Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 8. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 29)

a) $A' = \mathbb{R} \times \{1\}$, da für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $r > 0$ gilt $(B((x,1),r) \setminus \{(x,1)\}) \cap (\mathbb{Q} \times \{1\}) \neq \emptyset$.
b) $A' = \emptyset$, weil es für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ein $r > 0$ gibt, so dass $(B((x,y),r) \setminus \{(x,y)\}) \cap \mathbb{N}^2 = \emptyset$.

(A 30)

a) Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{z^2 e^y}{x^2}, \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{z^2 e^y}{x} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2ze^y}{x}.$$

b) Es sei daran erinnert, dass für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

ist. Somit erhalten wir

$$u = \nabla f(1,0,2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,2), \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,2)\right) = (-4,4,4)$$

und

$$v = \nabla f(2,1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1,1), \frac{\partial f}{\partial z}(2,1,1)\right) = (-\frac{1}{4}e, \frac{1}{2}e, e),$$

also ist

$$\langle u, v \rangle = -4 \cdot \left(-\frac{1}{4}e\right) + 4 \cdot \frac{1}{2}e + 4 \cdot e = 7e.$$

(A 31)

a) Aus

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, 0\right) = 0_2 = \lim_{k\to\infty} \left(0, \frac{1}{k}\right), \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = 0 \text{ und } \lim_{k\to\infty} f\left(0, \frac{1}{k}\right) = 1$$

folgt, aufgrund von **Th2** (Die Charakterisierung für den Grenzwert einer Funktion mit Hilfe von Folgen) aus der 8. Vorlesung, dass f keinen Grenzwert bei 0_2 hat.
b) **1. Methode:** Es ist $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Also gilt $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, woraus

$$0 \leq g(xy) = \frac{|xy| \cdot |xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|xy|}{2}, \; \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\},$$

folgt. Wegen

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y \to 0}} |xy| = 0$$

impliziert das Sandwich-Theorem, dass $\lim\limits_{(x,y)\to 0_2} g(x,y) = 0$ ist.

2. Methode: Es ist $(x^2-y^2)^2 \geq 0$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Also ist $(x^2+y^2)^2 \geq 4x^2y^2$, woraus

$$0 \leq g(xy) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{4},\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\},$$

folgt. Wegen

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{4} = 0$$

impliziert das Sandwich-Theorem, dass $\lim\limits_{(x,y)\to 0_2} g(x,y) = 0$ ist.

3. Methode: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$x^2y^2 \leq x^4 + x^2y^2 = x^2(x^2+y^2),$$

woraus folgt, dass $g(x,y) \leq x^2$, für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}$ ist. Also ist

$$0 \leq g(x,y) \leq x^2,\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}.$$

Wegen

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2 = 0$$

impliziert das Sandwich-Theorem, dass $\lim\limits_{(x,y)\to 0_2} g(x,y) = 0$ ist.

(A 32)

Wir untersuchen zuerst die partielle Differenzierbarkeit von f in 0_2 nach x:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4-0}{2(x^4)+0} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}.$$

Wegen $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{2x} = -\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2x} = +\infty$ folgt, dass $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$ nicht existiert. Also ist f in 0_2 nach x nicht partiell differenzierbar.

Wir untersuchen nun die partielle Differenzierbarkeit von f in 0_2 nach y:

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0-y^4}{2(0+y^4)} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} -\frac{1}{2y}.$$

Wegen $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y<0}} -\frac{1}{2y} = +\infty$ und $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} -\frac{1}{2y} = -\infty$ folgt, dass $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$ nicht existiert. Also ist f in 0_2 nach y nicht partiell differenzierbar.

(A 33)

Als rationale Funktion ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}$ stetig. Wir untersuchen die Stetigkeit von f in 0_2. Für die Folge mit dem allgemeinen Glied $a^k = (\frac{1}{k}, 0)$, $k \in \mathbb{N}^*$, gelten $\lim\limits_{k\to\infty} a^k = 0_2$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f(a^k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^4 - 0}{2\left(\left(\frac{1}{k}\right)^4 + 0\right)} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Da $\lim\limits_{k\to\infty} f(a^k) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0_2)$ ist, impliziert **Th3** (Charakterisierungen für die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt) aus der 8. Vorlesung, dass f in 0_2 nicht stetig ist.

(A 34)

Sei $x \in \operatorname{int} S$. Dann gibt es eine reelle Zahl $r > 0$ mit $B(x,r) \subseteq S$. Da $x \in B(x,r)$ ist, muss auch $x \in S$ sein.

Ist nun $V \in \mathcal{U}(x)$, dann gibt es eine reelle Zahl $r' > 0$, so dass $B(x,r') \subseteq V$ ist. Für $r_0 := \min\{r, r'\}$ ist dann

$$B(x, r_0) \setminus \{x\} \subseteq (V \setminus \{x\}) \cap S,$$

also ist $(V \setminus \{x\}) \cap S \neq \emptyset$, d.h. $x \in S'$.

Somit gelten die Inklusionen $\operatorname{int} S \subseteq S$ und $\operatorname{int} S \subseteq S'$.