Dynamische Systeme erzeugt von autonomen DGL

$x = x(t)$ $\quad$ x – die unbekannte Funktion
$\qquad$ t – die unab. Var
$\qquad$ $\to$ die Zeit.

Wir betrachten die folgende DGL 1. Ordnung
$x'(t) = f(t, x)$, wobei $x(t)$ die gesuchte reele Funktion ist.

$x' = f(t, x) \to$ nicht autonome DGL.

z.B. $x' = t^2 x + x^3$

$\boxed{x' = f(x)} \to$ die autonome DGL.

$x' = x - x^3$

<u>Def</u> Eine DGL heißt autonom, wenn die Funktion „f" nicht explizit von der Var. t abhängt.

Wir betrachten das Cauchyproblem:

$$(1)\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \eta, & \eta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

<u>Satz</u>: Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$. Dann hat das Cauchyproblem (1) eine eindeutige maximale Lösung, $\forall \eta \in \mathbb{R}$.

Def Eine Funktion $x : I_{max} \to \mathbb{R}$ heißt maximale Lösung des Cauchyproblems (1), falls x eine Lösung des Pb. (1) ist, und jede andere Lösung eine Einschränkung von x auf ein kleineres Intervall $I \subset I_{max}$ ist.

Sei $I_{max} = (\alpha_\eta, \beta_\eta)$, $\alpha_\eta < 0 < \beta_\eta$ das maximale Existenzintervall. Das C.P. (1) hat eine eindeutige Lösung auf I_{max}.
Wir definieren

$$x(t, \eta) : I_{max} \to \mathbb{R}$$

und: $\varphi : I_{max} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\boxed{\varphi(t, \eta) = x(t, \eta).}$$

$\to$ der Fluss erzeugt von einer autonomen DGL.
(oder das dynamische System erzeugt von DGL).

Eigenschaften:

1) $\varphi(0, \eta) = \eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$.
2) $\varphi(t+s, \eta) = \varphi(t, \varphi(s, \eta))$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$.
3) φ ist stetig.

Def Der Graph einer Lösung einer DGL, d.h. die Menge $\{(t, x(t)) : t \in I\}$ heißt Lösungskurve.

- Die Projektion der Lösungskurve auf den Zustandraum $\mathbb{R}$, d.h. die Bildmenge:

$$\{x(t), t \in I\} \subseteq \mathbb{R}$$

heißt Trajektorie der Lösung.

<u>Die Trajektorien</u>:

- die positive Halbtrajektorie

$$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t \in [0, \beta_\eta)} \varphi(t, \eta)$$

- die negative Halbtrajektorie

$$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t \in (\alpha_\eta, 0]} \varphi(t, \eta).$$

Die Trajektorie: $\gamma(\eta) = \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta)$

Def: <u>Das Phasenporträt</u> ist die Vereinigung aller Trajektorien zusammen mit den Pfeilen, die die Richtungen zunehmender Zeit zeigen.

Beispiel

Wir betrachten das AWP:

$$\begin{cases} x' = x \\ x(0) = \eta \quad , \eta \in \mathbb{R} . \end{cases}$$

$$x' = x \iff \frac{dx}{dt} = x \quad \Big| \cdot dt \quad : x \neq 0 . \quad \iff$$

$$\iff \frac{dx}{x} = dt \quad \Big| \int \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = t + c$$

$$x = c \cdot e^t \quad , c \in \mathbb{R} .$$

$$x(0) = \eta \Rightarrow c \cdot e^0 = \eta \Rightarrow c = \eta .$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \eta \cdot e^t}$$

Die Lösung des C.P.

$\boxed{x(t) = \eta \cdot e^t}$ $\eta \in \mathbb{R}$.

$x' = x$

$x > 0 \Rightarrow x' > 0$
$\Rightarrow x \nearrow$

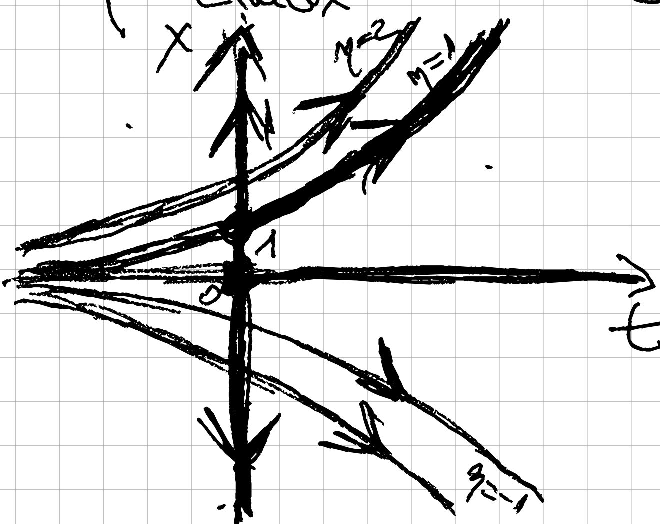
$x < 0 \Rightarrow x' < 0$
$\Rightarrow x \searrow$

