Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Aufwärmeübung zur Vorlesung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 1) (Die $\geq$ Bernoulli-Ungleichung)

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und alle reelle Zahlen $x \geq -1$ die **Ungleichung von Bernoulli**

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

gilt.

(A 2) (Die AM-GM-HM Ungleichungen)

Seien $n \in \mathbb{N}^*$und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^*_+$. Man beweise die folgenden Ungleichungen

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \overset{①}{\leq} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \overset{②}{\leq} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \overset{③}{\leq} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \overset{④}{\leq} \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Bemerkungen. 1) Die Zahl $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ ist das *arithmetische Mittel* (AM), $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ das *geometrische Mittel* (GM) und $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$ das *harmonische Mittel* (HM) der positiven Zahlen $x_1, \ldots, x_n$.

2) Man kann zeigen, dass in jeder der obigen Ungleichungen genau dann Gleichheit gilt, wenn $x_1 = \cdots = x_n$ ist.

(A 3)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Man zeige, dass wenn das Produkt der positiven reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gleich 1 ist, dann $x_1 + \cdots + x_n \geq n$ ist.

b) Ist $n \geq 2$, dann zeige man, dass $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ist. (Es sei daran erinnert, dass $n!$, gelesen n *Fakultät*, für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ steht.)

Hausaufgaben

(H 1) (Beweise mit mathematischer Induktion)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Man berechne die folgenden Summen und beweise danach induktiv, dass die gefundene Gleichheit für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt.

a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$,

b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$.

(H 2) (Die $>$ Bernoulli-Ungleichung)

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und alle reellen von Null verschiedenen Zahlen $x \geq -1$ die Ungleichung

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

gilt.

(H 3) (Die geometrische Interpretation der AM–GM Ungleichung)

Man erkläre, weshalb für $n = 2$ die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel besagt, dass unter allen Rechtecken mit dem gleichen Flächeninhalt das Quadrat den kleinsten Umfang hat.