2.Übungsblatt

Analytische Geometrie im 3D-Raum

1. Man bestimme die Parametergleichungen der Ebene:
   (a) durch den Punkt $M(1; 0; 2)$, parallel zu den Vektoren $\vec{a}(1; 2; 3)$ und $\vec{b}(0; 3; 1)$;
   (b) durch den Punkt $A(1; 2; 1)$, parallel zu den Vektoren $\vec{i}$ und $\vec{j}$;
   (c) durch den Punkt $A(1; 7; 1)$, parallel zur Ebene Oxz;
   (d) durch die Punkte $M_1(5; 3; 2)$ und $M_2(1; 0; 1)$, parallel zum Vektoren $\vec{a}(1; 3; -3)$;
   (e) durch den Punkt $A(1; 5; 7)$ und durch die x-Achse;
   (f) durch den Ursprung des Koordinatensystems und durch die Punkte $M_1(-2; -3; 1)$ und $M_2(1; 0; 1)$.

2. Man bestimme die allgemeine Gleichung der Ebene, wenn ihre Parametergleichungen bekannt sind:
   (a) $x = 2 + 3s - 4t$ $y = 4 - t$, $z = 2 + 3s$, $s, t \in \mathbb{R}$;
   (b) $x = s + t$, $y = s - t$, $z = 5 + 6s - 4t$, $s, t \in \mathbb{R}$.

3. Man bestimme die Parametergleichungen einer Ebene, von ihrer allgemeinen Gleichung ausgehend:
   (a) $3x - 6y + z = 0$;
   (b) $2x - y - z - 3 = 0$.

4. Man bestimme die Gleichung der Ebene durch den Punkt $P(3; 5; -7)$,welche gleich lange Strecken in die positiven Koordinatenachsen schneidet.

   A: $x + y + z - 1 = 0$

5. Man bestimme die Gleichung einer Ebene, wenn der Punkt $A(1; -1, 3)$ der Fußpunkt der Senkrechten aus dem Ursprung des Koordinatensystems auf die Ebene ist.

   A: $x - y + 3z - 11 = 0$

6. Man bestimme die Parametergleichungen der Geraden durch:
   (a) den Punkt $M(2; 0; 3)$, parallel zum Vektoren $\vec{a}(3; -2; -2)$;
   (b) den Punkt $A(1; 2; 3)$, parallel zur x-Achse.
   (c) die Punkte $A(1; 2; 3)$ und $B(4; 4; 4)$.

7. Man bestimme die Parametergleichungen der Geraden, gegeben als Schnittmenge zweier Ebenen, durch $\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

8. Man bestimme die Gleichung der Ebene durch den Punkt $A(1;3;0)$ welche parallel zu den Geraden gegeben durch $\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 2x-y+5z+1=0 \end{cases}$ und $\begin{cases} -x+y=1 \\ 5x-y-z+2=0 \end{cases}$ ist.

   A: $25x+19y-11z-82=0$

9. Man bestimme die Gleichung der Ebene, welche die Gerade $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ enthält und parallel zu der Geraden $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+1}{3}$ ist.

   A: $4x+y-8z+6=0$

10. Man bestimme die Gleichung der Ebene, welche die Gerade $\begin{cases} x=3+t \\ y=2+5t \\ z=-1+3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ enthält und parallel zu der Geraden $\begin{cases} x=4-2t \\ y=-8+t \\ z=5+2t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ ist.

    A: $7x-8y+11z+6=0$

11. Man bestimme die Gleichung der Ebene, welche den Punkt $A(-1;1;2)$ und die Gerade $\begin{cases} x=1+5t \\ y=-1+t \\ z=2t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ enthält.

    A: $x+7y-6z+6=0$

12. Man bestimme die Gleichung der Ebene, welche den Punkt $A(-1;1;2)$ und die Gerade $\begin{cases} x+5y-7z+1=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$ enthält.

    A: $3x-y+2z=0$

13. Es sei $P(3,-6,2)$ der Fußpunkt der senkrechten Gerade aus dem Ursprung des Koordinatensystems auf die Ebene E. Man bestimme die Gleichung der Ebene E.

    A: $3x-6y+2z-49=0$

14. Man bestimme die Gleichung der Ebene E, welche die Punkte $M_1(1,1,1)$ und $M_2(2,2,3)$ enthält und welche senkrecht auf die Ebene $x+y-z=0$ steht.

    A: $x-y=0$

15. Man bestimme die Gleichung der Ebene E, welche den Punkt $M_1(1,-1,1)$ enthält und welche auf die Ebenen $x-y+z-1=0$ und $2x+y+z+1=0$ senkrecht steht.

