Lösungsvorschläge

Übung 4

Logik für Informatiker

Aussagenlogik

Aufgabe 1

Sei $\Pi = \{P, Q\}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Formeln über Π erfüllbar, unerfüllbar, tautologisch sind:

a) $(P \wedge Q) \vee \neg Q$

b) $\neg(\neg\neg P \wedge \neg P)$

c) $\neg(P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$

d) $(P \to Q) \wedge P$

e) $\neg(P \wedge \neg\neg P)$

f) $((\neg P \to Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)) \to P$

Benutzen Sie dazu

a) Die Wahrheitstafelmethode.

b) Die Umformungsregeln, die in der Vorlesung vorgestellt wurden. Geben Sie dabei für jeden Schritt, den Namen der verwendeten Regel an.

Hinweis: Bei Verwendung der Wahrheitstafelmethode ist es nicht gestattet die beteiligten Formeln umzuformen.

Lösung:

a) $\neg(P \vee \neg P)$

Mit der Wahrheitstafel Methode erhalten wir:

P	Wert
true	false
false	false

Mit den Umformungsregeln:

$\neg(P \vee \neg P) \equiv \neg P \wedge \neg\neg P$ (De Morgan)

$\equiv \neg P \wedge P$ (doppelte Negation)

$\equiv P \wedge \neg P$ (Kommutativität)

$\equiv \perp$

b) $(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q)$

Mit der Wahrheitstafel Methode erhalten wir:

Q	P	value
False	False	True
False	True	False
True	False	False
True	True	True

Mit den Umformungsregeln:

$(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ (De Morgan)

$\equiv (P \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)$ (Distributivität)

$\equiv (P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg P)$ (Tertium non Datur)

c) $((\neg P \to Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)) \to P$

Mit der Wahrheitstafel Methode erhalten wir:

Q	P	value
False	False	True
False	True	True
True	False	True
True	True	True

Mit den Umformungsregeln:

$((\neg P \to Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)) \to P \equiv ((\neg\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg P \vee \neg Q)) \to P$ ($\to$ Elimination)

$(\equiv \neg((\neg\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg P \vee \neg Q)) \vee P$ ($\to$ Elimination)

$\equiv \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)) \vee P$ (doppelte Negation)

$\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee Q) \vee P$ (De Morgan und Assoziativität).

Aufgabe 2

Bringen Sie folgende Formeln in kanonischer KNF und DNF mit und ohne Wahrheitstafel:

a) $((P \to Q) \wedge (R \leftrightarrow Q)) \to (P \wedge Q)$

b) $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (R \to Q)$

Lösung:

Bilde die Wahrheitstabelle für beide Formeln und lese die kanonische KNF und DNF ab

P	Q	R	Wert
False	False	False	False
False	False	True	False
False	True	False	False
False	True	True	False
True	False	False	True
True	False	True	False
True	True	False	True
True	True	True	True

Wir erhalten somit folgende kanonische KNF: $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

Die DNF ist $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

Mit SageMath:

```
f = propcalc.formula("((~P|(Q->R))->(R|P))<->(R->(Q&P))")
```

```
f.convert_cnf_table()
```

Für die zweite Formel erhalten wir

P	Q	R	Wert
False	False	False	True
False	False	True	False
False	True	False	True
False	True	True	True
True	False	False	False
True	False	True	True
True	True	False	True
True	True	True	True

und somit ist die KNF $(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$.

Die DNF ist
$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die folgenden Aussagen. *Wenn es regnet, dann ist es kalt. Wenn es nicht regnet, dann ist es nicht kalt und die Sonne scheint. Wenn es nicht regnet oder die Sonne scheint, dann hat Anna Lust auf ein Eis. Wenn Anna Lust auf ein Eis hat, dann isst sie auch ein Eis.*

a) Formalisieren Sie diese Aussagen in Aussagenlogik. Verwenden Sie hierzu geeignete Propositionen.

b) Bringen Sie die resultierende Formeln aus in KNF und DNF. Verwenden Sie hierzu die logischen Äquivalenzen aus der Vorlesung. Wenden Sie dabei in jedem Schritt nur eine solche Äquivalenzumformung an.

c) *Für Tüftler:* Überlegen Sie sich wie man beweisen könnte, dass die Aussage *Es ist kalt oder Anna isst ein Eis* aus den obigen Aussagen logisch folgt.

Lösung:

a) $(R \to K) \land (\neg R \to (\neg K \land S)) \land ((\neg R \lor S) \to E) \land (E \to I)$

b) Mit SageMath erhalten wir

```
f = propcalc.formula("(R->K)&(~R->(~K&S))&((~R|S)->E)&(E->I)")
f.truthtable()
```

und die Wahrheitstabelle ist:

```
R      K      S      E      I      value
False  False  False  False  False  False
False  False  False  False  True   False
False  False  False  True   False  False
False  False  False  True   True   False
False  False  True   False  False  False
False  False  True   False  True   False
False  False  True   True   False  False
False  False  True   True   True   True
False  True   False  False  False  False
False  True   False  False  True   False
False  True   False  True   False  False
False  True   False  True   True   False
False  True   True   False  False  False
False  True   True   False  True   False
False  True   True   True   False  False
False  True   True   True   True   False
True   False  False  False  False  False
True   False  False  False  True   False
True   False  False  True   False  False
True   False  False  True   True   False
True   False  True   False  False  False
True   False  True   False  True   False
True   False  True   True   False  False
True   False  True   True   True   False
True   True   False  False  False  True
True   True   False  False  True   True
True   True   False  True   False  False
True   True   False  True   True   True
True   True   True   False  False  False
True   True   True   False  True   False
True   True   True   True   False  False
True   True   True   True   True   True
```

Die KNF wird automatisch auch mit
f.convert_cnf_table()
f
Mit Äquivalenzumformungen geht es natürlich auch!

c) Der Trick ist, dass man in solchen Fällen auf Widerspruchsbeweis zurückgreift. Dafür fügen wir die negierte Konklusion mit Konjunktion in der ursprünglichen Formel ein und überprüfen, dass die somit erhaltene Formel unerfüllbar ist.
Mit SageMath passiert dies schnell, allerdings ist dies für Lernzwecke nicht sehr hilfreich:
f = propcalc.formula("(R->K)&(~R->(~K&S))&((~R|S)->E)&(E->I)&(~K&~I)")
f.is_contradiction()
True.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Formel

$$\neg(A \to B) \to (A \leftrightarrow \neg(B \wedge C)).$$

Forme diese Formel um, so dass sie ausschließlich mit $\vee, \wedge$ und $\neg$ beschreibbar ist. Unter Anwendung der Distributivgesetze, sowie der de Morganschen Formeln, bringe diese Formel in einer vereinfachten KNF und DNF. Bestimme anschließend die kanonische KNF und DNF mit Hilfe der Wertetabelle. Vergleiche die vereinfachte Form mit der kanonischen Form.

Lösung:

Wir wenden die in der Vorlesung angegebene Schritte an:

$\neg(A \to B) \to (A \leftrightarrow \neg(B \wedge C)) \equiv$

$\neg(A \to B) \to ((A \to \neg(B \wedge C)) \wedge (\neg(B \wedge C) \to A)) \equiv$ (Doppelpfeilelimination)

$\neg(\neg A \vee B) \to ((\neg A \vee \neg(B \wedge C)) \wedge (\neg\neg(B \wedge C) \vee A)) \equiv$ (Pfeilelimination)

$\neg\neg(\neg A \vee B) \vee ((\neg A \vee \neg(B \wedge C)) \wedge (\neg\neg(B \wedge C) \vee A)) \equiv$ (Pfeilelimination)

$(\neg A \vee B) \vee ((\neg A \vee \neg(B \wedge C)) \wedge ((B \wedge C) \vee A)) \equiv$ (doppelte Negation Elimination)

$(\neg A \vee B) \vee ((\neg A \vee \neg B \vee \neg C)) \wedge ((B \wedge C) \vee A)) \equiv$ (de Morgan)

$(\neg A \vee B) \vee ((\neg A \vee \neg B \vee \neg C)) \wedge ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \equiv$ (Distributivität)

$(\neg A \vee B \vee \neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee A \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee A \vee C) \equiv$(Distributivität)

$(B \vee \neg B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg A \vee B \vee C) \equiv$ (Kommutativität) $\top$

Die Formel ist allgemeingültig.

Aufgabe 5

Bringe folgende Formeln in kanonischer KNF und DNF mit und ohne Wahrheitstafel:

a) $(a \lor b) \land c$

b) $\neg((\neg a \land b) \lor (\neg c \lor (\neg b \lor a)))$

c) $\neg a \land (b \lor (c \land \neg d))$.

Lösung:

a) $(a \vee b) \wedge c$

DNF: $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$. Daraus folgt durch Erweiterung mit $\top \equiv x_i \vee \neg x_i$

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c).$$

KNF: durch Erweiterung mit $\perp \equiv x_i \wedge \neg x_i$

$$(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \wedge c).$$

b) $\neg((\neg a \wedge b) \vee (\neg c \vee (\neg b \vee a)))$

DNF:

$\neg((\neg a \wedge b) \vee (\neg c \vee (\neg b \vee a))) \equiv (a \vee \neg b) \wedge (c \vee (b \wedge \neg a)) \equiv (a \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg a) \vee (\neg b \wedge c) \vee (\neg b \wedge b \wedge \neg a)$
$\equiv (a \wedge c) \vee \perp \vee (\neg b \wedge c) \vee \perp \equiv (a \wedge c) \vee (\neg b \wedge c)$.

Daraus folgt durch Erweiterung mit $\perp \equiv a \vee \neg x_i$

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c).$$

KNF:

$$(a \vee \neg b) \wedge (c \vee (b \wedge \neg a)) \equiv (a \vee \neg b) \wedge (c \vee b) \wedge (c \vee \neg a).$$

Daraus folgt durch Erweiterung mit $\perp \equiv x_i \wedge \neg x_i$

$$(a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c).$$

c) $\neg a \wedge (b \vee (c \wedge \neg d)) \equiv (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge c \wedge \neg d)$.