Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2024-2025

6. Vorlesung

Sei P eine Polynomfunktion n-ten Grades ($n \in \mathbb{N}$) und $x_0 \in \mathbb{R}$.
Dann gilt

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ab jetzt sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtentartetes Intervall.

Definition

Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei n-mal differenzierbar und $x_0 \in I$. Die Polynomfunktion $T(\cdot, x_0)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\begin{aligned} T_n(x, x_0) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \end{aligned}$$

wird das *n-te Taylorpolynom von f an der Stelle x_0* genannt.

Th7 (Die Taylorsche Formel)

Seien a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf $[a, b]$ eine stetige Ableitung n-ter Ordnung und auf (a, b) $n+1$-mal differenzierbar ist. Dann gibt es für alle x, $x_0 \in [a, b]$ mit $x \neq x_0$ einen Punkt c, der sich echt zwischen x und x_0 befindet, mit

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

also ist

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{T_n(x, x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x, x_0)}.$$

Definition

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, $x_0 \in I$. Dann nennt man

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \; x \in \mathbb{R},$$

die Taylorreihe von f an der Stelle x_0.

Th8 (Taylor)

Seien $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$. Ist $x \in I$, dann gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \iff \lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0.$$

Bemerkung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \iff f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x, x_0).$$

Definition

Falls

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{1}$$

für alle $x \in I$ gilt, so sagt man, dass f eine Taylorentwicklung (auf I) an der Stelle x_0 hat.

Die Gleichheit (1) nennt man die Taylorentwicklung von f an der Stelle x_0.