Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 2. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 6)

a) Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist $x_n > 0$ und

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{4^n}{(n+3)!} \cdot \frac{(n+4)!}{4^{n+1}} = \frac{n+4}{4} > 1,$$

also ist die Folge streng fallend. Somit ist sie nach oben beschränkt. Da alle Folgenglieder positiv sind, ist die Folge auch nach unten beschränkt, und somit beschränkt.

b) Die Folge ist nicht monoton, da $x_1 < x_2$ und $x_2 > x_3$ ist. Die Folge ist beschränkt, da $x_n \in (-1, 1)$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist $x_n = 1 - \frac{1}{n^2+1}$. Daraus, dass die Folge $(n^2+1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ streng wachsend ist, schließt man, dass die Folge $\left(-\frac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ebenfalls streng wachsend ist. Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ streng wachsend. Es folgt, dass diese Folge nach unten beschränkt ist. Aus $x_n < 1$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$, ergibt sich, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ auch nach oben beschränkt, also beschränkt ist.

(A 7)

a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert, für $n \in \mathbb{N}$, durch

$$x_n = \begin{cases} 3, & n = 2k \\ n, & n = 2k+1 \end{cases}$$

ist nach oben unbeschränkt und hat eine gegen 3 konvergierende Teilfolge.

b) Die Folge $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat als Grenzwert $-\infty$. Sie ist also nach unten unbeschränkt und jede ihrer Teilfolgen hat (nach **Th4** aus der 2. Vorlesung) den gleichen Grenzwert. Also hat diese Folge keine konvergente Teilfolge.

c) Ist $a \in \mathbb{R}$, so wähle man beispielsweise $a_n = n + a$ und $b_n = n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a$.

Ist $a = \infty$, dann wähle man beispielsweise $a_n = 2n$ und $b_n = n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \infty$.

Ist $a = -\infty$, dann wähle man beispielsweise $a_n = n$ und $b_n = 2n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty$.

(A 8)

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2-(-2)^n}{3^n+7} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3^n+7} - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{1+\frac{7}{3^n}} \right) = 0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin(2023))^n = 0$, da $q := \sin(2023) \in (-1, 1)$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(8 - \frac{5n^4+1}{n^2-2n^5}\right)^2 = 64.$

d) Es gelten

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{9n^6+2n+1}-3n^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{9n^6+2n+1}+3n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n^5}+\frac{1}{n^6}}+3} = 0.$$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3+1}\cdot\left(\sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+1}}-1\right) = -\infty.$

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+5n+1}{n^2-1}\right)^{\frac{1-5n^4}{6n^4+1}} = \infty^{-\frac{5}{6}} = 0.$

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{4^n+(-5)^n}{7^n+1}\right)^{2n^3-n^2} = 2^{\infty} = \infty.$

h) Aus $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+4n+1}{2n^3+5}\right)^{\frac{-2n^4+1}{n^4+3n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4.$

j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^5+3n+1}{2n^5-n^4+3}\right)^{\frac{3n-n^4}{n^3+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = \infty.$