Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 11. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 38)

Man beachte, dass alle in dieser Aufgabe auftretenden Funktionen stetig sind.

a) Es ist $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} > 0$ für alle $x \geq 1$. Aus

$$L = \lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1 < \infty$$

und $p = 2 > 1$ folgt, anhand der 3. Tabelle, dass f auf $[1,\infty)$ uneigentlich integrierbar ist.

b) Die Funktion f ist auf $[0, \frac{\pi}{2})$ positiv. L'Hospitals Regel anwendend, erhält man

$$L = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\sin x} = 1.$$

Wegen $p = 1 \geq 1$ und $L > 0$ folgt, anhand der 1. Tabelle, dass f auf $[0, \frac{\pi}{2})$ nicht uneigentlich integrierbar ist.

c) Es ist $f(x) > 0$ für alle $x > 0$. Wir untersuchen die uneigentliche Integrierbarkeit von f auf den Intervallen $(0,1]$ und $[1,\infty)$. Beim Berechnen des Grenzwertes L_1 verwenden wir die Tatsache, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

ist. Das folgt aus der Anwendung von L'Hospitals Regel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

Aus

$$L_1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^0 f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2 = 1$$

folgt, anhand der 2. Tabelle, dass f auf $(0,1]$ uneigentlich integrierbar ist. Wegen

$$L_2 = \lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} (\operatorname{arctg} x)^2 = \frac{\pi^2}{4} < \infty$$

und $p = 2 > 1$ schließen wir, anhand der 3. Tabelle, dass f auch auf $[1,\infty)$ uneigentlich integrierbar ist. Somit ist also f auf $(0,\infty)$ uneigentlich integrierbar.

d) Beachte, dass $-1 < a < 1$ die Ungleichung $1 - a^2x^2 > 0$, für alle $x \in [0,1]$, impliziert. Außerdem ist $f(x) > 0$ für alle $x \in [0,1)$. Aus

$$L = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{1-x}\, f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x^2)(1-a^2x^2)}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-a^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}(1-a^2)} < \infty$$

und $p = \frac{1}{2} < 1$ folgt, nach der 1. Tabelle, dass f auf $[0, 1)$ uneigentlich integrierbar ist.

e) Die Funktion f ist auf ihrem Definitionsbereich positiv. Wir untersuchen die uneigentliche Integrierbarkeit von f auf den Intervallen $(1, 2]$ und $[2, \infty)$. Aus

$$L_1 = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{x-1} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sqrt{x-1}\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\ln x}{x\sqrt{x+1}} = 0$$

und $p = \frac{1}{2} < 1$ folgt, nach der 2. Tabelle, die uneigentliche Integrierbarkeit von f auf $(1, 2]$. Beim Berechnen des Grenzwertes L_2 verwenden wir die Tatsache, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

ist. Das folgt aus der Anwendung von L'Hospitals Regel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Wegen

$$L_2 = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}\ln x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

und $p = \frac{3}{2} > 1$ ist, laut der 3.Tabelle, f auch auf $[2, \infty)$ uneigentlich integrierbar. Somit ist also f auf $(1, \infty)$ uneigentlich integrierbar.

f) Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$. Wir untersuchen die uneigentliche Integrierbarkeit von f auf den Intervallen $(0, 1]$ und $[1, \infty)$. Aus

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha-1} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \in (0, \infty)$$

folgt, nach der 2. Tabelle, dass, falls $\alpha - 1 < 1$, also $\alpha < 2$, die Funktion f auf $(0, 1]$ uneigentlich integrierbar, und, falls $\alpha - 1 \geq 1$, also $\alpha \geq 2$, die Funktion f auf $(0, 1]$ nicht uneigentlich integrierbar ist.

Es sei $\alpha < 2$. Aus

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \in (0, \infty)$$

folgt, nach der 3. Tabelle, dass, falls $\alpha > 1$, die Funktion f auf $[1, \infty)$ uneigentlich integrierbar, und, falls $\alpha \leq 1$, die Funktion f auf $[1, \infty)$ nicht uneigentlich integrierbar ist.

Zusammenfassend, ist also f auf $(0, \infty)$ genau dann uneigentlich integrierbar, wenn $\alpha \in (1, 2)$ ist. Für die Werte $\alpha \leq 1$ und $\alpha \geq 2$ ist f auf $(0, \infty)$ nicht uneigentlich integrierbar.

(A 39)

a) Die Funktionen $x \in [2, \infty) \mapsto x$ und $x \in [2, \infty) \mapsto (\ln x)^2$ sind beide stetig, wachsend und nehmen positive Werte an. Daraus folgt, dass deren Produkt ebenfalls stetig und wachsend ist, sowie positive Werte annimmt. hieraus schließt man, dass $f\colon [2, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$, stetig und fallend ist. Auch gilt $f(x) > 0$, für alle $x \geq 2$. Es ist

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int (\ln x)^{-2} \cdot (\ln x)' dx = -\frac{1}{\ln x} + \mathcal{C}.$$

Somit ist $F\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = -\frac{1}{\ln x}$, eine Stammfunktion von f. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} -\dfrac{1}{\ln x} = 0$ impliziert **Th2** aus der 10. Vorlesung, dass f auf $[2,\infty)$ uneigentlich integrierbar ist. Das Integralkriterium für Reihen hat nun die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ zur Folge.

b) Die Funktion $f\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, ist stetig und fallend (da f' auf $[2,\infty)$ negativ ist). Auch gilt $f(x) > 0$, für alle $x \geq 2$. Es ist

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} + \mathcal{C}.$$

Also ist $F\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x}$, eine Stammfunktion von$f$. L'Hopitals Regel einsetzend, erhält man

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} -\frac{\ln x + 1}{x} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Nach **Th2** aus der 10. Vorlesung folgt nun, dass f auf $[2,\infty)$ uneigentlich integrierbar ist. Das Integralkriterium für Reihen impliziert schließlich die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{\ln n}{n^2}$.