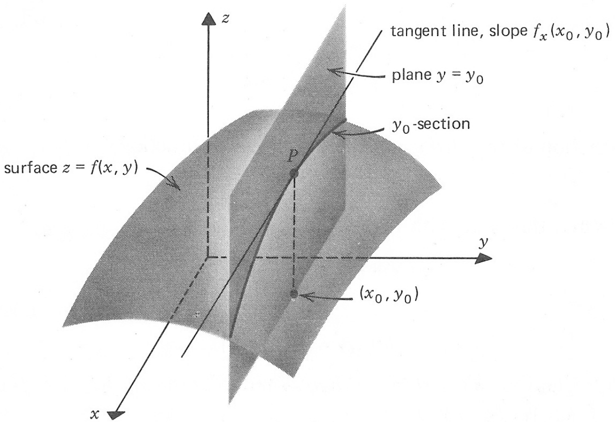
Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2024-2025

10. Vorlesung


z
tangent line, slope $f_x(x_0, y_0)$
plane $y = y_0$
y_0-section
surface $z = f(x, y)$
P
y
(x_0, y_0)
x

Partielle Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Seien $M \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in M \cap M'$. Ist f differenzierbar in α, dann ist f stetig in α.

Bemerkung

Partielle Differenzierbarkeit in einem Punkt $\not\Rightarrow$ Stetigkeit in dem betreffenden Punkt

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0_2 \\ 0, & (x,y) = 0_2. \end{cases}$$

Man kann (mit Hilfe der Definition) zeigen, dass f partiell differenzierbar in 0_2 ist; f ist jedoch nicht stetig in 0_2: Es sei $(a^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ mit

$$a^k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right), k \in \mathbb{N}^*.$$

Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} a^k = 0_2, \text{ während } \lim_{k\to\infty} f(a^k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq f(0_2).$$

Th3 in der 8. Vorlesung $\Rightarrow$ f ist nicht stetig in 0_2.

Theorem (Schwarz)

Seien $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(M)$. Dann ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \forall\ i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Bemerkung

Ist $f \notin C^2(M)$, so gilt i. A. das obige Theorem nicht.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0_2 \\ 0, & (x,y) = 0_2. \end{cases}$$

f ist auf $\mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar sowohl nach (x,y) als auch nach (y,x).

Gemischte partielle Ableitungen 2. Ordnung

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2(5y^2-3x^2)(x^2+y^2)-4y^4(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}, \ (x,y) \neq 0_2 \\ \\ 1, \ (x,y) = 0_2 \end{cases}$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2(9x^2+y^2)(x^2+y^2)-4x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \ (x,y) \neq 0_2 \\ \\ 0, \ (x,y) = 0_2. \end{cases}$$

Man beachte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0_2) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0_2).$$

Die Funktionen $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sind in 0_2 nicht stetig:

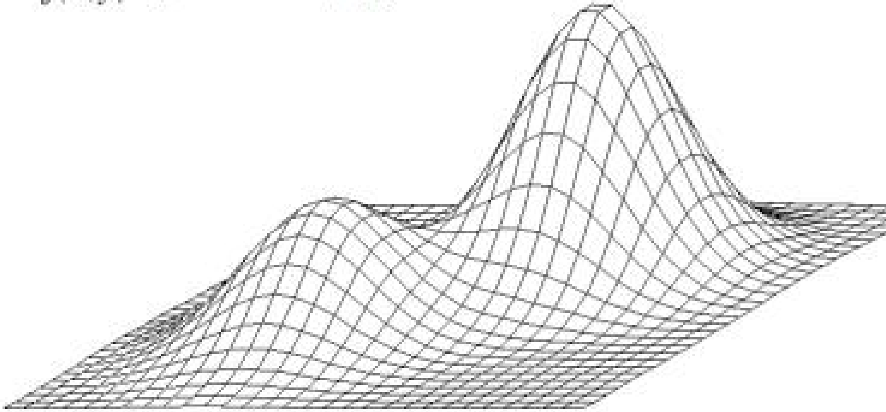
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{k}, 0\right) = 0 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

