Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

3. Übung zur Vorlesung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 9)

Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n^2}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+2n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{n-2n^2}{n^4+1}\right)^{5n^2}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2+\cdots+n}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+2^5a_2+3^5a_3+\cdots+n^5a_n}{n^6}$, wobei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine gegen $a\in\mathbb{R}$ konvergierende Folge ist.

(A 10)

Sei $x_0>0$. Die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ wird rekursiv wie folgt definiert

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2+4}{2x_n}, \forall\, n\geq 0. \tag{1}$$

a) Man zeige mittels Induktion, dass $x_n>0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, ist.

b) Indem man (1) verwendet, zeige man, dass $x_{n+1}\geq 2$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, ist.

c) Man zeige, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fallend ist.

d) Man begründe, weshalb die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergent ist und bestimme ihren Grenzwert.

(A 11) (Beispiele: Der nicht definierte Fall $\frac{\infty}{\infty}$)

Es sei $a\in[0,\infty)\cup\{\infty\}$ fest. Man gebe je ein Beispiel für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, die gleichzeitig den Bedingungen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=a$ genügen.

(A 12)

a) Man zeige (entweder durch direkte Rechnung oder induktiv), dass die folgenden Gleichheiten für alle natürlichen Zahlen $n\geq 2$ gelten

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{n^n}{n!},$$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\right)^3\left(1+\frac{1}{3}\right)^4\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}=\frac{n^n}{(n-1)!}.$$

b) Unter Verwendung von a) und der folgenden (in der dritten Vorlesung bewiesenen) Ungleichungen

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

beweise man, dass

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Man schließe aus b) und dem Sandwich-Theorem, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ ist.

d) Man zeige die Gleichheit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ unter Zuhilfenahme der Aussage 3° der Folgerung **F14** aus der 3. Vorlesung.

(A 13) (Für Schlaufüchse)

Man beweise die Aussage 2° des Theorems **Th10** in der dritten Vorlesung: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge und X die Menge gebildet aus allen Folgengliedern, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup X$.

(A 14) (Für Schlaufüchse)

Die Dichtheitseigenschaft von $\mathbb{Q}$ (siehe **Th6** in der ersten Vorlesung) verwendend, beweise man, dasss jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist. Außerdem zeige man, dass man diese Folge monoton wachsend (bzw. fallend) wählen kann.