Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 3. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 9)

a) Für $n \geq 1$ seien $x_n = 1 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}$ und $y_n = n^2$. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng wachsend und hat den Grenzwert ∞. Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{2n+1} = 0$$

schließen wir, anhand des Stolz-Cesàro Theorems, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$ ist.

b) Es sei $a_n = n^3 + 2n$, für $n \in \mathbb{N}^*$. Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 + 2(n+1)}{n^3 + 2n} = 1$$

ergibt sich, anhand der Aussage 3° der Folgerung **F14** aus der 3. Vorlesung, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ ist.

c) $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n - 2n^2}{n^4+1}\right)^{5n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{n-2n^2}{n^4+1}\right)^{\frac{n^4+1}{n-2n^2}}\right)^{\frac{5n^2(n-2n^2)}{n^4+1}} = e^{-10}.$$

d) Es sei $a_n = \frac{1}{n}$, für $n \in \mathbb{N}^*$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist, impliziert die Aussage 1° der Folgerung **F14** aus der 3. Vorlesung, dass auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = 0$$

ist.

e) Für $n \geq 1$ seien $x_n = n^n$ und $y_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng wachsend und hat den Grenzwert ∞. Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} - n^n}{(n+1)^{n+1}} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} = 1$$

schließen wir, anhand des Stolz-Cesàro Theorems, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$ ist.

f) Es sei $a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, für $n \in \mathbb{N}^*$. Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1$$

ergibt sich, anhand der Aussage 3° der Folgerung **F14** aus der 3. Vorlesung, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ ist.

g) Für $n \in \mathbb{N}^*$ seien $x_n = a_1 + 2^5 a_2 + 3^5 a_3 + \cdots + n^5 a_n$ und $y_n = n^6$. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng wachsend und hat den Grenzwert ∞. Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5 a_{n+1}}{(n+1)^6 - n^6} = \frac{a}{6}$$

schließen wir, anhand des Stolz-Cesàro Theorems, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{6}$ ist.

(A 10)

a) Wir beweisen mit Induktion, dass die Aussage

$$P(n) = \text{„}x_n > 0\text{“}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

I. $P(0) =$ „$x_0 > 0$“ ist wahr (anhand der Voraussetzung).

II. Wir nehmen an, dass $P(k)$, für $k \in \mathbb{N}$, wahr ist und zeigen, dass auch $P(k+1)$ wahr ist. Also wissen wir, dass $x_k > 0$ ist. Laut (1) ist dann

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 4}{2x_k} > 0,$$

also ist $P(k+1)$ wahr.

Aus I und II folgt nun a).

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Formel (1) und a) anwendend, erhält man

$$x_{n+1} - 2 = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n} - 2 = \frac{x_n^2 + 4 - 4x_n}{2x_n} = \frac{(x_n - 2)^2}{2x_n} \geq 0,$$

also ist $x_{n+1} \geq 2$.

c) Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Aus (1), a) und b) folgt

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + 4}{2x_n} = \frac{x_n^2 - 4}{2x_n} \geq 0.$$

Also ist $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, d.h. die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist fallend.

d) Die Tatsache, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fallend und $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, ist, hat zur Folge, dass diese Folge beschränkt und damit auch konvergent ist. Es sei $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Da $x_n \geq 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, ist, wegen **Th5** aus der 3. Vorlesung, auch $x \geq 2$. Durch Grenzwertübergang in (1) erhält man $x = \frac{x^2+4}{2x}$, also $x^2 = 4$. Da $x \geq 2$ ist, schließt man, dass $x = 2$ ist.

(A 11)

Ist $a = 0$, so wähle man beispielsweise $a_n = n$ und $b_n = n^2$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Ist $a \in (0, \infty)$, so wähle man beispielsweise $a_n = an$ und $b_n = n$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = a$.

Ist $a = \infty$, so wähle man beispielsweise $a_n = n^2$ und $b_n = n$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$.