Das maximale Existenzintervall:

$I_{max} = \mathbb{R}$

der Fluss: $\varphi(t, \eta) = \eta \cdot e^t$

$\varphi : I_{max} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



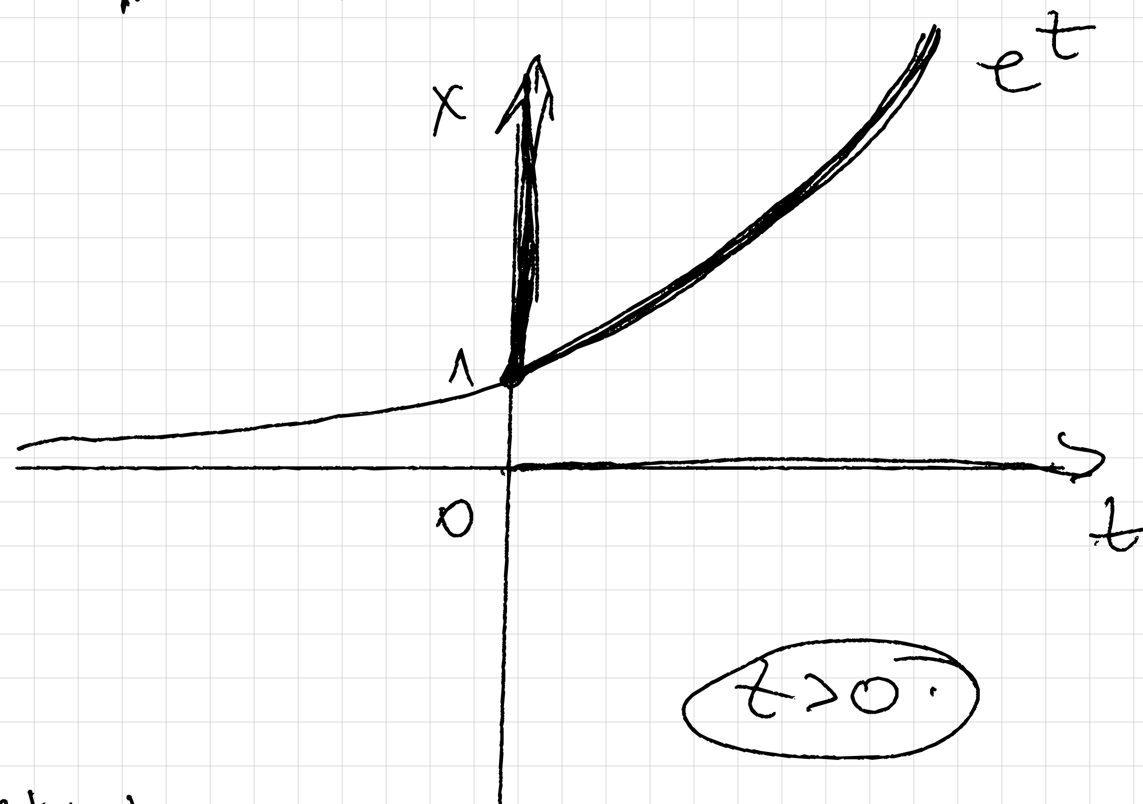
$\eta = 1 \Rightarrow \varphi(t, \eta) = e^t$

$\eta = -1 \Rightarrow \varphi(t, \eta) = -e^t$

$\eta = 0 \Rightarrow \varphi(t, \eta) = 0$

$\eta = 2 \Rightarrow \varphi(t, \eta) = 2e^t$

$\boxed{\varphi(t, \eta) = e^t}$



$\gamma^+(\eta) = [1, \infty)$ $\gamma^-(\eta) = [0, 1)$

Die Trajektorie:

1. $\eta = 0 \Rightarrow \varphi(t,0) = 0$

$$\gamma(0) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t,0) = \{0\}$$

2. $\eta > 0$:
$$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t\in(-\infty,0)} \varphi(t,\eta) = (0,\eta]$$

$$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t\in(0,\infty)} \varphi(t,\eta) = [\eta,\infty)$$

$$\gamma(\eta) = \gamma^-(\eta) \cup \gamma^+(\eta) = (0,\infty)$$

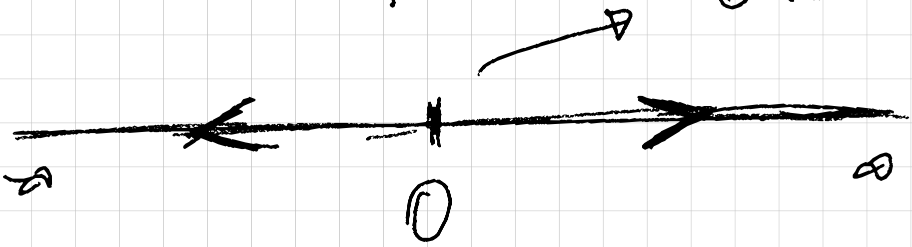
3. $\eta < 0$:
$$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t\in(-\infty,0)} \varphi(t,\eta) = (-\infty,\eta]$$

$$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t\in(0,\infty)} \varphi(t,\eta) = [\eta,0)$$

$$\gamma(\eta) = (-\infty,0)$$

Das Phasenporträt.

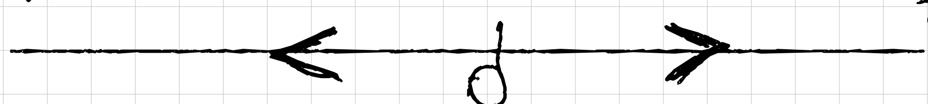
0 ist GgP instabil.



Eine andere Methode um das Phasenporträt zu zeichnen.

$$\left.\begin{aligned} x' &= x. \\ x' &= f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = x$$

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$



das Phasenp.

Bsp

$$x' = x^2 - 5x$$

$$f(x) = x^2 - 5x \qquad f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0$$

$$x_1 = 0 ; \quad x_2 = 5$$

x	$-\infty$			0		5			$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$

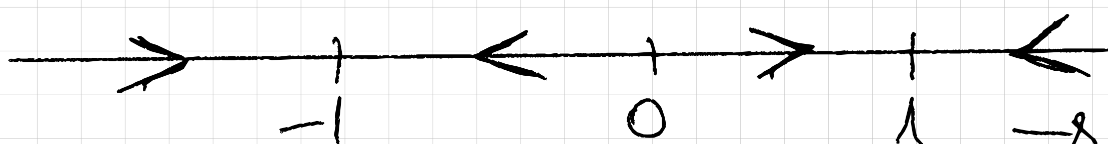
$x' = f(x) \qquad f(x) = 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2	$\dots$	x_n		∞
$f(x)$	$++$		0	$-$	0	$+$	0	$-$	
	$\longrightarrow$			$\longleftarrow$		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$	

Bsp. $\quad x' = x(1-x^2)$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x(1-x^2) \\ f(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x(1-x^2) = 0$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 1$$
$$x_3 = -1.$$



$\longrightarrow$ das Phasenporträt

Trajektorien: $(-\infty, -1)$; $\{-1\}$; $(-1, 0)$; $\{0\}$;
$(0, 1)$; $\{1\}$; $(1, \infty)$.

Def Eine konstante Lösung der DGL $x' = f(x)$ von der Form $x(t) = x^*$ heißt stationäre (zeitunabhängige) Lösung.
Der Wert $x^* \in \mathbb{R}$ heißt Gleichgewichtspunkt. (Ggp).

Def. Der Ggp $x^* \in \mathbb{R}$ heißt lokal stabil genau dann wenn: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.d.

$$|x^* - \eta| < \delta \Rightarrow |\varphi(t, \eta) - x^*| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Die Lösungen die in der Nähe von x^* starten, bleiben in der Nähe von x^*.

• Der Ggp $x^* \in \mathbb{R}$ heißt lokal asymptotisch stabil genau dann wenn x^* stabil ist und:

$$|\varphi(t,\eta) - x^*| \longrightarrow 0, \quad t \to \infty .$$

Lösungen gegen x^* konvergieren.

• Der Ggp $x^* \in \mathbb{R}$ heißt instabil genau dann wenn x^* nicht lokal stabil ist.

(falls es Lösungen gibt die sich von x^* entfernen, auch wenn sie in der Nähe von x^* starten).

Satz: Sei $x' = f(x)$, $f \in C^1(I)$.
Sei $x^* \in \mathbb{R}$ ein Ggp der DGL, s.d.
$f'(x^*) \neq 0$.

a) Wenn $f'(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ ist lokal asy. stabil

b) Wenn $f'(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ ist instabil

Bsp $x' = x^2 - 2x$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x \\ f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 2 \end{array}} \rightarrow \text{die Ggp.}$$

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(0) = -2 < 0 \Rightarrow \boxed{x_1^* = 0} \rightarrow$ ist lokal asymptotisch stabil

$f'(2) = 2 > 0 \Rightarrow \boxed{x_2^* = 2} \rightarrow$ ist instabil