Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2024-2025

12. Vorlesung

TH1 (Integration über kompakte Intervalle)

Sei $A := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ein nichtentartetes kompaktes Intervall im $\mathbb{R}^n$ und $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f auf A integrierbar und es gilt die Gleichheit

$$\int \cdots \int_A f(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}x_1 \int_{a_2}^{b_2} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_n,$$

wobei die Reihenfolge der Integrationen beliebig vertauscht werden kann.

TH2 (Integration über Normalbereiche bzgl. der y-Achse)

Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\varphi_1,\ \varphi_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$, M_1 der wie folgt definierte Normalbereich bezüglich der y-Achse

$$M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

und $f \colon M_1 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f auf M_1 integrierbar und es gilt die Gleichheit

$$\int\int_{M_1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

TH3 (Integration über Normalbereiche bzgl. der x-Achse)

Seien $c,\ d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$, $\psi_1,\ \psi_2\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\psi_1 \leq \psi_2$, M_2 der wie folgt definierte Normalbereich bezüglich der x-Achse

$$M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

und $f\colon M_2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f auf M_2 integrierbar und es gilt die Gleichheit

$$\int\int_{M_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$