Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 10. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 37)

a) Die Funktion $F\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = \arcsin x$, ist eine Stammfunktion von f. Aus

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} F(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \arcsin x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

und

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} F(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

folgt, nach **Th4** aus der 10. Vorlesung, dass f auf $(-1,1)$ uneigentlich integrierbar und

$$\int_{-1+}^{1-} f(x)dx = \int_{-1+}^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} F(x) - \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} F(x) = \pi$$

ist.

b) Das Integral $\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+x}dx$ bestimmen wir mit der Substitution $\sqrt[3]{x} = t$. Dann ist $x = t^3$, woraus $dx = 3t^2dt$ folgt. Somit wird

$$\int f(x)dx \longmapsto \int \frac{3t^2}{t+t^3}dt = 3\int \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{3}{2}\int \frac{(1+t^2)'}{1+t^2}dt = \frac{3}{2}\ln(1+t^2) + \mathcal{C},$$

also ist

$$\int f(x)dx = \frac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right) + \mathcal{C}.$$

Die Funktion $F\colon (0,3] \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f. Aus

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{3}{2}\ln 1 = 0$$

folgt, nach **Th3** aus der 10. Vorlesung, dass f auf $(0,3]$ uneigentlich integrierbar und

$$\int_{0+}^{3} f(x)dx = \int_{0+}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+x}dx = F(3) - \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = \frac{3}{2}\ln(1+\sqrt[3]{9})$$

ist.

c) Um $\int f(x)dx = \int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$ zu bestimmen, verwenden wir die Substitution $\frac{1}{x} = t$. Dann ist $-\frac{1}{x^2}dx = dt$. Somit wird

$$\int f(x)dx \longmapsto \int -\sin t dt = \cos t + \mathcal{C},$$

also ist

$$\int f(x)dx = \cos\frac{1}{x} + \mathcal{C}.$$

Die Funktion $F\colon \left[\frac{3}{\pi}, \infty\right) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \cos\frac{1}{x}$, ist eine Stammfunktion von f. Aus

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} = \cos 0 = 1$$

folgt, nach **Th2** aus der 10. Vorlesung, dass f auf $\left[\frac{3}{\pi}, \infty\right)$ uneigentlich integrierbar und

$$\int_{\frac{3}{\pi}}^{\infty} f(x)dx = \int_{\frac{3}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F\left(\frac{3}{\pi}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ist.

d) Die Funktion $F\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $F(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, ist eine Stammfunktion von f. Weil

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-x} = -\infty \notin \mathbb{R},$$

impliziert die Aussage (1) des Theorems **Th3** aus der 10. Vorlesung, dass f auf $(-\infty, 0]$ nicht uneigentlich integrierbar ist.

e) Die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x$, ist eine Stammfunktion von f. Aus

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \text{ und } \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

folgt, nach **Th4** aus der 10. Vorlesung, dass f auf $\mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = \pi$$

ist.

f) Um $\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx$ zu bestimmen, verwenden wir die Substitution $3x - 1 = t$. Dann ist $3dx = dt$. Somit wird

$$\int f(x)dx \longmapsto \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{t}}dt = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{2}t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{C},$$

also ist

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}(3x-1)^{\frac{2}{3}} + \mathcal{C}.$$

Die Funktion $F\colon \left(\frac{1}{3}, 3\right] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2}(3x-1)^{\frac{2}{3}}$, ist eine Stammfunktion von f. Aus

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x>\frac{1}{3}}} F(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x>\frac{1}{3}}} \frac{1}{2}(3x-1)^{\frac{2}{3}} = 0$$

folgt, nach **Th3** aus der 10. Vorlesung, dass f auf $\left(\frac{1}{3}, 3\right]$ uneigentlich integrierbar und

$$\int_{\frac{1}{3}+}^{3} f(x)dx = \int_{\frac{1}{3}+}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx = F(3) - \lim_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x>\frac{1}{3}}} F(x) = 2$$

ist.

g) Mit partieller Integration erhält man

$$\int \ln x dx = \int (x)' \ln x dx = x \ln x - \int x(\ln x)' dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + \mathcal{C}.$$

Also ist $F\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = x \ln x - x$, eine Stammfunktion von f. L'Hospitals Regel anwendend, folgt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x \ln x - x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x = 0.$$

Th3 aus der 10. Vorlesung impliziert, dass f uneigentlich integrierbar auf $(0,1]$ und

$$\int_{0+}^{1} f(x)dx = \int_{0+}^{1} \ln x dx = F(1) - \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = -1$$

ist.

h) Aus

$$\int \frac{1}{x(1+x)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) dx = \ln x - \ln(1+x) + \mathcal{C}$$

folgt, dass $F\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = \ln \frac{x}{1+x}$, eine Stammfunktion von f ist. Da

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln \frac{x}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \ln \frac{x}{x\left(\frac{1}{x}+1\right)} = \lim_{x\to\infty} \ln \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \ln 1 = 0$$

ist, folgt, nach **Th2** aus der 10. Vorlesung, dass f uneigentlich integrierbar auf $[1,\infty)$ und

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(1) = \ln 2$$

ist.

i) Um $\int f(x)dx = \int \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$ zu bestimmen, verwenden wir die Substitution $\ln x = t$. Dann ist $\frac{1}{x} dx = dt$. Somit wird

$$\int f(x)dx \longmapsto \int \frac{1}{t^3} dt = \int t^{-3} dt = -\frac{1}{2t^2} + \mathcal{C},$$

also ist

$$\int f(x)dx = -\frac{1}{2(\ln x)^2} + \mathcal{C}.$$

Die Funktion $F\colon [\mathrm{e},\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{1}{2(\ln x)^2}$, ist eine Stammfunktion von f. Aus

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{2(\ln x)^2} = 0$$

folgt, nach **Th2** aus der 10. Vorlesung, dass f uneigentlich integrierbar auf $[\mathrm{e},\infty)$ und

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} f(x)dx = \int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(\mathrm{e}) = \frac{1}{2}$$

ist.