Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2024-2025

3. Vorlesung

Th5 (Das Vergleichstheorem für Folgen)

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zahlenfolgen mit der Eigenschaft, dass $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \leq y_n,\ \forall n \geq n_0$. Dann gelten:

1° Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, dann ist $x \leq y$.

2° Ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

3° Ist $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Bemerkung

Haben die Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert, dann beachte man, dass

$$x_n < y_n,\ \forall n \geq n_0 \overset{\text{i. A.}}{\not\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Beispiel

Seien $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{2}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist

$$x_n < y_n,\ \forall n \geq 1,\ \text{und}\ \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Th6 (Das Sandwich-Theorem für Folgen)

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zahlenfolgen mit der Eigenschaft, dass $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \leq y_n \leq z_n,\ \forall n \geq n_0.$$

Haben die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den gleichen Grenzwert $x \in \overline{\mathbb{R}}$, dann hat auch die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert x.

F7

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen Null konvergierende Folge, dann konvergiert auch die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null.

Beweis

Sei $a > 0$, so dass $|a_n| \leq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt $|a_n| \cdot |b_n| \leq a \cdot |b_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Da $|a_n| \cdot |b_n| = |a_n \cdot b_n|$, erhält man

$$0 \leq |a_n \cdot b_n| \leq a \cdot |b_n|, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ist, ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$. Die obigen Ungleichungen liefern mit **Th6**, dass $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n \cdot b_n| = 0$ ist. Mit **Th3** aus der 2. Vorlesung folgt nun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$. $\square$

F7

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen Null konvergierende Folge, dann konvergiert auch die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null.

Beispiele

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^5+1)}{n^2+3n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Th8 (Grenzwerte und Beschränktheit)

Für eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelten die folgenden Aussagen:

1° Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

2° Ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt.

3° Ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten unbeschränkt.

Bemerkung

Die Umkehrung der obigen Aussage 1° gilt nicht, d.h. eine beschränkte Folge ist nicht unbedingt konvergent. Z.B. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent. Es gilt jedoch:

Th9

Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

Die eulersche Zahl e

- ist der gemeinsame Grenzwert der Folgen

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ und } \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*};$$

- aus **Th10** (Grenzwerte und Monotonie) $\Rightarrow$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Th12 (Grenzwerte mit e)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n > -1$ und $x_n \neq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \mathrm{e}.$$

Bsp.:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{-2n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n}\right]^{\frac{-2n^2+3}{n^2+2n}} = \mathrm{e}^{-2}.$$

Bem.: Bei Grenzwerten der Form $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{y_n}$ kann der Trick mit e nur im Fall $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ angewandt werden. Z.B. kann dieser Trick beim Bestimmen des folgenden Grenzwertes NICHT eingesetzt werden.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2}{n^2+2n}\right)^{\frac{n^2+2n}{n^2}} = 2.$$

Th13 (Stolz-Cesàro)

Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monotone und divergente Folge von Null verschiedener Zahlen (d.h. entweder ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng wachsend und hat den Grenzwert ∞, oder $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng fallend und hat den Grenzwert $-\infty$). Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass der Grenzwert

$$\ell := \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$$

existiert, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell.$$

F14

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine Zahlenfolge. Dann gelten:

1° Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots a_n}{n} = a$.

2° Ist $a_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = a$.

3° Ist $a_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.