    A: $2x-y-3z=0$

16. Man bestimme das Winkelmaß des Winkels α gebildet von den folgenden Ebenenpaaren:

    a)$4x-5y+3z-1=0$ und $x-4y-z+9=0$;

    b)$3x-y+2z+15=0$ und $5x+9y-3z-1=0$;

    c)$6x+2y-4z+17=0$ und $9x+3y-6z+4=0$.

    A: a) $\alpha=\arccos\dfrac{7}{10}$, b) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, c) $\alpha=0$.

17. Gegeben sei die Ebene $E : 6x + 2y - 9z + 121 = 0$. Man bestimme die Koordinaten des Spiegelpunktes des Ursprungs an die Ebene E.

    A: $Q(-12, -4, 18)$

18. Gegeben sei die Ebene $E : 2x+y+2z-20 = 0$. Man bestimme die Koordinaten des Spiegelpunktes von $P(7, 6, 9)$ an die Ebene E.

    A: $Q(-1, 2, 1)$

19. Gegeben sei die Gerade $g : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{5}$. Man bestimme die Koordinaten des Spiegelpunktes von $P(4, 3, 10)$ an die Gerade g.

    A: $Q(2, 9, 6)$

20. Man bestimme die Gleichung der Ebene, welche die untereinander parallelen Geraden $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ und $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+3}{1}$ enthält.

    A: $2x - 3y - z - 7 = 0$

21. Man zeige, dass die Geraden gegeben durch $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ und $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y+8}{3} = \dfrac{z-4}{-1}$ zwei sich schneidende Geraden sind und man schreibe die Gleichung der von ihnen bestimmten Ebene.

    A: $13x - 6y + 8z - 15 = 0$

22. Man zeige, dass die Geraden gegeben durch $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$ und $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$ zwei sich schneidende Geraden sind und man schreibe die Gleichung der von ihnen bestimmten Ebene.

    A: $6x - 17y + 10z - 43 = 0$

23. Man bestimme die Gleichungen der Geraden durch den Punkt $O(0; 0; 0)$, welche die Geraden $\begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x - 2y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$ schneidet.

    A: $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{3}$

24. Man bestimme die Gleichungen der Geraden durch den Punkt $O(0; 0; 0)$, welche die Geraden $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -t \end{cases}$ und $\begin{cases} x = 4t \\ y = 5 - 5t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ schneidet.

    A: $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{65} = \dfrac{z}{49}$

25. Man bestimme die Gleichungen der Geraden durch den Punkt $A(-1; 1; -1)$, welche die Geraden $\begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x - 2y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} y - z = 0 \\ x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$ schneidet.

    A: $\dfrac{x+1}{11} = \dfrac{y-1}{11} = \dfrac{z+1}{-1}$

26. Man bestimme die Koordinaten des Punktes A der Geraden $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$, welcher sich im gleichen Abstand zu den Punkten $B(3; 0; -2)$ und $C(-1; 1; 5)$ befindet.

    A: $A(1, -3, 2)$

27. Man bestimme die Koordinaten derjenigen Punkte A der Geraden $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{1}$, welche sich im Abstand $\sqrt{3}$ zu der Ebene $x + y + z + 3 = 0$ befinden.

    A: $A(1, 0, -1)$, $A(-1, -3, -2)$.

28. Man bestimme den Abstand der parallelen Ebenen $x-2y-2z+7 = 0$ und $2x-4y-4z+17 = 0$.

    A:$\dfrac{1}{2}$

29. Man bestimme die Koordinaten derjenigen Punkte A der Geraden $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+4}{-5}$, welche sich im gleichen Abstand zum Punkt $B(0; 1; 1)$ und zu der Ebene $2x - y + 2z + 1 = 0$ befinden.

    A: $A(-1, -3, 6)$, $A(-\dfrac{109}{97}, -\dfrac{327}{97}, \dfrac{642}{97})$

30. Man bestimme den Kosinus des Winkels α gebildet von den Geraden $\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$

    und $\begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$

    A: $\cos\alpha = \dfrac{4}{21}$

31. Man bestimme den Sinus des Winkels α, welcher von der Ebene $4x + 4y - 7z + 1 = 0$ und der Geraden $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$ gebildet wird.

    A: $\sin\alpha = \dfrac{11}{9\sqrt{6}}$

32. Gegeben seien die Eckpunkte eines Tetraeders $A(-1; -3; 1)$, $B(5; 3; 8)$, $C(-1; -3; 5)$ und $D(2; 1; -4)$. Man bestimme die Länge der Höhe aus D auf die Ebene (ABC).

