Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur Aufwärmeübung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 1)

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$. Wir beweisen mit Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Aussage $A(n) =$ „$(1+x)^n \geq 1+nx$“ wahr ist.

I (Induktionsanfang): $A(1) =$ „$1+x \geq 1+x$“ ist wahr.

II (Induktionsschritt): Sei $A(n)$ für irgendein $n \in \mathbb{N}^*$ richtig. Also ist

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Durch Multiplikation mit $1+x \geq 0$ erhält man

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Somit ist auch $A(n+1)$ richtig.

Aus den Schritten I und II folgt die $\geq$ Bernoulli-Ungleichung.

(A 2)

Wir beweisen zuerst die Ungleichung 4: wir zeigen also, dass

$$\frac{x_1+...+x_n}{n} \leq \max\{x_1,...,x_n\},\ \forall x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}_+^*\,. \tag{1}$$

Es seien $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}_+^*$ und $M := \max\{x_1,...,x_n\}$. Daraus folgt $x_i \leq M$ für alle $i \in \{1,...,n\}$. Aufsummierend, erhält man

$$x_1+...+x_n \leq \underbrace{M+...+M}_{n\text{-mal}} \Longleftrightarrow \frac{x_1+...+x_n}{n} \leq M.$$

Die Ungleichung 1, also

$$\min\{x_1,...,x_n\} \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}},$$

folgt aus der schon bewiesenen Ungleichung (1), angewendet für $\frac{1}{x_i}$, $i \in \{1,...,n\}$, zusätzlich die Gleichheit

$$\max\left\{\frac{1}{x_1},...,\frac{1}{x_n}\right\} = \frac{1}{\min\{x_1,...,x_n\}}$$

verwendend.

Es seien $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Die Ungleichung 3, also $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leq \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, ist äquivalent zu $x_1...x_n \leq \left(\dfrac{x_1+...+x_n}{n}\right)^n$. Letztere beweisen wir mit mathematischer Induktion, d.h. wir zeigen, dass die Aussage

$A(n)$: „Für alle reellen Zahlen $x_1,\ldots,x_n > 0$ ist $x_1...x_n \leq \left(\dfrac{x_1+...+x_n}{n}\right)^n$.“

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt.

I (Induktionsanfang): Die Aussage $A(1)$ ist offensichtlich wahr.

II (Induktionsschritt): Sei $A(n)$ für irgendein $n \in \mathbb{N}^*$ richtig. Seien $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $x_{n+1} \geq x_i$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$. Sei

$$\alpha := \frac{x_1 + ... + x_n}{n}.$$

Man beachte, dass $\alpha \leq x_{n+1}$ ist. Es gelten folgende Gleichheiten

$$\frac{x_1 + ... + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n\alpha + x_{n+1}}{n+1} = \frac{(n+1)\alpha + x_{n+1} - \alpha}{n+1} = \alpha + \frac{x_{n+1} - \alpha}{n+1} = \alpha \left(1 + \frac{x_{n+1} - \alpha}{\alpha(n+1)}\right).$$

Wir bezeichnen

$$x := \frac{x_{n+1} - \alpha}{\alpha(n+1)}.$$

Offensichtlich ist $x \geq 0$. Wir führen einige Rechnungen durch, wenden die Bernoulli Ungleichung für x und $n+1$ an, und erhalten

$$\left(\frac{x_1 + ... + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \alpha^{n+1} \left(1 + \frac{x_{n+1} - \alpha}{\alpha(n+1)}\right)^{n+1} \geq \alpha^{n+1} \left(1 + (n+1)\frac{x_{n+1} - \alpha}{\alpha(n+1)}\right) =$$

$$= \alpha^{n+1} \left(1 + \frac{x_{n+1}}{\alpha} - 1\right) = \alpha^n x_{n+1} = \left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right)^n x_{n+1} \geq x_1 ... x_n x_{n+1}.$$

Für die obige letzte Ungleichung haben wir die Induktionsvoraussetzung benutzt. Somit gilt $A(n+1)$. Aus den Schritten I und II folgt, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ richtig ist.

Die Ungleichung (2)

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 ... x_n}$$

folgt aus der vorher bewiesenen Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel, angewendet für $\frac{1}{x_i}$, $i \in \{1, ..., n\}$.

(A 3)

a) Diese Ungleichung folgt sofort aus der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel.

b) Diese Ungleichung folgt aus der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel, Bemerkung 2) und der Gleichheit $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Hausaufgaben:

(H 1)

a) Es seien $S_1(n) := 1 + \cdots + n$ und $S_2(n) := 1^2 + \cdots + n^2$, für $n \in \mathbb{N}^*$. Es sei daran erinnert, dass

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, es folgt also, dass

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Wegen (2) ist also

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

also ist

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Wir beweisen mit mathematischer Induktion, dass die Aussage $A(n)$: „$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$“ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ richtig ist.

I (Induktionsanfang): Die Aussage $A(1)$ ist offensichtlich richtig.

II (Induktionsschritt): Sei $A(n)$ für irgendein $n \in \mathbb{N}^*$ richtig. Also gelten die folgenden Gleichheiten

$$S_2(n+1) = S_2(n) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Somit ist auch $A(n+1)$ richtig.

b) Für alle $k \in \mathbb{N}^*$ ist $k \cdot k! = (k+1)! - k!$, woraus sich sofort die Gleichheit

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

ergibt. Wir beweisen mit Induktion, dass die Aussage $A(n)$: „$1{\cdot}1!+2{\cdot}2!+\cdots+n{\cdot}n! = (n+1)!-1$“ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ richtig ist.

I (Induktionsanfang): Die Aussage $A(1)$ ist offensichtlich richtig.

II (Induktionsschritt): Sei $A(n)$ für irgendein $n \in \mathbb{N}^*$ richtig. Also gelten die folgenden Gleichheiten

$$1{\cdot}1!+2{\cdot}2!+\cdots+n{\cdot}n!+(n+1)(n+1)! = (n+1)!-1+(n+1)(n+1)! = (n+2)(n+1)!-1 = (n+2)!-1.$$

Somit ist auch $A(n+1)$ richtig.

(H 2)

Der Beweis ist analog zu dem in **(A 1)**.

(H 3)

Es sei ein Rechteck mit der Länge ℓ und der Breite b gegeben. Sein Flächeninhalt ist dann $F = \ell \cdot b$ und sein Umfang $U = 2(\ell + b)$. Durch Anwendung der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel für $n = 2$, $x_1 = \ell$ und $x_2 = b$, erhält man

$$\sqrt{\ell \cdot b} \leq \frac{\ell + b}{2},$$

d. h.

$$\sqrt{F} \leq \frac{U}{4}. \tag{3}$$

Im Spezialfall des Quadrats gilt $\ell = b$ und

$$\sqrt{F_{Quadrat}} = \frac{U_{Quadrat}}{4}. \tag{4}$$

Betrachtet man Rechtecke mit Flächeninhalt $F = F_{Quadrat}$, so implizieren (3) und (4) die Ungleichung $\frac{U_{Quadrat}}{4} \leq \frac{U}{4}$. Somit hat also das Quadrat den kleinsten Umfang unter allen Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt.