V 4.

DGL 2. Ordnung

Die allgemeine Form: $y'' = f(x, y, y')$,

$y = y(x)$

1. DGL der Form: $\boxed{y'' = f(x)}$

$$y'' = f(x) \iff (y')' = f(x) \quad \Big| \int \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{F(x)} + C_1 \,, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

$$y' = F(x) + C_1 \quad \Big| \int \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = \int F(x)\,dx + c_1 \cdot x + c_2 \ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

→ die allgemeine Lösung.

<u>Bsp</u>: $y'' = 2x + 3 \quad | \int$

$$y' = \int (2x+3)\,dx = x^2 + 3x + c_1 \quad | \int$$

$$y = \int (x^2 + 3x + c_1)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + c_1 x + c_2$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

$$\begin{cases} y'' = 2x + 3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

→ das Cauchyproblem

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + c_1 x + c_2$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1.$$

$$y'(x) = x^2 + 3x + c_1$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow c_1 = 2.$$

$$\boxed{y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1.}$$ → die Lösung des Cauchypbs. (AWPs)!

2. DGL der Form:

$$F(x, y'(x), y''(x)) = 0.$$

y → kommt nicht explizit vor.

Substitution: $y'(x) = z(x) \Rightarrow y''(x) = z'(x)$

$\boxed{F(x, z(x), z'(x)) = 0}$ → DGL 1. Ordnung.

$\Rightarrow z(x) = \Phi(x, c_1), \quad c_1 \in \mathbb{R}.$

Weil $y'(x) = z(x) \Rightarrow \boxed{y(x) = \int \Phi(x, c_1)\,dx + c_2 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$

durch Integration

die allg. Lösung (von der DGL in y).

Bsp: 1 $(x^2+1) \cdot y'' + 2x y' = 0.$

Subst: $y' = z \Rightarrow y'' = z'$

Einsetzen: $(x^2+1) \cdot z' + 2xz = 0.$

$$(x^2+1)\cdot z' = -2xz \quad \Big| : (x^2+1) \neq 0 .$$

$$\left.\begin{aligned} & z' = \underbrace{\frac{-2x}{x^2+1}}_{f(x)} \cdot \underbrace{z}_{g(z)} \\ & z' = \frac{dz}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{2x}{1+x^2}\cdot z \quad \Big| \cdot dx \;\; : z \neq 0 .$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{2x}{1+x^2}\,dx \quad \Big| \int \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int -\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$\ln|z| = -\ln(1+x^2) + C_1$$

$$z = e^{-\ln(1+x^2)} \cdot (\pm e^{C_1})$$

$$\boxed{z = C_2 \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad C_2 = \pm e^{C_1}}$$

$y' = z \Rightarrow y = \int \frac{c_2}{1+x^2}\,dx =$

$= c_2 \cdot \operatorname{arctg} x + c_3 \quad , \quad c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$

$z = 0$ sing. Lösung für die DGL in z.

$\Rightarrow y = c \to$ sing. Lösung für die DGL in y.

Bsp ② $y'' = x + 2y'$

Subst.: $y' = z \Rightarrow y'' = z'$

Einsetzen: $z' = x + 2z$

$z' - 2z = x$. (Lineare DGL 1. Ordnung).

Hg

Lineare DGL 2. Ordnung

Die allgemeine Form einer linearen DGL 2. Ordnung ist:

$$y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_2(x) \cdot y(x) = f(x),$$

wobei $a_1, a_2, f \in C[a,b]$.

$f(x) \neq 0 \Rightarrow$ heißt die DGL inhomogen

$f(x) = 0 \Rightarrow$ heißt die DGL homogen.

Die DGL kann mittels des Differentialoperators: $L : C^2[a,b] \rightarrow C[a,b]$

$$L(y) = y''(x) + a_1(x)\cdot y'(x) + a_2(x)\cdot y(x).$$

in der Form

$$L(y) = f \quad \text{bzw} \quad L(y) = 0$$

geschrieben werden.

Wir suchen eine Funktion $y \in C^2[a,b]$ so dass: $L(y) = f$ bzw. $L(y) = 0$.

Sei $S_0 := \{ y \in C^2[a,b] : L(y) = 0 \} \rightarrow$

$\rightarrow$ die Lösungsmenge der homogenen DGL.

$S_f := \{ y \in C^2[a,b] : L(y) = f \} \rightarrow$

$\rightarrow$ die Lösungsmenge der inhom. DGL.

<u>Satz</u>: Der Differentialoperator L, definiert wie vorher ist eine lineare Abbildung vom Vektorraum der 2-mal stetig diff'baren Funktionen auf $[a,b]$ in den Vektorraum der stetigen Fkt auf $[a,b]$.

