Wiederholungsaufgaben für die schriftliche Prüfung

Hinweis: Für die Berechnung der Quantile benutze man Python, siehe das Python-Beispiel für Quantile aus der Vorlesung.

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Chip-Typ fehlerhaft ist, beträgt 0.06. Eine Computerkomponente hat 12 solche Chips installiert. Die Komponente ist funktionsfähig, wenn 11 oder mehr Chips funktionsfähig sind.
(1) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
(1a) 12 solche Chips sind funktionell sind;
(1b) die Komponente ist funktionsfähig.
(2) Wenn auf einem Computer 4 solche Komponenten installiert sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei von ihnen funktionsfähig sind?
(3) Wenn auf einem Computer 3 solche Komponenten installiert sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt mehr als 30 Chips funktionsfähig sind?

(1): (1a) $(0.94)^{12}$ (1b) $p = C_{12}^{11}(0.94)^{11}0.06 + (0.94)^{12}$
(2) $C_4^3 p^3(1-p) + p^4$
(3) $\sum_{i=31}^{36} C_{36}^{i}(0.94)^i(0.06)^{36-i}$

2. Die Dichtefunktion einer ZG X ist $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x + \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases} .$$

Man bestimme:

a) die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
b) den Wert $a \in [0,1]$, wenn man weiss, dass $3P(X > a) = 5P(X \le a)$.
c) den Erwartungswert von $12X^2 - 1$.

Lsg.: a)

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{x^2+x}{2}, 0 \le x < 1 \\ 1, 1 \le x \ . \end{cases}$$

b) $3P(X > a) = 5P(X \le a) \Leftrightarrow 3(1 - P(X \le a)) = 5P(X \le a) \Leftrightarrow \frac{3}{8} = F_X(a) \Leftrightarrow \frac{3}{8} = \frac{a^2+a}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2} \notin [0,1]$, $a = \frac{1}{2} \in [0,1]$.

c) $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)dt = \int_0^1 x^2(x + \frac{1}{2})dx = \frac{5}{12} \Rightarrow \ E(12X^2 - 1) = 12E(X^2) - 1 = 4.$

3. Seien $x_1, \ldots, x_{10} \in (0,1)$ statistische Daten für das Merkmal X, welches die Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x^{2\theta - 1}, \text{wenn } 0 < x \le 1 \\ \\ 0, \text{wenn } x \notin (0,1] \end{cases} ,$$

hat, wobei $\theta > 0$ unbekannter Parameter ist. Man schätze θ mit Hilfe a) der Maximum-Likelihood Methode; b) der Momentenmethode.

Lsg.: Seien $x_1, ..., x_{10}$ statistische Daten und $X_1, ..., X_{10}$ seien Stichprobenvariablen für das Merkmal X.
a)

$$L(x_1, ..., x_{10}; \theta) = f(x_1) \cdot ... \cdot f(x_{10}) = 2^{10}\theta^{10}(x_1 \cdot ... \cdot x_{10})^{2\theta-1}$$

Eigenschaften der ln-Funktion: $\ln(a \cdot b) = \ln(a) \cdot \ln(b)$, $\ln(\frac{a}{b}) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}, \ln(a^b) = b\ln(a), a, b > 0, \ln(e) = 1, \ln(1) = 0$.

$$\Rightarrow \ln L(x_1, ..., x_{10}; \theta) = 10\ln(2) + 10\ln(\theta) + (2\theta - 1)\ln(x_1 \cdot ... \cdot x_{10})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{10}{\theta} + 2\ln(x_1 \cdot ... \cdot x_{10})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\frac{10}{\theta^2} < 0$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{10}{2\ln(x_1 \cdot ... \cdot x_{10})} \Longrightarrow \hat{\theta}(x_1, ..., x_{10}) = -\frac{5}{\ln(x_1 \cdot ... \cdot x_{10})}.$$

b) Man berechnet $E(X) = \frac{2\theta}{2\theta+1}$. Man schreibt $\dfrac{2\theta}{2\theta + 1} = \dfrac{1}{10}(x_1 + ... + x_{10})$. Der Schätzwert für den unbekannten Parameter θ ist: $\hat{\theta}(x_1, ..., x_{10}) = \dfrac{\bar{x}_{10}}{2(1 - \bar{x}_{10})}$ und die Schätzfunktion ist $\hat{\theta}(X_1, ..., X_{10}) = \dfrac{\bar{X}_{10}}{2(1 - \bar{X}_{10})}$.

