Algorithmische Graphentheorie

Kapitel 9: Matchings

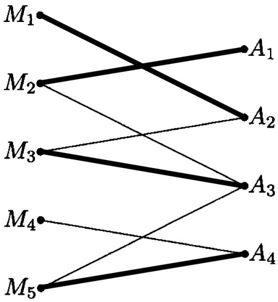
Babeş-Bolyai Universität, Fachbereich Informatik,
Klausenburg

Beispiel 1: Produktionsstätte (1/2)

In einer Produktionsanlage gibt es Maschinen $M_1, \ldots, M_k$, welche von Arbeitern $A_1, \ldots, A_\ell$ bedient werden können. Ein Arbeiter kann nicht gleichzeitig mehrere Maschinen bedienen, und nicht jeder Arbeiter ist ausgebildet, jede der k Maschinen zu bedienen. Um die Maschinen optimal auszunutzen, ist eine Zuordnung von Maschinen und Arbeitern gesucht, bei der möglichst viele Maschinen bedient werden.

Dieses Problem kann durch einen ungerichteten bipartiten Graphen mit $k + \ell$ Knoten dargestellt werden: Die Knoten sind mit $M_1, \ldots, M_k$ und $A_1, \ldots, A_\ell$ markiert, und zwischen M_i und A_j gibt es eine Kante gdw. Maschine M_i von Arbeiter A_j bedient werden kann.

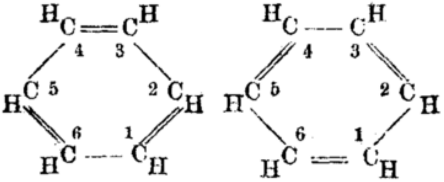
Beispiel 1: Produktionsstätte (2/2)



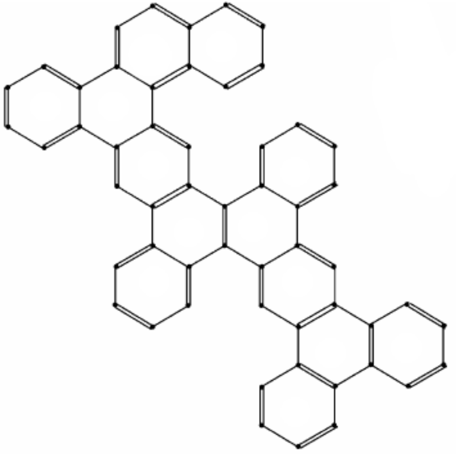
In diesem Beispiel sehen wir fünf Maschinen und vier Arbeiter. Fett dargestellt sind vier spezielle Kanten: diese zeigen eine optimale Lösung des Problems [wieso optimal?]. Wir werden uns in diesem Kapitel damit befassen, wie man derartige Lösungen findet.

Beispiel 2: Kekulé-Struktur (1/2)

August Kekulé (1829-1896) legte die Grundlagen für die moderne Strukturtheorie der organischen Chemie. Er stellte die Struktur von Benzol als einen Ring aus sechs Kohlenstoffatomen dar, wobei jede zweite Kante gedoppelt wird. Da jeder Knoten in einer Doppelkante liegt, hat jedes Kohlenstoffatom dann vier Bindungen. Diese Menge von Doppelkanten ist das, was wir in der Graphentheorie ein *perfektes Matching* nennen. Die Chemiker nennen ein solches perfektes Matching auch heute noch eine *Kekulé-Struktur*.



Beispiel 2: Kekulé-Struktur (2/2)



Ein größeres Beispiel: Doppelkanten müssen paarweise disjunkt sein und alle Knoten überdecken.

Beispiel 3: Museumswärter (1/3)

Ein Museum möchte Wärter aufstellen, sodass jeder Punkt der Ausstellungsfläche im Blickfeld von mindestens einem Wärter liegt. Hierbei gehen wir davon aus, dass die Wärter einen Rundumblick haben und von einem Ende eines Ganges diesen komplett einsehen können.

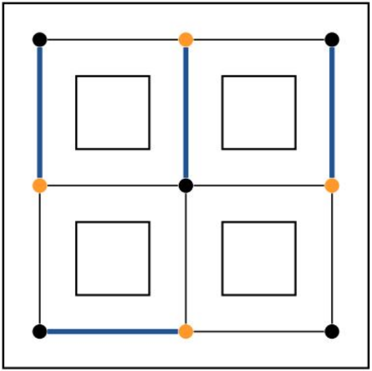
Da das Museum nur aus engen Gängen besteht, können wir es als Graphen beschreiben, indem wir Kreuzungen, Ecken und Sackgassen jeweils einen Knoten zuordnen und für alle Gänge Kanten einfügen.

BEISPIEL 3: MUSEUMSWÄRTER (2/3)

Wollen wir aus Kostengründen möglichst wenige Wärter aufstellen, so werden wir diese immer an Knoten aufstellen, da sie dann alle dazu inzidenten Kanten überwachen können. Wir suchen also eine möglichst kleine Teilmenge der Knoten, sodass jede Kante im Graphen zu mindestens einem dieser Knoten inzident ist.

Um eine untere Schranke für die Anzahl der nötigen Wärter zu bekommen, können wir versuchen, eine möglichst große Menge an Kanten zu finden, die jeweils keine gemeinsamen Endknoten haben. Jede dieser Kanten muss dann von einem anderen Wärter überwacht werden, daher brauchen wir mindestens so viele Wärter, wie wir solche Kanten finden können, vergleiche Abbildung:

Beispiel 3: Museumswärter (3/3)

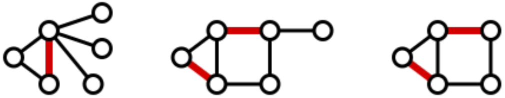


Wärter stehen an orangenen Knoten.
Wir benötigen in diesem Museum mindestens 4 Wärter.

Matchings

- Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph. Eine Menge $M \subseteq E$ heißt *Matching*, wenn keine zwei Kanten $e, e' \in M$ adjazent sind (äquivalent: $e \cap e' = \emptyset$).
- In der deutschsprachigen Literatur sind auch die Begriffe *Paarung* und *Zuordnung* üblich, wir bleiben in dieser Vorlesung aber bei Matching.
- Ein Matching M heißt *maximal*, wenn es kein anderes Matching M' gibt, sodass $M \subsetneq M'$.

