Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 7. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 25)

a) Es gelten

$\langle u+v,v\rangle = \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = a + c^2$,

$\langle u, 2u-3v\rangle = \langle u,2u\rangle - \langle u,3v\rangle = 2\langle u,u\rangle - 3\langle u,v\rangle = 2b^2-3a$,

$$\begin{aligned} ||u-v|| &= \sqrt{\langle u-v,u-v\rangle} = \sqrt{\langle u-v,u\rangle - \langle u-v,v\rangle} = \sqrt{\langle u,u\rangle - \langle v,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle} \\ &= \sqrt{\langle u,u\rangle - 2\langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle} = \sqrt{b^2-2a+c^2}. \end{aligned}$$

b1) Es sind

$a = \langle(-1,2,3),(-2,1,-3)\rangle = (-1)(-2)+2\cdot 1+3\cdot(-3) = 2+2-9 = -5$,

$b = \sqrt{\langle(-1,2,3),(-1,2,3)\rangle} = \sqrt{(-1)^2+2^2+3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$,

$c = \sqrt{\langle(-2,1,-3),(-2,1,-3)\rangle} = \sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$.

b2) Es gelten

$$v \notin B(u,r) \Longleftrightarrow ||v-u|| \geq r.$$

Aus $v-u = (-2,1,-3)-(-1,2,3) = (-1,-1,-6)$ erhält man

$$||u-v|| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-6)^2} = \sqrt{38}.$$

Es folgt also, dass $r \in (0,\sqrt{38}]$ ist.

b3) Wegen

$$(1,-1,t) \in \overline{B}(u,5) \Longleftrightarrow ||(1,-1,t)-u|| \leq 5$$

und

$$||(1,-1,t)-u|| = ||(1,-1,t)-(-1,2,3)|| = ||(2,-3,t-3)|| = \sqrt{4+9+(t-3)^2}$$

folgt $||u-(1,-1,t)|| \leq 5 \Leftrightarrow \sqrt{13+(t-3)^2} \leq 5 \Leftrightarrow (t-3)^2 \leq 12 \Leftrightarrow t \in [3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3}]$.

(A 26)

a) Aus der Divergenz der Folge $((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ergibt sich die Divergenz der Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

b) Die Gleichheiten $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2^k}{k!} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1-4k^7}{k^7+12k} = -4$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sqrt{k}}{e^{3k}} = 0$ implizieren, dass $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ gegen $(0,-4,0)$ konvergiert.

c) Die Divergenz der Folge $(-k^3+k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ impliziert auch die Divergenz von $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

d) Es gelten

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{2k}}{\left(2+\frac{1}{k}\right)^{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}} = \frac{1}{e} \text{ und } \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = 0.$$

Man bezeichne mit $a_k := e^k + k$, für $k \in \mathbb{N}^*$. Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{k+1}+k+1}{e^k+k} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{k+1}(1+\frac{k+1}{e^{k+1}})}{e^k(1+\frac{k}{e^k})} = e,$$

weil $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ ist. Die Aussage 3° der Folgerung **F14** aus der 3. Vorlesung impliziert nun

$$\lim_{k\to\infty} (e^k+k)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = e.$$

Außerdem ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha^k}{k} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha \in [0,1] \\ \infty, & \text{falls } \alpha > 1. \end{cases}$$

Wir schließen also, dass, für $\alpha > 1$, die Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ divergent ist, und sie, für $\alpha \in [0,1]$, gegen $\left(\frac{1}{e}, 0, e, 0\right)$ konvergiert.

(A 27)

a) Es sei an die Formel für das 2. Taylorpolynon erinnert:

$$T_2(x,1) = f(1) + \frac{f'(0)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2.$$

Es gelten

$$f'(x) = \frac{5}{5x+2},\ f''(x) = -\frac{25}{(5x+2)^2},\ \forall x \in \left(-\frac{2}{5}, \infty\right).$$

Es folgt: $f(1) = \ln 7$, $f'(1) = \frac{5}{7}$ und $f''(1) = -\frac{25}{49}$. Somit ist als

$$T_2(x,1) = \ln 7 + \frac{5}{7}(x-1) - \frac{25}{98}(x-1)^2.$$

b) Es gilt

$$f'''(x) = \frac{250}{(5x+2)^3},\ \forall x \in \left(-\frac{2}{5}, \infty\right).$$

Nach der Taylorschen Formel gibt es eine reelle Zahl c, die sich echt zwischen x und 1 befindet, so dass

$$R_2(x,1) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-1)^3 = \frac{125}{3(5c+3)^3}(x-1)^3$$

ist.

(A 28)

Die Definition der euklidischen Norm sowie die Eigenschaften des Skalarproduktes berücksichtigend, erhält man

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x,y\rangle.$$

Also gelten die Äquivalenzen

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \iff \langle x,y\rangle = 0 \iff x \perp y.$$