V2.

DGL 1. Ordnung

1. DGL mit getrennten Variablen

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x)\cdot g(y) \\ y' &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y = y(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \quad \Big| : g(y) \neq 0.$$

I. $g(y) \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{g(y)} = f(x) \quad \Big| \cdot dx$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx \quad \Big| \int$$

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x) \cdot dx$$

$$\underline{G(y) + c_1} = F(x) + c_2 \qquad c = c_2 - c_1 .$$

$$\boxed{G(y) = F(x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R} .}$$

↳ die allgemeine Lösung der DGL in impligiter Form

$$\boxed{y(x) = G^{-1}\big(F(x) + c\big)\,, \quad c \in \mathbb{R}}$$

↳ die allg. Lösung in explifiter Form.

II. $g(y) = 0$.

<u>Bemerkung</u>: Wenn $\exists y_0 \in \mathbb{R}$ s.d. $g(y_0) = 0$, dann ist die Funktion $y(x) = y_0$ eine Lösung der DGL. Diese Lösung heißt singuläre Lösung.

<u>Beispiel</u>:

1) $$y' = \frac{1}{x} \cdot y \quad , \quad x > 0.$$

$$f(x,y) = \frac{1}{x} \cdot y \qquad D_f = (0,\infty) \times \mathbb{R}.$$

Wir bestimmen die allgemeine Lösung der DGL.

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad : \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(y) = y$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

In die DGL einsetzen

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot y \quad | : y \neq 0.$$

I. $g(y) \neq 0 \; (y \neq 0)$.

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x} \quad | \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{x} \cdot dx \quad | \int \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x} \, dx$$

$$\boxed{\ln|y| = \ln x + c, \; c \in \mathbb{R}}$$

↳ die allg. Lösung in impliziter Form.

$$|y| = e^{\ln x + c} = e^{\ln x} \cdot e^{c} = x \cdot e^{c}$$

$$y = \underbrace{\pm e^{c}}_{c_1} \cdot x$$

$\boxed{y = c_1 \cdot x}$ $c_1 \in \mathbb{R}^*$ $\to$ die allg. Lösung in expliziter Form!

II. $g(y) = 0 \iff y = 0$ eine singuläre Lösung.

$\left(0' = \frac{1}{x} \cdot 0 \right)$ w.

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot x \,,\ c_1 \in \mathbb{R}.} \iff \begin{cases} y(x) = c_1 \cdot x, c_1 \in \mathbb{R}^* \\ y(x) = 0. \end{cases}$$

2) $y' = 2xy + xy^2$

$y' = x\cdot(2y + y^2)$

$D_f = \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$

$f(x) = x$

$g(y) = 2y + y^2$

I. $g(y) \neq 0.$

$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\cdot(2y + y^2) \quad \Big| : (2y+y^2) \neq 0 \quad \cdot dx$

$\frac{1}{2y+y^2}\cdot dy = x\cdot dx \quad \Big| \int$

$\int \frac{1}{2y+y^2}\, dy = \int x\cdot dx$

$$I = \int \frac{1}{2y+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2y+y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2}{y(2+y)}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2+y-y}{y(2+y)}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cancel{2+y}}{y\cancel{(2+y)}}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{-\cancel{y}}{\cancel{y}(2+y)}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \ln|y| - \frac{1}{2}\ln|2+y| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{2+y}\right|$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{2+y}\right| = \frac{x^2}{2} + C,\ C \in R.}$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x^2 + 2c \quad \Big| \, e^{()}$$

$$\left|\frac{y}{y+2}\right| = e^{x^2+2c} = e^{x^2} \cdot e^{2c}$$

$$\frac{y}{y+2} = \underbrace{\pm e^{2c}}_{c_1} \cdot e^{x^2}$$

$$y = (y+2) \cdot c_1 \cdot e^{x^2} \iff y = y \cdot c_1 \cdot e^{x^2} + 2c_1 e^{x^2}$$

$$y\left(1 - c_1 e^{x^2}\right) = 2 \cdot c_1 \cdot e^{x^2}$$

$$\boxed{y = \frac{2c_1 e^{x^2}}{1 - c_1 e^{x^2}}} \quad c_1 \in \mathbb{R}^*.$$

II. $g(y) = 0 \Leftrightarrow 2y + y^2 = 0.$

$$y(2+y) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 0. \\ y_2 = -2. \end{array}\right\}$$

y_1 und y_2 sind singuläre Lösungen.

2') $\begin{cases} y' = 2xy + xy^2 \\ y(0) = -4 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} y(x) = \dfrac{2c_1 e^{x^2}}{1 - c_1 e^{x^2}} \\ y(0) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow -4 = \frac{2c_1 e^0}{1 - c_1 e^0}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = 2}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{2 \cdot 2 \cdot e^{x^2}}{1-2e^{x^2}} = \frac{4e^{x^2}}{1-2e^{x^2}}}$$

$\rightarrow$ die eindeutige Lösung des Cauchyproblems. (AWPs).