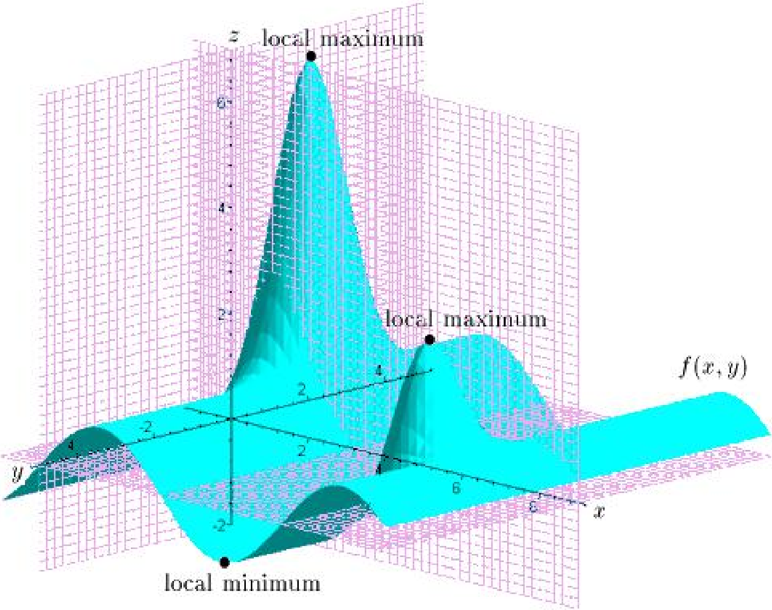
und

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(0, \frac{1}{k}\right) = 1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

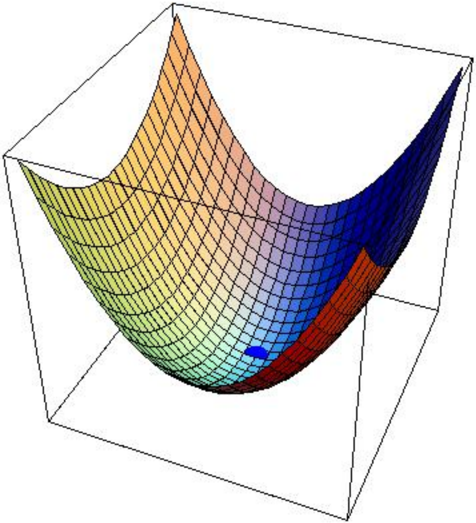
Th3 in der 8. Vorlesung $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sind in 0_2 nicht stetig.

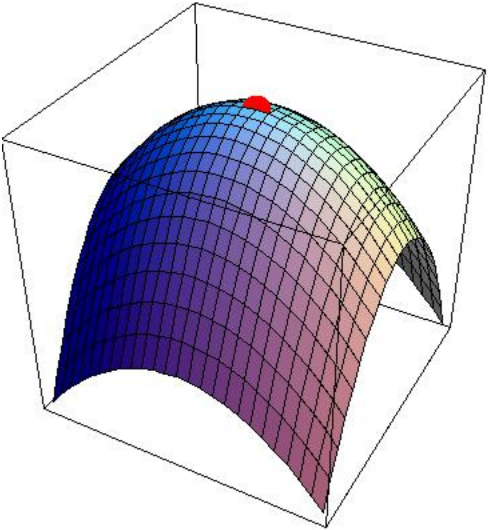
$$f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}+2e^{-((x-1.7)^2+(y-1.7)^2)}$$




local maximum
local maximum
local minimum
$f(x, y)$
z
x
y

Graphen von Funktionen in 2 Variablen $\hookrightarrow$ lokale Extremstellen





Graphen von Funktionen in 2 Variablen $\hookrightarrow$ Sattelpunkte