DGL Systeme mit konstanten Koeffizienten

2) Die Methode der charakteristischen Gleichung.

Wir betrachten das homogene DGL-System:

$$Y' = A \cdot Y$$

Wir suchen Lösungen in der Form:

$$\boxed{Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot e^{\lambda x} \\ \alpha_2 \cdot e^{\lambda x} \end{pmatrix}, \; (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0).}$$

Weil Y das System genügt, gilt es:

$$Y' - AY = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix}' - A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot e^{\lambda x} \\ \alpha_2 \cdot e^{\lambda x} \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} \\ \alpha_2 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} = 0.$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot e^{\lambda x} \\ \alpha_2 \cdot e^{\lambda x} \end{pmatrix} = 0.$$

$$(\lambda \cdot \underline{I}_2 - A) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}}_{\neq 0.} \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0.} = 0.$$

$$\boxed{|\lambda \underline{I}_2 - A| = 0.}$$ $\longrightarrow$ die charakteristische Gleichung des Systems

Die Lösungen der ch. Gleichung sind die Eigenwerte der Matrix A.

a) Reele Eigenwerte verschieden voneinander

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$

- Für jeden λ bestimmt man der entsprechende Eigenvektor $\neq 0$.

$$Y^1(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \cdot e^{\lambda_1 x} \\ \alpha_2^1 \cdot e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix} \qquad Y^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \cdot e^{\lambda_2 x} \\ \alpha_2^2 \cdot e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}$$

Lösungen des Systems.

Die Fundamentalmatrix:

$$U(x) = \begin{pmatrix} Y^1(x) & Y^2(x) \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung: $Y(x) = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$,

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Komplexwertige Eigenwerte

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

<u>Satz</u>: $z(x) = z_1(x) + i \cdot z_2(x)$ ist Lösung des DGL-Systems genau dann wenn $z_1(x)$ und $z_2(x)$ Lösungen des Systems sind.

$$z(x) = \begin{pmatrix} (a_1 + i b_1) \cdot e^{(\alpha + i\beta)x} \\ (a_2 + i b_2) \cdot e^{(\alpha + i\beta)x} \end{pmatrix}$$

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha\cdot x}\cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x + i\cdot\sin\beta x)$$

$$z(x) = z_1(x) + i\cdot z_2(x).$$

Die zwei Lösungen des Systems sind $z_1(x)$ und $z_2(x)$ und die Fundamentalmatrix.

$$U(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) & z_2(x) \end{pmatrix}.$$

$$Y(x) = U(x)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Mehrfache Eigenwerte.

Wenn λ ein 2-facher Eigenwert der Matrix A ist, dann bilden die folgenden Lösungen das Fundamentalmatrix:

$y^1(x) = u_1 \cdot e^{\lambda x}$

$y^2(x) = (u_1 \cdot x + u_2) \cdot e^{\lambda x}$, wobei

u_1 und u_2 Lösungen der Systemen:

$(A - \lambda I_2) \cdot u_1 = 0.$

$(A - \lambda I_2) \cdot u_2 = u_1.$

$$Y = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1(x) & y^2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bsp:

(1) Wir betrachten das DGL-System:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 + 4\cdot y_2 \end{cases}$$

? Die allg. Lösung des Systems.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ die Matrix des Systems

- Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix A.

$$|\lambda I_2 - A| = 0.$$

$$\left| \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda-1)(\lambda-4)+2=0.$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - \lambda + 4 + 2 = 0 \iff \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

$$\boxed{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0} \longrightarrow$$ die charakt. Gleichung.

