DYNAMISCHE SYSTEME

Die Gesamtnote:

am 15. Mai – Test: 20%

Labortest: 20%

Klausur: 60% → muss mind. 5 sein

Literatur: „Gewöhnliche Differentialgleichungen", W. Walter, Springer, 2009

„DGL und ihre Anwendungen" Braun, Springer, 1994.

„Ecuații și Sisteme de ecuații diferențiale", M. Șerban, Presa Univ. Cluj.

„Ecuații diferențiale", R. Precup.

Einführung

1. Klassen von DGL 1. Ordnung und 2. Ordnung
2. Existenz und Eindeutigkeitssätze für die Lösungen des Cauchyproblems
3. Systeme von DGL.
4. Mathematische Modelle
5. Dynamische Systeme die von DGL und Systemen von DGL erzeugt werden

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\hookrightarrow$ Gleichung 2. Grades

$x_1 = 2$; $x_2 = 3$ $\quad 2, 3 \in \mathbb{R}$.

<u>Def</u>: Unter einer Differentialgleichung (DGL) verstehen wir eine Beziehung zwischen einer Funktion und einigen ihrer Ableitungen.

<u>Wichtig</u>: Die Lösung einer DGL eine Funktion ist.

<u>Bsp</u>: 1) $y' = y$

- $y \to$ die unbekannte Funktion
- $x \to$ die unabhängige Var.

DGL 1. Ordnung (y')

2) $y^2 + y'^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}$

→ y – die unbekannte Funktion

→ x – die unabhängige Var.

DGL 1. Ordnung.

3) $y'' + c^2 \cdot y = 0, \quad c \in \mathbb{R}$

→ y – die unbekannte Fkt.

→ x – die unab. Var

→ DGL 2. Ordnung.

4) $x'' + 2x' + x = 1$

$x \to$ die unbekannte Funktion

$t \to$ die unab. Var.

DGL 2. Ordnung

5) $u_t = u_{xx}$ $\to$ partielle DGL.

$u = u(t, x)$

Das Wort gewöhnlich bezieht sich darauf, dass die betrachteten Funktionen nur von einer Var. abhängen.

<u>Def</u> Die höchste auftretende Ableitungsordnung heißt Ordnung der DGL.

Allgemein hat eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung die Gestalt:

$$\boxed{\begin{gathered} F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n}(x)\right) = 0, \\ F: \Omega \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \end{gathered}}$$

implizite Form einer DGL.

$$\boxed{\begin{gathered} y^{n}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n-1}(x)\right) \\ f: \Omega \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \end{gathered}}$$

explizite Form einer DGL.

Die Lösung einer DGL.

<u>Def</u> Sei $D_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D_f \to \mathbb{R}$, f stetig und:

(1) $y^{n}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{n-1}(x))$

Dann ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL (1) auf dem Intervall I, wenn:

1) $(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{n-1}(x)) \in D_f$, $\forall x \in I$.

2) $\varphi \in C^{n}(I)$

3) $\varphi^{n}(x) = f(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{n-1}(x))$, $\forall x \in I$

Unter einer Lösung der DGL (1) verstehen wir eine hinreichend oft diff'bare Funktion, welche die DGL in einem gewissen Gebiet der unabhäng. Var. identisch erfüllt.

DGL 1. Ordnung

$$(2) \quad y'(x) = f(x, y(x)) \quad , \quad f: D_f \to \mathbb{R}, \quad D_f \subseteq \mathbb{R}^2$$

Def $\varphi \in C^1(I)$ $(\varphi: I \to \mathbb{R})$ ist eine Lösung der DGL (2) wenn:

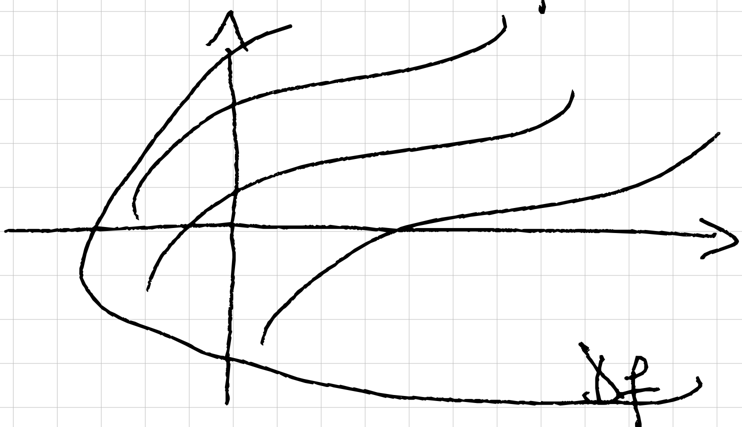
i) $(x, \varphi(x)) \in D_f$, $\forall x \in I$

ii) $\varphi \in C^1(I)$

iii) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $\forall x \in I$.

