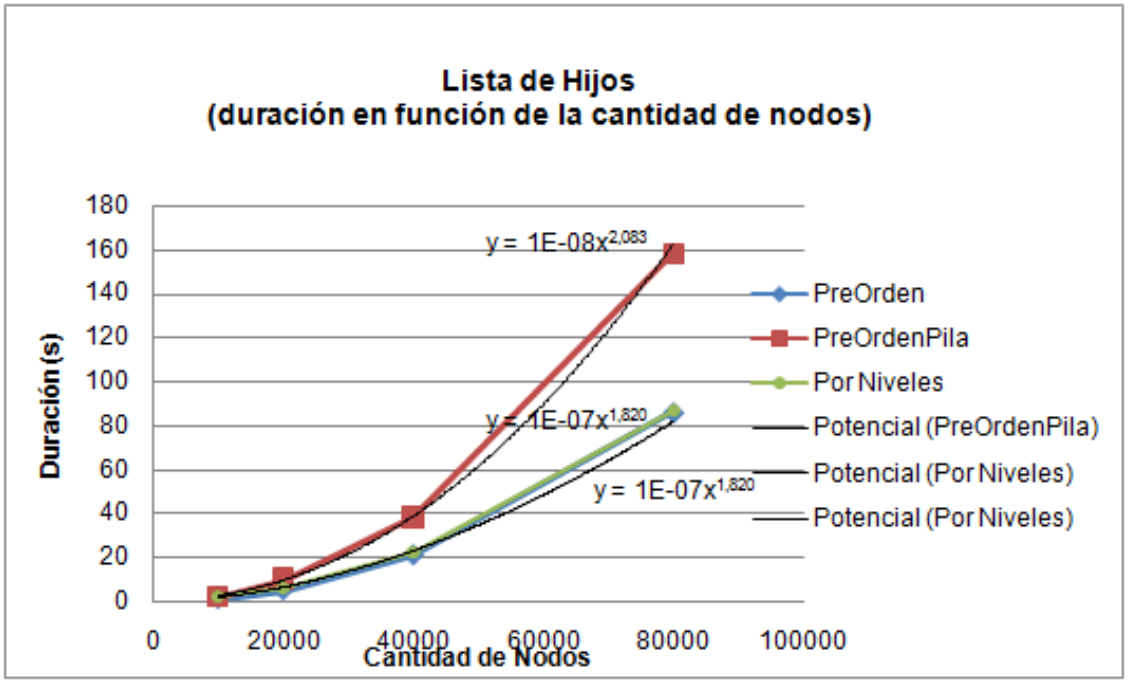



Figure 2: Tiempos de duración dados por el compilador para diferentes recorridos del árbol implementado por Lista de Hijos

