Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 9. Übung

# Differential- und Integralrechnung für Informatiker

**(A 35)**

a) Für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=3x^2-3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z$.
Die stationären Punkte von $f$ sind die Lösungen des folgenden Systems

$$\begin{cases} 3x^2-3=0\\ 2y=0\\ 2z=0. \end{cases}$$

Man erhält $(-1,0,0)$ und $(1,0,0)$ als die einzigen stationären Punkte von $f$.
Für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ gelten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z)=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z)=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=2,$$

also hat die Hesse-Matrix der Funktion $f$ in dem Punkt $(x,y,z)$ die folgende Gestalt

$$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 6x & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Matrizen in den beiden stationären Punkte sind also

$$H_f(-1,0,0)=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ und } H_f(1,0,0)=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Die ersten beiden Hauptminoren der Matrix $H_f(-1,0,0)$ sind $\Delta_1=-6<0$ und $\Delta_2=\begin{vmatrix} -6 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}<0$. Somit ist, nach **TH3** aus der 9. Vorlesung, die Matrix $H_f(-1,0,0)$ weder positiv, noch negativ definit. Die quadratische Form $\Phi\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ zu dieser Matrix ist

$$\Phi(h_1,h_2,h_3)=-6(h_1)^2+2(h_2)^2+2(h_3)^2.$$

Aus $\Phi(1,0,0)=-6<0$ und $\Phi(0,1,0)=2>0$ folgt, dass $H_f(-1,0,0)$ indefinit ist. Also ist $(-1,0,0)$ keine lokale Extremstelle von $f$.

Für die Hauptminoren der Matrix $H_f(1,0,0)$ gelten: $\Delta_1=6>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 6 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}>0$ und $\Delta_3=\det H_f(1,0,0)>0$. Somit ist, nach **Th3** aus der 9. Vorlesung, die Matrix $H_f(1,0,0)$

positiv definit, woraus folgt, dass $(1,0,0)$ eine lokale Minimalstelle von $f$ ist. Der dazugehörige lokale Extremwert beträgt $f(1,0,0) = -2$.

b) Für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz^2 + y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz^2 + x$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z(1+xy)$. Die stationären Punkte von $f$ sind die Lösungen des folgenden Systems

$$\begin{cases} y(z^2+1) = 0 \\ x(z^2+1) = 0 \\ 2z(1+xy) = 0. \end{cases}$$

Die ersten beiden Gleichungen ergeben jeweils $y = 0$ und $x = 0$. Durch Einsetzen in die letzte Gleichung erhält man $z = 0$. Also ist $(0,0,0)$ der einzige stationäre Punkt von $f$.

Für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gelten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = z^2+1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = 2yz,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = z^2+1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = 2xz,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 2yz, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 2xz, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2(1+xy),$$

also ist

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z^2+1 & 2yz \\ z^2+1 & 0 & 2xz \\ 2yz & 2xz & 2(1+xy) \end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Matrix im stationären Punkt ist

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\Delta_1 = 0$ ist, nach **TH3** aus der 9. Vorlesung, die Matrix $H_f(0,0,0)$ weder positiv, noch negativ definit. Die quadratische Form zu dieser Matrix ist $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(h_1,h_2,h_3) = 2h_1h_2 + 2(h_3)^2.$$

Aus $\Phi(-1,1,0) = -2 < 0$ und $\Phi(0,0,1) = 2 > 0$ folgt die Indefinitheit von $H_f(0,0,0)$. Also ist $(0,0,0)$ keine lokale Extremstelle von $f$, d.h. $f$ hat keine lokalen Extremstellen.

c) Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 12$. Die stationären Punkte von $f$ sind die Lösungen des folgenden Systems

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0. \end{cases}$$

Es folgt, dass $x^2 + y^2 = 5$ und $xy = 2$ ist. Da $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ ist, schließen wir, dass $(x+y)^2 = 9$ ist, d.h. $x + y \in \{-3, 3\}$. Also sind $x$ und $y$ die Lösungen einer der beiden Gleichungen $t^2 + 3t + 2 = 0$ und $t^2 - 3t + 2 = 0$. Die stationären Punkte von $f$ sind also $(-2,-1)$, $(-1,-2)$, $(1,2)$ und $(2,1)$.

Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gelten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x,$$

also $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$.

Somit sind die Hesse-Matrizen in den stationären Punkten

$$H_f(-2,-1) = 6\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad H_f(-1,-2) = 6\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$H_f(1,2) = 6\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_f(2,1) = 6\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aus **S2** aus der 9. Vorlesung folgt: die Matrix $H_f(-2,-1)$ ist negativ definit (weil $-12 < 0$ und die Determinante der Matrix positiv ist), $H_f(2,1)$ ist positiv definit (weil $12 > 0$ und die Determinante der Matrix positiv ist), während $H_f(-1,-2)$ und $H_f(1,2)$ indefinit sind (weil die Determinanten beider Matrizen negativ sind). Also ist $(-2,-1)$ eine lokale Maximalstelle von $f$, $(2,1)$ eine lokale Minimalstelle, während $(-1,-2)$ und $(1,2)$ keine lokalen Extremstellen sind. Die lokalen Extremwerte zu den beiden lokalen Extremstellen betragen jeweils $f(-2,-1) = 28$ und $f(2,1) = -28$.

d) Für alle $(x,y) \in (-1,\infty) \times (1,\infty)$ ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 1 - \frac{1}{(y-1)^2}.$$

Die stationären Punkte von $f$ sind also die Lösungen des Systems

$$\begin{cases} y - 1 = \frac{1}{(x+1)^2} \\ \\ x + 1 = \frac{1}{(y-1)^2}. \end{cases}$$

Es folgt, dass $(x+1)^4 = x+1$ ist. Da $x \in (-1,\infty)$, erhält man $(x+1)^3 = 1$, also $x = 0$. Somit ist $(0,2)$ der einzige stationäre Punkt von $f$. Für alle $(x,y) \in (-1,\infty) \times (1,\infty)$ gelten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{(y-1)^3},$$

also ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(x+1)^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{(y-1)^3} \end{pmatrix}.$$

Im stationären Punkt ist die Hesse-Matrix $H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Weil $2 > 0$ und die Determinante dieser Matrix positiv ist, folgt, nach **S2** aus der 9. Vorlesung, dass $H_f(0,2)$ positiv definit ist. Somit ist also $(0,2)$ eine lokale Minimalstelle von $f$. Der dazugehörige lokale Extremwert beträgt $f(0,2) = 3$.

**(A 36)**

a) Man erhält, dass

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

ist.

b) Es sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Die Hauptminoren der bei a) bestimmten Matrix $H_f(x, y, z)$ sind $\Delta_1 = 6x$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix}$ und $\Delta_3 = \det H_f(x, y, z)$. Wir stellen fest, dass $\Delta_3 = 2\Delta_2$ ist, woraus, nach **Th3** aus der 9. Vorlesung, folgt, dass $H_f(x, y, z)$ nicht negativ definit sein kann (weil nicht gleichzeitig die Ungleichungen $\Delta_2 > 0$ und $\Delta_3 < 0$ gelten können). Somit gibt es keine Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $H_f(x, y, z)$ negativ definit ist.

c) Die Gleichheiten

$$\lim_{x \to -\infty} f(x, 0, 0) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} f(x, 0, 0) = \lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

zeigen, dass $f$ sowohl beliebig kleine als auch beliebig große Werte annimmt. Daraus folgt, dass $f$ keine globalen Extremstellen hat.