

## 1. Übung zur Vorlesung

### Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 1)

a) Man fülle die folgende Tabelle aus:

$M$	$US(M)$	$OS(M)$	$\min M$	$\max M$	$\inf M$	$\sup M$
$\mathbb{R}_+^*$						
$(-3, 0] \cup \{7\}$						
$(-\sqrt{7}, \infty) \cap \mathbb{Z}$						
$[\pi, 10] \cap \mathbb{Q}$						
$\{x \in \mathbb{R} \mid x^8 + 2x^4 \leq -1\}$						
$\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x^2 - 6x \geq 0\}$						
$\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{x^2+1} < 1\}$						

b) Man gebe ein Beispiel für eine Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{R}$ , die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügt: sie ist kein Intervall, sie ist nach oben unbeschränkt, sie hat kein kleinstes Element und  $\inf M = -3$ .

(A 2) (Umgebungen)

1) Man entscheide, welche der folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  Umgebungen der 1 sind und welche nicht, und begründe die jeweilige Antwort:

a)  $(-1, 2]$ , b)  $\mathbb{N}$ , c)  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , d)  $(-\infty, -1) \cup [0, 5]$ , e)  $[1, \infty)$ .

2) Man entscheide, welche der folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  Umgebungen von  $-\infty$  sind und welche nicht, und begründe die jeweilige Antwort:

a)  $[-1, \infty)$ , b)  $(-\infty, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ , c)  $\mathbb{Z}$ .

(A 3) (Für Schlaufüchse)

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ .

a) Beweise, dass wenn  $OS(M) \neq \emptyset$  ist, dann  $OS(M)$  unendlich viele Elemente enthält.

b) Beweise, dass  $M$  höchstens ein größtes Element besitzen kann. (Mit anderen Worten kann also  $M$  nicht zwei verschiedene größte Elemente haben.)

c) Beweise, dass  $M$  höchstens ein Supremum besitzen kann. (Mit anderen Worten kann also  $M$  nicht zwei verschiedene Suprema haben.)

d) Beweise, dass wenn  $M$  ein größtes Element besitzt, dann  $\max M = \sup M$  ist.

(A 4) (Für Schlaufüchse)

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ .

a) Beweise, dass wenn  $US(M) \neq \emptyset$  ist, dann  $US(M)$  unendlich viele Elemente enthält.

- b) Beweise, dass  $M$  höchstens ein kleinstes Element besitzen kann. (Mit anderen Worten kann also  $M$  nicht zwei verschiedene kleinste Elemente haben.)
- c) Beweise, dass  $M$  höchstens ein Infimum besitzen kann. (Mit anderen Worten kann also  $M$  nicht zwei verschiedene Infima haben.)
- d) Beweise, dass wenn  $M$  ein kleinstes Element besitzt, dann  $\min M = \inf M$  ist.

**(A 5) (Für Schlaufüchse)**

Den Beweis zu **F2** aus der ersten Vorlesung als Muster verwendend, beweise man **F4**.