4. Seien X_1,...,X_n, ... unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 0.5 \text{ für } i \in \mathbb{N}^*.$$

Sei $Y_i = \max\{X_i, X_{i+1}\}$ für $1 \leq i \leq n - 1$.
(a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Y_i, $1 \leq i \leq n - 1$.
(b) Man berechne den Erwartungswert und die Varianz von Y_i, $1 \leq i \leq n - 1$.
(c) Sei $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Zu welchem Wert konvergiert fast sicher die Folge $(Z_n)_n$?
Lsg.: (a) Man benutzt, dass X_i und X_{i+1} unabhängig sind:

$$P(Y_i = -1) = P(\max\{X_i, X_{i+1}\} = -1) = P(X_i = -1, X_{i+1} = -1) = P(X_i = -1)P(X_{i+1} = -1) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(Y_i = 1) = \frac{3}{4}.$$

$$\Rightarrow Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \forall\, i = \overline{1, n-1}.$$

(b) $E(Y_i) = \frac{1}{2}, V(Y_i) = \frac{3}{4}$.
(c) Man benutzt das starke Gesetz der großen Zahlen für die Folge $(X_n)_n$ und es folgt

$$Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) \stackrel{f.s.}{\to} E(X_1) = 0.$$

5. Die Zerfallzeit T eines Poloniumatoms sei eine exponentialverteilte Zufallsgröße. Nach 140 Tagen ist ein solches Atom (genau) mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zerfallen (Halbwertszeit).

(a) Man bestimme den Parameter der Exponentialverteilung.

(b) Nach welcher Zeit ist ein Poloniumatom mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit zerfallen?

Lsg.: (a) Bestimmung des Parameters λ der Exponentialverteilung:

$$\begin{aligned}P(T \leq 140) = F(140) = 1 - e^{-140\lambda} &= 0.5 \\ \Longrightarrow e^{-140\lambda} &= 0.5 \\ \Longrightarrow -140\lambda &= \ln 0.5 \\ \Longrightarrow \lambda &= -\frac{\ln 0.5}{140} \approx 0.00495.\end{aligned}$$

(b) Zeit für Zerfall mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit:

$$P(T \leq t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 0.95 \Longrightarrow e^{-\lambda t} = 0.05 \Longrightarrow -\lambda t = \ln 0.05 \Longrightarrow t = -\frac{\ln 0.05}{\lambda} \approx 605.07.$$

Nach etwa 605 Tagen ist das Poloniumatom mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit zerfallen.

6. Die Bedienung eines Kunden an einem Schalter am Bahnhof dauert *im Mittel* 10 Minuten (durchschnittliche Bedienzeit) und kann durch eine exponentialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Bedienung eines Kunden innerhalb einer Viertelstunde beendet?

(b) Welche durchschnittliche Bedienzeit müsste vorliegen, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde länger als eine Viertelstunde bedient wird, gleich 0.1 sein soll?

Hinweis: die Dichtefunktion der Exponentialverteilung $X \sim Exp(\lambda)$ ist

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0. \end{cases}$$

Lsg.: (a) Man berechnet den Erwartungswert $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ und aus $E(X) = 10$ bestimmt man $\lambda = \frac{1}{10}$. Man berechnet $P(X \leq 15) = \displaystyle\int_0^{15} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda \cdot 15} = 1 - e^{-1.5}$.

(b) $E(X) = \frac{1}{\lambda} =?$ so dass $P(X > 15) = 0.1 \Longrightarrow e^{-\lambda \cdot 15} = 0.1 \Longrightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{15}{\ln(10)}$.

7. Ein Laden verkauft elektronische Chips, die von drei Lieferanten S_1, S_2, S_3 stammen. 40% der Chips sind von S_1, 35% von S_2 und 25% von S_3. Man weiss, dass 2% der Chips von S_1 fehlerhaft sind, 1% von S_2 sind fehlerhaft und 3% von S_3 haben Fehler. Jemand wählt zufällig einen Chip und stellt fest, dass er fehlerhaft ist. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Chip vom Lieferanten S_2 stammt? Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Chip aus dem Laden fehlerhaft ist?