Beispiele maximaler Matchings:



Da Adjazenz von Kanten nicht davon abhängt, ob diese gerichtet oder ungerichtet sind, werden wir im folgenden nur **ungerichtete** Graphen betrachten.

Wir interessieren uns für Matchings mit **möglichst vielen Kanten**. Dies gibt Anlass zu den folgenden Definitionen.

MATCHINGS

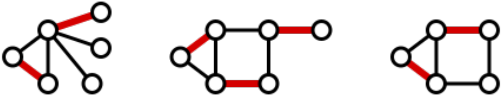
- Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $M \subseteq E$ ein Matching. Alle zu M inzidenten Knoten heißen *M-überdeckt*, alle nicht zu M inzidenten Knoten heißen *M-frei*.
- Ein Matching in G heißt *perfekt* (*perfect*), wenn es alle Knoten $v \in V$ überdeckt.
- Ein *k-Faktor* ist ein k-regulärer, aufspannender Teilgraph. Perfekte Matchings sind also 1-Faktoren.
- Die *Matching-Größe* (*matching number*) von G ist def. als

$$\nu(G) := \max\{|M| \; : \; M \text{ ist ein Matching in } G\}.$$

- Offensichtlich besitzt ein Graph $G = (V, E)$ genau dann ein perfektes Matching, wenn $\nu(G) = \frac{|V|}{2}$ gilt. Damit also überhaupt ein perfektes Matching vorliegen kann, muss G gerade Ordnung haben.

Bemerkung

Unser Ziel ist es, Matchings mit **möglichst vielen**, also $\nu(G)$ Kanten, zu finden.

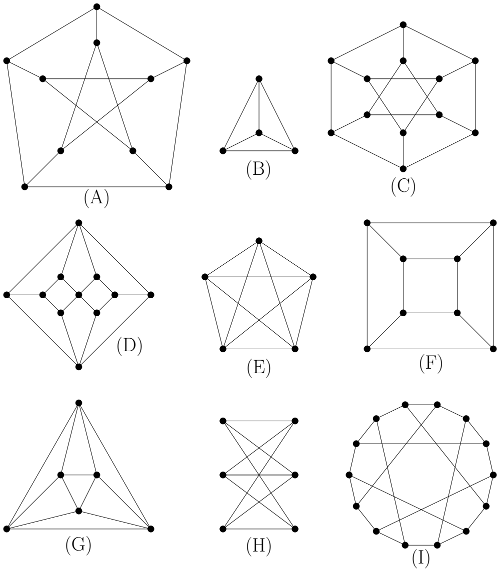


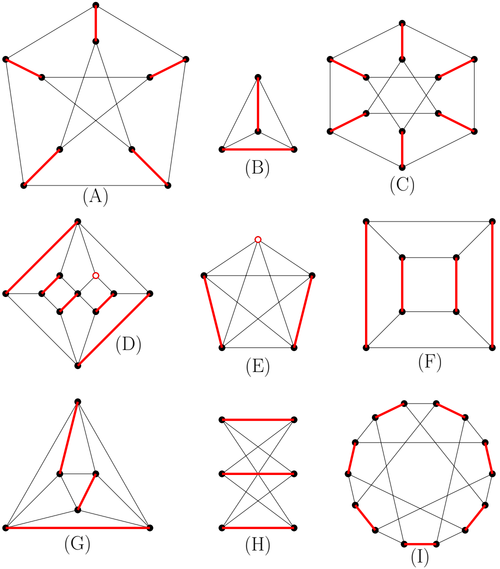
Diese sind dann auch immer maximale Matchings, umgekehrt hat aber nicht jedes maximale Matching $\nu(G)$ Kanten:

(a) maximales Matching (b) Matching maximaler Kardinalität

Auf Englisch bezeichnet man maximale Matchings als *maximal matchings*, Matchings maximaler Kardinalität heißen jedoch *maxim**um** matchings*.

Aufgabe. Geben Sie für jeden der folgenden Graphen ein Matching maximaler Größe an – ist es perfekt?



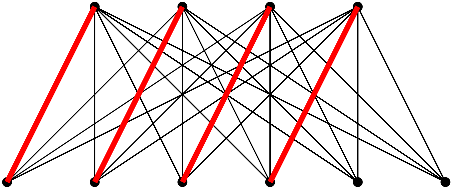


Die Matchings von (D) und (E) sind größtmöglich, jedoch nicht perfekt. Alle anderen Matchings sind perfekt.

Frage. Hat etwa jeder zusammenhängende Graph gerader Ordnung ein perfektes Matching?

Frage. Hat etwa jeder zusammenhängende Graph gerader Ordnung ein perfektes Matching?

Nein, man betrachte den vollständigen bipartiten Graphen $K_{s,s+t}$ mit $t \geq 2$ gerade, z.B. $K_{4,6}$:



Ein solcher Graph hat gerade Ordnung, kann aber unmöglich ein perfektes Matching haben.

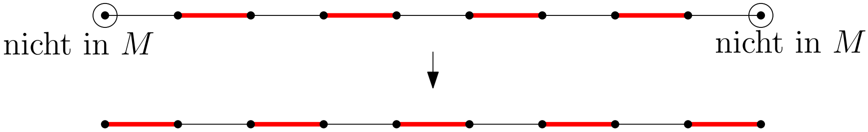
Charakterisierung von Matchings maximaler Kardinalität

Bevor wir uns überlegen, wie wir ein Matching mit $\nu(G)$ Kanten finden, wollen wir prüfen, wie man einem gegebenen Matching ansehen kann, ob es diese Eigenschaft hat. Dafür betrachten wir spezielle Wege:

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $M \subseteq E$ ein Matching. Ein Weg in G heißt *M-alternierend*, wenn seine Kanten abwechselnd in M und nicht in M liegen. Ein M-alternierender Weg in G, dessen beide Endknoten M-frei sind, heißt *M-vergrößernder Weg* (*augmenting path*).

Charakterisierung von Matchings maximaler Kardinalität

Existiert ein solcher Weg, so können wir das betrachtete Matching M (unten in rot dargestellt) derart abändern, dass es mehr Kanten hat:



Charakterisierung von Matchings maximaler Kardinalität

Lemma. *Es sei* $G = (V, E)$ *ein Graph,* $M \subseteq E$ *ein Matching und* P *ein* M*-vergrößernder Weg. Dann ist*

$$M' := (M \cup P) \setminus (M \cap P) = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$$

ein Matching mit $|M'| = |M| + 1 > |M|$.

