

Seminar 1 - Kombinatorik

Das **allgemeine Zählprinzip**, auch **Produktregel der Kombinatorik** genannt:

Seien $k \in \mathbb{N}^*$ unterschiedliche Mengen gegeben: M_1, \dots, M_k , wobei $\#M_i = n_i \in \mathbb{N}^*$ (=Anzahl der Elemente aus M_i), $i \in \{1, \dots, k\}$. Wie viele Möglichkeiten gibt es k -Tupel der Form (x_1, \dots, x_k) , mit $x_i \in M_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$, zu erzeugen?

Die gesamte Anzahl der k -Tupel ist: $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

▷ Ziehen ohne Wiederholung (ohne Zurücklegen): Auswahl (Ziehen) von Elementen bei der das gewählte (gezogene) Element *nicht* wieder der Gesamtmenge zugefügt wird.

▷ Ziehen mit Wiederholung (mit Zurücklegen): Auswahl (Ziehen) von Elementen bei der das gewählte (gezogene) Element sofort wieder der Gesamtmenge zugefügt wird.

Definition Permutation: Jede mögliche Anordnung von n Elementen, in der alle Elemente verwendet werden, heißt Permutation dieser Elemente.

Permutation ohne Wiederholung ($n \in \mathbb{N}$):

Von n paarweise verschiedenen Elementen gibt es $n!$ Permutationen (also Anordnungsmöglichkeiten).

Konvention: $0! = 1$

Beispiel: 1) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Personen in eine Reihe zu setzen?

Lösung: → Permutation ohne Wiederholung: $5! = 120$

Permutation mit Wiederholung ($n, r \in \mathbb{N}^*, r \leq n$):

Gegeben seien n Elemente in r Gruppen, wobei sich die Elemente einer Gruppe nicht unterscheiden, die Elemente verschiedener Gruppen aber verschieden sind. Die Anzahl der Elemente in den Gruppen sei i_1, i_2, \dots, i_r ($i_1 + i_2 + \dots + i_r = n$). Zu diesen Elementen gibt es

$$\frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_r!}.$$

Permutationen (Anordnungsmöglichkeiten).

Beispiel: 1) Wie viele Möglichkeiten gibt es aus den Zahlen 1 bis 4 jeweils 7-stellige Zahlen zu bilden, in denen 2-mal die 1, 3-mal die 2 und je einmal die 3 bzw. die 4 vorkommen?

Lösung: → Permutation mit Wiederholung:

$$\frac{7!}{2!3!1!1!} = 420.$$

2) Alle (verschiedenen) Permutationen von AABB sind: AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA (es sind Permutationen mit Wiederholung).

Definition Kombination:

Jede mögliche Anordnung ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus n Elementen je k heißt Kombination dieser Elemente (Kombination von n Elementen zur k -ten Klasse).

Kombination ohne Wiederholung ($k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, k \leq n$):

Aus n verschiedenen Elementen können k Stück ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen auf

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

verschiedene Arten ausgewählt werden.

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es aus 10 Schülern 4 auszuwählen?

Lösung: → Kombination ohne Wiederholung: $C_{10}^4 = 210$.

Kombination mit Wiederholung (für $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$):

Aus n verschiedenen Elementen wird k -mal hintereinander eines ausgewählt und vor dem nächsten Zug wieder zurückgelegt. Dann gibt es ohne Berücksichtigung der Reihenfolge insgesamt

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

verschiedene Auswahlmöglichkeiten.

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es 5 (nicht unterscheidbare) Äpfel auf 3 Kinder (A,B,C) zu verteilen? (mehrere oder keine Äpfel können an ein Kind verteilt werden) Beispiele von Aufteilungen (0 ist "Apfel"):

A	B	C
00		000
0	0	000
000	00	
		00000

Erste Methode: Wir können alle Ergebnisse durch Ziffernfolgen kennzeichnen, wobei 0 für einen "Apfel" und 1 für eine "Trennwand" zwischen den Kindern steht:

a) 0011000 b) 0101000 c) 0001001 d) 1100000

Reformulierung: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Nullen und 2 Einsen auf 7 Positionen zu verteilen?

Antwort: $C_7^5 = C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = 21$.

Zweite Methode: Kombinationen mit Wiederholung $\rightarrow n = 3, k = 5$; aus der Menge mit 3 Kindern (A,B,C) wählt man 5-mal, mit Wiederholung; bei a) A,A,C,C,C, bei b) A,B,C,C,C, bei c) A,A,A,B,B, bei d) C,C,C,C,C

Definition Variation:

Jede mögliche Anordnung (mit Berücksichtigung der Reihenfolge) aus je k Elementen von n Elementen heißt Variation dieser Elemente (Variation von n Elementen zur k -ten Klasse).

Variation ohne Wiederholung ($k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, k \leq n$):

Aus n verschiedenen Elementen können k Stück mit Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen auf

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

verschiedene Arten ausgewählt werden.

Beispiel: Wie viele Codes mit 3 verschiedenen Ziffern aus der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ kann man bilden?

Lösung: $V_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$.

Variation mit Wiederholung (für $k, n \in \mathbb{N}^*$):

Aus n verschiedenen Elementen werde k -mal hintereinander eines ausgewählt und vor dem nächsten Zug wieder zur Grundmenge zurückgelegt. Dann gibt es unter Berücksichtigung der Reihenfolge insgesamt n^k verschiedene Auswahlmöglichkeiten.

Bemerkung: Die **Anzahl der Funktionen** von der Menge A mit k Elementen zu der Menge B mit n Elementen ($k, n \in \mathbb{N}^*$) ist n^k und entspricht der Variation mit Wiederholung.

Beispiel: Wie viele Codes mit 4 Ziffern kann man bilden?

Lösung: 10^4 .

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es eine Orange, einen Apfel, eine Banane an 4 Kinder aufzuteilen? (die Früchte werden nicht geschnitten; ein Kind kann mehrere Früchte erhalten).

Lösung: die Anzahl der Funktionen $f : \{\text{"Orange"}, \text{"Apfel"}, \text{"Banane"}\} \rightarrow \{K1, K2, K3, K4\}$ ist 4^3 .

Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit:

Wir betrachten ein Experiment welches endlich viele, gleichwahrscheinliche Ergebnisse hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintreten ist

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle für das Eintreten von } A}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle innerhalb des Experiments}}.$$

Beispiel: Welches ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Lottoschein “6 aus 49” alle 6 Zahlen richtig auszufüllen? (die Reihenfolge der Zahlen wird nicht in Betracht gezogen)

Lösung: $\frac{1}{C_{49}^6}$.