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \cdot L(y_1) + \beta \cdot L(y_2),$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \; y_1, y_2 \in C^2[a,b].$$

<u>Bem.</u>:

$$(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(k)} = \alpha \cdot y_1^{(k)} + \beta \cdot y_2^{(k)},$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad y_1, y_2 \in C^2[a,b], \; k \le 2.$$
$$k \in \mathbb{N}.$$

$$L(y) = y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y$$

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) =$$

$$= (\alpha y_1 + \beta y_2)'' + a_1(x) \cdot (\alpha y_1 + \beta y_2)' + a_2(x) \cdot (\alpha y_1 + \beta y_2)$$

$$= \alpha \cdot y_1'' + \beta \cdot y_2'' + a_1(x) \cdot \alpha \cdot y_1' + a_1(x) \cdot \beta \cdot y_2' +$$

$$+ a_2(x) \cdot \alpha \cdot y_1 + a_2(x) \cdot \beta \cdot y_2 =$$

$$= \alpha \cdot \left(y_1'' + a_1(x) \cdot y_1' + a_2(x) \cdot y_1 \right) +$$

$$+ \beta \cdot \left(y_2'' + a_1(x) \cdot y_2' + a_2(x) \cdot y_2 \right)$$

$$= \alpha \cdot L(y_1) + \beta \cdot L(y_2) \; . \; \square \; .$$

Bem: Die Lösungsmenge der hom. DGL: $L(y)=0$. ist der Kern von L und folglich ein Untervektorraum des Raums der 2-mal stetig diff'baren Funktionen.

Satz: Die Lösungsmenge der homogenen DGL, S_0, bildet einen 2-Dimensionalen Vektorraum von $C^2[a,b]$.

Bem: S_0 ist einen linearen Vektorraum, d.h. dass jede lineare Kombination der Lösungen der DGL wird auch eine Lösung der DGL sein.

$$\forall\ y_1, y_2 \in S_0,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in S_0$$

Bem: Um die Lösungsmenge von $L(y)=0$ zu bestimmen, müssen wir eine Basis des Lösungraums bestimmen. d.h. 2 linear unabhängige Lösungen.

Def: Seien $y_1, y_2 \in C^2[a,b]$

a) y_1, y_2 linear abhängig wenn:

$(c_1, c_2) \neq (0,0)$, $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$

$$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = 0.$$

b) y_1, y_2 linear unabhängig, wenn die folgende Implikation gilt:

$$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Def: Eine Basis $\{y_1, y_2\}$ in S_0 heißt Lösungsfundamentalsystem. (L.f.s.)

Wenn $\{y_1, y_2\}$ ein L.f.s. bilden dann:

$$S_0 = \{ c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

Def: Seien $y_1, y_2 \in C^1[a,b]$. Die folgende Determinante:

$$W(x; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2(x) \end{vmatrix}, \quad x \in [a,b]$$

heißt die Wronskideterminante der Fkt. y_1, y_2.

Satz: Seien $y_1, y_2 \in C^2[a,b]$ Lösungen der linearen hom. DGL. Diese Lösungen bilden ein L.f.s. genau dann wenn $x_0 \in [a,b]$ existiert s.d.

$$W(x, y_1, y_2) \neq 0.$$

Bem.: Um die allgemeine Lösung der linearen homogenen DGL 2. Ordnung zu bestimmen, bestimmt man 2 linear unabhängige Lösungen ($W \neq 0$).

Dann ist die allgemeine Lösung:

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Bsp:

Wir betrachten die folgende DGL:

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Zeige dass $y_1(x) = e^{-x}$ und $y_2(x) = e^{-2x}$ ein L.f.s. bilden.

1. Wir beweisen dass y_1 und y_2 Lösungen der DGL sind.

$$y_1(x) = e^{-x} \Rightarrow y_1'(x) = -e^{-x}; \quad y_1''(x) = e^{-x}$$

Einsetzen: $e^{-x} + 3\cdot(-e^{-x}) + 2\cdot e^{-x} = 0$.

$0 = 0$ „w".

$$y_2(x) = e^{-2x} \Rightarrow y_2'(x) = -2e^{-2x} \Rightarrow y_2''(x) = 4\cdot e^{-2x}$$

$$4e^{-2x} - 6e^{-2x} + 2e^{-2x} = 0 \iff 0 = 0 \text{ „w"}$$

2. Lineare Unabhängigkeit der Lösungen

$$W(x; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$= -2e^{-3x} + e^{-3x} = -e^{-3x} \neq 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

$$W(x, y_1, y_2) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Aus ① + ② $\Rightarrow$ $\{y_1, y_2\}$ ein L.F.S. bilden.

Hg: $y_1(x) = 2e^{-x}$; $y_2 = -2e^{-x}$ L.f.Δ bilden ?

