
Lösungsvorschläge

Übung 3

Logik für Informatiker

Aussagenlogik



Aufgabe 1

Welche der folgenden Ausdrücke A_i sind *aussagenlogische Formeln*?

- $A_1 : \neg p_0$
- $A_2 : \neg\neg p_0$
- $A_3 : p_0 \vee \rightarrow p_1$
- $A_4 : (p_0 \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$
- $A_5 : ((p_0 \rightarrow p_1) \vee (p_0 \wedge p_2)) \vee \perp$
- $A_6 : (p_0 \wedge) p_1 \vee$
- $A_7 : p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_2)$
- $A_8 : \top$

Gib für jeden der obigen Ausdrücke A_i , der eine aussagenlogische Formel ist, die zugehörige Wertetabelle an.

Lösung:

A_1, A_2, A_4, A_5 sind aussagenlogische Formeln. A_3, A_6, A_7 sind offenbar nicht entsprechend der Regeln aufgebaut. Durch das Weglassen der Klammerung ist A_7 nicht eindeutig lesbar.

p_0	p_1	p_2	$\mathcal{A}(A_1)$	$\mathcal{A}(A_2)$	$\mathcal{A}(A_4)$	$\mathcal{A}(A_5)$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

Aufgabe 2

Sei $\Pi = \{A, B, C\}$ eine Menge von Aussagenvariablen und F die folgenden Formel über Π :

$$F = ((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((\neg C \vee B) \rightarrow ((A \rightarrow A) \wedge C))$$

1. Geben Sie für F eine Wahrheitstabelle an.
2. Begründen Sie mithilfe der Wahrheitstabelle ob F erfüllbar, unerfüllbar, oder tautologisch ist.
3. Gegeben die Formel $G = \neg A \vee B$ über Π . Untersuchen Sie mithilfe der Wahrheitstabelle ob $F \models G$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe der Wahrheitstabelle.
4. Gegeben die Formel $H = A \vee C$ über Π . Untersuchen Sie mithilfe der Wahrheitstabelle ob $F \models H$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe der Wahrheitstabelle.
5. Gegeben die Formel $K = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ über Π . Untersuchen Sie mithilfe der Wahrheitstabelle ob $F \equiv K$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe der Wahrheitstabelle.

Lösung:

1.

A	B	C	Wert
False	False	False	False
False	False	True	True
False	True	False	False
False	True	True	True
True	False	False	False
True	False	True	True
True	True	False	True
True	True	True	True

F ist erfüllbar!

2. Nein. Weshalb?

Mit SageMath:

```
f = propcalc.formula("((A&B)->C)<->(~C|B)->((A->A)&C)")
```

```
g = propcalc.formula("~A|B")
```

```
k = ~f|g
```

```
k.is_tautology()
```

False

3. True

4. True

Aufgabe 3

Seien $\Pi = \{P, Q, R\}$ eine Menge von Aussagenvariablen und F folgende Formel über Π :

$$F = \left((\neg P \vee (Q \rightarrow R)) \rightarrow (R \vee P) \right) \leftrightarrow (R \rightarrow (Q \wedge P)).$$

1. Man gebe die Wahrheitstabelle an.
2. Man gebe die Definition der Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit einer aussagenlogischen Formel an.
3. Gegeben seien die Formeln $G = Q \vee R$, $H = P \wedge (Q \vee (\neg Q \wedge \neg R))$ und $K = P \wedge \neg R$ über Π .

- (a) Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, welche Eigenschaften G , H und K haben.

G	erfüllbar	unerfüllbar	allgemeingültig
ja	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
nein	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

H	erfüllbar	unerfüllbar	allgemeingültig
ja	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
nein	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

K	erfüllbar	unerfüllbar	allgemeingültig
ja	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
nein	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Lösung:

P	Q	R	Wert
False	False	False	False
False	False	True	False
False	True	False	False
False	True	True	False
True	False	False	True
True	False	True	False
True	True	False	True
True	True	True	True

Aufgabe 4

Sei $\Pi = \{P, Q\}$. Man untersuche, welche der folgenden Formeln über Π erfüllbar, unerfüllbar, tautologisch sind:

1. $\neg(P \vee \neg P)$
2. $(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q)$
3. $((\neg P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)) \rightarrow P$

Lösung:

1. Widerspruch. Dies kannst du mit SageMath auch testen:

```
f = propcalc.formula("~(P|~P)")  
f.is_contradiction()
```

2. Erfüllbar

```
f = propcalc.formula("(P&Q)|~(P|Q)")  
f.is_satisfiable()
```

3. Tautologie

```
f = propcalc.formula("((~P->Q)&(~P->~Q))->P")  
f.is_tautology()
```

Aufgabe 5

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Gilt die folgende Aussage: Es gibt eine aussagenlogische Formel F , sodass F erfüllbar und $\neg F$ erfüllbar ist?
2. Gilt die folgende Aussage für eine beliebige aussagenlogische Formel F : F ist erfüllbar genau dann, wenn $\neg F$ erfüllbar?
3. Seien F, G beliebige aussagenlogische Formeln. Gilt die folgende Aussage: $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ unerfüllbar ist?
4. Seien F, G beliebige aussagenlogische Formeln. Gilt die folgende Aussage: $F \models G$ gdw. $F \wedge G$ allgemeingültig ist?
5. Sei M eine beliebige unerfüllbare Formelmenge, F eine beliebige Formel. Gilt die folgende Aussage: $M \models F$?
6. Sei G eine erfüllbare Formel, die nicht allgemeingültig ist, H eine beliebige Formel und $G \models H$. Welche der Eigenschaften (erfüllbar, unerfüllbar, tautologisch) gilt für $G \wedge H$?

Lösung:

1. Jede erfüllbare Formel hat diese Eigenschaft, jedoch keine tautologische Formel erfüllt sie.
2. Nein, weil jede Tautologie auch erfüllbar ist.
3. Ja, wegen dem Theorem aus der Vorlesung. G folgt semantisch aus F (äquivalent F impliziert G) genau dann, wenn $\neg F \vee G$ eine Tautologie ist. Dies ist somit äquivalent zu $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.
4. Angenommen $F \models G$. Das bedeutet, dass wann immer F wahr ist, ist auch G wahr. Sei A ein Modell von F , dann ist A ein Modell von G und somit auch von $F \wedge G$. Zu zeigen bleibt, dass jede Belegung ein Modell von $F \wedge G$ ist. Dies lässt sich aber leicht widerlegen, z.B. $F = A \wedge B$ und $G = A$. In diesem Fall $F \models G$ aber $F \wedge G = A \wedge B \wedge A = A \wedge B$ ist nicht tautologisch!

5. Ja, trivialerweise.

6. S. Pkt. 4