    A: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

33. Man bestimme den Schnittpunkt der Geraden $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-5}{-3} = \dfrac{z+2}{5}$ und $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-8}{5}$.

    A: $M_0(1, 2, 3)$

34. Man bestimme die senkrechte Projektion der Geraden $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$ auf die Ebene $x + 5y - z - 25 = 0$.

    A: $\begin{cases} 7x - y + 2z + 2 = 0 \\ x + 5y - z - 25 = 0 \end{cases}$

35. Man bestimme die senkrechte Projektion der Geraden $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-1}{-1}$ auf die Ebene $x + 5y - z - 25 = 0$.

    A: $M_0(0, 5, 0)$

36. Gegeben seien die Punkte $A(-1;-3;1)$, $B(5;3;8)$ und $C(-1;-3;5)$. Man bestimme die Höhe aus C auf AB im Dreieck ABC.

A: $\dfrac{24\sqrt{2}}{11}$

37. Man bestimme den Abstand vom Punkt $P(2;3;-1)$ zu der Geraden $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+25}{-2}$.

A: 21

38. Man bestimme den Abstand der untereinander parallelen Geraden $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z-1}{-2}$ und $\dfrac{x-5}{-6}=\dfrac{y}{-12}=\dfrac{z}{4}$.

A: $\dfrac{\sqrt{26}}{7}$

39. Man bestimme den Abstand der untereinander parallelen Geraden $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=3t-2 \\ z=t+3 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ und $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=3t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

A: $\sqrt{\dfrac{285}{14}}$

40. Man zeige, dass die Geraden gegeben durch $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ und $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+2t \\ z=1 \end{cases}$ windschief sind und man bestimme den Abstand zwischen ihnen.

A: $\dfrac{17}{7}$

41. Man zeige, dass die Geraden gegeben durch $3(x-1)=2(y+1)=6z$ und $4(x+1)=3y=4(z-1)$ windschief sind und man bestimme den Abstand zwischen ihnen.

A: $\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$.

42. Man bestimme die Gleichungen des gemeinsamen Lots der Geraden $g_1 : \begin{cases} x=y+1 \\ z=x-1 \end{cases}$ und $g_2 : \begin{cases} x=2-y \\ z=2+y \end{cases}$ und die Koordinaten der Schnittpunkte des Lots mit den gegebenen Geraden.

A: $g : \begin{cases} 2x-y-z-2=0 \\ 2x+y+z-6=0 \end{cases}$, $F_1(2,1,1)$, $F_2(2,0,2)$.

Kreis

43. Man bestimme die Gleichung des Kreises, welcher durch folgende Bedingungen bestimmt wird:

   (a) den Mittelpunkt $M_0(2, -3)$ und den Radius $r = 3$;

   (b) den Mittelpunkt $M_0(1, 1)$ und die Tangente $t : 3x + 4y + 8 = 0$;

   (c) die Endpunkte eines Durchmessers $A(3, 2)$ und $B(-1, 6)$;

44. Man bestimme die Gleichung des Kreises durch die Punkte $M_1(-1, 5)$, $M_2(-2, -2)$, $M_3(5, 5)$.

   A: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$.

45. (a) Man zeige, dass die Gleichung $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ einen Kreis darstellt und man bestimme den Mittelpunkt $M_0(x_0, y_0)$ und den Radius r.

   (b) Man schreibe die Gleichung der Tangenten im Punkt $A(2, 0)$ an den Kreis.

   (c) Man schreibe die Gleichungen der Tangenten aus dem Punkt $D(8, 7)$ an den Kreis.

   A: (b) $x + 2y - 2 = 0$; (c) $x - 2y + 6 = 0$, $2x - y - 9 = 0$.

46. Der Punkt $M_0(3, -1)$ ist der Mittelpunkt eines Kreises, der auf der Geraden $2x - 5y + 18 = 0$ eine Sehne von Länge 6 bestimmt. Man schreibe die Gleichung des Kreises.

   A: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 35$

47. Man bestimme die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt in $M_0(-4, 2)$, wenn dieser zur Geraden $g : 4x - 3y - 8 = 0$ tangent ist.

   A: $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 36$

48. Man schreibe die Gleichung des Kreises durch die Punkte $A(2, -2)$ und $B(8, 4)$, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt.

   A: $(x - 6)^2 + y^2 = 20$

49. Man schreibe die Gleichung des Kreises durch die Punkte $A(3, 1)$ und $B(-1, 3)$, dessen Mittelpunkt auf der Geraden $3x - y - 2 = 0$ liegt.