BEWEIS (1/2)

- Wir zeigen zunächst, dass M' auch ein Matching ist (per Widerspruchsbeweis).
- Angenommen, es gäbe in M' zwei adjazente Kanten.
- Diese können nicht beide in $M \setminus P$ liegen, da M ein Matching ist.
- Sie können auch nicht beide in $P \setminus M$ liegen, da P ein M-alternierender Weg ist.
- Also muss eine der beiden Kanten in $M \setminus P$ liegen und die andere in $P \setminus M$.
- Der gemeinsame Knoten liegt also auch in P und kann daher keiner der Endknoten sein, da diese M-frei sind.

Beweis (2/2)

- Es kann aber auch keiner der Zwischenknoten sein, da an diesen immer auch eine Kante in $P \cap M$ endet, folglich zwei Kanten in M adjazent wären – dies widerspricht jedoch der Tatsache, dass M ein Matching ist.
- Da P ein M-vergrößernder Weg ist, liegen die erste und letzte Kante von P nicht in M. Demnach gilt

$$|M'| = |M| \underbrace{-|M \cap P| + |P \setminus M|}_{=1} = |M| + 1 > |M|.$$

Charakterisierung von Matchings maximaler Kardinalität

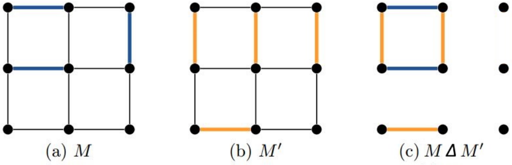
Tatsächlich ist die Bedingung, dass es keinen M-vergrößernden Weg geben darf, nicht nur notwendig, sondern auch **hinreichend** dafür, dass ein Matching M genau $\nu(G)$ Kanten enthält:

Satz (Berge, 1957). *In einem Graphen G mit Matching M gilt $|M| = \nu(G)$ gdw. es keinen M-vergrößernden Weg gibt.*

Beweis (1/3)

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Es sei $M \subseteq E$ ein Matching mit $|M| = \nu(G)$. Nehme an, es gäbe einen M-vergrößernden Weg. Dann impliziert das Lemma von Folie 18, dass es ein Matching M' in G gibt mit $|M'| = \nu(G) + 1$, ein Widerspruch zur Definition von $\nu(G)$.

Beweis (2/3)



„$\Longleftarrow$“: Dies ist äquivalent zu: $|M| < \nu(G)$ impliziert, dass es einen M-vergrößernden Weg gibt. Es sei also nun $|M| < \nu(G)$. Dann gibt es ein anderes Matching M' mit $|M'| = \nu(G) > |M|$. Setze nun

$$E' := M\Delta M' = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$$

und $G' = (V, E')$.

Beweis (3/3)

- Da jeder Knoten in G' höchstens zu einer Kante aus M und einer aus M' inzident sein kann, hat jeder Knoten in G' höchstens Grad 2, d.h. alle Zusammenhangskomponenten von G' sind entweder einzelne Knoten, Wege oder Kreise gerader Länge.
- Da die Kreise gleich viele Kanten aus M und M' enthalten, E' aber mehr Kanten aus M' als aus M enthält, muss es mindestens eine Zusammenhangskomponente in G' geben, die kein Kreis ist und deren beide Endkanten zu M' gehören.
- Diese Zusammenhangskomponente ist dann ein M-vergrößernder Weg.

Bemerkung

- Dieses Resultat liefert eine erste Idee für einen Algorithmus zur Bestimmung von Matchings maximaler Kardinalität.
- Man beginnt mit einem leeren Matching und vergrößert dieses so lange, bis kein M-vergrößernder Weg mehr existiert.
- Dies ist nach maximal $\frac{|V|}{2}$ Iterationen der Fall und liefert ein Matching größtmöglicher Kardinalität.

Bemerkung

- Wie findet man M-vergrößernde Wege?
- In beliebigen Graphen ist dies zwar möglich, das dafür notwendige Verfahren ist jedoch sehr kompliziert.
- Manche Graphen haben spezielle Eigenschaften, die die Suche nach Matchings vereinfachen.

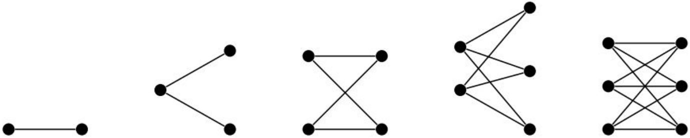
Bipartite Graphen

Wiederholung: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls es Mengen $V_1 \subseteq V$ und $V_2 \subseteq V$ gibt mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und $V_1 \cup V_2 = V$, sodass keine Kante von G zwischen zwei Knoten von V_1 oder zwischen zwei Knoten von V_2 verläuft. Sind *alle* Kanten zwischen V_1 und V_2 vorhanden, so nennen wir den Graphen *vollständig bipartit* und schreiben $K_{|V_1|,|V_2|}$.

Ob ein Graph bipartit ist oder nicht, hängt offensichtlich nicht davon ab, ob seine Kanten orientiert sind. Daher betrachten wir im Folgenden nur **ungerichtete** Graphen. In zusammenhängenden Graphen ist die Partition der Knoten eindeutig, in nicht zusammenhängenden Graphen ist sie nicht eindeutig.

Bipartite Graphen

Mit $K_{p,q}$ bezeichnen wir den vollständigen bipartiten Graphen mit $|V| = p + q$, der eine Partition mit $|V_1| = p$ und $|V_2| = q$ besitzt. Beispiele:



(a) $K_{1,1}$ (b) $K_{1,2}$ (c) $K_{2,2}$ (d) $K_{2,3}$ (e) $K_{3,3}$

Charakterisierung bipartiter Graphen

Satz. *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn jeder seiner Kreise gerader Länge ist.*

Beweis (1/3)

„$\Longrightarrow$“: Es sei G bipartit mit Knotenpartition $V = V_1 \cup V_2$. Angenommen, es gibt einen Kreis $C = v_0 \ldots v_\ell = v_0$ ungerader Länge. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $v_0 \in V_1$ ist. Da G bipartit ist, folgt $v_1 \in V_2$, $v_3 \in V_1$ u.s.w.

Da C ungerade Länge hat, folgt $v_\ell \in V_2$. Andererseits gilt $v_\ell = v_0 \in V_1$, ein Widerspruch.

