V. 3

Lineare DGL 1. Ordnung

Satz: 1) Die allgemeine Lösung einer linearen DGL 1. Ordnung hat die Form:

$$y = y_0 + y_p$$

2) Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen (auf dem Intervall I). Dann hat die allgemeine Lösung die Gestalt:

$$y(x) = C \cdot e^{-F(x)} + e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} \, dx,$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ auf I ist.

Bemerkung: Under der Bedingungen von dem Vorherigen satz, für jedes $x_0 \in \underline{I}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$, existiert genau eine Lösung $y(x)$ der linearen DGL, die auf dem Interwall $\underline{I}$ definiert ist und die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt.

Beispiel:

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 3x, \quad x > 0. \quad \Big| \; y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \; ; \; g(x) = 3x$$

1. Schritt

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 0$$ (die homogene DGL / DGL mit getrennten Var)

$$\left.\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{x}\cdot y \\ y' &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}\cdot y \quad \Big|\, \begin{aligned} &\cdot dx \\ &: y \neq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}\cdot dx \quad \Big|\int \quad \Rightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int -\frac{1}{x}\cdot dx$$

$$\ln|y| = -\ln x + b$$

$$|y| = e^{-\ln x + b} = e^{-\ln x}\cdot e^{b}$$

$$y = \underbrace{\pm e^{b}}_{C} \cdot e^{-\ln x} \Rightarrow y = C\cdot e^{\ln x^{-1}}$$

$$\boxed{y_0 = C\cdot x^{-1},\ C\in\mathbb{R}} \rightarrow \text{die allgemeine Lösung der hom. DGL.}$$

2. Schritt (y_p - eine partikuläre Lösung der inhom. DGL.

$\rightarrow$ Variation der Konstante (Methode).

$$y_p = c(x) \cdot x^{-1}$$

$\hookrightarrow$ wir wissen dass y_p Lösung ist.

$y_p \rightarrow$ in die DGL einsetzen.

$$y_p' + \frac{1}{x} \cdot y_p = 3x \quad (*) .$$

$$\left(c(x) \cdot x^{-1}\right)' + \frac{1}{x} \cdot c(x) \cdot x^{-1} = 3x$$

$$c'(x) \cdot x^{-1} + \cancel{c(x) \cdot \left(-x^{-2}\right)} + \cancel{c(x) \cdot x^{-2}} = 3x$$

$$c'(x) \cdot x^{-1} = 3x \Rightarrow c'(x) = 3x^2 \; \Big| \int \Rightarrow$$

$$c(x) = \int 3x^2 \, dx = \underline{\underline{x^3}}$$

$$y_p = c(x) \cdot x^{-1} = x^3 \cdot x^{-1} = x^2.$$

3. Schritt.

$$\boxed{y = y_0 + y_p = c \cdot x^{-1} + x^2, \quad c \in \mathbb{R}.}$$

die allg. Lösung der DGL.

II. Methode (um die allg. Lösung der linear. DGL zu bestimmen)

<u>Methode des integrierenden Faktors.</u>

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \quad \Big| \; \mu(x)$$

der integrierende Faktor.

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$$

$$y' \cdot e^{\int f(x)\,dx} + f(x) \cdot y \cdot e^{\int f(x)\,dx} = g(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx}$$

$$\left(y \cdot e^{\int f(x)\,dx} \right)' = g(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx} \quad \Big| \int$$

$$y \cdot e^{\int f(x)\,dx} = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx} + C.$$

$$y = e^{-\int f(x)\,dx} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx} \, dx + c \right),$$

$c \in \mathbb{R}$.

<u>Beispiel</u>.

$$\begin{cases} y' + x \cdot y = 3x \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$f(x) = x$

$g(x) = 3x$

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int x\,dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y' + x \cdot y = 3x \quad \Big| \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y' \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + x \cdot y \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = 3x e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\left(y \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \right)' = 3x e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Big| \int$$

$$y \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = \underbrace{\int 3x e^{\frac{x^2}{2}} dx}_{I} + C.$$

$$I = \int 3x e^{\frac{x^2}{2}} dx = 3 \cdot \int \left(e^{\frac{x^2}{2}} \right)' dx =$$

$$= 3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = 3e^{\frac{x^2}{2}} + C \quad \Big| \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\boxed{y = 3 + C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}, \; C \in \mathbb{R}$$

die allg. Lösung.

$y(0) = 5 \Rightarrow 5 = 3 + C \Rightarrow C = 2.$

$$\boxed{y = 3 + 2e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

– die eindeutige Lösung des AWPs.

4. Bernoulli'sche DGL.

Die allgemeine Form:

$$\boxed{y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0;\ \alpha \neq 1}$$

$\alpha = 0 \Rightarrow y' + P(x)\cdot y = Q(x) \rightarrow$ lineare DGL 1. Ord.

$\alpha = 1 \Rightarrow y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y' + y\cdot[P(x) - Q(x)] = 0 \rightarrow$ lineare hom. DGL 1. Ord.