   A: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$

50. Welche ist die Gleichung des Kreises, der die Koordinatenachsen berührt, und dessen Mittelpunkt sich auf der Gerade $y = \dfrac{1}{2}x + 4$ befindet?

   A: $x^2 + y^2 - 16x - 16y + 64 = 0$

51. Man bestimme die Tangenten aus dem Punkt $P(9, 2)$ zum Kreis $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ und man berechne den Winkel, der von diesen Tangenten gebildet wird.

   A: $3x - 4y - 19 = 0$, $4x + 3y - 42 = 0$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

52. Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(0, a)$, $B(-b, 0)$, $C(b, 0)$, wobei $a, b > 0$.

   a) Man schreibe die Gleichung des Umkreises $(\mathcal{C})$ des Dreiecks AOB.

   b) Man zeige, dass die Tangente im Ursprung an den Kreis $(\mathcal{C})$ auf AC senkrecht steht.

   c) Es sei M ein beweglicher Punkt auf den Kreis $(\mathcal{C})$. Man bestimme den geometrischen Ort des Schwerpunktes des Dreiecks ABM.

   A: a) $x^2 + y^2 + bx - ay = 0$, b) $t : bx - ay = 0$, c) $(x + \dfrac{b}{2})^2 + (y - \dfrac{a}{2})^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{36}$.

Ellipse

53. Man betrachte die Ellipsen, welche durch folgende Elemente gegeben sind:

    (a) die Brennpunkte $F'(-1, 0)$ und $F(1, 0)$, die große Halbachse $a = 5$;

    (b) die Brennweite $2c = 6$ und die große Achse $2a = 10$;

    Man zeichne die Ellipsen im kartesischen Koordinatensystem und man schreibe ihre Gleichungen.

54. Gegeben sei die Ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Man bestimme ihre Scheitelpunkte, die Achsen und die Brennpunkte.

55. Man bestimme den Flächeninhalt eines Quadrats, mit zwei Eckpunkten in den Brennpunkten der Ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
    A: 36 oder 18.

56. Man bestimme die Gleichungen derjenigen Tangenten zur Ellipse $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$, welche zur Geraden $3x + 2y + 7 = 0$ parallel sind.

    A: $y = -\frac{3}{2}x \pm \sqrt{\frac{55}{2}}$

57. Man bestimme die Gleichungen derjenigen Tangenten zur Ellipse $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$, welche zur Geraden $6x+3y+25 = 0$ parallel sind, und man berechne den Abstand zwischen den Tangenten.

    A: $t_1 : 2x + y - 12 = 0$, $t_2 : 2x + y + 12 = 0$, $d(t_1, t_2) = \frac{24}{\sqrt{5}}$

58. Man bestimme die Gleichungen derjenigen Tangenten zur Ellipse $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$, welche zur Geraden $4x-2y+23 = 0$ parallel sind, und man berechne den Abstand zwischen den Tangenten.

    A: $t_1 : 2x - y - 12 = 0$, $t_2 : 2x - y + 12 = 0$, $d(t_1, t_2) = \frac{24}{\sqrt{5}}$

59. Man bestimme die Gleichungen derjenigen Tangenten zur Ellipse $x^2 + 4y^2 = 20$, welche auf die Gerade $2x - 2y - 13 = 0$ senkrecht stehen.

    A:$t_1 : x + y - 5 = 0$, $t_2 : x + y + 5 = 0$

60. Gegeben sei die Ellipse $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

    (a) Man schreibe die Gleichung der Tangenten im Punkt $T\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ an die Ellipse.

    (b) Man schreibe die Gleichungen der Tangenten an die Ellipse, welche zur Normalen der Ellipse im Punkt T parallel sind (Die Senkrechte auf die Tangente im Tangenzpunkt heißt Normale der Ellipse in dem Punkt).

    (c) Man schreibe die Gleichungen der Tangenten aus dem Punkt $P(3; -1)$ an die Ellipse.

    A: (a) $x + 2\sqrt{3}y - 4 = 0$, (b) $2\sqrt{3}x - y \pm 7 = 0$, (c) $y = -1$, $6x + 5y = 13$

61. Man bestimme die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten zu den Ellipsen $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{9}=1$ und $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{14}=1$
A: $x+2y\pm 9=0$, $x-2y\pm 9=0$

62. Man bestimme den geometrischen Ort der Mitten der Sehnen der Ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, welche zur Geraden $x+2y=1$ parallel sind.
A: Die Strecke $[T_1T_2]$, wobei $T_1\left(\frac{25}{\sqrt{61}},\frac{18}{\sqrt{61}}\right)$ und $T_2\left(-\frac{25}{\sqrt{61}},-\frac{18}{\sqrt{61}}\right)$