Lsg.: Wir betrachten die Ereignisse:

D: Chip ist fehlerhaft; A_i: Chip wurde von S_i hergestellt, $i = 1, 2, 3$.

Es gilt

$$P(A_1) = \frac{40}{100}, \quad P(A_2) = \frac{35}{100}, \quad P(A_3) = \frac{25}{100}$$

und

$$P(D|A_1) = \frac{2}{100}, \quad P(D|A_2) = \frac{1}{100}, \quad P(D|A_3) = \frac{3}{100}.$$

Laut der Bayesschen Formel

$$P(A_2|D) = \frac{P(A_2)P(D|A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(D|A_i)} = \frac{7}{38} \approx 0.1842\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip fehlerhaft ist wird berechnet durch

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(D|A_i) \approx 0.019\,.$$

8. Von einer PIN ist bekannt, dass sie genau 4 Ziffern enthält. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine PIN nur die Ziffern 1 *und* 2 enthält (z.B. 1222, 2112 usw.)?

Lsg.: $\dfrac{2^4-2}{10^4}$.

9. Die zufällige Variable X hat die Dichtefunktion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f_X(x) = \begin{cases} a, & x \in [1,2] \\ 0, & x \notin [1,2]. \end{cases}$

Man berechne $a \in \mathbb{R}$, die Verteilungsfunktion von X, $P(2X < 3)$ und den Erwartungswert von X.
Lsg.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1 \implies \int_1^2 a dt = 1 \implies a = 1$$

$$\Rightarrow\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0, \text{ für } x < 1, \\ x-1, \text{ für } x \in [1,2], \\ 1, \text{ für } x > 2. \end{cases}$$

$P(2X < 3) = P(X < 1.5) = 0.5$; $E(X) = 1.5$.

10. Die Personalabteilung eines Großunternehmens hat den Verdacht, dass die Mitarbeiter die Mittagspause (1 Stunde) im Durchschnitt nicht respektieren. Es wurde die Pausenlänge von 100 zufällig gewählten Mitarbeitern getestet; man erhält für die Pausendauer ein Stichprobenmittel von 70 Minuten und eine Stichprobenstandardabweichung von 15 Minuten. Testen Sie zum Signifikanzniveauvon 5 % , ob die Zeit für die Mittagspause im Mittel eingehalten wird oder nicht.
Lsg.: $n = 100, \bar{x}_n = 70, s_n = 15, \alpha = 0.05, \mu_0 = 60$; das getestete Merkmal ist: μ= Erwartungswert für die Länge der Pause; Student-Test (T-Test) für Erwartungswert: $H_0 : \mu = 60, H_1 : \mu \neq 60$; $t = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}} = \frac{70-60}{\frac{15}{10}} \approx 6.6667 \implies t > t_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{t.ppf}(0.975, 99) \approx 1.9842 \implies H_0$ wird abgelehnt zugunsten von H_1 d.h. die Zeiten für die Mittagspause werden im Mittel nicht eingehalten.
Diesen Test kann man auch mit Hilfe von zweiseitigen Konfidenzintervallen lösen: man berechnet

$$\left(\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

und testet ob μ_0 diesem Intervall anghört oder nicht.

11. In einer Urne sind 4 weiße und 6 schwarze Kugeln. Ein Spieler zieht nacheinander eine Kugel ohne Zurücklegen. Das Spiel ist aus, wenn er eine weisse Kugel zieht oder wenn er dreimal gezogen hat. Die Zufallsvariable X zeigt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
a) Welches ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X?
b) Der Spieleinsatz beträgt 5 €. Der Spieler erhält 30€, wenn er drei schwarze Kugeln gezogen hat. Er erhält 25 €, wenn er zwei schwarze Kugeln zieht. In allen anderen Fällen verliert er zusätzlich 5 €. Im Mittel welches ist der Gewinn oder Verlust des Spielers?
Lsg.: a) Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist:
$P(X = 0) = P(\text{erste Kugel ist weiß}) = \dfrac{4}{10}$;
$P(X = 1) = P(\text{erste Kugel schwarz, zweite Kugel weiß}) = \frac{6 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{4}{15}$;