(A 12)

a) Die Gleichheiten folgen mittels direkter Rechnung.

b) Es gelten für $n \geq 2$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < e < \left(1+\frac{1}{1}\right)^2,$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < e < \left(1+\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$\dots$$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Alle in den obigen Ungleichungen auftretenden Zahlen sind positiv, also ergibt sich durch Multiplikation

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e^{n-1} < \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Durch Anwendung von a) erhält man nun

$$\frac{n^n}{n!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!} \iff e\frac{n^n}{n!} < e^n < e\frac{n^n}{(n-1)!} \iff e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Aus b) folgt

$$\frac{n^n}{n!} \leq e^{n-1} \text{ und } e^{n-1} \leq n\frac{n^n}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

also

$$\frac{e^{n-1}}{n} \leq \frac{n^n}{n!} \leq e^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Da alle in den obigen Ungleichungen auftretenden Zahlen positiv sind, erhält man, durch Anwendung der n-ten Wurzel,

$$\frac{e^{\frac{n-1}{n}}}{\sqrt[n]{n}} \leq \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \leq e^{\frac{n-1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Durch Grenzwertübergang folgt nun (berücksichtigend, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n-1}{n}} = e$ ist), mittels des Sandwich-Theorems, die zu zeigende Gleichheit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

d) Es sei $a_n = \frac{n^n}{n!}$, für $n \in \mathbb{N}^*$. Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

ergibt sich, anhand der Aussage 3° der Folgerung **F14** aus der 3. Vorlesung, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e$ ist.

(A 13)

Es sei daran erinnert, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$, falls

$$\forall\ U \in \mathcal{U}(x)\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \text{so dass}\ x_n \in U,\ \forall\ n \geq n_0.$$

1. Fall: Die Menge X ist nach oben unbeschränkt. Also ist $\sup X = \infty$. Sei $U \in \mathcal{U}(\infty)$. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $(a, \infty) \subseteq U$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt ist, gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} > a$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend ist, gilt $x_n \geq x_{n_0} > a$, für alle $n \geq n_0$. Somit ist also $x_n \in U$, für alle $n \geq n_0$, was zeigt, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty = \sup X$ ist.

2. Fall: Die Menge X ist nach oben beschränkt. Nach dem Supremumsprinzip gibt es $\sup X \in \mathbb{R}$. Es seien $x := \sup X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es eine positive reelle Zahl r mit $B_r(x) \subseteq U$. Die Ungleichung $x - r < x$ impliziert, dass $x - r$ keine obere Schranke von X ist. Somit gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} > x - r$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend ist, gilt $x_n \geq x_{n_0} > x - r$, für alle $n \geq n_0$. Andererseits ist jedoch x eine obere Schranke von X, also gilt $x_n \leq x$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $x_n \in B_r(x) \subseteq U$, für alle $n \geq n_0$, was die zu zeigende Gleichheit $\lim_{n\to\infty} x_n = x = \sup X$ impliziert.

(A 14)

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir beweisen, dass x der Grenzwert einer fallenden Folge rationaler Zahlen ist. Nach der Dichtheitseigenschaft von $\mathbb{Q}$ gibt es eine rationale Zahl $x_1 \in (x, x+1)$. Die gleiche Eigenschaft nochmals anwendend, gibt es eine rationale Zahl $x_2 \in (x, \min\{x_1, x + \frac{1}{2}\})$. Also ist $x < x_2 < x_1$ und $x_2 < x + \frac{1}{2}$. Wir setzen diesen Vorgang induktiv fort: Angenommen, dass $x_n \in \mathbb{Q}$, $n \geq 2$, so gewählt wurde, dass $x < x_n < x_{n-1}$ und $x_n < x + \frac{1}{n}$ ist, gibt es (nach der Dichtheitseigenschaft von $\mathbb{Q}$) eine rationale Zahl x_{n+1} mit $x_{n+1} \in (x, \min\{x_n, x + \frac{1}{n+1}\})$. Also ist $x < x_{n+1} < x_n$ und $x_{n+1} < x + \frac{1}{n+1}$. Auf diese Weise erhält man eine streng fallende Folge rationaler Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit der Eigenschaft, dass

$$x < x_n < x + \frac{1}{n}, \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Das Sandwich-Theorem (aus der 3. Vorlesung) impliziert nun, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist. Somit ist also jede reelle Zahl der Grenzwert einer fallenden Folge rationaler Zahlen.

Um zu beweisen, dass jede reelle Zahl auch der Grenzwert einer wachsenden Folge rationaler Zahlen ist, wähle man $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Nach dem eben Bewiesenen wissen wir, dass $-x$ der Grenzwert einer fallenden Folge rationaler Zahlen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist. Dann ist $(-y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine wachsende Folge rationaler gegen x konvergierender Zahlen.