63. Gegeben sei die Ellipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Man bestimme diejenigen Punkte M der Ellipse, für welche der Winkel $\widehat{F'MF}$ ein rechter Winkel ist (F' und F sind die Brennpunkte der Ellipse).
A: $M_1\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_2\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_3\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_4\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

64. Man bestimme den geometrischen Ort der Punkte, aus denen senkrecht aufeinanderstehende Tangenten an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ gezogen werden können.
A: $\mathcal{C}: x^2+y^2=a^2+b^2$

Hyperbel

65. a) Man zeichne die Hyperbel bestimmt durch die Brennpunkte $F'(-4,0)$, $F(4,0)$ und den Abstand zwischen den Scheiteln gleich 5 und man finde ihre Gleichung.
b) Gebeben sind die Hyperbeln $\mathcal{H}_1 : \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, $\mathcal{H}_2 : x^2-y^2=1$. Man bestimme für jede die Scheitelpunkte, die Brennpunkte und die Asymptoten.

66. Gegeben sei die Hyperbel $\mathcal{H}: x^2-5y^2-10=0$.
a) Man finde die Scheitel und die Asymptoten von $\mathcal{H}$.
b) Man schreibe die Gleichungen von Tangente und Normale im Punkt mit den Koordinaten $(2\sqrt{5},\sqrt{2})$. (Die Senkrechte auf die Tangente im Tangenzpunkt heißt Normale der Hyperbel in dem Punkt).

67. Man berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, welches von den Asymptoten der Hyperbel $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ und der Geraden $9x+2y-24=0$ gebildet wird.
A: 12

68. Man schreibe die Gleichungen der Tangenten an die Hyperbel $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}-1=0$ in den Punkten der Hyperbel mit der Abszisse gleich mit 3.
A: $2x-\sqrt{2}y-4=0$, $2x+\sqrt{2}y-4=0$

69. Man schreibe die Gleichungen der Tangenten an die Hyperbel $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, welche senkrecht auf die Gerade $4x+3y-7=0$ stehen.
A: $3x-4y\pm 10=0$

70. Man schreibe die Gleichungen der Tangenten an die Hyperbel $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$, welche zur Geraden $4x + 2y - 5 = 0$ parallel sind.

A: $y = 2x \pm 2\sqrt{14}$

71. Man bestimme den geometrischen Ort der Mitten der Sehnen der Hyperbel $x^2 - 2y^2 = 1$, welche zur Geraden $2x - y = 0$ parallel sind.

A: $T_1T_2 \setminus (T_1T_2)$, wobei $T_1(\frac{4}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}})$, $T_2(-\frac{4}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}})$

72. Gegeben sei die Hyperbel $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Man bestimme diejenigen Punkte M der Hyperbel, für welche der Winkel $\widehat{F'MF}$ ein rechter Winkel ist (F' und F sind die Brennpunkte der Hyperbel).

A: $M_1\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $M_2\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $M_3\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $M_4\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

73. Man schreibe die Gleichung einer auf ihre Symmetrieachsen bezogenen Hyperbel, die durch die Punkte $M(5, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ und $N(4, \frac{3\sqrt{5}}{5})$ geht.

A: $a^2 = 10$, $b^2 = 3$.

74. Gegeben sei die Hyperbel $x^2 - 2y^2 - 2 = 0$.

   (a) Man schreibe die Gleichung der Tangente zur Hyperbel im Punkt $M_0(2; 1)$.

   (b) Gibt es zur Normalen in M_0 an die Hyperbel parallele Tangenten?

   (c) Man schreibe die Gleichungen der Tangenten an die Hyperbel aus dem Punkt $A(1; 0)$.

A: (a) $x - y - 1 = 0$; (b) $x - y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$; (c) $x - y - 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$.

75. Man bestimme den Punkt M auf der Hyperbel $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ mit dem kleinsten Abstand zu der Geraden $3x + 2y + 1 = 0$ und man berechne den Abstand von M zu der Geraden.

A: $M(-6, 3)$, $\frac{11}{\sqrt{13}}$.

76. Man schreibe die Gleichungen der Tangenten an die Hyperbel $x^2 - y^2 = 16$ aus dem Punkt $A(-1; -7)$.

A: $2x + 2y + 1 = 0$, $8x - 8y - 3 = 0$.

Parabel

77. Man bestimme die möglichen Werte von k, so dass die Gerade $y = kx + 2$ zur Parabel $y^2 = 4x$ tangent ist.

A: $k = 0.5$

78. Man bestimme die Gleichung der Tangenten zur Parabel $y^2 = 12x$, welche zur Geraden $3x - 2y + 30 = 0$ parallel ist und man bestimme den Abstand zwischen der Tangenten und der gegebenen Gerade.

A: $3x - 2y + 4 = 0$

79. Man bestimme die Gleichung der Tangenten zur Parabel $y^2 = 8x$, welche zur Geraden $3x + 2y - 3 = 0$ parallel ist.

A: $9x + 6y + 12 = 0$

80. Man bestimme die Gleichung der Tangenten zur Parabel $y^2 = 16x$, welche auf die Gerade $4x + 2y + 7 = 0$ senkrecht steht.

A: $x - 2y + 16 = 0$

81. Man bestimme den Punkt M auf der Parabel $y^2 = 64x$ mit dem kleinsten Abstand zu der Geraden $4x + 3y + 37 = 0$ und man berechne den Abstand von M zu der Geraden.

A: $M(9, -24)$; 0.2

82. Man schreibe die Gleichungen der Tangenten an die Parabel $y^2 = 2x$ aus dem Punkt $A(-1; 0)$. Durch welchen gemeinsamen Punkt gehen die entsprechenden Normalen? Man berechne den Flächeninhalt des Vierecks, das von den Tangenten und Normalen gebildet wird.

A: $x - \sqrt{2}y + 1 = 0$, $x + \sqrt{2}y + 1 = 0$, $B(2, 0)$, $3\sqrt{2}$.

83. Man schreibe die Gleichungen der Tangenten an die Parabel $y^2 = 16x$ aus dem Punkt $M(-2; 2)$.

A: $2x + y + 2 = 0$, $x - y + 4 = 0$

84. Man schreibe die Gleichungen der Tangenten an die Parabel $y^2 = 36x$ aus dem Punkt $M(2; 9)$.

A: $3x - y + 3 = 0$, $3x - 2y + 12 = 0$

85. Man schreibe die Gleichungen der Tangenten an die Parabel $y^2 = 5x$ aus dem Punkt $M(-1; 2)$.

A: $x - 2y + 5 = 0$, $5x + 2y + 1 = 0$

86. Durch den Brennpunkt F einer Parabel $y^2 = 2px$ werden zwei veränderliche senkrechte Geraden gezogen, diese schneiden die Leitlinie in M_1 und M_2. Die Parallelen durch M_1 und M_2 zur Parabelachse schneiden die Parabel in den Punkten N_1 und N_2. Man zeige, dass die Punkte N_1, N_2 und F kollinear sind.

Ellipsoid

87. Man zeige, dass die Gerade, gebegen durch $\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-6}{2}$ tangent an das Ellipsoid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ ist und man bestimme die Koordinaten des Tangenzpunktes.

A: $T(2, 0, 0)$

88. Man bestimme die Tangentialebenen an das Ellipsoid $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ in dessen Schnittpunkten mit der Geraden $\frac{x-4}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z+2}{-2}$.

A: $z - 2 = 0$, $x - 2y - 8 = 0$

89. Man schreibe die Gleichungen der Tangentialebenen an das Ellipsoid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{9} = 1$ in dessen Schnittpunkten mit der Geraden $x = y = z$.

A: $9x + 12y + 4z \pm 30 = 0$

90. Man schreibe die Gleichungen der Tangentialebenen an das Ellipsoid $\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$, welche zur Ebene $2x+2y-3z=0$ parallel sind.

A: $2x+2y-3z\pm 12=0$

Einschaliges Hyperboloid

91. Man bestimme die Schnittpunkte des einschaligen Hyperboloids $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{1}=1$ mit der Geraden $\frac{x-4}{4}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{1}$.

92. Man schreibe die Gleichung der Tangentialebene an das Hyperboloid $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}-\frac{z^2}{17}-1=0$ im Punkt $M\left(1;-5;\frac{17}{2}\right)$.

A: $x-4y-2z-4=0$

93. Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $M(2;3;1)$ an das einschalige Hyperboloid $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{1}=1$. Man zeige, dass diese Tangentialebene die Fläche des einschaligen Hyperboloids nach genau zwei Geraden schneidet und man berechne den Winkel, der von diesen Geraden gebildet wird.

A: $3x+2y-6z-6=0$, $g_1: x=2z, y=3$, $g_2: x=2, y=3z$, $\alpha=\arccos\frac{1}{5\sqrt{2}}$

94. Man schreibe die Gleichungen derjenigen Tangentialebenen an das Hyperboloid $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1$, welche mit der Ebene $2x-y+3z+11=0$ parallel sind.