② Sei die folgende DGL:

$$x^2 \cdot y'' - 2xy' + 2y = 0 .$$

Zeige dass $y_1(x) = x$; $y_2(x) = x^2$ ein L.f.Δ bilden.

Schreibe die allg. Lösung der DGL.

Hg

Bem: Bestimme die allgemeine Lösung der DGL 2. Ord. wenn eine Lösung $y_1(x)$ gegeben ist.

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = 0 .$$

Subst: $y = y_1 \cdot z(x)$

$$y' = y_1' \cdot z(x) + y_1 \cdot z'(x)$$

$$y'' = y_1'' \cdot z(x) + y_1' \cdot z'(x) + y_1' \cdot z'(x) + y_1 \cdot z''(x)$$

$$= y_1'' \cdot z(x) + 2 \cdot y_1' \cdot z'(x) + y_1 \cdot z''(x)$$

Einsetzen in die DGL:

$$y_1'' \cdot z(x) + 2 \cdot y_1' \cdot z'(x) + y_1 \cdot z''(x) +$$

$$+ a_1(x)\left(y_1' \cdot z(x) + y_1 \cdot z'(x)\right) + a_2(x) \cdot y_1 \cdot z(x) = 0$$

$$y_1 \cdot z''(x) + z'(x)\left[2 \cdot y_1' + a_1(x) \cdot y_1\right] +$$

$$+ z(x) \cdot \underbrace{\left[y_1'' + a_1(x) \cdot y_1' + a_2(x) \cdot y_1\right]}_{=0} = 0 .$$

Wir wissen dass y_1 Lösung ist $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_1'' + a_1(x) \cdot y_1' + a_2(x) \cdot y_1 = 0 .$$

$$\Longrightarrow \quad y_1 \cdot z''(x) + z'(x) \cdot \left[2 \cdot y_1' + a_1(x)\, y_1 \right] = 0$$

$\triangle$ DGL der Form: $F(x, z', z'') = 0$.

Mit der Subst: $z' = u(x)$ lässt sich die DGL in z als eine DGL 1. Ordnung schreiben.

$$y_1 \cdot u'(x) + u(x) \cdot \left[2 y_1' + a_1(x) \cdot y_1 \right] = 0$$

$$u(x) = \varphi(x, c_1) \;,\; c_1 \in \mathbb{R} .$$

$$z(x) = \int \varphi(x, c_1) + C_2 \,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

$y(x) = y_1 \cdot z(x) \longrightarrow$ die allg. Lösung.

Bsp: Bestimme die allg. Lösung der folg. DGL:

$$x \cdot y'' - (x+1) \cdot y' - (x-1) \cdot y = 0,$$

wenn $y_1(x) = e^{2x}$ eine Lösung ist.

Subst: $y = y_1 \cdot z(x) = e^{2x} \cdot z(x)\ \Big)'$

$$\Rightarrow y' = 2e^{2x} \cdot z(x) + e^{2x} \cdot z'(x)\ \Big)'$$

$$\Rightarrow y'' = 4e^{2x} \cdot z(x) + 4 e^{2x} \cdot z'(x) + e^{2x} \cdot z''(x)$$

Einsetzen:

$$x \cdot \left(4e^{2x} \cdot z(x) + 4e^{2x} \cdot z'(x) + e^{2x} \cdot z''(x) \right)$$
$$- (x+1) \cdot \left(2e^{2x} \cdot z(x) + e^{2x} \cdot z'(x) \right) -$$
$$- (x-1) \cdot e^{2x} \cdot z(x) = 0.$$

$$\boxed{x \cdot z''(x) + (3-x) \cdot z'(x) = 0 .}$$

$$\boxed{z' = u(x)} \Rightarrow z'' = u'(x)$$

$$\boxed{x \cdot u'(x) + (3-x) \cdot u(x) = 0 .}$$

$\longrightarrow$ DGL 1. Ordn. (Trennung der Var)

$$u' = \frac{du}{dx}$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = (x-3) \cdot u \quad \Big| \begin{array}{l} \cdot dx \\ : x \neq 0 \\ : u \neq 0 . \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\frac{du}{u} = \frac{x-3}{x} dx \quad \Big| \int$$

$$\ln|u| = \int \left(1 - \frac{3}{x}\right) dx = x - 3\ln|x| + c_1$$

$$u = e^{x} \cdot e^{-3\ln|x|} \cdot \left(\pm e^{c_1}\right) =$$

$$= e^{x} \cdot x^{-3} \cdot c_2 , \quad c_2 \in \mathbb{R} .$$

$$z(x) = \int e^{x} \cdot x^{-3} \cdot c_2 \, dx + c_3$$

tg

$$y = y_1 \cdot z(x) = e^{2x} \cdot z(x) , \quad c_2, c_3 \in \mathbb{R} .$$