Beweis (2/3)

„$\Longleftarrow$“: G ist genau dann bipartit, wenn alle Zusammenhangskomponenten von G bipartit sind. Es genügt daher, die Aussage für zusammenhängende Graphen zu zeigen. Es sei also G zusammenhängend und $s \in V$ beliebig.

Dann gibt es für alle $v \in V$ einen Weg zwischen s und v in G. Bezeichne mit $\operatorname{dist}(s, v)$ die Länge (d.h. Anzahl der Kanten) eines kürzesten solches Weges. Damit partitionieren wir V wie folgt (algorithmisch können wir dies z.B. mit BFS tun):

$$V_1 := \{v \in V \;:\; \operatorname{dist}(s, v) \text{ ist ungerade}\}$$

$$V_2 := \{v \in V \;:\; \operatorname{dist}(s, v) \text{ ist gerade}\} \ni s$$

Beweis (3/3)

Diese beiden Mengen bilden offensichtlich eine Partition von V. Wir behaupten, dass G mit dieser Partition bipartit ist. Angenommen, dies ist nicht der Fall.

Dann gibt es eine Kante $e = \{v, w\} \in E$, deren Endknoten v und w beide in X mit $X \in \{V_1, V_2\}$ liegen. Dann enthält G aber einen Knoten t und einen Kreis C von t über v und w zurück nach t der Länge

$$\underbrace{\mathrm{dist}(t,v)}_{\substack{\text{Länge kürzester}\\ tv\text{-Weg}}} + \underbrace{\mathrm{dist}(t,w)}_{\substack{\text{Länge kürzester}\\ tw\text{-Weg}}} + \underbrace{1}_{\text{Kante } e}$$

Da $\mathrm{dist}(t,v)$ und $\mathrm{dist}(t,w)$ entweder beide gerade oder beide ungerade sind, ist ihre Summe immer gerade. Also hat C ungerade Länge, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Korollar

Korollar. *Jeder Baum ist bipartit.*

Der Beweis des vorherigen Satzes ist die Grundlage des folgenden Algorithmus, der für einen zusammenhängenden Graphen überprüft, ob er bipartit ist und gegebenenfalls eine Partition der Knotenmenge bestimmt.

Nicht zusammenhängende Graphen sind genau dann bipartit, wenn alle ihre Zusammenhangskomponenten bipartit sind. Hier kann der Algorithmus also auf die Zusammenhangskomponenten angewendet werden.

Algorithmus

Input: Ein ungerichteter zusammenhängender Graph $G = (V, E)$.

1 Wähle einen beliebigen Startknoten s und bestimme mit der Breitensuche Wege mit minimaler Kantenzahl zu allen anderen Knoten $v \in V$.

2 Für alle $v \in V$ definiere $d(v)$ als den von der Breitensuche bestimmten Abstand des Knotens v zum Startknoten s.

3 Setze

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{v \in V \mid d(v) \text{ ist ungerade}\}, \\ V_2 &:= \{v \in V \mid d(v) \text{ ist gerade}\}. \end{aligned}$$

4 **for all** $e = \{u, v\} \in E$ **do**

5   **if** $u, v \in V_1$ **or** $u, v \in V_2$ **then**

6   **Fehlermeldung:** G ist nicht bipartit

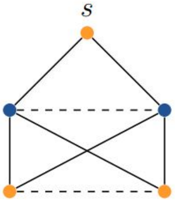
7   **end if**

8 **end for**

Output: Für bipartite Graphen eine Knotenpartition $V = V_1 \cup V_2$.

Korrektheitssatz

Satz. *Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Dann bestimmt der obige Algorithmus korrekt, ob G bipartit ist und gibt in diesem Fall eine zugehörige Knotenpartition $V = V_1 \cup V_2$ zurück.*



Ohne die gestrichelten Kanten erhalten wir einen bipartiten Graphen. Mit gestrichelten Kanten nicht, da es (u.a.) die Kante zwischen den zwei blauen Knoten gibt, die beide Abstand 1 zu s haben.

Matchings in bipartiten Graphen

Wie findet man ein Matching maximaler Kardinalität in bipartiten Graphen?

Der ungarische Algorithmus

Input: Ein ungerichteter bipartiter Graph $G = (V, E)$ mit zugehöriger Knotenpartition $V = V_1 \cup V_2$.

Wähle ein beliebiges Matching M, z.B. $M = \emptyset$ oder $M = \{e\}$ mit einem $e \in E$. Orientiere alle Kanten $e \in M$, so dass sie von V_2 nach V_1 zeigen, und alle Kanten $e \in E \setminus M$, so dass sie von V_1 nach V_2 zeigen.

Bestimme die Menge F_1 aller M-freien Knoten in V_1 und die Menge F_2 aller M-freien Knoten in V_2.

Bestimme die Menge R_2 aller Knoten $v_2 \in V_2$, die durch einen gerichteten Weg mit Startknoten in $v_1 \in F_1$ erreichbar sind. (Dies geht z.B. durch wiederholtes Anwenden der Breitensuche mit Startknoten in $v_1 \in F_1$.)

while $R_2 \cap F_2 \neq \emptyset$ **do**

  Wähle einen Knoten $v_2 \in R_2 \cap F_2$ und kehre auf dem zugehörigen gerichteten Weg die Orientierung aller Kanten um.

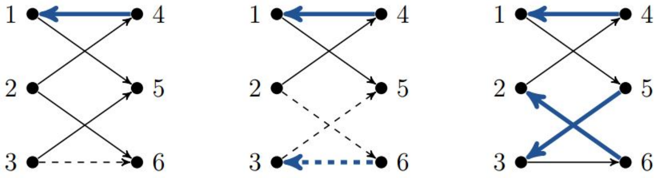
  Definiere M als die Menge aller gerichteten Kanten e mit Startknoten in V_2.

  Bestimme F_1, F_2 und R_2 neu.

end while

Output: Ein Matching M maximaler Kardinalität.

