Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2024-2025

2. Vorlesung

Definition

Sei $M \neq \emptyset$. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ nennt man eine Folge in M. Die Funktionswerte der Folge nennt man Folgenglieder (Glieder der Folge) und verwendet die Bezeichnung $x_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, für sie. Die Folge selbst wird mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(x_n)_{n\geq 0}$ bezeichnet. Ist $M = \mathbb{R}$, so spricht man von einer reellen Zahlenfolge. Wir werden uns nur mit reellen Zahlenfolgen beschäftigen und werden sie einfach Zahlenfolgen nennen.

Bemerkungen

1) Die Nummerierung der Folgenglieder kann auch mit einer anderen natürlichen Zahl begonnen werden, z.B.:

- ▷ mit 1: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ oder $(x_n)_{n\geq 1}$;
- ▷ mit einer festen Zahl $k \in \mathbb{N}$: $(x_n)_{n\geq k}$.

2) Folgen kann man

▷ explizit mittels einer Formel für alle Folgenglieder (z.B.: $x_n = 3^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$)
oder

▷ rekursiv (z.B. die Fibonaccifolge: $x_0 = x_1 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$)
einführen.

Definition

Die Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- wachsend, falls $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ist;
- streng wachsend, falls $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ist;
- fallend, falls $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ist;
- streng fallend, falls $x_n > x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ist;
- monoton, falls sie wachsend oder fallend ist;
- streng monoton, falls sie streng wachsend oder streng fallend ist.

$\hookrightarrow$ Diese Begriffe beschreiben die Monotonie der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und X die Menge gebildet aus allen Folgengliedern (d.h. $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$). Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- nach unten beschränkt
- nach oben beschränkt
- beschränkt
- nach unten unbeschränkt
- nach oben unbeschränkt
- unbeschränkt,

wenn X die betreffende Eigenschaft hat.

$\hookrightarrow$ Diese Begriffe beschreiben die Beschränktheit der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkungen

1) Jede wachsende Folge ist nach unten beschränkt.

2) Jede fallende Folge ist nach oben beschränkt.

3) Die Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt $\Leftrightarrow \exists c > 0$, so dass $|x_n| \leq c,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Th2 (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, dann gelten:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(t \cdot a_n) = t \cdot \lim_{n\to\infty} a_n, \ \forall\ t \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \text{ falls } b_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.$$

Die Addition betreffend

- $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x + \infty = \infty + x = \infty,$
- $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,$
- $\infty + \infty = \infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$

Nicht definiert

$$\infty + (-\infty), \quad (-\infty) + \infty.$$

Die Multiplikation betreffend

- $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x \in (0, \infty) \\ -\infty, & \text{falls } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$
- $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } x \in (0, \infty) \\ \infty, & \text{falls } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$
- $\infty \cdot \infty = \infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty,$
- $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty.$

Nicht definiert

$$0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

Die Division betreffend

- $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0,$
- $\frac{1}{0+} = \infty, \quad \frac{1}{0-} = -\infty.$

Nicht definiert

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{-\infty}{-\infty}, \quad \frac{\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{\infty}.$$

Rechenregeln für Grenzwerte

Potenzen betreffend

- $x^{\infty} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x \in (1, \infty) \\ 0, & \text{falls } x \in [0, 1), \end{cases}$
- $x^{-\infty} = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (1, \infty) \\ \infty, & \text{falls } x \in (0, 1), \end{cases}$
- $(\infty)^{x} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x \in (0, \infty) \\ 0, & \text{falls } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$
- $\infty^{\infty} = \infty, \quad \infty^{-\infty} = 0.$

Nicht definiert

$$1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}, \quad 1^{-\infty}.$$

Th3

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0.$$

Insbesondere ist

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0.$$

Def.: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen (d.h. $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \dots$), dann nennt man $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bsp.: $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, x_2, x_4, \dots)$ ist die Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die den geraden Indizes, und $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_3, x_5, \dots)$ die Teilfolge, die den ungeraden Indizes entspricht.

Th4 (Teilfolgen und Grenzwerte)

Hat die Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $x \in \overline{\mathbb{R}}$, so hat auch jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert x.

Bem.: **Th4** kann verwendet werden, um zu begründen, dass bestimmte Folgen keinen Grenzwert haben. Z. B.: $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Grenzwert, weil die Teilfolgen $((-1)^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $((-1)^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ verschiedene Grenzwerte haben.

Ein Beispiel

Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt für den Grenzwert der Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = \infty, & \text{falls} \quad q > 1 \\ = 1, & \text{falls} \quad q = 1 \\ = 0, & \text{falls} \quad q \in (-1,1) \\ \nexists, & \text{falls} \quad q \leq -1. \end{cases}$$

Bew.: Zur Erinnerung

$$(1) \qquad x^\infty = \begin{cases} \infty, \text{ falls } x \in (1,\infty) \\ 0, \text{ falls } x \in [0,1). \end{cases}$$

1. Fall: $q > 1$. Aus (1) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

2. Fall: $q = 1$. $\Rightarrow q^n = 1, \forall\ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.

(1) $$x^{\infty} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x \in (1, \infty) \\ 0, & \text{falls } x \in [0, 1). \end{cases}$$

3. Fall: $q \in (-1, 1)$. $\Rightarrow |q| \in [0, 1)$. Aus (1) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$. Da $|q^n| = |q|^n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$. Aus **Th3** $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

4. Fall: $q = -1$. $\hookrightarrow$ wurde in der obigen Bemerkung behandelt.

5. Fall: $q < -1$. $\Rightarrow q^2 > 1$. Aus (1) $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} q^{2n} = \lim_{n\to\infty} (q^2)^n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} q^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} q \cdot q^{2n} = -\infty.$$

Aus **Th4** $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} q^n$. $\square$