Übung 2

Logik für Informatiker

Aussagenlogik

Aufgabe 1

Vor meinem Haus sind zwei PKW geparkt. Sind die PKW gleichfarbig? Bekannt ist nur, dass folgende Aussagen nicht kontradiktorisch sind:

1. Die PKW sind gleichfarbig.
2. Der eine ist rot, der andere grün.
3. Unter diesen drei Aussagen, gibt es mehr falsche als wahre Aussagen.

Lösung:

Wenn a) wahr ist, dann muss b) falsch sein. Umgekehrt, falls b) wahr ist, dann muss a) falsch sein. In beiden Fällen, kann c) nicht wahr und auch nicht falsch sein:

Angenommen c) sei wahr, dann ist sie widersprüchlich (zwei wahre Aussagen aus insgesamt drei).

Angenommen c) sei falsch, ist sie ebenfalls widersprüchlich (weshalb?). Es folgt, a) und b) sind falsch und c) ist wahr. D.h. die PKW sind verschieden gefärbt. Ihre Farben können wir aber nicht angeben.

Aufgabe 2

Formalisiere folgende Aussagen als aussagenlogische Formeln.

1. Wenn die Sonne nicht scheint, ist es kalt.

2. Wenn es regnet und kalt ist, ist die Straße glatt.

3. Wenn die Straße glatt ist oder in der Nähe Kinder spielen, muss man vorsichtig sein.

4. Wenn die Sonne scheint, und es regnet, gibt es einen Regenbogen.

Lösung:

Die Idee ist, die Objekte, die wir hier modellieren wollen, als aussagenlogischen Konstanten zu bezeichnen. Z.B. Sonne mit S, kalt mit K, usw.

1. $S \to K$

2. $R \wedge K \to G$

3. $G \vee KS \to V$

4. $Sonnescheint \wedge regnet \to Regenbogen$

Aufgabe 3

Es sei $\Pi = \{P, Q, R\}$ eine Menge von Aussagevariablen und F die folgende Formel über Π:

$$F = \big(P \to (Q \vee \neg R)\big) \to \Big((R \wedge P) \leftrightarrow \big(Q \vee (P \to Q)\big)\Big).$$

1. Man gebe die Wahrheitstabelle an.
2. Man begründe mithilfe der Wahrheitstabelle ob F erfüllbar, unerfüllbar, oder tautologisch ist.
3. Man gebe alle Modelle von F an

Lösung:

Mit SageMath (https://sagecell.sagemath.org)

```
f = propcalc.formula("(P->(Q|~R))->((R&P)<->(Q|(P->Q)))")
f.truthtable()
```

erhalten wir:

P	Q	R	Wert
False	False	False	False
False	False	True	False
False	True	False	False
False	True	True	False
True	False	False	True
True	False	True	True
True	True	False	False
True	True	True	True

Formel ist erfüllbar, da mindestens ein Eintrag in der Spalte Wert true ist. Die Modelle sind:

$A_1(P) = 1,\ A_1(Q) = 0,\ A_1(R) = 0$

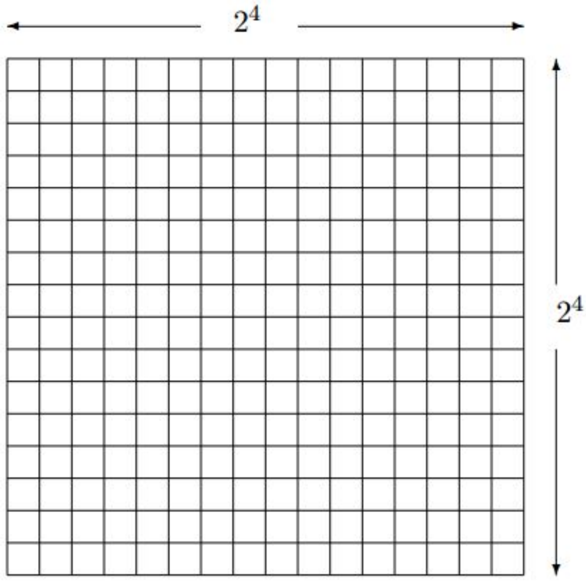
$A_2(P) = 1,\ A_2(Q) = 0,\ A_2(R) = 1$

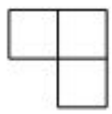
$A_3(P) = 1,\ A_3(Q) = 1,\ A_3(R) = 1$

Aufgabe 4

Für Schlaufüchse!!!/For old foxes!!!