DER UNGARISCHE ALGORITHMUS: BEISPIEL



(a) 1. Iteration (b) 2. Iteration (c) 3. Iteration

M	F_1	F_2	R_2	$F_2 \cap R_2$
$\{\{1,4\}\}$	$\{2,3\}$	$\{5,6\}$	$\{4,5,6\}$	$\{5,6\}$
$\{\{1,4\},\{3,6\}\}$	$\{2\}$	$\{5\}$	$\{4,5,6\}$	$\{5\}$
$\{\{1,4\},\{2,6\},\{3,5\}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Von a) nach b) wähle $v_2 = 6$ und kehre Weg 36 zu 63 um.
Von b) nach c) wähle $v_2 = 5$ und kehre Weg 2635 zu 5362 um.

Korrektheitssatz

Satz. *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph mit Knotenpartition $V = V_1 \cup V_2$. Dann ist der ungarische Algorithmus wohldefiniert und bestimmt ein Matching M maximaler Kardinalität.*

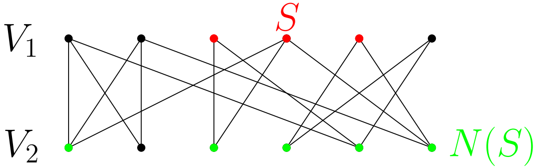
In diesem Kontext ist auch der folgende Satz sicher erwähnenswert:

Satz von Hall

Satz (Hall, 1935) (auch bekannt als der „Heiratssatz"). *Es sei* $G = (V, E)$ *ein ungerichteter bipartiter Graph mit Knotenpartition* $V = V_1 \cup V_2$. *Dann gibt es genau dann ein Matching* M*, sodass alle Knoten* $v_1 \in V_1$ M*-überdeckt sind, wenn gilt: Für alle* $S \subseteq V_1$ *ist*

$$|N(S)| := |\{v_2 \in V_2 \,:\, \exists v_1 \in S \,\text{sodass}\, \{v_1, v_2\} \in E\}| \geq |S|.$$

Man nennt die Menge $N(S)$ die *Nachbarschaft* der Menge S.



WIESO *Heiratssatz*?

Folgende Interpretation führte zum weitverbreiteten Begriff *Heiratssatz*:

Gegeben seien eine endliche Menge I heiratswilliger Frauen und dazu eine endliche Menge X von mit diesen Frauen befreundeten Männern. Für jede Frau $i \in I$ sei $A_i \subseteq X$ die Menge der mit i befreundeten Männer. Dann ist die Frage:

Lassen sich die Frauen mit den Männern so verheiraten, dass jede Frau einen der mit ihr befreundeten Männer heiratet, ohne dass die Monogamieregel verletzt wird?

Notwendige Bedingung: Eine solche Heirat verlangt, dass jede Frau i einen Mann $x_i \in A_i$ zur Heirat auswählt, ohne dass dabei zwei Frauen denselben Mann heiraten. Dies muss nicht nur für die Gesamtheit der Frauen gelten, sondern auch für jede beliebige Teilmenge. Es ist also offensichtlich notwendig, dass je k Frauen immer mit mindestens k Männern befreundet sind.

Dies bedeutet: Für jede Teilmenge $I_0 \subseteq I$ muss es in der Vereinigungsmenge $\bigcup_{i \in I_0} A_i$ immer mindestens $|I_0|$ Elemente geben. Zur Existenz einer Auswahl der verlangten Art erhalten wir die folgende notwendige Bedingung, die man auch die Hall-Bedingung oder *hallsche Bedingung* (*Hall's condition*) nennt:

Für jede Teilmenge $I_0 \subseteq I$ ist

$$\left| \bigcup_{i \in I_0} A_i \right| \geq |I_0|.$$

Der Heiratssatz sagt nun aus, dass die hallsche Bedingung für die Existenz einer Auswahl nicht nur notwendig, sondern auch **hinreichend** ist:

Es sei I wie oben beschrieben und $\mathcal{A} := (A_i)_{i \in I}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- Es existiert für $\mathcal{A}$ eine injektive Auswahlfunktion

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, \quad i \mapsto x_i \in A_i.$$

- Die hallsche Bedingung ist erfüllt.

Zur Erinnerung: Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *injektiv*, falls für alle $i_1, i_2 \in X$ gilt: $f(i_1) = f(i_2) \Rightarrow i_1 = i_2$.

Beweis (1/5)

Satz (Hall, 1935). *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph mit Knotenpartition $V = V_1 \cup V_2$. Dann gibt es genau dann ein Matching M, sodass alle Knoten $v_1 \in V_1$ M-überdeckt sind, wenn gilt: Für alle $S \subseteq V_1$ ist $|N(S)| \geq |S|$.*

„$\Longrightarrow$“:

- Gibt es ein Matching, das alle $v_1 \in V_1$ überdeckt, so gilt für jedes $S \subseteq V_1$:
- Für alle $v_1 \in S$ existiert ein $v_2 \in V_2$ mit $\{v_1, v_2\} \in M$, d.h. es gilt $v_2 \in N(S)$.
- Da M ein Matching ist, müssen all diese v_2 paarweise verschieden sein. Folglich gilt $|N(S)| \geq |S|$, wie gewünscht.

Beweis (2/5)

„$\Longleftarrow$“:

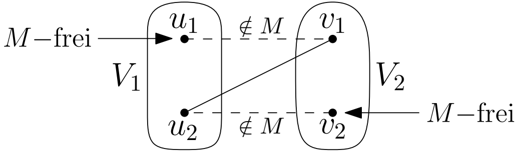
- Es sei nun umgekehrt $|N(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq V_1$.
- Wir konstruieren nun ein Matching, das ganz V_1 überdeckt.
- Es sei hierfür M ein beliebiges Matching, sodass es noch M-freie Knoten in V_1 gibt. Wir zeigen, dass es dann auch einen M-vergrößernden Weg gibt:
- Es sei $u_1 \in V_1$ ein M-freier Knoten.
- Nach Voraussetzung gilt $|\underbrace{N(\{u_1\})}_{\subset V_2}| \geq |\{u_1\}| = 1$, d.h. der Knoten u_1 hat mindestens einen Nachbarn $v_1 \in V_2$ und es gilt $\{u_1, v_1\} \in E \setminus M$ (denn u_1 ist M-frei).
- Ist v_1 auch M-frei, so haben wir unseren M-vergrößernden Weg gefunden und sind fertig.

