Lineare inhomogene DGL-Systeme

Die allgemeine Form:

$$(1)\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)\cdot y_1(x) + a_{12}(x)\cdot y_2(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}(x)\cdot y_1(x) + a_{22}(x)\cdot y_2(x) + b_2(x) \end{cases}$$

$y_1(x), y_2(x) \to$ die Unbekannten Fkt.

$a_{11}(x), \dots, a_{22}(x)$ – Fkt.

$$Y' = A\cdot Y + B \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \end{pmatrix}.$$

$$S_0 = \{ Y \in C^1([a,b], \mathbb{R}^2) : L(Y) = 0 \}$$

$\hookrightarrow$ die Lösungsmenge des hom. Systems

$$S_B = \{ Y \in C^1([a,b], \mathbb{R}^2) : L(Y) = B \}$$

<u>Satz</u>. Für das inhomogene lineare DGL system gilt:

$$S_B = S_0 + \{ Y^P \}, \text{ wobei}$$

$Y^P \rightarrow$ eine partikuläre Lösung des inhom. DGL-Syst. ist. Die Lösung wird mit dem Verfahren „<u>Variation der Konstanten</u>" berechnet.

Variation der Konstanten

Sei $U(x) = \begin{pmatrix} Y^1 & Y^2 \end{pmatrix}$ eine Fundamentalmatrix. für das entsprechende **homogene** System.

$S_0 = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Dann ist: $Y^P = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow$ eine partikuläre Lösung des inhom. Systems.

$$\boxed{\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \int U^{-1}(x) \cdot B(x)\, dx}$$

Beweis:

Einsetzen Y^P in das System:

$$(Y^P)' = A \cdot Y^P + B(x)$$

$$\left(U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \right)' = A \cdot U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + B(x)$$

$$U'(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = A \cdot U(x) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + B(x)$$

$$U'(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} - A \cdot U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = B(x)$$

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \cdot \Big[\underbrace{U'(x) - A \cdot U(x)}_{=0} \Big] + U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = B(x)$$

(weil $U(x)$ eine Fundamentalmatrix ist)

$$U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = B(x) \quad \Big| \; U^{-1}(x)$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = U^{-1}(x) \cdot B(x) \quad \Big| \int$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \int U^{-1}(x) \cdot B(x) \, dx,}$$

Beispiel

Wir betrachten das DGL-System:

$$\begin{cases} y_1'(x) + 2\cdot y_1(x) + y_2(x) = \sin x \\ y_2'(x) - 4\cdot y_1(x) - 2\cdot y_2(x) = \cos x \end{cases}$$

a) Ist $U(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1-2x & -2 \end{pmatrix}$ eine Fundamentalmatrix?

$$\begin{cases} y_1'(x) = -2y_1(x) - y_2(x) + \sin x \\ y_2'(x) = 4\cdot y_1(x) + 2\cdot y_2(x) + \cos x \end{cases}$$

Das homogene System:

$$\begin{cases} y_1'(x) = -2y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) = 4 \cdot y_1(x) + 2 \cdot y_2(x) \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1-2x & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y^1 = \begin{pmatrix} x \\ -1-2x \end{pmatrix};$$

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. $Y^1 = \begin{pmatrix} x \\ -1-2x \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = x$

$y_2 = -1-2x$

$$\begin{cases} x' = -2 \cdot x - (-1-2x) \\ (-1-2x)' = 4 \cdot x + 2 \cdot (-1-2x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{1} = \cancel{-2x} \cancel{+1} \cancel{+2x} \\ \cancel{-2} = \cancel{4x} - \cancel{2} - \cancel{4x} \end{cases} \qquad 0 = 0 \quad „w“$$

$\Rightarrow Y^1$ Lösung des Systems ist.

2 $Y^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1(x) = 1 \\ y_2(x) = -2. \end{array}$

$$\begin{cases} 1' = -2 \cdot 1 - (-2) \\ (-2)' = 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \end{cases} \qquad 0 = 0 \quad „w“$$

$\Rightarrow Y^2$ Lösung des Systems ist.

$$W(x; Y^1, Y^2) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1-2x & -2 \end{vmatrix} = -\cancel{2x} + 1 + \cancel{2x}$$

$$= 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Y^1, Y^2$ linear unabhängig sind.

$\Rightarrow U(x)$ eine Fundamentalmatrix ist.

$$Y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0(x) \\ y_2^0(x) \end{pmatrix} = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1-2x & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y_1^0(x) = x \cdot c_1 + c_2 \\ y_2^0(x) = (-1-2x) \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Die allgemeine Lösung des inhom. DGL-Systems.