2. Euler'sche homogene DGL

Die allgemeine Form:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Substitution: $\boxed{z := \frac{y}{x}}$, $z = z(x)$

$y = z \cdot x \,\big)' \Rightarrow y' = z' \cdot x + z x'$

$y' = z' \cdot x + z$

Einsetzen:

$z' \cdot x + z = f(z) \Leftrightarrow z' \cdot x = f(z) - z$

$z' = \dfrac{dz}{dx}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} \cdot x = f(z) - z$ → DGL mit getrennten Var.

I. $f(z) - z \neq 0$. $(g(z) \neq 0)$.

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x} \quad \Big| \int .$$

Nachdem die DGL gelöst wir:

$$z(x) = \varphi(x, c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{y(x) = x \cdot \varphi(x, c), \quad c \in \mathbb{R}.}$$ → die allg. Lösung der DGL.

II. $g(z) = 0 \iff f(z) - z = 0 \Rightarrow z_0 =$ sing Lösungen. (wenn $\exists$).

Beispiel:

1) $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}, \quad x > 0.$

Subst: $\boxed{\frac{y}{x} = z} \Rightarrow y = x \cdot z$

$$y' = z' \cdot x + z$$

Einsetzen:

$$z' \cdot x + \cancel{z} = -z^2 + \cancel{z} \iff z' \cdot x = -z^2$$

$$z' = -\frac{1}{x} \cdot z^2 \qquad f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$g(z) = z^2$$

$\hookrightarrow$ DGL mit getrennten Var.

I. $g(z) \neq 0 \iff z^2 \neq 0$.

$$z' = \frac{dz}{dx} \xrightarrow{\text{Einsetzen}} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot z^2 \quad \Big| \begin{array}{l} \cdot dx \\ : z^2 \neq 0 \end{array}$$

$$\frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{x} \cdot dx \quad \Big| \int$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$+\frac{1}{z} = +\ln x + c \quad | \cdot (-1)$$

$$\boxed{z = \frac{1}{\ln x + c}, \quad c \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{y = z \cdot x = \frac{x}{\ln x + c}, \quad c \in \mathbb{R}.}$$

$\hookrightarrow$ die allg. Lösung der DGL.

II. $g(z) = 0 \iff z^2 = 0 \Rightarrow z_1 = 0$

$y = x \cdot z_1 = x \cdot 0 = 0 \rightarrow$ sing. Lösung.

2) $y' = \dfrac{y}{x+y}$, $x, y > 0$.

$f(x,y) = \dfrac{y}{x+y} \rightsquigarrow f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$y' = \dfrac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$

Subs: $z = \dfrac{y}{x}$

$y = zx \Rightarrow y' = z' \cdot x + z$

Einsetzen : $z' \cdot x + z = \dfrac{z}{1+z}$

$z' \cdot x = \dfrac{z}{1+z} - \dfrac{z}{\underbrace{}_{1+z}}$

Hg

$g(z)$

$z' \cdot x = \dfrac{z - z - z^2}{1+z} \Leftrightarrow \boxed{z' \cdot x = \dfrac{-z^2}{1+z}}$

3. Lineare DGL 1. Ordnung

Die allgemeine Form:

$$\odot \quad y' + f(x) \cdot y = g(x),$$

wobei $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Die DGL heißt linear weil sie von y und y' linear abhängt.

I. Methode

Falls
- $g(x) = 0 \Rightarrow$ heißt die DGL homogen.
- $g(x) \neq 0 \rightarrow$ heißt die DGL inhomogen.

Die allgemeine Lösung der DGL:

$$y = y_0 + y_p \quad , \text{ wobei}$$

y_0 – die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist.

y_p – <u>eine</u> partikuläre Lösung der inhomog. DGL ist.

<u>1. Schritt.</u>

$$y' + f(x) \cdot y = 0 \, . \rightarrow \text{die hom. DGL.}$$

↳ DGL mit getrennten Var.

$$y' = - f(x) \cdot y$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Einsetzen: $\frac{dy}{dx} = -f(x) \cdot y \quad \Big| \cdot dx$

$: y \neq 0$.

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x) \cdot dx$$

$$\ln|y| = -\underbrace{\int f(x)\, dx}_{F(x)} + C$$

$$|y| = e^{-F(x)} \cdot e^{C}$$

$$y = \pm e^{C} \cdot e^{-F(x)} \Rightarrow \boxed{y_0 = C \cdot e^{-F(x)}, \; C \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{y_0 = c \cdot e^{-\int f(x)\,dx}, \quad c \in \mathbb{R}}$$

$\longleftrightarrow$ die allg. Lösung der hom. DGL.

2. Schritt.

y_P – eine partikuläre Lösung der inhom. DGL.

Die Methode (Variation der Konstante).
(Lagrange Methode)

$$y_P = c(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx}$$

$\rightarrow$ annehmen y_P Lösung der inh. DGL ist.

Wir berechnen die Funktion $c(x)$.

y_p – Lösung der inhom. DGL $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_p' + f(x) \cdot y_p = g(x)$$

$$\left(c(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}\right)' + f(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} + \cancel{c(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} \cdot (-f(x))} + \cancel{f(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}} = g(x)$$

!

$$c'(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = \underbrace{g(x) \cdot e^{\int f(x)dx}}_{G(x)} \Rightarrow \boxed{C(x) = \int G(x)dx}$$

Einsetzen $c(x)$ in y_P.

3. Schritt.

$$y = y_0 + y_P.$$