A: $2x-y+3z\pm\sqrt{3}=0$

95. Man schreibe die Gleichungen der geradlinigen Erzeugenden der Fläche $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ im Punkt $M(6;2;8)$.

96. Man bestimme die Schnittpunkte des Hyperboloids $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$ mit der Geraden, gegeben durch $\frac{x}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$. Man schreibe die Tangentialebene an den Hyperboloid in jedem der erhaltenen Punkte.

A: $M(6,-2,2)$, $N(-6,2,-2)$.

97. Man bestimme die Gleichung des einschaligen Hyperboloids, so dass die Geraden gegeben durch $g_1: 2x-1=0, y-z=0$ und $g_2: 2x+z=0, y-1=0$ zwei geradlinige Erzeugende des Hyperboloids sind.

A: $4x^2+y^2-z^2=1$

Zweischaliges Hyperboloid

98. Man bestimme den geometrischen Ort der Punkte aus dem drei-dimensionalen Raum mit der Eigenschaft, dass die Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten $F(0;0;3)$ und $F'(0;0;-3)$ konstant gleich 4 ist.

    A: $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{5}-\dfrac{z^2}{4}=-1$

99. Man bestimme den Schnittpunkt des zweischaligen Hyperboloids $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}-\dfrac{z^2}{9}=-1$ mit der Geraden $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{3}$.

    A: $M(4,2,9)$

100. Man schreibe die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}-\dfrac{z^2}{4}=-1$ im Punkt $M(-6;2;6)$.

    A: $4x-12y+9z-6=0$

101. Man schreibe die Gleichung der Tangentialebene an das Hyperboloid $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}-\dfrac{z^2}{5}+1=0$ im Punkt $M(4;-\sqrt{15};10)$.

Elliptisches Paraboloid

102. Man bestimme die Gleichungen der Tangentialebenen an das Paraboloid $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=9z$ in dessen Schnittpunkten mit der Geraden $x=y=z$.

    A: $z=0$, $12x+6y-9z-108=0$

103. Man schreibe die Gleichungen derjenigen Tangentialebene an das Paraboloid $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z$, welche zur Ebene $x-3y+2z-1=0$ parallel ist.

    A: $x-3y+2z+4=0$

104. Man schreibe die Gleichungen derjenigen Tangentialebene an das elliptische Paraboloid $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=z$, welche zur Ebene $x-y-2z=0$ parallel ist. Man berechne den Abstand vom Urspung zu der bestimmten Tangentialebene.

    A: $x-y-2z-2=0$, $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Hyperbolisches Paraboloid

105. Man schreibe die Gleichungen der Tangentialebenen an das Paraboloid $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=9z$ in dessen Schnittpunkten mit der Geraden $x=y=z$.

    A:$z=0$, $4x-2y-z-36=0$

106. Man schreibe die Gleichungen derjenigen Tangentialebene an das hyperbolische Paraboloid $x^2-\dfrac{y^2}{4}=3z$, welche zur Ebene $x-3y+2z-1=0$ parallel ist.

107. Man schreibe die Gleichungen derjenigen Tangentialebene an das hyperbolische Paraboloid $x^2 - y^2 = z$, welche zur Ebene $2x - y + 3z - 5 = 0$ parallel ist.

A: $2x - y + 3z - \dfrac{1}{4} = 0$

108. Man bestimme die geradlinigen Erzeugenden der Fläche $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = z$, welche parallel zu der Ebene $3x + 2y - 4z + 6 = 0$ sind.

A: Die gerandlinigen Erzeugenden durch den Punkt $M(6, -1, 2)$

109. Man bestimme die geradlinigen Erzeugenden der Fläche $4x^2 - 9y^2 = 36z$ durch den Punkt $M(3\sqrt{2}; 2; 1)$.

2D - Transformationen

110. Gegeben sei das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(2;2)$ und $D(\frac{3}{2};3)$. Man verschiebe das Viereck um den Vektor $\vec{v}\,(3;-2)$ und man stell das ursprüngliche und das transformierte Viereck in demselben Koordinatensystem dar.

111. Gegeben sei das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(2;2)$ und $D(\frac{3}{2};3)$. Man skaliere das Viereck um den Faktor 2 in x-Richtung und um den Faktor 0.5 in y-Richtung. Man stelle das ursprüngliche und das transformierte Viereck in demselben Koordinatensystem dar.

112. Man skaliere das Quadrat mit den Eckpunkten $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(2,2)$ und $D(1,2)$ um den Faktor 4 in x-Richtung und um den Faktor 2 in y-Richtung. Man stelle das ursprüngliche und das transformierte Viereck in demselben Koordinatensystem dar.

