V.5

<u>**Beispiel**</u>:

Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden DGL:

$$x\cdot y'' - (x+1)\cdot y' - 2\cdot(x-1)\cdot y = 0 \text{, wenn}$$

$y_1 = e^{2x}$ eine Lösung der DGL ist.

Subst: $\boxed{y = z(x)\cdot y_1} = z\cdot e^{2x}\,\big)'$

$$y' = z'\cdot e^{2x} + z\cdot 2e^{2x}\,\big)'$$

$$y'' = z''\cdot e^{2x} + z'\cdot 2e^{2x} + z'\cdot 2e^{2x} + 4ze^{2x}$$

$$= z''\cdot e^{2x} + 4\cdot z'\cdot e^{2x} + 4ze^{2x}.$$

Einsetzen:

$$x\cdot\left(z''\cdot e^{2x}+4\cdot z'\cdot e^{2x}+4\cdot z\cdot e^{2x}\right)-$$

$$-(x+1)\cdot\left(z'\cdot e^{2x}+z\cdot 2e^{2x}\right)-2(x-1)\cdot z\cdot e^{2x}=0 \qquad \Big| : e^{2x}\neq 0$$

$$x\cdot z''+4\cdot x\cdot z'+\cancel{4\cdot x\cdot z}-z'\cdot x-z'-\cancel{2z\cdot x}-\cancel{2z}-$$

$$-\cancel{2x}z+\cancel{2z}=0$$

$$z''\cdot x+z'\cdot(3x-1)=0.$$

Subst: $\boxed{z'=t}\ \Big|'\Rightarrow z''=t'$ $\Big\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow t'\cdot x+t\cdot(3x-1)=0. \rightarrow$$ DGL mit getrennten Var.

$$t'=\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx}\cdot x + t\cdot(3x-1) = 0 \iff$$

$$\iff \frac{dt}{dx}\cdot x = -t\cdot(3x-1) \quad \Big| \cdot dx \quad : t \neq 0 \quad : x \neq 0$$

$$\frac{dt}{t} = -\frac{3x-1}{x}\,dx \quad \Big| \int$$

$$\ln|t| = -\int\left(3-\frac{1}{x}\right)dx = -3x + \ln|x| + c_1$$

$$t = e^{-3x+\ln|x|+c_1} = e^{-3x}\cdot e^{\ln|x|}(\pm e^{c_1})$$

$$\boxed{t = c_2\cdot e^{-3x}\cdot x \,,\quad c_2 \in \mathbb{R}.}$$

$$z' = t \Rightarrow z = \int x \cdot e^{-3x} \cdot c_2 \, dx =$$

$$= \int x \cdot \left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)' c_2 \, dx = \frac{c_2}{-3}\left[x \cdot e^{-3x} - \int e^{-3x} dx\right]$$

$$= -\frac{c_2}{3} \cdot x e^{-3x} + \frac{c_2}{3} \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} + C_3 =$$

$$= -\frac{c_2}{3} \cdot x \cdot e^{-3x} - \frac{c_2}{9} \cdot e^{-3x} + C_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= z \cdot y_1 = z \cdot e^{2x} = \\ &= \left(-\frac{c_2}{3} \cdot x \cdot e^{-3x} - \frac{c_2}{9} \cdot e^{-3x} + C_3\right) e^{2x}, \quad C_2, C_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

Lineare inhomogene DGL 2. Ordnung

Die allgemeine Form:

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = f(x), \quad a_1, a_2, f \in C[a,b]$$

$$S_0 = \{ y \in C^2[a,b] : L(y) = 0 \}$$

$$S_P = \{ y \in C^2[a,b] : L(y) = f(x) \}.$$

Satz: Für die lineare, inhomogene DGL gilt:

$$S = S_0 + \{ y_p \}.$$

$$y_p = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) \longrightarrow$$

y_p – ist eine partikuläre Lösung der inhom. DGL

→ mit dem Verfahren „Variation der Konstanten" bestimmen.

$$y_p'(x) = \left(c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)\right)' =$$

$$= \underline{c_1'(x) \cdot y_1(x)} + c_1(x) \cdot y_1'(x) + \underline{c_2'(x) \cdot y_2(x)} + c_2(x) \cdot y_2'(x)$$

$$\boxed{c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0}$$

$$y_p'(x) = c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x) \;)'$$

$$y_p''(x) = c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_1(x)\cdot y_1''(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) +$$
$$+ c_2(x)\cdot y_2''(x)$$

Einsetzen in die DGL:

$$y_p'' + a_1(x)\cdot y_p' + a_2(x)\cdot y_p = f(x)$$

$$\Rightarrow c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_1(x)\cdot y_1''(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) +$$
$$+ c_2(x)\cdot y_2''(x) + a_1(x)\cdot\left[c_1(x)\cdot y_1'(x) + c_2(x)\cdot y_2'(x)\right]$$
$$+ a_2(x)\cdot\left[c_1(x)\cdot y_1(x) + c_2\cdot y_2(x)\right] = f(x).$$

$$\underbrace{c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x)}_{=0} +$$
$$c_1(x)\cdot\left[\overbrace{y_1''(x) + a_1(x)\cdot y_1'(x) + a_2\cdot y_1(x)}\right] +$$

$$c_2(x)\cdot\Big[\underbrace{y_2''(x)+a_1(x)\cdot y_2'(x)+a_2\cdot y_2(x)}_{=0}\Big]=f(x)$$

$$\boxed{c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x)}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot y_1(x)+c_2'(x)\cdot y_2(x)=0 \\ c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x). \end{cases}$$

Die Unbekannten sind: $c_1'(x)$ und $c_2'(x)$.

$$W(x,y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2(x) \end{vmatrix}\neq 0$$

Durch Anwendung der Cram'schen Regel erhalten wir:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)\cdot f(x)}{W(x)}$$

$$C_2'(x) = \frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(x)}.$$

Durch Integration erhält man $C_1(x)$ und $C_2(x)$, und weiter die partikuläre Lösung y_P.