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^{\alpha} \quad \Big| : y^{\alpha} \neq 0$$

$$y'\cdot y^{-\alpha} + P(x)\cdot \boxed{y^{1-\alpha}} = Q(x)$$

Substitution: $z = y^{1-\alpha} \quad \Big|' \Rightarrow$

$$\Rightarrow z' = \left(y^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha) \cdot y^{1-\alpha-1} \cdot y'$$

$$z' = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot y' \Rightarrow \boxed{y' \cdot y^{-\alpha} = z' \cdot \frac{1}{1-\alpha}}$$

Einsetzen:

$$z' \cdot \frac{1}{1-\alpha} + P(x) \cdot z = Q(x) \quad \Big| \cdot (1-\alpha)$$

$$\boxed{z' + P(x) \cdot z \cdot (1-\alpha) = Q(x) \cdot (1-\alpha)}$$

$\hookrightarrow$ lineare DGL 1. Ordnung (z)

$$z(x) = \varphi(x, c), \quad c \in \mathbb{R}.$$
$$\left. z = y^{1-\alpha} \Rightarrow y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left[\varphi(x, c)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

<u>Beispiel</u>

$$\begin{cases} y' = x \cdot y - 3x y^2 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \qquad \begin{aligned} P(x) &= -x \\ Q(x) &= -3x. \end{aligned}$$

$$y' - x \cdot y = -3x y^2 \quad \Big| : y^2 \neq 0. \rightarrow \alpha = 2.$$

$$y' \cdot y^{-2} - x \cdot y \cdot y^{-2} = -3x$$

$$y' \cdot y^{-2} - x \cdot y^{-1} = -3x$$

Subs

$$z = y^{-1} \,\Big|' \Rightarrow z' = (-1) \cdot y^{-2} \cdot \underline{\underline{y'}}\ !!! \Rightarrow$$

$$y^{-2} \cdot y' = -z'$$

$$-z' - x \cdot z = -3x \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$z' + x \cdot z = 3x. \rightarrow \text{lineare DGL 1. Ord.}$$

1. Schritt.

$$\left.\begin{array}{l} z' + x \cdot z = 0 \\ z' = \dfrac{dz}{dx} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -x \cdot z$$

$$\frac{dz}{dx} = -x \cdot z \quad \Big| \cdot dx \quad : z \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -x\,dx \quad \Big| \int$$

$$\ln|z| = -\frac{x^2}{2} + \mathcal{C}$$

$$z_0 = \pm e^{-\frac{x^2}{2} + \mathcal{C}} = \pm e^{\mathcal{C}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$z_0 = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Schritt.

$$z_p = C(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \rightarrow \text{Lösung der inh. DGL.}$$

$$\rightarrow \quad z_p' + x \cdot z_p = 3x$$

$$\left(C(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' + \underbrace{x \cdot \left(C(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = 3x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - \cancel{x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot c(x)} + \cancel{x\cdot c(x) e^{-\frac{x^2}{2}}} = 3x$$

$$c'(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 3x \implies c'(x) = 3x\cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Big| \int$$

$$c(x) = \int \underbrace{3x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}} dx = 3\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y_p = 3e^{\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 3.$$

3. Schritt

$$y = y_0 + y_p = c\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + 3, \; c\in\mathbb{R}.$$

$$z = y^{-1} \implies y = z^{-1} = \left(ce^{-\frac{x^2}{2}} + 3\right)^{-1}, c\in\mathbb{R}.$$

die allg. Lösung

$$y(0) = \frac{1}{5} \implies \frac{1}{5} = (c+3)^{-1} \implies \boxed{c=2}$$

$$\boxed{y = \left(2e^{-\frac{x^2}{2}} + 3\right)^{-1}}$$ die Lösung des AWPs.

Hg: $y' + xy = e^{x^2} \cdot y^3$.

5. Exakte DGL

Allgemeine Form:

$$(1) \quad \boxed{P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow$

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Big| \cdot dx$$

$$\boxed{P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy = 0} \quad (2).$$

Wir suchen eine Funktion $u = u(x,y)$.

Wir sagen dass die DGL (2) exakt ist, wenn $\exists$ $u = u(x,y)$ s.d.

$$du = P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy.$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy$$ (aus der Analysis)

$\Rightarrow$ Aus (2) $du = 0 \Rightarrow \boxed{u(x,y) = C}$ $C \in \mathbb{R}$.

die allg. Lösung.

Die notwendige Bedingung für die Exaktheit:

$$\boxed{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}} \quad \forall (x,y).$$

Die Fkt. $u(x,y)$ bestimmt man aus dem folgenden System:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y) & \longrightarrow \int dx. \\[2ex] \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + c(y)} \Big|_y'$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \left(\int P(x,y)\,dx + c(y)\right)_y'$$

$$\left(\int P(x,y)\,dx + c(y)\right)_y' = Q(x,y). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(y) = \ldots$$

$$\boxed{u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(s,y)\,ds+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\,dt.}$$

Die allgemeine Lösung: $\boxed{u(x,y)=C,\ C\in\mathbb{R}}$

<u>Beispiel</u>

$$\left.\begin{array}{l} x^3+xy^2+(x^2y+y^3)\cdot y'=0 \\ y'=\frac{dy}{dx} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x^3+xy^2)}_{P(x,y)}\cdot dx+\underbrace{(x^2y+y^3)}_{Q(x,y)}\cdot dy=0$$

$P(x,y) = x^3 + xy^2$

$Q(x,y) = x^2y + y^3$

Die Bedingung für die Exaktheit:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 2xy \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2xy \end{aligned}\right) =$$

=> die DGL ist exakt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = x^3 + xy^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2y + y^3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^3 + xy^2 \quad \Big| \int dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int (x^3 + xy^2)\, dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \cdot y^2 + C(y)$$

einsetzen in die 2. Gleichung des Systems.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \cdot y^2 + C(y)\right]'_y =$$

$$= x^2 \cdot y + C'(y)$$

$$\cancel{x^2 \cdot y} + C'(y) = \cancel{x^2 \cdot y} + y^3 \Rightarrow C'(y) = y^3 \,\Big|\int dy$$

$$\Rightarrow C(y) = \frac{y^4}{4}$$

$$\left.u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right\} \Rightarrow$$

$$u(x,y) = C$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = c, \quad c \in \mathbb{R}.}$$

Hg

$$\sin y + y \cdot \sin x + \frac{1}{x} + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right) \cdot y' = 0.$$