$G\varphi = \{ (x, \varphi(x)) \mid x \in I \} \to$ der Graph der Fkt φ.

i) $(x, \varphi(x)) \in D_f \iff G\varphi \subseteq D_f$



Die Lösungen einer DGL:

i) $y(x) = f(x, c), \quad c \in \mathbb{R}$

↳ die explizite Form

ii) $\Phi(y(x), x, c) = 0, \quad c \in \mathbb{R}$

↳ die implizite Form

Bsp: $y^2(x) + 2 \ln y(x) + x = c, \quad c \in \mathbb{R}.$

iii) $\begin{cases} y = \varphi(p, c) & c \in \mathbb{R} \\ x = \psi(p, c) & p \in I. \end{cases}$ $\quad \varphi$ – phi, $\quad \psi$ – psi

↳ die parametrische Form

Bsp.: $y' = y$ $\qquad y = y(x)$ | $y' = f(x,y)$

$f(x,y) = y$

$D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$y(x) = e^x$; $y(x) = \frac{e^{2x}}{2}$ / F.

$y'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} e^{2x} = e^{2x}$

$y(x) = 0$

$y(x) = -e^x \Rightarrow y'(x) = -e^x \rightarrow y'(x) = y(x)$ W.

$y(x) = e^x$

$y(x) = c \cdot e^x$, $c \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung.

$y' = y$.

I. $y(x) = 0$ eine Lösung.

II. $y(x) \neq 0$. $y(x) > 0$

$$y'(x) = y(x) \quad \Big| : y(x) \neq 0.$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1.$$

$$\big(\ln(y(x))\big)' = 1. \quad \Big| \int \quad \Rightarrow \ln(y(x)) = x + C$$

$$y(x) = e^{x+c} = e^x \cdot \underbrace{e^c}_{c_1} \quad , c_1 \in \mathbb{R}_+^*$$

$$y(x) = e^x \cdot c_1 \quad , c_1 \in \mathbb{R}_+^*$$

III. $y(x) \neq 0$, $y(x) < 0$.

$$-y'(x) = -y(x) \quad \Big| : (-y(x) \neq 0)$$

$$\frac{-y'(x)}{-y(x)} = 1.$$

$$\left(\ln(-y(x))\right)' = 1.$$

$$\ln(-y(x)) = x + c \Rightarrow -y(x) = e^{x+c}$$

$$-y(x) = e^x \cdot e^c \quad | \cdot (-1)$$

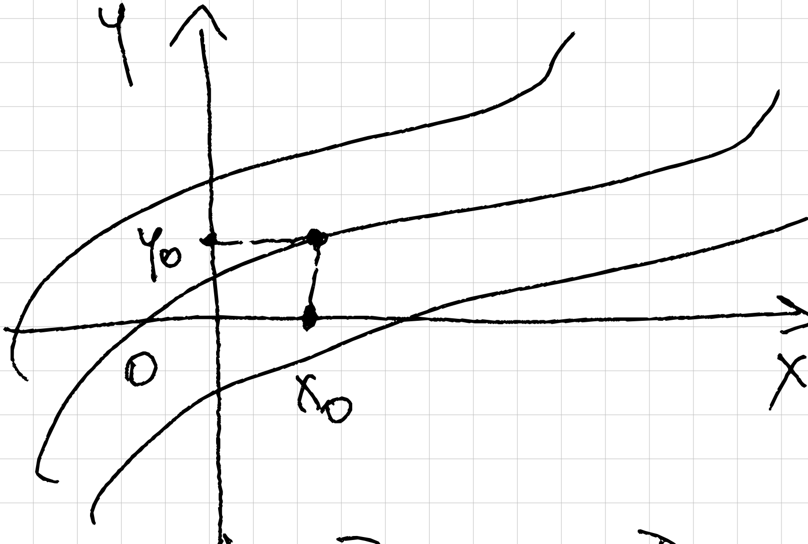
$$y(x) = e^x \cdot \underbrace{(-e^c)}_{c_2} \qquad c_2 \in \mathbb{R}_-^*$$