Beweis (3/5)

- Ist v_1 hingegen M-überdeckt, so gibt es eine Kante $\{u_2, v_1\} \in M$, wobei $u_2 \in V_1$ da $v_1 \in V_2$.
- Es gilt $u_2 \neq u_1$, da u_2 M-überdeckt ist.
- Wegen $|\underbrace{N(\{u_1, u_2\})}_{\subset V_2}| \geq |\underbrace{\{u_1, u_2\}}_{\subset V_1}| = 2$ gibt es in V_2 einen weiteren, zu einem $u_i \in \{u_1, u_2\}$ benachbarten Knoten $v_2 \neq v_1$.
- Es ist dann wieder $\{u_i, v_2\} \in E \setminus M$ für $i = 1, 2$, da u_1 M-frei ist und in u_2 bereits die Matchingkante $\{u_2, v_1\}$ endet.

Beweis (4/5)

- Ist v_2 M-frei, so können wir einen M-vergrößernden Weg konstruieren, indem wir von v_2 zu seinem Vorgänger $u_i \in \{u_1, u_2\}$ zurückgehen usw., bis wir wieder beim Knoten u_1 sind. Die Abbildung unten zeigt den Fall $u_i = u_2$.
- Dies liefert einen M-alternierenden Weg, da wir uns (auf dem Rückweg von v_2 nach u_1) von V_2 nach V_1 immer auf Kanten in $E \setminus M$ bewegen und von V_1 nach V_2 auf Kanten in M.



- Ist v_2 hingegen M-überdeckt, so gibt es eine Kante $\{u_3, v_2\} \in M$, wobei $u_3 \in V_1$.
- Da u_3 M-überdeckt ist und $v_2 \neq v_1$ gilt, folgt $u_3 \notin \{u_1, u_2\}$.

Beweis (5/5)

- Von u_3 aus können wir wieder weitergehen wie von u_2 aus.
- Da die Mengen $\{u_1, u_2, \ldots\} \subset V_1$ und $\{v_1, v_2, \ldots\} \subset V_2$ immer größer werden, muss dieses Verfahren irgendwann abbrechen.
- Ein Abbruch ist aber nur möglich, wenn ein M-freies v_i und damit ein M-vergrößernder Weg gefunden wurde.
- Hat ein beliebiges Matching M also noch M-freie Knoten in V_1, so finden wir stets einen M-vergrößernden Weg und können somit ein neues Matching mit $> |M|$ Kanten finden. Dies vollendet den Beweis des Heiratssatzes.

Folgerung des Satzes von Hall:

Korollar. *Jeder k-reguläre bipartite Graph mit* $k \geq 1$ *hat ein perfektes Matching*.

Beweis. Hat G Partitionsklassen A, B und ist G k-regulär, so gilt $|A| = |B|$, da:

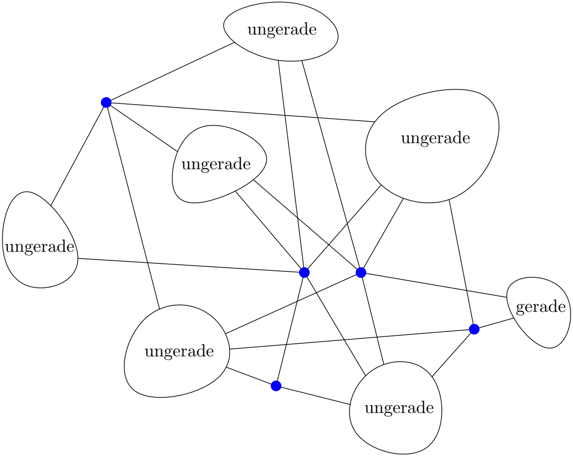
$$\underbrace{k \cdot |A|}_{\text{Halbkanten aus A}} = \underbrace{k \cdot |B|}_{\text{Halbkanten aus B}}$$

Es reicht also, mit dem Heiratssatz zu zeigen, dass G ein Matching M von A enthält, d.h. jeder Knoten von A ist inzident mit einer Kante aus M. Nun gehen von jeder Menge $S \subseteq A$ insgesamt $k \cdot |S|$ Kanten nach $N(S)$, und diese Kanten gehören zu den $k \cdot |N(S)|$ Kanten, die insgesamt mit $N(S)$ inzident sind. Es gilt also $k \cdot |S| \leq k \cdot |N(S)|$, d.h. G erfüllt die Bedingung aus dem Satz von Hall.

Für einen Graphen G bezeichne $q(G)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G, die ungerade Ordnung haben. Ein weiterer wichtiger Satz der Matching-Theorie ist:

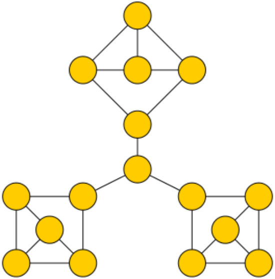
Satz (Tutte, 1947). *Ein Graph G hat genau dann ein perfektes Matching, wenn $q(G - S) \leq |S|$ gilt für alle $S \subset V(G)$.*

BEISPIEL



Entfernt man die **5** blauen Knoten, so erhält man **6** Komponenten ungerader Kardinalität. Da $6 > 5$ hat dieser Graph nach dem Satz von Tutte kein perfektes Matching, unabhängig von der internen Struktur der 6 Komponenten.

Korollar (Petersen, 1891). *Jeder brückenlose 3-reguläre Graph hat ein perfektes Matching.*

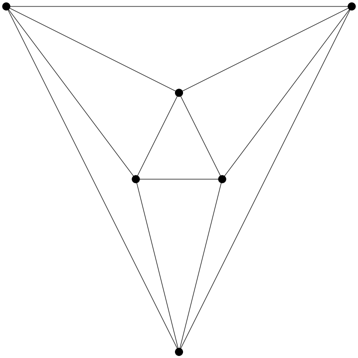


Ein 3-regulärer Graph ohne perfektes Matching.

Es gibt interessante Zusammenhänge zwischen diesem Kapitel und Kapitel 7 (Hamiltonsche Graphen) sowie Kapitel 8 (Färbungen), z.B.: Es sei G ein 3-regulärer Graph mit einem perfekten Matching M. Entfernt man M aus G, so erhält man einen sogenannten *2-Faktor* $\mathcal{F}$, ein 2-regulärer (nicht unbedingt zusammenhängender!), aufspannender Teilgraph, oder äquivalent eine Menge von paarweise disjunkten Kreisen.

