Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2024-2025

11. Vorlesung

TH6 (Das zweite Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale über beschränkte Intervalle $[a, b)$)

Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a, b) \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion und $p \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\exists L := \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b - x)^p f(x).$$

Dann gelten:

1° Sind $p < 1$ und $L < \infty$, dann ist f auf $[a, b)$ uneigentlich integrierbar.

2° Sind $p \geq 1$ und $L > 0$, dann ist f auf $[a, b)$ nicht uneigentlich integrierbar.

TH7 (Das zweite Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale über beschränkte Intervalle $(a, b]$)

Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f\colon (a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion und $p \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\exists L := \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} (x - a)^p f(x).$$

Dann gelten:

1° Sind $p < 1$ und $L < \infty$, dann ist f auf $(a, b]$ uneigentlich integrierbar.

2° Sind $p \geq 1$ und $L > 0$, dann ist f auf $(a, b]$ nicht uneigentlich integrierbar.

TH8 (Das zweite Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale über Intervalle $[a, \infty)$)

Seien $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion und $p \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\exists\, L := \lim_{x \to \infty} x^p f(x).$$

Dann gelten:

1° Sind $p > 1$ und $L < \infty$, dann ist f auf $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar.

2° Sind $p \leq 1$ und $L > 0$, dann ist f auf $[a, \infty)$ nicht uneigentlich integrierbar.

Wir fassen **Th6 – Th8** in den folgenden Tabellen zusammen:

1. Tabelle ($\hookrightarrow$ **Th6**)

p	$L = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b - x)^p f(x)$	$f : [a, b) \to [0, \infty)$ stetig
$p < 1$	$L < \infty$	uneigentlich integrierbar
$p \geq 1$	$L > 0$	nicht uneigentlich integrierbar

2. Tabelle ($\hookrightarrow$ **Th7**)

p	$L := \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} (x-a)^p f(x)$	$f : (a,b] \to [0,\infty)$ stetig
$p < 1$	$L < \infty$	uneigentlich integrierbar
$p \geq 1$	$L > 0$	nicht uneigentlich integrierbar

3. Tabelle ($\hookrightarrow$ **Th8**)

p	$L := \lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x)$	$f : [a,\infty) \to [0,\infty)$ stetig
$p > 1$	$L < \infty$	uneigentlich integrierbar
$p \leq 1$	$L > 0$	nicht uneigentlich integrierbar

Definition

Die Funktion $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Gamma(t) = \int_{0+}^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx,\ \forall\ t \in (0,\infty),$$

nennt man eulersche Gammafunktion.

S9 (Eigenschaften von Γ)

1° $\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t),\ \forall\ t \in (0,\infty).$

2° $\Gamma(n+1) = n!,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, also ist $\displaystyle\int_{0+}^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$

3° $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, d.h. $\displaystyle\int_{0+}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}.$

TH10 (Das Integralkriterium für Reihen)

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $f : [k, \infty) \to [0, \infty)$ eine monoton fallende stetige Funktion. Dann sind äquivalent:

1° Die Funktion f ist auf $[k, \infty)$ uneigentlich integrierbar.

2° Die Reihe $\sum\limits_{n \geq k} f(n)$ ist konvergent.