V 6.

Inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = f(x) \,, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$
$$f \in C[a,b] \,.$$

$$y = y_0 + y_p$$

Für y_p → Variation der Konstanten.
→ Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Methode der unbestim. Koeff.

1. Wenn $f(x) = P_m(x)$ Polynom von Grad m.

Bsp: $f(x) = x^2+1$. $P_2(x)$

$f(x) = 2$ $\quad P_0(x)$

a) Wenn „0" keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist:

$$y_p = Q_m(x)$$

z.B: $y_p = ax^2+bx+c$

$y_p = a$

$f(x) = 2x+1 \rightarrow y_p = ax+b$.

b) Wenn „0" eine Lösung der ch. Gleichung ist:

$$y_p = Q_m(x) \cdot x.$$

2. Wenn $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x)$

$f(x) = e^{2x} \cdot x$ (*)

$f(x) = e^{-2x}$ (**)

a) Wenn „α" <u>keine</u> Lösung der ch. Gleich. ist:

$$y_p = e^{\alpha x} \cdot Q_m(x)$$

(*) $y_p = e^{2x} \cdot (ax + b)$

(**) $y_p = e^{-2x} \cdot a$

b) Wenn „α" Lösung der ch. Gleichung ist:

$$y_p = e^{\alpha \cdot x} \cdot Q_m(x) \cdot x^{\mu}$$, μ – die Vielfachheit.

$$y_p = e^{\alpha x} \cdot Q_m(x) \cdot x \quad (\alpha)$$

oder

$$y_p = e^{\alpha x} \cdot Q_m(x) \cdot x^2 \quad (\alpha - \text{doppel Wurzel}).$$

3. Wenn $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x) \cdot \cos\beta x$

oder

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x) \cdot \sin\beta x$$

a) Wenn „$\alpha + i\beta$" **keine** Lösung der ch. Gl. ist:

$$y_p = e^{\alpha x} \cdot Q_m(x) \cdot \cos\beta x + e^{\alpha x} \cdot R_m(x) \cdot \sin\beta x$$

b) Wenn „$\alpha + i\beta$" Lösung der ch. Gl. ist:

$$y_p = x \cdot \left(e^{\alpha x} \cdot Q_m(x) \cdot \cos\beta x + e^{\alpha x} \cdot R_m(x) \cdot \sin\beta x \right).$$

Bsp.

(1) $y'' - 4y' + 4y = \boxed{x^2 + 1.}$

1. Schritt:

$y'' - 4y' + 4y = 0.$

$r^2 - 4r + 4 = 0 \iff (r-2)^2 = 0$

$\Rightarrow r_{1,2} = \underline{\underline{2}}$ $<$ $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = x \cdot e^{2x}$

$y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 x \cdot e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

2. Schritt.

$$f(x) = x^2 + 1$$

„0" $\rightarrow$ keine Lösung der ch. Gl. ist.

$$y_p = ax^2 + bx + c.$$

$$y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a$$

Einsetzen in die DGL:

$$2a - 4\cdot(2ax+b) + 4\cdot(ax^2+bx+c) = x^2+1$$

$$2a - \underbrace{8ax} - 4b + \underline{\underline{4a}}x^2 + \underbrace{4bx} + 4c = \underline{x^2} + \underline{1}.$$

$$4a = 1$$

$$\begin{cases} -8a+4b=0 \\ 2a-4b+4c=1 \\ 4a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{5}{8} \\ a=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y_p=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}.$$

<u>3. Schritt:</u>

$$y=y_0+y_p=C_1\cdot e^{2x}+C_1\cdot x\cdot e^{2x}+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}.$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

(2) $y''+y'+y=(6x+9)e^{x}.$

1. Schritt:

$$y'' + y' + y = 0.$$

$$r^2 + r + 1 = 0.$$

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \quad \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

$$y_0 = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x,$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Schritt.

$f(x) = (6x+9)e^{x}$ $\qquad$ $\alpha = 1$

$P_m(x) = 6x+9.$

„$\alpha = 1$" keine Lösung der ch. Gl. ist.

$y_p = (ax+b)\cdot e^{x}$

$y_p' = ae^{x} + (ax+b)\cdot e^{x}$

$y_p'' = ae^{x} + ae^{x} + (ax+b)e^{x} = 2ae^{x} + (ax+b)e^{x}$

Einsetzen:

$2ae^{x} + (ax+b)e^{x} + ae^{x} + (ax+b)e^{x} + (ax+b)e^{x}$

$= (6x+9)\cdot e^{x} \mid : e^{x} \neq 0.$

$$\begin{cases} 3a = 6 \\ 3a + 3b = 9 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= 2. \\ b &= \underline{1} \end{aligned}$$

$$y_p = (2x+1)\,e^{x}.$$

3. Schritt.

$$y = y_h + y_p =$$

$$= c_1\, e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2\, e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + (2x+1)e^{x}.$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

③. $y'' - 4y' + 5y = 16 \cdot \sin x$

1. Schritt.

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

$$r^2 - 4r + 5 = 0. \qquad r_{1,2} = 2 \pm i$$

$$y_0 = c_1 \cdot e^{2x} \cdot \cos x + c_2 e^{2x} \cdot \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Schritt.

$$f(x) = 16 \cdot \sin x. \qquad P_m(x) = 16$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 1.$$

„$\alpha + i\beta$" $= 0 + i = i$ keine Lösung der ch. Gl.

$$y_p = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x .$$

$$y_p' = -a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$$

$$y_p'' = -a \cdot \cos x - b \cdot \sin x$$

$$-a \cos x - \underline{b} \sin x - \underline{4 \cdot (-a} \sin x + b \cdot \cos x) +$$
$$+ 5 \cdot (a \cdot \cos x \underline{+ b \cdot} \sin x) = 16 \cdot \sin x .$$

$$\begin{cases} 4a + 4b = 16 . \\ 4a - 4b = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 2 . \end{aligned}$$

$$y_p = 2 \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x .$$

3. Schritt

$$y = y_0 + y_p =$$

$$= c_1 e^{2x} \cdot \cos x + c_2 e^{2x} \cdot \sin x + 2\cos x + 2\sin x .$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

4. $$y'' - 4y' + 5y = 5e^{3x} + 16\sin x .$$

$$= f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1(x) \downarrow y_{p1} \qquad f_2(x) \downarrow y_{p2} .$$

$y_0 = 5$. ; $y_{p2} = 3$.

$$f(x) = 5e^{3x}$$

$\alpha = 3$.

$P_M(x) = 5$

$$y_{p1} = a e^{3x}$$

$$y'_{p1} = 3a e^{3x}$$

$$y''_{p1} = 9a e^{3x}$$

$$9ae^{3x} - 12ae^{3x} + 5ae^{3x} = 5e^{3x} \quad \Big| : e^{3x} \neq 0.$$

$$2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}.$$

$$y_{p1} = \frac{5}{2} e^{3x}.$$

$y = y_0 + y_{p1} + y_{p2}$., $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

DGL Systeme 1. Ordnung

Die allgemeine Form eines DGL-Systems 1. Ordnung mit n-Unbekannten ist:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

bzw. vektoriell:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{, wobei}$$

$$y = (y_1, \dots, y_n) \quad , \quad f = (f_1, \dots, f_n)$$

$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad D_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Lineare homogene DGL Systeme

$$(1) \begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x) \cdot y_1(x) + a_{12}(x) \cdot y_2(x) \\ y_2'(x) = a_{21}(x) \cdot y_1(x) + a_{22}(x) \cdot y_2(x) \end{cases}$$

$$a_{ij} \in C[a,b], \quad i,j = \overline{1,2}.$$

Das System kann auch mittels des Differential operators:

$$L : C^1([a,b], \mathbb{R}^2) \to C([a,b], \mathbb{R}^2)$$

$$L(Y) = Y' - A \cdot Y.$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{L(Y) = 0}$$

$$S_0 = \{ Y \in C^1([a,b], \mathbb{R}^2) : L(Y) = 0 \}.$$

$\hookrightarrow$ die Lösungsmenge des hom. linearen DGL Systems.

<u>Satz</u>: Der Differentialoperator L (von oben) ist eine lineare Abbildung.

Satz: Die Lösungsmenge des hom. DGL-Systems, S_0, bildet einen linearen Vektorraum der Dimension 2.

Wir brauchen eine Basis des Lösungsraumes i. e. 2 linear unabh. Lösungen.

Weil $\dim S_0 = 2 \Rightarrow \exists \{Y^1, Y^2\}$ eine Basis in S_0, so dass jedes Element $Y \in S_0$ als eine lineare Kombination von Y^1, Y^2 geschrieben werden kann.

Def: Eine Basis $\{Y^1, Y^2\}$ in S_0 heißt Fundamentalsystem.

Die Matrix: $U = (Y^1 \ Y^2)$ heißt Fundamentalmatrix.

Satz: sei $U = (Y^1 \ Y^2)$ eine Fundamentalmatrix des <u>hom.</u> Systems. Dann

$$S_0 = \{ U \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}.$$

<u>Def</u>: seien $Y^1, Y^2 \in C([a,b], \mathbb{R}^2)$.

Die folgende Determinante:

$$W(x, Y^1 \ Y^2) = \det(Y^1 \ Y^2) = \begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 \\ y_2^1 & y_2^2 \end{vmatrix}$$

heißt Wronskideterminante.

Satz: $Y^1, Y^2 \in C([a,b], \mathbb{R}^2)$ Lösungen des homogenen DGL Systems ein Fundamentalsystem bilden $\Longleftrightarrow$ $\exists\, x_0 \in [a,b]$ s.d.

$$W(x_0, Y^1, Y^2) \neq 0.$$

Bsp: Sei das DGL System:

$$\begin{cases} y_1'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot y_1(x) - \frac{1}{x} \cdot y_2(x) \\ y_2'(x) = \frac{x-2}{x-1} \cdot y_1(x) + \frac{1}{x-1} \cdot y_2(x) \end{cases}$$

Die Abbildungen: $Y^1(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$, $Y^2(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$ bilden ein Fundamentalsystem? 2.

$$W(x, Y^1, Y^2) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ x^2 & e^x \end{vmatrix} = xe^x - x^2 e^x$$

$$= e^x \cdot x \cdot (1 - x).$$

Für $x \neq 0$; $x \neq 1 \Rightarrow W(x, Y^1, Y^2) \neq 0$. (1).

Aus (1) + (2) $\Rightarrow$ Y^1, Y^2 ein Fundamentalsy.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Y = U \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & e^x \\ x^2 & e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y_1 = x c_1 + e^x \cdot c_2 \\ y_2 = x^2 \cdot c_1 + e^x \cdot c_2. \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$