$P(X=2) = P(\text{erste und zweite Kugel schwarz, dritte Kugel weiß}) = \frac{6\cdot5\cdot4}{10\cdot9\cdot8} = \frac{1}{6}$;
$P(X=3) = P(\text{erste und zweite und dritte Kugel schwarz}) = \frac{6\cdot5\cdot4}{10\cdot9\cdot8} = \frac{1}{6}$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \\ \dfrac{4}{10} & \dfrac{4}{15} & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}$$

b) Die Zufallsvariable Y zeigt den Gewinn/Verlust des Spielers an; die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ist:
$P(Y = 30-5) = P(Y = 25) = P(X = 3) = \frac{6\cdot5\cdot4}{10\cdot9\cdot8} = \frac{1}{6}$
$P(Y = 25-5) = P(Y = 20) = P(X = 2) = \frac{6\cdot5\cdot4}{10\cdot9\cdot8} = \frac{1}{6}$;
$P(Y = -5-5) = P(Y = -10) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \Longrightarrow E(Y) = 25\cdot\frac{1}{6} + 20\cdot\frac{1}{6} + (-10)\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ (€) .
Der mittlere Gewinn ist $\dfrac{5}{6} \approx 0.83333$ €.

12. Gegeben ist der zufällige diskrete Vektor (U, V) mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$U \backslash V$	-1	1	b
1	0,25	0,05	a
3	0,3	a	0,1

a) Man bestimme a und b, so dass $E(V) = 0{,}15$.
b) Sind die ZG U und V unabhängig?
c) Man berechne den Erwartungswert der ZG $(U-3)^2$.

Lsg.: a) $2a + 0{,}4 + 0{,}3 = 1 \Rightarrow a = 0{,}15$; $P(V=-1) = 0{,}55$, $P(V=1) = 0{,}2$, $P(V=b) = 0{,}25$,
$E(V) = -0{,}55 + 0{,}2 + b\cdot 0{,}25 = 0{,}15 \Rightarrow b = 2$.
b) $P(U=1) = 0{,}45, P(V=1) = 0{,}2, P(U=1, V=1) = 0{,}05$
$\Rightarrow P(U=1)\cdot P(V=1) \neq P(U=1, V=1)$, weil $0{,}09 \neq 0{,}05$
c) $P(U=1) = 0{,}45$; $P(U=3) = 0{,}55 \Rightarrow E((U-3)^2) = 0{,}45\cdot 4 = 1{,}8$.

13. In einer Lostrommel mit 100 Losen befinden sich 10 Gewinne.
(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehen Sie mit 3 Losen auch 3 Gewinne?
(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehen Sie mit 7 Losen genau 2 Gewinne?

Lsg: Ziehen ohne Zurücklegen: (a) $\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}\cdot\frac{8}{98}$ oder mit $\frac{C_{90}^0\cdot C_{10}^3}{C_{100}^3}$ (hypergeometrische Verteilung)

(b) $C_7^2\cdot\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}\cdot\frac{90}{98}\cdot\frac{89}{97}\cdot\frac{88}{96}\cdot\frac{87}{95}\cdot\frac{86}{94}$ oder mit $\frac{C_{90}^5\cdot C_{10}^2}{C_{100}^7}$ (hypergeometrische Verteilung).

14. In einem Lager befinden sich 200 Ersatzteile desselben Typs, von denen 100 Teile erster Qualität, 65 Teile zweiter Qualität und 35 Teile dritter Qualität sind. 30 Teile werden zufällig und ohne Zurücklegen entnommen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass davon 17 Teile erster Qualität, 9 Teile zweiter Qualität und 4 Teile dritter Qualität sind?