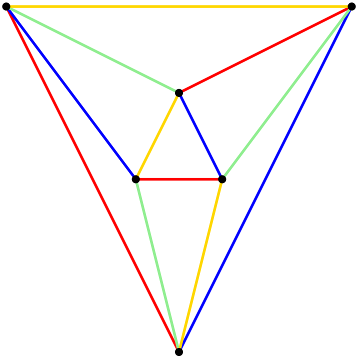
Ist jeder Kreis in $\mathcal{F}$ gerader Länge [gilt das immer?], so können wir dessen Kanten mit 2 Farben färben. Für M benutzen wir dann eine dritte Farbe und erhalten so eine Kantenfärbung von G mit genau drei Farben. Desweiteren gilt: Ist die Menge $\mathcal{F}$ zusammenhängend, so bildet sie einen Hamiltonkreis. Wir betrachten nun eine Definition, die all diese Konzepte vereint:

Ein k-regulärer Graph $G = (V, E)$ heißt *perfekt hamiltonsch*, wenn $E(G)$ eine Partition in perfekte Matchings $M_1, \ldots, M_k$ zulässt, sodass $M_i \cup M_j$ einen Hamiltonkreis formt für alle i, j mit $i \neq j$. Man beachte, dass die Matchings eine Kantenfärbung liefern!



Frage. Ist das Oktaeder perfekt hamiltonsch?

Ja: siehe folgende Kantenfärbung des Oktaeders. Suchen Sie sich beliebige 2 Farben aus und folgen Sie dem Kantenzug, der aus diesen 2 Farben besteht, und Sie werden feststellen, dass das Resultat ein Hamiltonkreis ist.



Anwendungen von Matchings für das TSP

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, vollständiger und metrischer Graph mit Kantengewichten $w(e) > 0$ für alle $e \in E$ und $T^* = (V, E^*)$ ein minimaler Spannbaum von G.

Dann bezeichnen wir mit $U \subseteq V$ die Menge aller Knoten, die in T^* ungeraden Grad haben. Da die Menge U eine gerade Anzahl von Elementen haben muss [wieso?], existiert in dem vollständigen Graphen mit Knotenmenge U ein perfektes Matching. Folglich gibt es auch ein perfektes Matching M^* mit minimalem Gewicht.

In dem Graphen $G^* = (V, E^* \cup M^*)$ haben dann alle Knoten geraden Grad und G^* ist zusammenhängend [wieso?]. Daher besitzt G^* einen geschlossenen eulerschen Kantenzug K mit $w(K) = w(T^*) + w(M^*)$, den wir wie bei der Minimaler-Spannbaum-Heuristik zu einem Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$ mit $w(\mathfrak{h}) \leq w(K) = w(T^*) + w(M^*)$ abkürzen können.

Wir wissen bereits (Kapitel 7), dass

$$w(T^*) \leq \frac{|V| - 1}{|V|} \cdot w(\mathfrak{h}^*)$$

gilt, wobei $\mathfrak{h}^*$ wieder einen kürzesten Hamiltonkreis bezeichne. Aber wie hängt $w(M^*)$ mit $w(\mathfrak{h}^*)$ zusammen?

Durch Abkürzen können wir aus dem Hamiltonkreis $\mathfrak{h}^*$ in G einen Hamiltonkreis $\mathfrak{h}_U$ in dem vollständigen Graphen mit Knotenmenge U machen. Da U eine gerade Anzahl von Elementen hat, ist $\mathfrak{h}_U = v_0 v_1 \ldots v_{2k} = v_0$ ein Kreis gerader Länge.

Wir können also die Kanten in $\mathfrak{h}_U$ wie folgt in zwei perfekte Matchings M_1, M_2 zerlegen:

$$M_1 = \{\{v_0, v_1\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{2k-2}, v_{2k-1}\}\}$$

$$M_2 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \ldots, \{v_{2k-1}, v_{2k}\}\}$$

Es gilt dann

$$w(M_1)+w(M_2) = w(\mathfrak{h}_U) \le w(\mathfrak{h}^*) \;\Rightarrow\; \min\{w(M_1), w(M_2)\} \le \frac{w(\mathfrak{h}^*)}{2}$$

Da M^* ein gewichtsminimales perfektes Matching in dem vollständigen Graphen mit Knotenmenge U ist, gilt dann auch $w(M^*) \le \frac{w(\mathfrak{h}^*)}{2}$ und folglich

$$w(\mathfrak{h}) \le w(T^*) + w(M^*) \le \frac{|V|-1}{|V|} \cdot w(\mathfrak{h}^*) + \frac{w(\mathfrak{h}^*)}{2} \le \frac{3}{2} \cdot w(\mathfrak{h}^*).$$

Zur Erinnerung: die Minimaler-Spannbaum-Heuristik hatte einen Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$ mit $w(\mathfrak{h}) \le 2w(\mathfrak{h}^*)$ erzeugt.

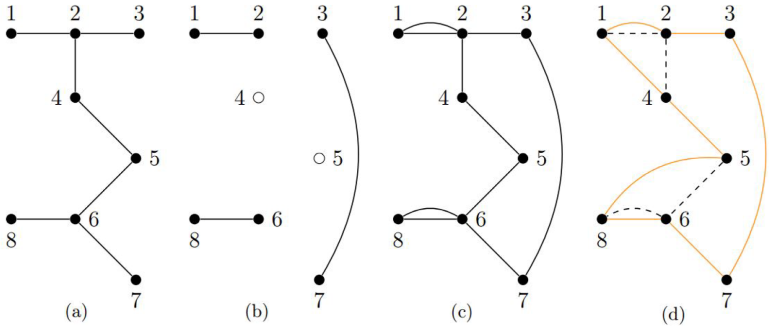
Christofides-Heuristik

Input: Ein ungerichteter, vollständiger, metrischer Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w(e) > 0$ für alle $e \in E$.

1. Bestimme einen minimalen Spannbaum T^* (z.B. mit dem Algorithmus von Prim oder dem Algorithmus von Kruskal).
2. Bestimme die Menge $U \subseteq V$ aller Knoten mit ungeradem Grad in T^*.
3. Bestimme ein perfektes Matching M^* mit min. Gewicht in dem vollständigen Graphen mit Knotenmenge U.
4. Bestimme in dem Graphen $T^* \cup M^*$ einen geschlossenen eulerschen Kantenzug K (z.B. mit dem Algorithmus von Hierholzer).
5. Erzeuge aus K einen Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$ durch Überspringen bereits besuchter Knoten.