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= 3 \\ \lambda_2 &= 2. \end{aligned}} \longrightarrow$$ die Eigenwerte der Matrix A.

$$\boxed{\lambda_1 = 3}$$

$$(\lambda_1 I_2 - A) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ → aus dem System werden die Eigenvektoren bestimmt

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & -1 \\ 2 & \lambda_1 - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 3 - 1 & -1 \\ 2 & 3 - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha_2 = 2\alpha_1}$$

$\alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 2.$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 \end{pmatrix}, \alpha_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 2.$

$$Y^1(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \\ \alpha_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot e^{3x} \\ 2 \cdot e^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 2e^{3x} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 2}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - 1 & -1 \\ 2 & \lambda_2 - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 - 1 & -1 \\ 2 & 2 - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha_2}$$

$$\alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = \underline{1}.$$

$$Y^2(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_2 x} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot e^{2x} \\ 1\, e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$U(x) = \begin{pmatrix} Y^1(x) & Y^2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{2x} \\ 2e^{3x} & e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{2x} \\ 2e^{3x} & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} \\ y_2(x) = 2c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 2.

Wir betrachten das System:

$$\begin{cases} y_1' = -5y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 4y_1 - y_2 \end{cases}$$

? die allg. Lösung.

- $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

- $|\lambda I_2 - A| = 0 \iff \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda+5 & 5 \\ -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0.$$

ch. Gleichung.

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm 4i$$

$$\boxed{\lambda = -3 + 4i}$$

$$(\lambda I_2 - A) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda+5 & 5 \\ -4 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3+4i+5 & 5 \\ -4 & -3+4i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (2+4i)\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 & \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = \frac{1}{5} \cdot (-2-4i) \cdot \alpha_1} \\ -4\alpha_1 + (-2+4i) \cdot \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

$$\alpha_1 = 5 \Rightarrow \alpha_2 = -2-4i$$

$$e^{\lambda x} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = e^{(-3+4i)x} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2-4i \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-3x} \cdot (\cos 4x + i \cdot \sin 4x) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2-4i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5e^{-3x} \cdot (\cos 4x + i \cdot \sin 4x) \\ e^{-3x} \cdot (\cos 4x + i \cdot \sin 4x) \cdot (-2-4i) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5e^{-3x} \cdot \cos 4x + 5e^{-3x} \cdot i \cdot \sin 4x \\ e^{-3x} \cdot (\underline{-2\cos 4x} - 4 \cdot i \cdot \cos 4x - 2i \cdot \sin 4x + \underline{4\sin 4x}) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \cdot e^{-3x} \cdot \cosh x \\ e^{-3x} \cdot (-2\cosh x + 4\sinh x) \end{pmatrix}}_{Y^1(x)} + i \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 e^{-3x} \cdot \sinh x \\ e^{-3x} \cdot (-2\sinh x - 4\cosh x) \end{pmatrix}}_{Y^2(x)}$$

$$U(x) = \left(Y^1(x) \quad Y^2(x) \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 e^{-3x} \cdot \cosh x & 5 e^{-3x} \cdot \sinh x \\ e^{-3x} \cdot (-2\cosh x + 4\sinh x) & e^{-3x} (-2\sinh x - 4\cosh x) \end{pmatrix}$$

$$Y = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 3

Wir betrachten das System:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

allg. Lösung. ?

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

- $|\lambda I_2 - A| = 0 \iff \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0.$

$\iff \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\boxed{\lambda_{1,2} = 2}$ $\boxed{\lambda = 2}$

$$\boxed{\lambda = 2}$$

$$\left(\lambda I_2 - A\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \qquad \alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = -1.$$

$$Y^1(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot e^{\lambda x} \\ \alpha_2 \, e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\left(\lambda I_2 - A\right) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ -\beta_1 - \beta_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad \beta_1 = 1 - \beta_2$$

$$\beta_2 = 2 \Rightarrow \beta_1 = -1.$$

$$y^2(x) = \begin{pmatrix} (\alpha_1 x + \beta_1) e^{\lambda x} \\ (\alpha_2 x + \beta_2) e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-1) e^{2x} \\ (-x+2) e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$U(x) = \left(Y^1(x) \quad Y^2(x) \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2x} & (x-1)e^{2x} \\ -e^{2x} & (-x+2)e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^{2x} + c_2 (x-1) e^{2x} \\ y_2(x) = c_1 \cdot (-e^{2x}) + c_2 \cdot (-x+2) e^{2x} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Hg

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + 2e^x \\ y_2' = 4y_1 + y_2 - e^x \end{cases} \qquad Y = Y_0 + \{Y^p\}$$