$$Y^0 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1-2x & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

$$Y^P = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1-2x & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \int U^{-1}(x) \cdot B(x)\, dx.$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$U(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1-2x & -2 \end{pmatrix}.$$

$$U^t(x) = \begin{pmatrix} x & -1-2x \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$U^*(x) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ +1+2x & x \end{pmatrix}$$

$$U^{-1}(x) = \frac{1}{\det(U(x))} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1+2x & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1+2x & x \end{pmatrix}.$$

$$U^{-1}(x)\cdot B(x) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1+2x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin x - \cos x \\ (1+2x)\cdot \sin x + x\cdot \cos x \end{pmatrix}$$

$$c_1(x) = \int (-2\sin x - \cos x)\, dx =$$

$$= 2\cdot \cos x - \sin x .$$

$$c_2(x) = \int \left[(1+2x)\cdot \sin x + x\cdot \cos x\right] dx$$

$$= \int (1+2x)\cdot \sin x \, dx + \int x \cdot \overbrace{\cos x}^{(\sin x)'}\, dx =$$

$$= -\cos x\cdot (1+2x) + 2\cdot(-\cos x) + x\cdot \sin x + \cos x$$

$$c_2(x) = -2x\cos x + x\cdot\sin x - 2\cos x.$$

$$y^P = U(x)\cdot\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1-2x & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cdot\cos x - \sin x \\ -2x\cos x + x\cdot\sin x - 2\cos x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{2x\cdot\cos x} - \cancel{x\cdot\sin x} - \cancel{2x\cos x} + \cancel{x\sin x} - 2\cos x \\ (-1-2x)\cdot(\cancel{2}\cos x - \sin x) - 2\cdot(-\cancel{2x}\cos x + x\cdot\sin x - 2\cos x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cos x \\ -2\cos x + \sin x + \cancel{2x\sin x} - \cancel{2x\sin x} + 4\cos x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cos x \\ 2\cos x + \sin x \end{pmatrix}$$

$$Y = Y^{O} + Y^{P} =$$

$$= \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1-2x & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\cos x \\ 2\cos x + \sin x \end{pmatrix}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} y_1(x) = x \cdot c_1 + c_2 - 2\cos x \\ y_2(x) = (-1-2x) \cdot c_1 - 2c_2 + 2\cos x + \sin x \end{cases}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 2 \end{cases}$

$y_1(0) = 1 \Rightarrow c_2 - 2 = 1 \Rightarrow \boxed{c_2 = 3.}$

$y_2(0) = 2 \Rightarrow -c_1 - 2c_2 + 2 = 2$

$-c_1 - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = -6}$

$\begin{cases} y_1(x) = -6x + 3 - 2\cos x \\ y_2(x) = -6(-1-2x) - 6 + 2\cos x + \sin x \end{cases}.$

H9 Wir betrachten das folgende System:

$$\begin{cases} y_1'(x) - y_1(x) + y_2(x) = -1 \\ y_2'(x) - y_1(x) + y_2(x) = x - \frac{1}{2} \end{cases}.$$

a) Bestimme die allg. Lösung des hom. DGL-Systems, wobei: $U(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$ (beweisen $U(x)$ – Fundamentalmatrix)

b) Bestimme die allg. Lösung des inhom. Systems.

c) Bestimme die Lösung des Cauchy pb: mit den Anfangsbed.: $\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$.

Homogene DGL-Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeff.

Die allgemeine Form:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11} \cdot y_1(x) + a_{12}\, y_2(x) \\ y_2'(x) = a_{21} \cdot y_1(x) + a_{22} \cdot y_2(x) \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R} \quad i,j = \overline{1,2}$$

1. Methode

Zurückführen auf eine DGL 2. Ordnung

$$y_2(x) = \frac{1}{a_{12}} \cdot \left[y_1'(x) - a_{11} \cdot y_1(x) \right]$$

$$y_2'(x) = \frac{1}{a_{12}}\left[y_1''(x) - a_{11}\cdot y_1'(x)\right].$$

Einsetzen in die 2. DGL.

$$\frac{1}{a_{12}}\left[y_1''(x) - a_{11}\cdot y_1'(x)\right] - a_{21}\cdot y_1 +$$

$$+\, a_{22}\cdot\frac{1}{a_{12}}\left[y_1'(x) - a_{11}\cdot y_1(x)\right].$$

$$y_1''(x) + \alpha\cdot y_1'(x) + \beta\cdot y_1(x) = 0.$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

⟶ eine DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeff

⟶ Lösung: die charakt. Gleichung.

Beispiel

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) - 5 \cdot y_2(x) \\ y_2'(x) = 2 \cdot y_1(x) - y_2(x) \end{cases}$$

$$\left(\boxed{y_2(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(y_1(x) - y_1'(x)\right)}\right)'$$

$$y_2'(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(y_1'(x) - y_1''(x)\right)$$

Einsetzen:

$$\frac{1}{5} \cdot \left(y_1'(x) - y_1''(x)\right) = 2 \cdot y_1(x) - \frac{1}{5} \cdot \left(y_1(x) - y_1'(x)\right) \quad \Big| \cdot 5$$

$$\cancel{y_1'(x)} - y_1''(x) = 10 \cdot y_1(x) - y_1(x) + \cancel{y_1'(x)}$$

$$y_1''(x) + 9\cdot y_1(x) = 0.$$

$$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 3i \qquad \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 3 \end{matrix}$$

$$\boxed{y_1(x) = C_1\cdot \cos 3x + C_2\cdot \sin 3x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

$$y_2(x) = \frac{1}{5}\cdot\left[y_1(x) - y_1'(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left(C_1\cdot\cos 3x + C_2\cdot \sin 3x\right) - \left(-3C_1\cdot \sin 3x + 3C_2\cdot\cos 3x\right)\right] =$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{5}\cdot\left[\cos 3x\cdot(C_1 - 3C_2) + \sin 3x\cdot(C_2 + 3C_1)\right]}$$