Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2024-2025

1. Vorlesung

▷ Anwesenheit: Um an der schriftlichen Prüfung in der Prüfungszeit teilnehmen zu können, sind mindestens 11 Anwesenheiten in den Übungen erforderlich.

▷ Wichtig: In jeder Übung sollt ihr die Unterlagen aus den Vorlesungen bei euch haben.

▷ Hausaufgaben: Ab der 2. Unterrichtswoche werdet ihr Hausaufgaben (siehe Assignments in MS Teams) hochladen müssen. Es wird eine Deadline für das Hochladen der Hausaufgaben geben. Auf der 1. Seite der Hausaufgabe müssen Name und Vorname angegeben werden. Sind Name und Vorname nicht angegeben, wird die betreffende Hausaufgabe nicht berücksichtigt. Es ist erlaubt, eine Hausaufgabe nicht hochzuladen. Werden mehr als zwei Hausaufgaben nicht hochgeladen, führt das zu Punkteabzug bei der Endnote. In jeder Woche werden die Hausaufgaben stichprobenartig kontrolliert.

Bezeichnungen (Bez.)

- $\mathbb{R}$ = die Menge der reellen Zahlen; $+, \cdot, \leq$
- $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ = die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
- $\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$ = die Menge der positiven reellen Zahlen
- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ = die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ = die Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}$ = die Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = die Menge der irrationalen Zahlen

Die erweiterte Menge der reellen Zahlen

- $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$; $\infty := +\infty$
- Fortsetzung der Ordnungsrelation von $\mathbb{R}$ auf $\overline{\mathbb{R}}$:

$$-\infty < \infty, \quad -\infty < x, \quad x < \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$

Der (absolute) Betrag

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ nennt man die Zahl

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } 0 \leq x \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

den (absoluten) Betrag von x.

Eigenschaften des (absoluten) Betrags

Seien x, $y \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

- $0 \leq |x|$.
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$. Insbesondre ist $|-x| = |x|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- Ist $0 \leq y$, dann ist $|x| \leq y \Leftrightarrow x \in [-y, y]$.

Der Abstand zwischen zwei reellen Zahlen

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Der Abstand (die Distanz) zwischen x und y wird als $|x - y|$ definiert.

Bemerkung (Bem.)

Ist $x \in \mathbb{R}$, dann stellt $|x|$ den Abstand zwischen x und 0 dar.

Definitionen (Def.) und Bezeichnungen (Bez.)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Die reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist

- eine untere Schranke von M, falls $\forall a \in M$ gilt $x \leq a$;
  $US(M) =$ die Menge aller unteren Schranken von M;
- eine obere Schranke von M, falls $\forall a \in M$ gilt $a \leq x$;
  $OS(M) =$ die Menge aller oberen Schranken von M;
- ein kleinstes Element von M (Minimum von M), mit $\min M$ bezeichnet, falls $x \in M$ und $x \in US(M)$;
- ein größtes Element von M (Maximum von M), mit $\max M$ bezeichnet, falls $x \in M$ und $x \in OS(M)$;
- ein Infimum von M, mit $\inf M$ bezeichnet, falls x die größte untere Schranke von M ist (d.h. $x = \max US(M)$);
- ein Supremum von M, mit $\sup M$ bezeichnet, falls x die kleinste obere Schranke von M ist (d.h. $x = \min OS(M)$).

Def.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Die Menge M heißt

- nach unten beschränkt, falls $US(M) \neq \emptyset$;
- nach oben beschränkt, falls $OS(M) \neq \emptyset$;
- beschränkt, falls $US(M) \neq \emptyset$ und $OS(M) \neq \emptyset$;
- nach unten unbeschränkt, falls $US(M) = \emptyset$;
- nach oben unbeschränkt, falls $OS(M) = \emptyset$;
- unbeschränkt, falls $US(M) = \emptyset$ oder $OS(M) = \emptyset$.