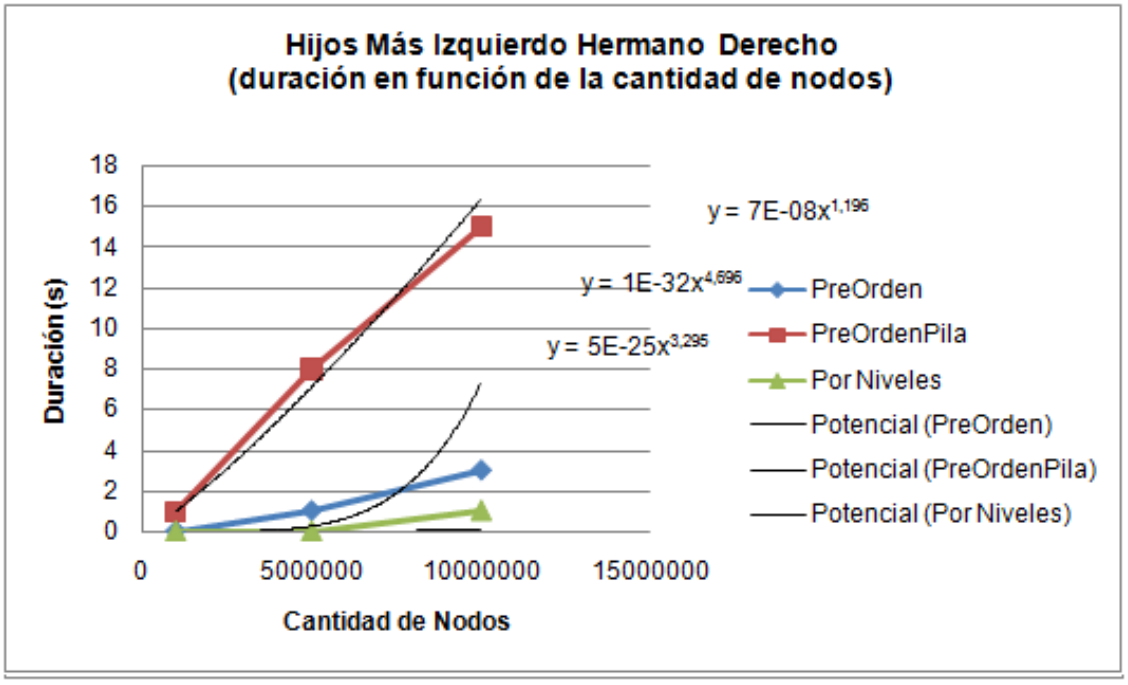



Figure 3: Tiempos de duración dados por el compilador para diferentes recorridos del árbol implementado por Hijo más Izquierdo - Hermano Derecho

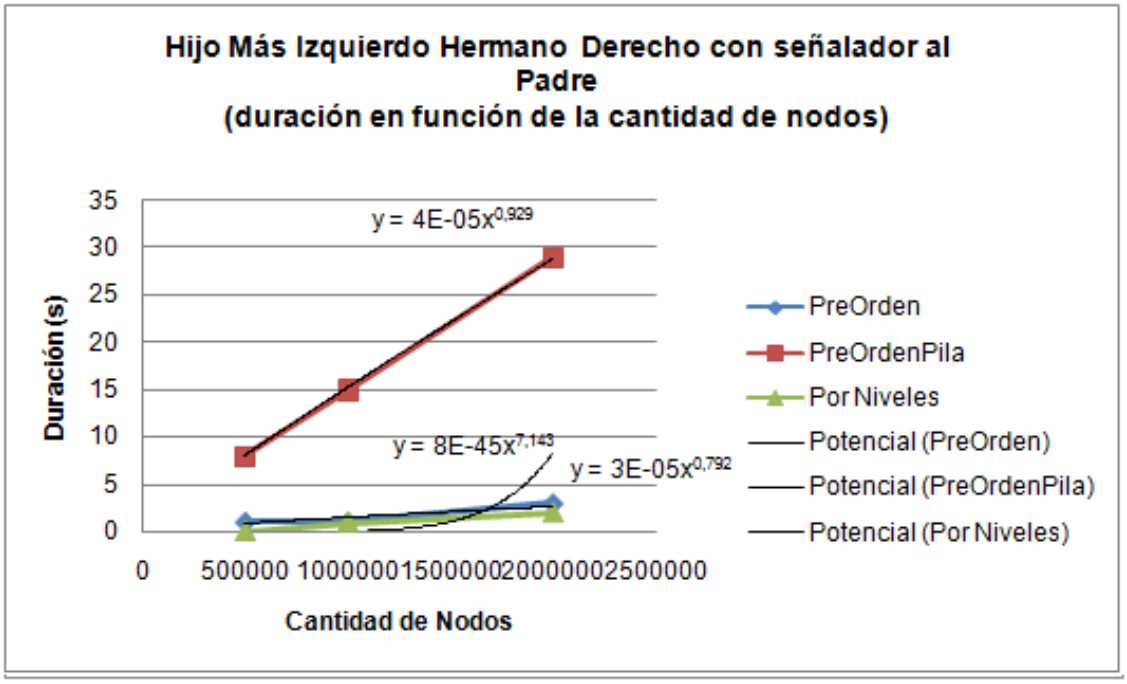



Figure 4: Tiempos de duración dados por el compilador para diferentes recorridos del árbol implementado por Hijo más Izquierdo - Hermano Derecho con señalador al Padre