Lsg.: $p = \frac{C_{100}^{17}\cdot C_{65}^9\cdot C_{35}^4}{C_{200}^{30}}$

15. Der Manager eines Holzlagers möchte die Leistung einer Sägemühle auswerten, die Balken in einer Länge von 100 cm schneiden soll. Der Manager zieht eine Stichprobe von 50 Balken aus der Sägemühle und misst deren Länge und erhält einen empirischen Mittelwert von 99.8 cm und eine empirische Standardabweichung von 0.9 cm. Der Manager führt einen Test auf Varianzen mit Hilfe einer Stichprobe durch, um festzustellen, ob sich die Varianz der Sägemühle von 1 (cm^2) unterscheidet. Man nimmt an die Länge der Balken sind normal verteilt. Sei $\alpha = 0.05$
Lsg. $H_0 : \sigma^2 = 1, H_1 : \sigma^2 \neq 1$, $n = 50, \bar{x}_n = 99.8$, $s_n^2 = 0.9^2 = 0.81$, $\sigma_0^2 = 1$, $\alpha = 0.05$, $c_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{chi2.ppf}(0.975, 49) = 70.22$, $c_{\frac{\alpha}{2}} = \texttt{chi2.ppf}(0.025, 49) = 31.55$ Das zweiseitige Konfidenzintervall für die Varianz, welches diesem Test entspricht ist $\left(\dfrac{n-1}{c_{1-\frac{\alpha}{2}}}\cdot s_n^2, \dfrac{n-1}{c_{\frac{\alpha}{2}}}\cdot s_n^2\right)$. Man rechnet $\frac{n-1}{c_{1-\frac{\alpha}{2}}}\cdot s_n^2 = \frac{49}{70.22}\cdot 0.81 \approx$

0.5652, $\frac{n-1}{c_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot s_n^2 = \frac{49}{31.55} \cdot 0.81 \approx 1.258$ der Wert des zweiseitigen Konfidenzintervalls ist $\Big(0.5652\,,\,1.258\Big)$ und $\sigma_0^2 = 1$ gehört diesem Intervall an, d.h. anhand der Daten kann H_0 angenommen werden, die Varianz der Sägemühle ist nicht verschieden von 1 (cm^2).

16. Von einer PIN ist bekannt, dass sie genau 4 Ziffern enthält. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige PIN :
a) verschiedene Ziffern enthält?
b) (nur) die Ziffern 3, 5 , 7 und 8 (in beliebiger Reihenfolge) enthält (z.B. 3538, 5378, usw.)?
c) eine ungerade und drei gerade Ziffern enthält (in beliebiger Reihenfolge)?
d) nur die Ziffern 1,3,3,6 enthält (in beliebiger Reihenfolge)?

Lsg.: a) $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4}$; b) $\dfrac{4^4}{10^4}$ c) $\dfrac{4 \cdot 5^4}{10^4}$; d) $\dfrac{4!}{1!2!1!} = 12$ (Permutation mit Wiederholung);

17. a) Sei X die zufällige Variable, die anzeigt wie oft die Zahl 1 bei 3 Würfen eines fairen Würfels erhalten wurde. Man berechne den Erwartungswert von X.
b) Bei 432 Würfen von 3 fairen Würfeln wie oft taucht das Triplett (1,1,1) *durchschnittlich* auf?

Lsg.: a)

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \\ \dfrac{5^3}{6^3} & \dfrac{3 \cdot 5^2}{6^3} & \dfrac{3 \cdot 5}{6^3} & \dfrac{1}{6^3} \end{pmatrix} \Longrightarrow E(X) = \frac{0 \cdot 5^3}{6^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5^2}{6^3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6^3} + \frac{3 \cdot 1}{6^3} = \frac{1}{2}$$

b) Y sei die ZG die anzeigt wie oft (1,1,1) bei 432 Würfen von 3 fairen Würfeln auftaucht
I. Methode: $\Longrightarrow Y \sim Bino\left(432, \dfrac{1}{6^3}\right) \Longrightarrow E(Y) = 432 \cdot \dfrac{1}{6^3} = 2$ (die Berechnung des Erwartungswertes einer binomialen Zufalssgröße wurde in der Vorlesung in einem Beispiel berechnet).
II. Methode: Für $i \in \{1, \ldots, 432\}$ sei Z_i die ZG die anzeigt ob $(1,1,1)$ bei dem i-ten Wurf von 3 fairen Würfeln auftaucht oder nicht $\Longrightarrow Z_i \sim Bernoulli(\frac{1}{6^3})$. Dann gilt $Y = Z_1 + \cdots + Z_{432} \Longrightarrow E(Y) = E(Z_1) + \cdots + E(Z_{432}) = 432 \cdot \frac{1}{6^3} = 2$.