113. Man bestimme die Transformationsmatrix einer Rotation mit $\dfrac{\pi}{2}$ um den Ursprung. Man bestimme das Bild des Dreiecks OAB, wobei $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(1,1)$, infolge dieser Transformation. Man stelle das ursprüngliche und das transformierte Viereck in demselben Koordinatensystem dar.

114. Man bestimme das Bild des Quadrates mit den Eckpunkten $A(1;1)$, $B(2;1)$, $C(2;2)$ und $D(1;2)$ infolge einer Rotation mit dem Winkel $\dfrac{\pi}{4}$ um den Punkt $B(2;1)$ und man stelle das ursprüngliche und das transformierte Viereck in demselben Koordinatensystem dar.

115. Man bestimme die Transformationsmatrix der Spiegelung an die Gerade $5x - 2y + 8 = 0$.

116. Man bestimme das Bild des Dreiecks OBC, wobei $O(0;0)$, $B(1;1)$, $C(5;2)$ infolge einer Rotation um $\dfrac{\pi}{4}$ um den Punkt $P(-1;-1)$ und man stelle das ursprüngliche und das transformierte Dreieck in demselben Koordinatensystem dar.

117. Man bestimme das Bild des Dreiecks OBC, wobei $O(0;0)$, $B(1;1)$, $C(5;2)$ infolge einer gleichmäßigen Skalierung mit dem Zentrum C, um den Faktor 2 und man stelle das ursprüngliche und das transformierte Dreieck in demselben Koordinatensystem dar.

118. Man bestimme das Bild des Rhombus $ABCD$, mit $A(-1;0)$, $B(0;-2)$, $C(1;0)$, $D(0;2)$ infolge einer Spiegelung an die waagerechte Gerade $y = 2$ und man stelle das ursprüngliche und das transformierte Viereck in demselben Koordinatensystem dar.

119. Man bestimme das Bild des Rhombus $ABCD$, mit $A(-1;0)$, $B(0;-2)$, $C(1;0)$, $D(0;2)$ infolge einer Spiegelung an die senkrechte Gerade $x = 2$ und man stelle das ursprüngliche und das transformierte Viereck in demselben Koordinatensystem dar.

120. Man bestimme das Bild des Rhombus $ABCD$, mit $A(-1;0)$, $B(0;-2)$, $C(1;0)$, $D(0;2)$ infolge einer Spiegelung an die Gerade $y = x + 2$ und man stelle das ursprüngliche und das transformierte Viereck in demselben Koordinatensystem dar.

121. Man bestimme das gespiegelte Bild des Dreiecks ABC, $A(2;4)$, $B(4;6)$, $C(2;6)$ an die Gerade $y = \frac{1}{2}(x+4)$ und man stelle das ursprüngliche und das transformierte Dreieck in demselben Koordinatensystem dar.

122. Man bestimme das Bild des Dreiecks ABC, mit $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(2;3)$ infolge der Spiegelung an die Gerade $x - 2y = 0$ und man stelle das ursprüngliche und das transformierte Dreieck in demselben Koordinatensystem dar.

123. Man bestimme das Bild des Dreiecks ABC, mit $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(2;3)$ infolge der Spiegelung an die Gerade $2x - y = 0$ und man stelle das ursprüngliche und das transformierte Dreieck in demselben Koordinatensystem dar.

124. Das Dreieck ABC, mit $A(1;1)$, $B(4;1)$, $C(2;3)$ wird mit $90°$ um den Punkt C gedreht und anschließend an die Gerade AB gespiegelt. Man stelle das ursprüngliche und das transformierte Dreieck in demselben Koordinatensystem dar.

125. Das Dreieck ABC, mit $A(1;1)$, $B(4;1)$, $C(2;3)$ wird an die Gerade AB gespiegelt und anschließend mit $90°$ um den Punkt C gedreht. Man stelle das ursprüngliche und das transformierte Dreieck in demselben Koordinatensystem dar.

3D-Transformationen

126. Es wird eine Drehung mit dem Winkel $\frac{\pi}{6}$ um die y-Achse durchgeführt und anschließend eine Verschiebung mit dem Vektoren $\vec{v}(1;-1;2)$. Man schreibe die homogene Matrix dieser verketteten Transformation.

127. Es wird eine Skalierung von Zentrum O mit dem Faktor 3 in Richtung der y-Achse, gefolgt von einer Veschiebung mit 2 in Richtung der x-Achse und mit 5 in Richtung der z-Achse und anschließend eine Drehung mit $\frac{7\pi}{6}$ um die x-Achse durchgeführt. Man bestimme die Transformationsmatrix in homogenen Koordinaten.