$$y(x) = c_2 \cdot e^x, \quad c_2 \in \mathbb{R}_-^*$$

Aus I + II + III $\Rightarrow$ $y(x) = c \cdot e^x, \quad c \in \mathbb{R}.$

<u>Anfangswertprobleme</u> (<u>Cauchyprobleme</u>)
(A.W.P.)

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$



$x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}, \quad y_0 \in \mathbb{R}.$

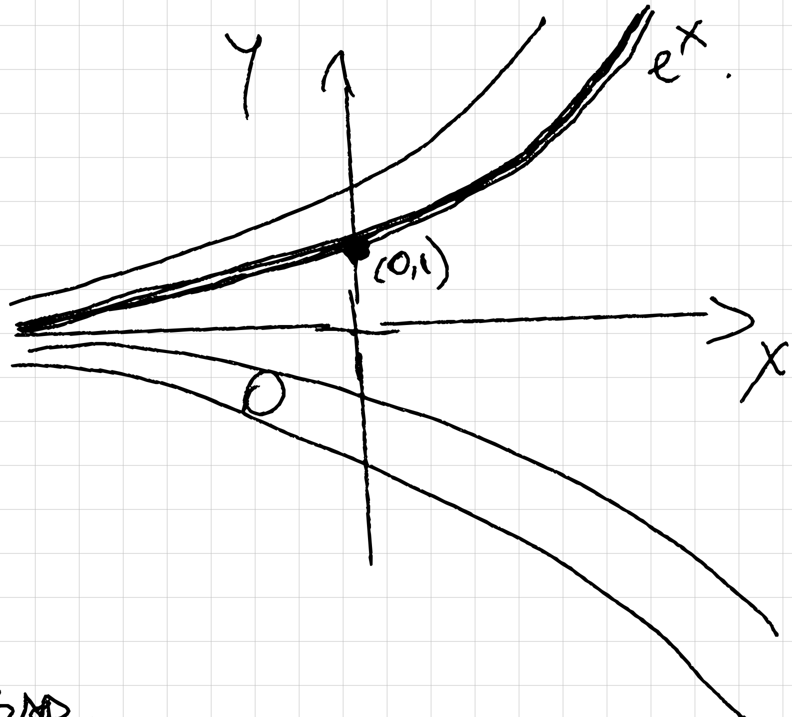
$$\begin{cases} y' = y \\ y(\underset{x}{\underset{\downarrow}{0}}) = \underset{y}{\underset{\downarrow}{1}} \end{cases}$$

$$y(x) = c \cdot e^x$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c \cdot e^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Die Lösung des AWPs: $\boxed{y(x) = e^x}$



$y(x) = c \cdot e^x$

$y(0) = \underline{1}$.

2. Bsp.

$$y' = -\frac{x}{y}$$

DGL 1. Ordn.

y – unbekannte Fkt.

x – unab. Var.

$$f(x,y) = -\frac{x}{y} \qquad \underline{D}f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* = U_1 \cup U_2$$

$U_1 = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$

$U_2 = \mathbb{R} \times (0, \infty)$

$y' = -\frac{x}{y} \quad | \cdot y \implies y' \cdot y = -x \quad | \cdot 2$

$\implies 2 \cdot y' \cdot y = -2x$

$(y^2(x))' = -2x \quad | \int$

$y^2(x) = -x^2 + C \iff \underline{y^2(x) + x^2 = C}$,

die implizite Form.

die explizite Form

$\boxed{y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}\quad, C \in \mathbb{R}}$.

$y(\underset{x}{1}) = \underset{y}{1} > 0 \implies y(x) = \sqrt{C - x^2}$

$$1 = \sqrt{c-1} \iff 1 = c - 1 \iff c = 2.$$

$$\boxed{y(x) = \sqrt{2 - x^2}}$$ → die Lösung des AWPs.

$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.