Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2024-2025

7. Vorlesung

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\mathrm{mal}} = \{(x_1, ..., x_n) |\ x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ werden Vektoren oder Punkte genannt. Ist $x \in \mathbb{R}^n$, dann setzen wir $x = (x_1, ..., x_n)$ und nennen $x_1, ..., x_n$ die Koordinaten des Vektors x.

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$

- die Addition: $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,
- die Skalarmultiplikation: $\underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{R}}(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

Bezeichnungen

- $0_n := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-\text{mal}})$ ist der Nullvektor;
- $e^1, \ldots, e^n \in \mathbb{R}^n$ sind die Vektoren der kanonischen Basis, wobei

$$e^j := (0, \ldots, 0, \underset{\uparrow j\text{-te Koordinate}}{1}, 0, \ldots, 0)\,, \quad j \in \{1, \ldots, n\}\,;$$

- $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x = x_1 e^1 + \ldots + x_n e^n.$$

Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

Sind $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$, so nennt man die reelle Zahl

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

das Skalarprodukt der Vektoren x und y.

Die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$

Ist $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so nennt man die reelle Zahl

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}$$

die euklidische Norm des Vektors x.

Der euklidische Abstand im $\mathbb{R}^n$

Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$, dann ist $\|x - y\|$ der euklidische Abstand zwischen x und y.

Definition

Den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem euklidischen Abstand, nennt man den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$.

Definition

Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Dann sind:

$$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|y - x\| < r\}$$

die offene Kugel mit Zentrum x und Radius r,

$$\overline{B}(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|y - x\| \leq r\}$$

die abgeschlossene Kugel mit Zentrum x und Radius r.

S1 (Eigenschaften des Skalarproduktes im $\mathbb{R}^n$)

1) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\forall\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^n$.

2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

4) $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$.

5) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0_n$.

6) $\langle x, x\rangle > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.

S2 (Eigenschaften der euklidischen Norm im $\mathbb{R}^n$)

1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^n$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist $\|-x\| = \|x\|,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$.

3) $\|x\| = 0 \iff x = 0_n$.

4) $\|x\| > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.

Definition

Sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ wird Grenzwert der Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ genannt, falls

$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \text{so dass } x^k \in U,\ \forall\ k \geq k_0.$$

In diesem Fall sagt man, dass $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert (strebt), und dass die Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

Bezeichung: $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$.

Eine Folge, die nicht konvergent ist, wird divergent genannt.

Th4 (Die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge im $\mathbb{R}^n$)

Sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$, die einen Grenzwert hat. Dann hat $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen einzigen Grenzwert.

Th5 (Charakterisierungen für den Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^n$)

Seien $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$ mit $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

1° $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$.

1° $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^k - x\| = 0$.

1° $\forall\ j \in \{1, \ldots, n\}$ konvergiert die reelle Zahlenfolge $(x_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x_j.