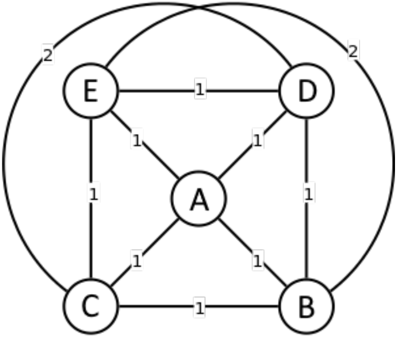
Output: Der Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$.

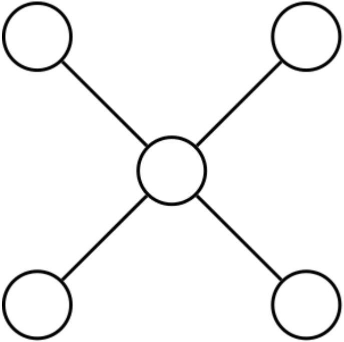
Beispiel 1



(a) Minimaler Spannbaum T^*.
(b) Gewichtsminimales perfektes Matching M^* zwischen Knoten ungeraden Grades.
(c) Vereinigung von T^* und M^* liefert eulerschen Graphen. Dieser enthält geschlossenen eulerschen Kantenzug K.
(d) Abkürzen liefert Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$.

BEISPIEL 2 (1/4)

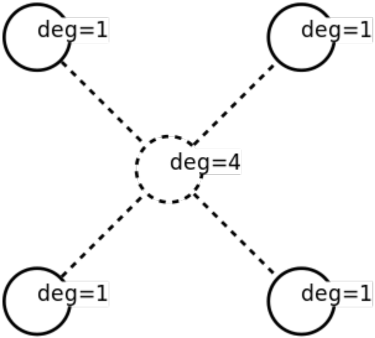


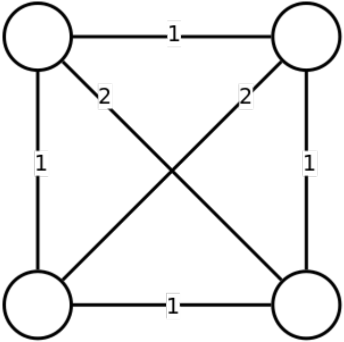


Links: Gegeben sei ein gewichteter, vollständiger Graph, dessen Gewichte die Dreiecksungleichung erfüllen.

Rechts: Wir berechnen einen minimalen Spannbaum T^*, z.B. mit dem Algorithmus von Prim.

BEISPIEL 2 (2/4)

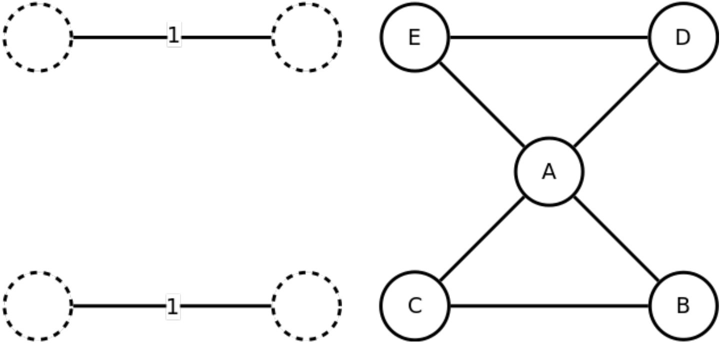




Links: Bestimme die Menge $U \subseteq V$ aller Knoten mit ungeradem Grad in T^*.

Rechts: Betrachte den (vollständigen) Graphen $G[U]$.

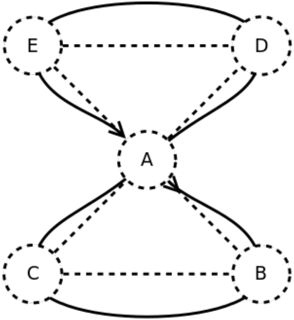
Beispiel 2 (3/4)

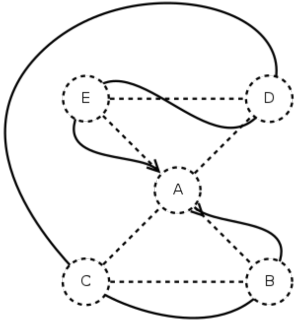


Links: Bestimme ein perfektes und minimales Matching M^* in $G[U]$.

Rechts: Vereinige T^* und M^* zu einem Graphen H, in dem jeder Knoten geraden Grad hat.

Beispiel 2 (4/4)

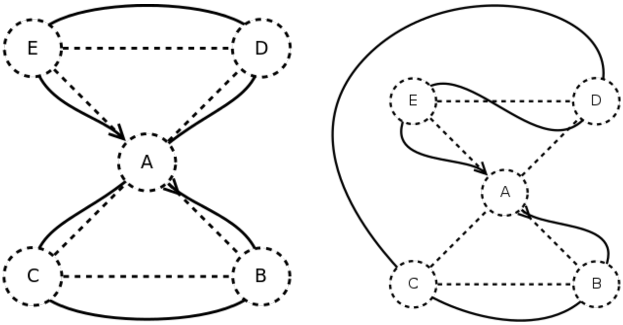




Links: Bestimme einen geschlossenen eulerschen Kantenzug $K = ABCADEA$ in H (z.B. mit dem Hierholzer-Algorithmus).

Rechts: Erzeuge Hamiltonkreis durch Überspringen bereits besuchter Knoten (hier: Knoten A). Erhalte Hamiltonkreis $ABCDEA$ mit Gewicht 6. **Frage.** Ist dieser optimal?

BEISPIEL 2 (4/4)



Links: Bestimme einen geschlossenen eulerschen Kantenzug $K = ABCADEA$ in H (z.B. mit dem Hierholzer-Algorithmus).

Rechts: Erzeuge Hamiltonkreis durch Überspringen bereits besuchter Knoten (hier: Knoten A). Erhalte Hamiltonkreis $ABCDEA$ mit Gewicht 6. **Frage.** Ist dieser optimal?

Nein, es geht mit Gewicht 5: $ADBCEA$.

KORREKTHEITSSATZ

Satz. *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, vollständiger und metrischer Graph mit Kantengewichten $w(e) > 0$ für alle $e \in E$. Dann bestimmt die Christofides-Heuristik einen Hamiltonkreis von G, welcher höchstens*

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{|V|}$$

mal so lang wie der kürzeste Hamiltonkreis von G ist.