Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 12. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 40)

Die zu integrierenden Funktionen sind stetig. Also kann die Aussage 2° des Theorems **Th1** aus der 12. Vorlesung angewandt werden, um das entsprechende mehrfache Integral, das wir mit I bezeichnen, zu berechnen.

a) Es ist $I = \int_0^3 dy \int_0^2 \frac{y}{1+xy} dx$. Da für alle $y \in [0,3]$

$$\int_0^2 \frac{y}{1+xy} dx = \ln(1+xy)\Big|_0^2 = \ln(1+2y)$$

ist, erhält man für das zu berechnende Integral den Wert

$$I = \int_0^3 \ln(1+2y)dy = \left(y\ln(1+2y) - y + \frac{\ln(1+2y)}{2} \right)\Bigg|_0^3 = \frac{7}{2}\ln 7 - 3.$$

b) Es ist $I = \int_1^2 dx \int_2^3 dy \int_0^2 \frac{2z}{(x+y)^2} dz = \int_1^2 dx \int_2^3 \frac{4}{(x+y)^2} dy$. Da für alle $x \in [1,2]$

$$\int_2^3 \frac{4}{(x+y)^2} dy = -\left.\frac{4}{x+y}\right|_2^3 = \frac{4}{x+2} - \frac{4}{x+3}$$

ist, erhält man schließlich für das Integral den Wert $I = \int_1^2 (\frac{4}{x+2} - \frac{4}{x+3})dx = 4\ln \frac{x+2}{x+3}\Big|_1^2 = 4\ln\frac{16}{15}$.

c) Es ist $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dy$. Da für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dy = -\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos(x+\frac{\pi}{2}) + \cos(x+0) = \sin x + \cos x$$

ist, erhält man

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx = (-\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

d) Es ist $I = \int_a^b dx \int_c^d \frac{1}{(x+y)^2} dy$. Da für alle $x \in [a,b]$

$$\int_c^d (x+y)^{-2} dy = \left.\frac{(x+y)^{-1}}{-1}\right|_c^d = -\left(\frac{1}{x+d} - \frac{1}{x+c} \right)$$

ist, folgt $I = \int_a^b \left(\frac{1}{x+c} - \frac{1}{x+d} \right) dx = (\ln(x+c) - \ln(x+d))\Big|_a^b$. Somit ist also

$$I = \ln(b+c) - \ln(b+d) - (\ln(a+c) - \ln(a+d)) = \ln\frac{(a+d)(b+c)}{(a+c)(b+d)}.$$

e) Es ist $I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}} dz$. Für alle $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ ist

$$\int_0^1 (x+y+z+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x+y+z+1)'_z dz = 2\,(x+y+z+1)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 2(x+y+2)^{\frac{1}{2}} - 2(x+y+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun berechnen wir für alle $x \in [0,1]$,

$$\int_0^1 \left(2(x+y+2)^{\frac{1}{2}} - 2(x+y+1)^{\frac{1}{2}}\right) dy = 2\left(\frac{(x+y+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x+y+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3}\left((x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Man erhält also

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \tfrac{4}{3}\left((x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right) dx = \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{(x+3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\tfrac{(x+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \tfrac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \tfrac{8}{15}\left(31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

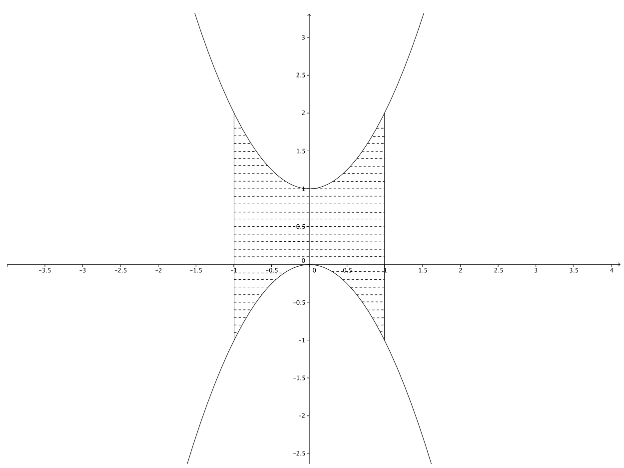
f) Es ist $I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 z^3}{1+y^2} dz = \frac{1}{4}\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy$. Da für alle $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy = x^2 \operatorname{arctg} y\big|_0^1 = \frac{\pi}{4} x^2$$

ist, erhält man $I = \frac{\pi}{16}\int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{48}$.

