Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2024-2025

10. Vorlesung

Wiederholung: bestimmte Integrale

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

$$\Downarrow$$

f ist integrierbar auf $[a, b]$ und $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ist das bestimmte Integral von f auf $[a, b]$.

Bemerkung: geometrische Interpretation des bestimmten Integrals als Flächeninhalt.

TH1 (Die Formel von Leibniz-Newton für bestimmte Integrale)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Uneigentliche Integrale

Wir werden den Begriff des bestimmten Integrals erweitern und Integrale auch auf den folgenden Intervallen einführen:

$$[a, b),\ (a, b],\ (a, b),$$

$$[a, \infty),\ (a, \infty),\ (-\infty, a],\ (-\infty, a), (-\infty, \infty) = \mathbb{R}\,.$$

Diese Vorgehensweise wird zu den sogenannten uneigentlichen Integralen führen.

Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls

$$\exists\ \ell := \lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \int_a^t f(x)dx \in \mathbb{R},$$

dann nennt man f auf $[a, b)$ uneigentlich integrierbar und ℓ das uneigentliche Integral von f auf $[a, b)$, das mit $\displaystyle\int_a^{b-} f(x)dx$ bezeichnet wird.

Definition

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls

$$\exists\ \ell := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx \in \mathbb{R},$$

dann nennt man f auf $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar und ℓ das uneigentliche Integral von f auf $[a, \infty)$, das mit $\int_a^\infty f(x)dx$ bezeichnet wird.

Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls

$$\exists\ \ell := \lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} \int_t^b f(x)dx \in \mathbb{R},$$

dann nennt man f auf $(a, b]$ uneigentlich integrierbar und ℓ das uneigentliche Integral von f auf $(a, b]$, das mit $\displaystyle\int_{a+}^b f(x)dx$ bezeichnet wird.

Definition

Seien $b \in \mathbb{R}$ und $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls

$$\exists\ \ell := \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx \in \mathbb{R},$$

dann nennt man f auf $(-\infty, b]$ uneigentlich integrierbar und ℓ das uneigentliche Integral von f auf $(-\infty, b]$, das mit $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ bezeichnet wird.

Definition

Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ und $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion f nennt man auf (a, b) uneigentlich integrierbar, falls $\exists c \in (a, b)$ so, dass f sowohl auf $(a, c]$ als auch auf $[c, b)$ uneigentlich integrierbar ist. Das uneigentliche Integral von f auf (a, b) wird dann wie folgt definiert:

$$\int_{a+}^{b-} f(x)dx := \int_{a+}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b-} f(x)dx, \text{ falls } a, b \in \mathbb{R},$$

$$\int_{-\infty}^{b-} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b-} f(x)dx, \text{ falls } a = -\infty, b \in \mathbb{R},$$

$$\int_{a+}^{\infty} f(x)dx := \int_{a+}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, \text{ falls } a \in \mathbb{R},\ b = \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, \text{ falls } a = -\infty,\ b = \infty.$$

TH2 (Die Formel von Leibniz-Newton für uneigentliche Integrale über Intervalle $[a, b)$)

Seien $-\infty < a < b \leq \infty$, $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gelten:
(1) f ist auf $[a, b)$ uneigentlich integrierbar $\iff$ F hat einen endlichen Grenzwert in b.
(2) Falls F einen endlichen Grenzwert in b hat, so gilt für das uneigentliche Integral I von f auf $[a, b)$ die Gleichheit

$$I = \lim_{x \to b} F(x) - F(a).$$

TH3 (Die Formel von Leibniz-Newton für uneigentliche Integrale über Intervalle $(a, b]$)

Seien $-\infty \leq a < b < \infty$, $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gelten:
(1) f ist auf $(a, b]$ uneigentlich integrierbar $\Longleftrightarrow$ F hat einen endlichen Grenzwert in a.
(2) Falls F einen endlichen Grenzwert in a hat, so gilt für das uneigentliche Integral I von f auf $(a, b]$ die Gleichheit

$$I = F(b) - \lim_{x \to a} F(x).$$

TH4 (Die Formel von Leibniz-Newton für uneigentliche Integrale über Intervalle (a, b))

Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gelten:
(1) f ist auf (a, b) uneigentlich integrierbar $\Longleftrightarrow$ F hat einen endlichen Grenzwert in a und F hat einen endlichen Grenzwert in b.
(2) Hat F einen endlichen Grenzwert sowohl in a als auch in b, dann gilt für das uneigentliche Integral I von f auf (a, b) die Gleichheit

$$I = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x).$$