Wir betrachten ein quadratisches Gitternetz mit $2^n \times 2^n$ Feldern, etwa für $n = 4$:



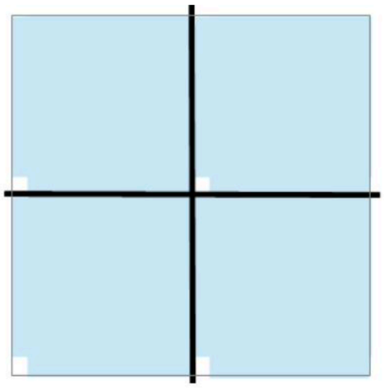
Zeige, dass sich ein solches Gitternetz mit Winkeln der Form  pflastern läßt, so dass genau ein Feld übrig bleibt, sprich ungepflastert ist. Die Winkel können dabei beliebig gedreht verwendet werden.

Lösung:

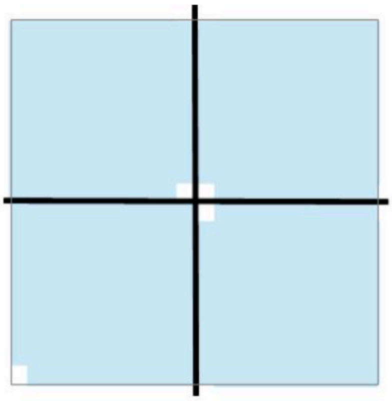
Induktionsanfang: $n = 1$. Für ein 2×2 Gitternetz ist die Pflasterung offensichtlich:

Induktionsschluss: Sei die Behauptung bereits für quadratische $2^n \times 2^n$ Gitternetze bewiesen. Bei Vorliegen eines Gitternetzes der Größe $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ unterteilen wir dieses in 4 Gitternetze der Größe $2^n \times 2^n$. Nach Induktionsvorraussetzung können diese so gepflastert werden, dass nur die jeweils linke untere Ecke frei ist.

Anschaulich:



Durch eine Rechtsdrehung im oberen linken Quadranten und eine Linkssdrehung im unteren rechten Quadranten ergibt sich:



Die Verwendung eines weiteren Pflastersteins in der Mitte der Figur schließt die Induktion.

Aufgabe 5

Ein Klassiker

Die Schlümpfe erwarten Besuch in ihrem Dorf und machen dementsprechend viel Radau. Zwirni, Hefti, Schlaubi, Clumsy, Torti, Handy, Toulousy, Harmony und natürlich Schlumpfine treffen sich vor Papa-Schlumpfs Haus und reden alle durcheinander. Es ist von Dodo, Bauchi, Knirps und Schnuffi die Rede. Papa-Schlumpf hört eine Weile zu und findet heraus, dass die erwarteten Gäste eine kleine Fee, ein Zwerg, ein kleiner Junge und ein Häschen sind. Da will Papa-Schlumpf natürlich erfahren, wer was ist. Schlaubi-Schlumpf, als persönlicher Assistent von Papa-Schlumpf, versucht es ihm zu erklären:

Wenn Dodo nicht der Zwerg ist und Bauchi nicht die kleine Fee, dann ist Knirps der kleine Junge.

Wenn Schnuffi nicht das Häschen ist, dann ist, falls Dodo nicht die kleine Fee ist, Bauchi der kleine Junge.

Mindestens eine der folgenden drei Angaben ist richtig: Knirps ist das Häschen, Schnuffi ist der Zwerg, Dodo ist der kleine Junge.

Wenn weder Knirps noch Schnuffi die kleine Fee ist, dann ist Bauchi der kleine Junge.

Und wenn…

Genug Schlaubi, diese Angaben reichen mir schon, unterbrach ihn Papa-Schlumpf.

Wie heißen der Zwerg, die kleine Fee, der kleine Junge und das Häschen?

Aufgabe 6

Für Mathe Geeks ;)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $F(n)$ die Fibonacci-Zahl von n, die wie folgt definiert ist:

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 0 \\ 1 & \text{wenn } n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{wenn } n \geq 2 \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von verallgemeinerter vollständiger Induktion über die natürlichen Zahlen, dass die folgende Aussage gilt:

Wenn n durch 3 teilbar ist, ist $F(n)$ durch 2 teilbar.

Lösung:

Per Induktion nach n.

Induktionsverankerung: Sei n gleich 0, dann ist F(0) gleich 0, also gerade.
Induktionsschritt: Angenommen n+1 ist teilbar durch drei, dann ist F(n+1) gerade.

Falls n+1 durch drei teilbar ist, dann ist n+1 = 3k+3. Laut Definition haben wir, dass
F(3k+3) = F(3k+2)+F(3k+1)
= F(3k+1)+F(3k+1)+F(3k)
= F(3k)+F(3k-1)+F(3k)+F(3k-1)+F(3k)
= 3F(3k)+2F(3k-1).

Laut Induktionsannahme, F(3k) ist gerade, also ist auch 3F(3k)+2F(3k-1) gerade.