(A 41)

a)



b) Wir bezeichnen mit I das zu berechnende zweifache Integral. Da M ein Normalbereich bezüglich der y-Achse und die zu integrierende Funktion stetig ist, verwenden wir **Th2** aus der 12. Vorlesung, um I zu bestimmen. Also ist $I = \int_{-1}^1 dx \int_{-x^2}^{1+x^2} (x^2 - 2y) dy$. Für alle $x \in [-1,1]$ ist

$$\int_{-x^2}^{1+x^2} (x^2 - 2y) dy = (x^2 y - y^2)\big|_{-x^2}^{1+x^2} = 2x^4 - x^2 - 1,$$

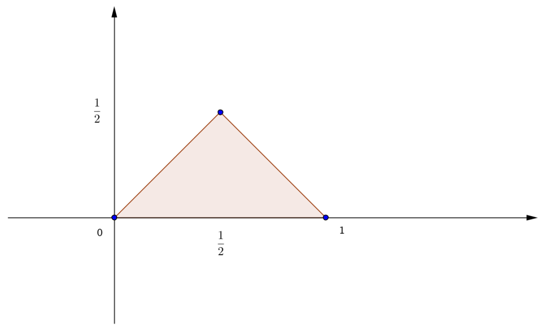
also ist

$$I = \int_{-1}^1 (2x^4 - x^2 - 1) dx = \left(\frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - x\right)\Bigg|_{-1}^1 = -\frac{28}{15}.$$

c) Aus der obigen Abbildung ist ersichtlich, dass nicht jede parallele Gerade zur x-Achse die Menge M entlang eines kompakten Intervalls anschneidet. Also ist M kein Normalbereich bezüglich der x-Achse.

(A 42)

a)



b) Aus der obigen Abbildung ist ersichtlich, dass M ein Normalbereich bezüglich beider Achsen ist. Wenn man M als Normalbereich bezüglich der x-Achse betrachtet, so sind die Randfunktionen $\psi_1,\, \psi_2 \colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ von M wie folgt definiert

$$\psi_1(y) = y, \quad \psi_2(y) = 1 - y.$$

Also ist

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{2},\ y \leq x \leq 1 - y \right\}.$$

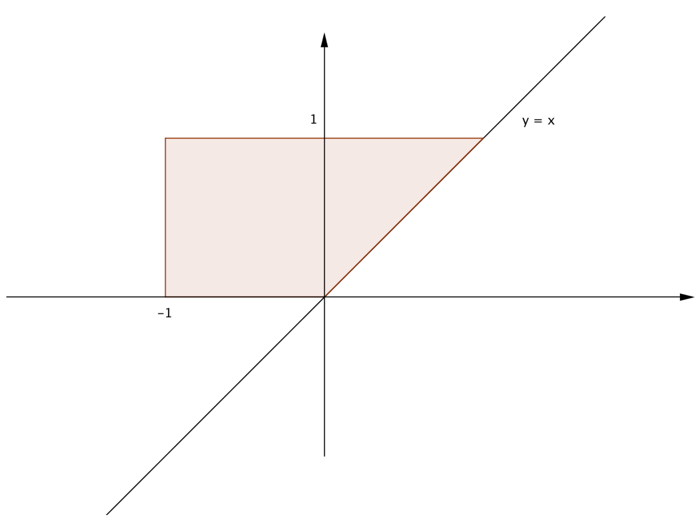
c) Wir bezeichnen mit I das zu berechnende zweifache Integral. Nach **Th2** aus der 12. Vorlesung folgt, dass $I = \int_1^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{1-y} (x^2 + y^2) dx$ ist. Da für alle $y \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\int_y^{1-y} (x^2 + y^2) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + x y^2 \right) \Big|_y^{1-y} = \frac{1}{3}(1-y)^3 + y^2 - \frac{7}{3} y^3$$

ist, erhält man schließlich $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}(1-y)^3 + y^2 - \frac{7}{3} y^3 \right) dy = \frac{1}{12}$.

(A 43)

a)

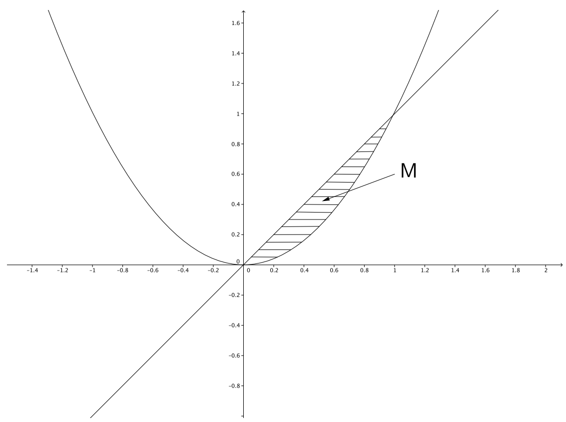


Wir betrachten M als einen Normalbereich bezüglich der x-Achse. Nach **Th3** aus der 12. Vorlesung ist $I = \int_0^1 dy \int_{-1}^{y} (xy - y^3) dx$. Da für alle $y \in [0,1]$

$$\int_{-1}^{y} (xy - y^3) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 y - xy^3 \right) \Big|_{-1}^{y} = -\frac{1}{2} y - \frac{1}{2} y^3 - y^4$$

ist, erhält man $I = -\int_0^1 \left(\frac{1}{2} y + \frac{1}{2} y^3 + y^4 \right) dy = -\frac{23}{40}$.

b)



Wir betrachten M als einen Normalbereich bezüglich der y-Achse, d.h.

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}.$$

Nach **Th2** in der 12. Vorlesung ist $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy dy$. Da für alle $x \in [0,1]$

$$\int_{x^2}^{x} xy dy = \frac{1}{2} xy^2 \Big|_{x^2}^{x} = \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2} x^5$$

ist, erhält man $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2} x^5 \right) dx = \frac{1}{24}$.