<u>Beispiel:</u> Sei die DGL:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

und $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ ein L.F.1. der homogenen DGL bilden. Bestimme die allg. Lösung.

1. Schritt:

$$y_0 = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 =$$
$$= c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Schritt.

$$y_p = c_1(x) \cdot e^x + c_2(x) \cdot e^{2x} \quad)'$$

$$y_p' = \underline{c_1'(x) \cdot e^x} + c_1(x) \cdot e^x + \underline{c_2'(x) \cdot e^{2x}} + 2c_2(x) e^{2x}$$

<u>Bed</u>: $\boxed{c_1'(x) \cdot e^x + c_2'(x) \cdot e^{2x} = 0}$

$$y_p' = c_1(x) e^x + 2 \cdot c_2(x) \cdot e^{2x} \quad)'$$

$$y_p'' = c_1'(x) e^x + c_1(x) e^x + 2 c_2'(x) e^{2x} + 4 c_2(x) e^{2x}$$

Einsetzen in die DGL:

$$c_1'(x)\cdot e^x + \cancel{c_1(x)}e^x + 2c_2'(x)\cdot e^{2x} + 4\cancel{c_2(x)}e^{2x}$$

$$-3\cdot\left[\cancel{c_1(x)}e^x + 2\cancel{c_2}e^{2x}\right] + 2\cdot\left[\cancel{c_1(x)}e^x + \cancel{c_2(x)}e^{2x}\right] = e^x$$

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} = e^x \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} = 0. \end{cases} \quad -$$

$$c_2'(x)e^{2x} = e^x \Rightarrow \boxed{c_2'(x) = e^{-x}}$$

$$\Rightarrow c_2(x) = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}.$$

Aus: $c_1'(x)e^x + c_2'(x)\cdot e^{2x} = 0 \iff$

$$\iff c_1'(x)e^x = -c_2'(x)\cdot e^{2x} = -e^{-x}\cdot e^{2x} = -e^x$$

$$c_1'(x) = -\frac{e^x}{e^x} = -1 \;\longrightarrow\; c_1(x) = \int -1\,dx = -x$$

$$c_1(x) = -x\,; \qquad c_2(x) = -e^{-x}$$

$$y_p = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x} =$$

$$= -xe^x - e^{-x}\cdot e^{2x} = -xe^x - e^x =$$

$$= e^x\cdot(-x-1)$$

3. Schritt: $\quad y = y_0 + y_p =$

$$= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x(-x-1),$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Sei die DGL:

$$x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + 2y = x^3 \cdot \cos x$$

$y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ ein L.f.s. bilden.

Bestimme die allg. Lösung.

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 - x \cdot \cos x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

Hg

Lineare DGL mit konstanten Koeff.

Die allgemeine Form:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = f(x) \quad , \; a, b \in \mathbb{R}.$$
$$f \in C[a, b].$$

Homogene lineare DGL.

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0 .$$

Man wählt den Ansatz: $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$ $\in \mathbb{C}$

$$y' = r \cdot e^{rx} \; ; \; y'' = r^2 \cdot e^{rx}$$

Einsetzen:

$$r^2 \cdot e^{rx} + a \cdot r \cdot e^{rx} + b \cdot e^{rx} = 0 \quad \Big| : e^{rx} \neq 0 .$$

$$\boxed{r^2 + a \cdot r + b = 0}$$

$\Rightarrow$ die charakteristische Gleichung.

I. $\Delta > 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in \mathbb{R} \quad , r_1 \neq r_2 .$

$$y_1(x) = e^{r_1 \cdot x} \quad ; \quad y_2(x) = e^{r_2 \cdot x}$$

$$y(x) = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

II. $\Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 := r \in \mathbb{R}$

$$y_1(x) = e^{rx} \qquad y_2(x) = x \cdot e^{rx}$$

$$y(x) = c_1 \cdot e^{rx} + c_2 \cdot x \cdot e^{rx} , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

III. $\Delta < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$y = e^{rx} = e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\pm i\beta x} =$$

$$= e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x \pm i \sin\beta x).$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$ die Euler'sche Formel.

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x \qquad y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$$

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Beispiel:

(1) $y'' - 5y' + 6y = 0$

$r^2 - 5r + 6 = 0.$

$r_1 = 2; \quad r_2 = 3 \qquad \Delta > 0.$

$r_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad r_1 \neq r_2$

$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{3x}$

$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(2). $y'' - 2y' + y = 0.$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0.$

$r_{1,2} = 1; \quad r_1 = r_2 \in \mathbb{R}.$

$y_1(x) = e^{1\cdot x}$ $\qquad$ $y_2(x) = \underline{x} \cdot e^{1\cdot x}$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

3 $\quad y'' + 4y = 0.$

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$

$\alpha = 0 \qquad \beta = 2.$

$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$
$= e^{0\cdot x} \cdot \cos 2x$
$= \cos 2x$

$y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$
$= e^{0\cdot x} \cdot \sin 2x$
$= \sin 2x$

$y(x) = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$