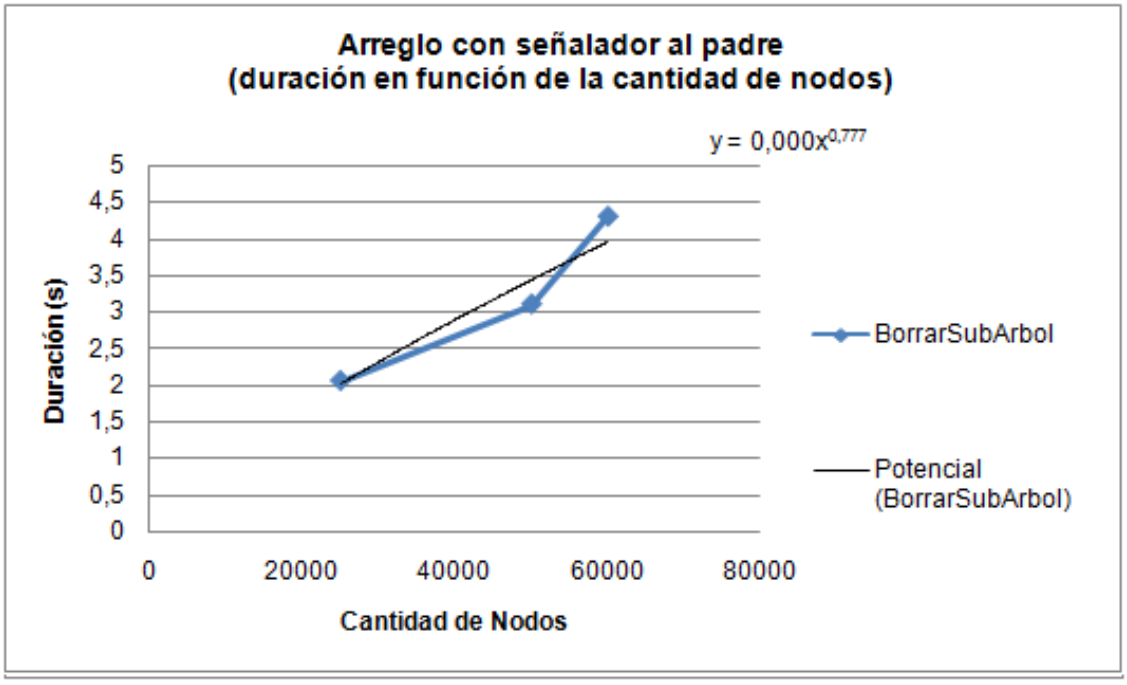



Figure 5

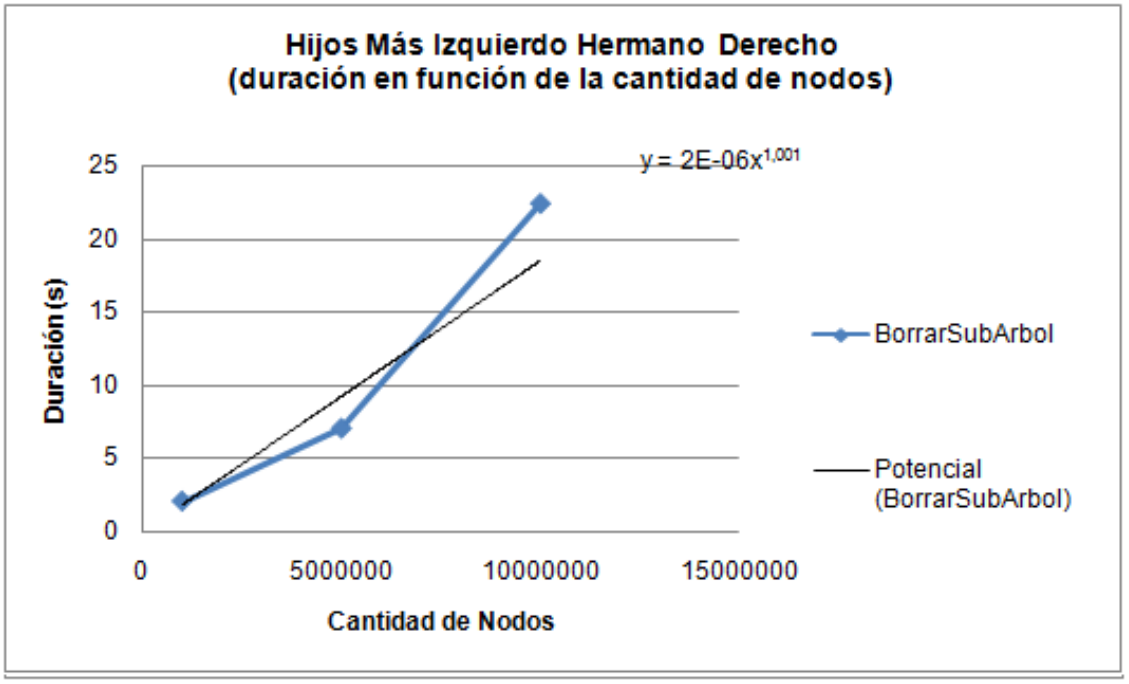



Figure 6

## 7.4 Análisis de datos

Antes de proceder con el análisis de datos, se debe aclarar que en muchas pruebas no se pudieron apreciar los resultados esperados, esto debido en gran parte a que el compilador utilizado fue un gran limitante ya que en muchos casos el espacio asignado por el compilador ya fuese en memoria estática o dinámica no fue lo suficientemente grande. Esto implicó que tuviéramos que utilizar árboles más pequeños de lo deseado no solamente porque a veces el árbol no tuviera el espacio suficiente en sí. Si no porque para construirlo se utilizaba una cola que podía verse saturada, de igual forma varios algoritmos utilizaban estructuras auxiliares o recursividad, agotando los recursos en memoria de la computadora.

Empezaremos por los operadores básicos (tablas 1, 2, 9, 10 y 16. De estas pruebas no se puede concluir prácticamente nada ya que para el tamaño de árboles con los que se logró trabajar, el tiempo de ejecución de los operadores es extremadamente corto, también se intentó trabajar con el operador borrarHoja pero igual su tiempo de ejecución fue muy corto. Debido a la falta de precisión lo único que se puede decir respecto a los operadores es que se llevaron a cabo en menos de 1 segundo. El único caso en que esto no se dio fue para la estructura de Lista de Hijos usando un árbol completamente ancho para el operador padre (tabla 9).

Pasando a los algoritmos, se hablará principalmente del árbol creado aleatoriamente con hasta 10 hijos por nodo ya que consideramos que es el caso más interesante de analizar, principalmente porque se asem(tablas eja más a casos de la vida real. Los otros dos árboles son prácticamente listas inefectivas y si bien las pruebas tienen su valor, este más por curiosidad y por tener puntos de comparación con un caso “más promedio”.

Comenzando por el algoritmo de ListarHijos, se observa que prácticamente todos los árboles duraron 0 segundos ejecutando este algoritmo para todos los tamaños de N. Esto se debe a que la máxima cantidad de hermanos posibles es 10, esto hace que solamente haya un llamado a HijoMasIzquierdo y a lo sumo 9 llamados a HermanoDerecho, dando tiempos de duración muy bajos.

El algoritmo profundidad consiste en varios llamados consecutivos al operador Padre, de hecho

hará un llamado por nivel del árbol. Al haber una cantidad considerable de nodos por nível (que es proporcional a los hijos por nodo) no habrán tantos niveles como para que padre tenga que efectuarse muchas veces. De hecho resulta muy interesante comparar con la tabla donde se hayan los tiempos del operador Padre para el árbol completamente profundo. Ya que aquí a pesar de no estás trabajando con valores de N tan grandes, el algoritmo de profundidad sí tarde tiempo considerable, de nuevo, debido a que en este caso debe hacer N llamados al padre, lo cuál es el peor caso para el algoritmo.
El algoritmo de BorrarSubArbol es básicamente un recorrido profundidad primero que además debe aplicar hasta n veces el operador borrarHoja. Aquí los tiempos de duración son relativamente bajos ya no se tomaban nodos con mucha altura, si que no en promedio eran nodos tomados del medio que englobaban árboles considerablemente más pequeños. Para tener una idea, en promedio un nodo del segundo nivel englobaría un árbol 5.5 veces más pequeño que la raíz, y así sucesivamente por cada nivel que se descienda.
Llegamos finalmente a los algoritmos interesantes que si pudieron ser más analizados en el árbol generado aleatoriamente. Antes que nada debemos decir que estos recorridos terminan siendo muchos llamados de HijoMasIzquierdo y HermanoDerecho, como cada nodo tiene en promedio 5.5 hijos, habrán muchos más llamados a HermanoDerecho que HijoMasIzquierdo. Prácticamente podemos decir que hay N llamados a HermanoDerecho, que de hecho es el caso en el árbol completamente ancho. De hecho si vamos a las tablas correspondientes observamos tiempos de duración considerablemente más altos que para un árbol con más niveles como es el generado aleatoriamente.
Otra cosa muy interesante de notar es que en todos los casos tomó más tiempo realizar el recorrido en preorden utilizando la pila que utilizando la recursividad del compilador. Esto significa que el compilador trabaja de forma especializada y no requiere crear estructuras auxiliares a la hora de implementar la recursividad. Por otro lado tomó más tiempo realizar el recorrido en preorden utilizando la pila que el recorrido por niveles que usa la estructura cola. Esto se da principalmente porque el algoritmo para simular la recursividad forzosamente debe ser más complejo y de hecho sí lo vemos, se observa que tiene que preguntar más a menudo por condiciones, además de que en inicio es más caro trabajar con la pila que con la cola.

## 7.5 Comparación de datos reales con los teóricos

| Órdenes de duración teóricos (peores casos; no se cumplen en todas las formas de árboles) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Algoritmo u operadores | Arreglo con señal. al padre | Lista de hijos | Hijo más izq.- hermano der. | Hijo más izq.- hermano der.- señal. al padre |
| Padre | $O(1)$ | $O(n)$ | $O(n)*$ | $O(1)$ |
| Hijo más izq. | $O(n)$ | $O(1)$ | $O(1)$ | $O(1)$ |
| Pre-orden | $O(n)*$ | | | |
| Pre-orden pila | $O(n)*$ | | | |
| Por niveles | $O(n)*$ | | | |
| Listar hijos | $O(n)*$ | | | |
| Borrar sub-árbol | $O(n)*$ | | | |
| Profundidad | $O(n)*$ | | | |

Para comparar con los ordenes teóricos en realidad no se cuenta con demasiada información, en gran parte por la considerable limitación de tamaños de los árboles mencionada anteriormente. Por otro lado, no tenemos cálculos teóricos realizados para casos promedios, ya que el alcance del curso se limita a peores casos. Así que nos limitaremos a comparar el tiempo de ejecución esperado de los recorridos con el tiempo "teórico". Para empezar, debemos deducir que los recorridos son

