Wiederholungsaufgaben:

W1. Man simuliere 1000 zufällige Punkte aus dem Quader

$$[-1,\,1] \times [-1,\,1] \times [-1,\,1] \subset \mathbb{R}^3.$$

Jede der Koordinaten (X, Y, Z) ist $Unif[-1, 1]$ verteilt. Sei D die ZG, welche Distanz dieser Punkte zum Ursprung (0,0,0) darstellt. Man schätze den Erwartungswert und die Varianz von D.

W2. a) Man generiere alle Permutationen von `mutig`. Wie viele solche Permutationen gibt es?
b) Man generiere zwei zufällige Permutationen von `mutig`.
c) Man generiere alle Variationen mit vier Buchstaben aus dem String `mutig`. Wie viele solche Variationen gibt es?
d) Man generiere alle Kombinationen mit zwei Buchstaben aus dem String `mutig`. Wie viele solche Kombinationen gibt es?

W3. In einer Urne sind 3 blaue, 3 rote und 4 weiße Kugeln. Ein Spieler zieht nacheinander *ohne Zurücklegen* 3 Kugeln. Der Spieler erhält 5 €, wenn alle drei gezogenen Kugeln dieselbe Farbe haben. Er erhält 2 €, wenn die drei Kugeln unterschiedliche Farben aufweisen. Bei allen anderen Fällen muss der Spieler 1 € bezahlen. Wie viel gewinnt oder verliert im Mittel der Spieler pro Spiel? Man vergleiche das theoretische Resultat mit den Ergebnissen von zufälligen Simulationen.

W4. Eine Urne enthält 10 Kugeln mit der Ziffer 0, 20 Kugeln mit der Ziffer 1, 20 Kugeln mit der Ziffer 2. Aus der Urne werden 3 Kugeln *ohne Zurücklegen* gezogen. X sei das Produkt der 3 erhaltenen Zahlen. Man schätze anhand Simulationen den Erwartungswert und die Varianz von X! Man erstelle anhand Simulationen das Histogramm der relativen Häufigkeiten für die Werte von X, auf demselben Bild zeichne man ein zweites Histogramm mit den theoretischen Wahrscheinlichkeiten der ZG X.

W5. Sei die Gleichung zweiten Grades $x^2 + Bx + C = 0$, wobei $B, C \sim Unif[-2, 2]$ unabhängige ZG sind. Man schätze:
a) die Wahrscheinlichkeit, dass beide Wurzeln der Gleichung reell sind;
b) die Wahrscheinlichkeit, dass beide Wurzeln der Gleichung positiv sind;
c) den *Erwartungswert* und die *Varianz* der Summe der beiden Wurzeln.

W6. In einer Urne sind 20 rote Kugeln, 15 blaue Kugeln, 5 grüne Kugeln und 10 schwarze Kugeln. Man simuliere $N(= 200, 1000, \ldots)$ *Ziehungen mit Zurücklegen* und zeige die relative Häufigkeit an mit welcher jede Farbe auftaucht (mit `print`). Man vergleiche die theoretischen Resultate mit den Ergebnissen aus den Simulationen. Man gebe die Ergebnisse der ersten 10 Ziehungen an!

W7. Beim Herstellungsprozess einer Ware ist bekannt, dass 80% fehlerfrei, 15% mit leichten (vernachlässigbaren) Fehlern und 5% mit großen Fehlern hergestellt werden. Sei die Zufallsgröße X die Anzahl der Waren mit großen Fehlern von insgesamt 80 Waren aus dem Herstellungsprozess.
a) Man simuliere 500 mögliche Werte der ZG X.
b) Wie groß ist die theoretische Wahrscheinlichkeit, dass von den nächsten hergestellten 80 Exemplaren dieser Ware a) höchstens 6; b) genau 10; c) mindestens 5
große Fehler besitzen?

W8. Eine Maschine produziert im Mittel 10mm lange Schrauben mit einer Standardabweichung von 1mm. Die Länge der Schrauben kann als *normalverteilt* angesehen werden. Anhand von (a) Simulationen (b) spezifischen Anweisungen berechne man die *geschätzte* bzw. *theoretische Wahrscheinlichkeit* dafür, dass
(c) eine Schraube kürzer ist als 9 mm;
(d) eine Schraube höchstens 10.1 mm und mindestens 8.9 mm lang ist.

W9. Ein sechsseitiger Würfel wird auf vier Seiten mit einer 1 und auf zwei Seiten mit einer 2 übermalt.

Er wird zweimal geworfen.
1) Die Zufallsvariable X gibt die Summe der erhaltenen Zahlen an. Man gebe alle möglichen (theoretischen) Werte von X an und die entsprechenden theoretischen Wahrscheinlichkeiten.
2) Anhand von Simulationen schätze man 2a) die zu *erwartende Summe* (d.h. $E(X)$) ; 2b) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe größer als 2 ist: $P(X > 2)$.

W10. Ein "Glücksrad" hat vier gleichgrosse Felder. Eines davon ist das Gewinnfeld. Anhand Simulationen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim viermaligen Drehen mindestens einmal ein Gewinn gedreht wird?
Welche ist die theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgrösse X: Anzahl Gewinne in 4 Drehungen des Glücksrads.

W11. Die stetige Zufallsgröße X sei die Durchlaufzeit eines Auftrages und sei gleichmäßig verteilt zwischen 10 und 20 Minuten, d.h. $X \sim Unif[10, 20]$.
a) Anhand von 2000 Simulationen schätze man folgende Wahrscheinlichkeiten a1) die Durchlaufzeit ist zwischen 14 und 18 Minuten $P(14 \leq X \leq 18)$; a2) die Durchlaufzeit beträgt höchstens 15 Minuten $P(X \leq 15)$; a3) $P(A \cup B)$, $P(A \cap \bar{B})$ wobei $A = \{X \leq 15\}$ und $B = \{X \geq 17\}$ zwei zufällige Ereignisse sind ($A \cup B$ entspricht der Vereinigung der beiden Ereignisse, $\bar{B}$ ist das Komplement von B).
Für die Wahrscheinlichkeiten in a1), a2) und a3) gebe man die entsprechenden theoretischen Wahrscheinlichkeiten an.
b) Man zeichne ein Histogramm mit 10 Klassen (Balken) für die absoluten Häufigkeiten von den 2000 simulierten Werten für X.

W12. Seien $n = 4, p = 0.5, X \sim Bino(n, p), Y = (X - 1)^2 + 1$. Man simuliere 1000 Werte für die ZG Y. Man erstelle das Histogramm der relativen Häufigkeiten für Y. Man schätze anhand der Simulationen $P(Y \leq 5)$ und $P(Y \geq 2)$. Man vergleiche die geschätzten Wahrscheinlichkeiten mit den theoretischen Wahrscheinlichkeiten.