principalmente llamados de HermanoDerecho (muchos más que HijoMasIzquierdo). Por lo tanto intentamos aproximar el tiempo de duración de los recorridos a N llamados de HermanoDerecho.
Por otro lado las únicas dos estrcturas que no tienen a su Hermano Derecho en tiempo constante son el arreglo con señalador al padre y la lista de hijos. Sin embargo en el arreglo con señalador al padre el tiempo es proporcional a N para el peor caso, esto es precisamente que todos los nodos sean hermanos. Como en nuestro caso un nodo en particular solamente puede tener hasta 10 hijos entonces podemos tomar el tiempo de Hermano Derecho como constante. Sin embargo, la estructura de Lista de Hijos no se salva de esto, ya que para que un nodo busque a su hermano Derecho es mucho más probable que se tenga que recorrer una buena porción de la Lista de Nodos, o sea N nodos en el peor caso. Aquí es de suma importancia aclarar que este peor caso no es tan poco probable y de hecho hay nodos en los que va a ocurrir, en cambio el peor caso de Hermano Derecho en el Arreglo con Señalador al Padre era IMPOSIBLE que se diera en nuestra forma del árbol.
Habiendo resuelto dichos problemas, procedemos a decir que el tiempo de duración de los recorridos para todos los arboles será proporcional a N (N llamados de Hermano Derecho en tiempo constante cada uno. Excepto para el árbol implementado por lista de hijos, en este caso decimos que el tiempo será proporcional a $N^2$ (N llamados de Hermano Derecho en tiempo proporcional a N cada uno).
Dichosamente, esto concuerda con los resultados observados. Si vamos a las figuras 1, 3 y 4 se observa que la curva se aproxima a una función lineal (en todos los casos el exponente es cercano a 1), excepto en los casos que los valores iniciales fueron 0, para estos casos la línea de tendencia no nos permite hacer predicciones del comportambiento. Mientras que sí observamos la figura 2, notamos que en este caso los exponentes para los distintos N se acercan mucho a 2.
Por otro lado, en los árboles donde se alcanzó un tamaño considerable como para que el algoritmo BorrarSubArbol tomara un tiempo medible (en el árbol Arreglo con Señalador al Padre y Hijo Más Izquierdo- Hermano Derecho) observamos que su línea de tendencia da un exponente cercano a 1. Esto es consistente con lo discutido anteriormente de que el BorrarSubArbol es en principio un recorrido por profundidad primero que tiene un orden de duración proporcional a N.
Otra comparación teórico experimental que se puede llevar a cabo es el tamaño que se predijo iba a tener cada estructura. Por ejemplo la estructura Hijo Mas Izquierdo- Hermano Derecho (2 punteros por nodo) podía contener más nodos que las estructuras Hijo Más Izquierdo- Hermano Derecho con señalador al Padre (3 punteros por nodo) y la Lista de Hijos (4 punteros por nodo). Debido a que gastataba menos espacio en punteros de manera considerable.

$*$ Producto de algo recursivo.

## 7.6 Conclusiones respecto al análisis realizado

A modo de conclusión afirmamos que en los casos donde se obtuvo tiempos de duración medibles los resultados se acercaron bastante al comportamiento que se predijo teóricamente. Incluyendo la relación de dichos ordenes de duración con la cantidad de nodos. Tambien se concluye que el recorrido por niveles y el recorrido en profundidad primero tienen tiempos de duración muy parecidos excepto para el Array con Señalador al Padre, y que siempre el recorrido simulando la recursividad siempre fue más lento y no es justificable usarlo.
Una observación muy importante es que los tiempos de duración varían mucho dependiendo de la cantidad de hijos por nodo. En estas pruebas se intento trabajar con todo un espectro de hijos por nodo (1 hijo por nodo, de 1 a 10 hijos por nodo y hasta n hijos por nodo) y llegamos a resultados distintos para cada uno pero esto no es de ninguna forma completo y no podemos decir nada concluyente a una relación entre los ordenes de duración y la cantidad de hijos por nodo.

La conclusión más fuerte probablemente es que se debe trabajar con valores de N aún mucho más grandes para observar comportamientos de forma más precisos en especial para los operadores básicos y para algunos algoritmos que tienen ordenes de duración bajos.

# 8 Listado de archivos (estructura de las carpetas)

- Código
  - Arbol n-ario
    - ArregloSeñAlPadre
      - ArrergloSeñAlPadre.cbp
      - ArrergloSeñAlPadre.h
      - ⋮
    - HMI-HD
      - HMI-HD.cbp
      - HMI-HD.h
      - ⋮
    - HMI-HD-Padre
      - HMI-HD-Padre.cbp
      - HMI-HD-Padre.h
      - ⋮
    - ListaHijos
      - ListaHijos.cbp
      - ListaHijos.h
      - ⋮
  - Cola
    - Cola.cbp
    - modeloCola.h
    - ⋮
  - ColaPrueba
    - ColaPrueba.cbp
    - ColaPrueba.h
    - ⋮
  - menú
    - menu.cbp
    - menu.h
    - ⋮
  - Pila
    - modeloPila.cbp
    - modeloPila.h
    - ⋮
  - PilaPrueba
    - PilaPrueba.cbp
    - PilaPrueba.h
    - ⋮
- Documentación
  - Documentación.pdf

# 9 Bibliografía

[1] Alfred V. Aho, Jeffrey D. Ullman, John E. Hopcroft. *Estructura de datos y algoritmos.* 1988.