Algorithmische Graphentheorie

Kapitel 8: Färbungen

Babeş-Bolyai Universität, Fachbereich Informatik,
Klausenburg

Beispiel 1: Stundenplanerstellung

Zunächst ordnen wir allen Unterrichtsstunden einen Knoten zu. Alle Stunden, die gemeinsame Teilnehmer (Lehrer oder Schüler) haben, und deswegen nicht gleichzeitig stattfinden können, werden mit einer Kante verbunden. Außerdem ordnen wir jeder Zeit, zu der Veranstaltungen stattfinden können, eine eindeutige Farbe zu.

Dann versuchen wir die Knoten in dem entstandenen Graphen derart zu färben, dass **keine zwei benachbarten Knoten die gleiche Farbe** haben, d.h. die zugehörigen Veranstaltungen nicht gleichzeitig stattfinden. Alternativ können wir auch, statt die möglichen Unterrichtszeiten vorher festzulegen, versuchen, den Graphen mit möglichst wenigen Farben zu färben. Die benötigte Anzahl Farben gibt dann an, wie viele Unterrichtszeiten mindestens nötig sind.

Beispiel 2: Frequenzplanung im Mobilfunk

Zur Übertragung von Daten steht im Mobilfunk jedem Anbieter eine beschränkte Anzahl von Frequenzbändern zur Verfügung. Betrachten wir nun einen Anbieter mit mehreren Mobilfunk-Antennen, so muss dieser festlegen, auf welcher Frequenz welche Antenne senden soll.

Hierbei ist zu beachten, dass es, wenn zwei Antennen auf der gleichen Frequenz senden, zu Interferenzen kommen kann, die, wenn sie einen gewissen Schwellenwert überschreiten, das gesendete Signal unbrauchbar machen können. Daher dürfen bestimmte Antennen nicht auf der gleichen Frequenz senden. Andererseits stehen dem Anbieter im Normalfall weniger Frequenzbänder zur Verfügung, als er Antennen hat. Wie soll er entscheiden, welche Antenne auf welcher Frequenz sendet?

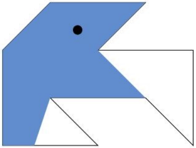
Beispiel 3: Landkartenfärbung

Eines der vielleicht bekanntesten Probleme, das sich mit Hilfe der Graphentheorie lösen lässt, ist das Problem der Landkartenfärbung. Hierbei möchte man eine Landkarte so einfärben, dass zwei Länder, die ein Stück Grenze gemeinsam haben, niemals die gleiche Farbe haben.

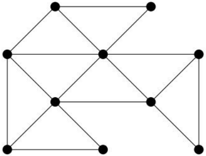
Dies ist natürlich einfach möglich, indem man für jedes Land eine andere Farbe wählt. Bei sehr großen Karten führt dies jedoch dazu, dass viele Länder ähnliche Farben bekommen und daher, wenn sie benachbart sind, schwer zu unterscheiden sind. Daher möchte man eine Landkarte oft mit **möglichst wenig** verschiedenen Farben erstellen.

Beispiel 4: Museumswärter (1/3)

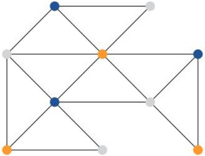
Ein Museum möchte seine Wärter so platzieren, dass sich die gesamte Ausstellungsfläche im Blickfeld von mindestens einem der Wärter befindet. Wir gehen davon aus, dass alle Wärter einen Rundumblick haben, vergleiche Abbildung (a). Wo sollte das Museum die Wärter aufstellen und wie viele reichen aus, um die ganze Fläche zu überwachen?



(a) Sichtfeld



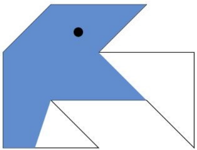
(b) Zerlegung in Dreiecke



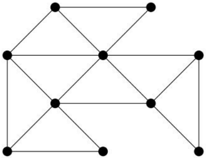
(c) Färbung

Beispiel 4: Museumswärter (2/3)

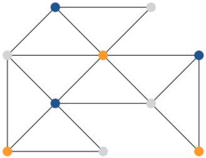
Um diese Frage zu beantworten, können wir die Ausstellungsfläche in Dreiecke zerlegen, vergleiche Abb. (b). Ein Wärter, der in einem der Knoten des entstehenden Graphen steht, kann alle angrenzenden Dreiecke überblicken. Es genügt also, wenn es für jedes Dreieck eine Ecke gibt, an der ein Wärter steht.



(a) Sichtfeld



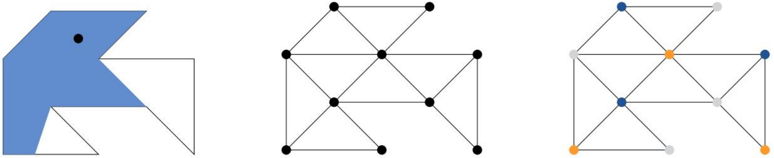
(b) Zerlegung in Dreiecke



(c) Färbung

Beispiel 4: Museumswärter (3/3)

Wir können daher versuchen, die Knoten mit drei Farben derart zu färben, dass **benachbarte Knoten unterschiedliche Farben** haben, d.h. jedes Dreieck drei verschiedenfarbige Ecken hat, vergleiche Abbildung (c). Wählen wir dann die Farbe, die am seltensten auftritt, und platzieren in diesen Knoten einen Wärter, so können wir das gesamte Museum mit höchstens Anzahl der Ecken/3 Wärtern abdecken.



(a) Sichtfeld (b) Zerlegung in Dreiecke (c) Färbung

Chromatische Zahl

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Eine Abbildung $c\colon V \to \{1, \dots, k\}$ heißt *Knotenfärbung* (*vertex colouring*) mit k Farben, wenn für jedes Paar $v, w \in V$ **benachbarter** Knoten $c(v) \neq c(w)$ gilt.
- Jedes Element $i \in \{1, \dots, k\}$ heißt *Farbe* und die Menge $c^{-1}(i) := \{v \in V \mid c(v) = i\}$ ist die i-te *Farbklasse* von c.
- Die Zahl

  $$\chi(G) := \min\{k : \exists \text{ Knotenfärbung von } G \text{ mit } k \text{ Farben}\}$$

  heißt *chromatische Zahl* (*chromatic number*) von G.

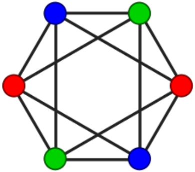
Die eben besprochenen Beispiele lassen sich also auf die folgenden Fragen zurückführen: Wie findet man die chromatische Zahl? Wie findet man überhaupt eine Knotenfärbung?

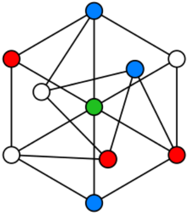
Frage. Hat jeder Graph eine Knotenfärbung?

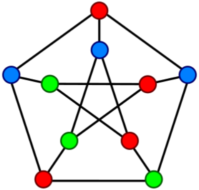
Ja: wähle einfach eine andere Farbe für jeden Knoten. Dies ist natürlich keine interessante Lösung. Wir sind daher interessiert an möglichst effizienten Knotenfärbungen, also Knotenfärbungen, die mit einem Minimum an Farben auskommen.

Bemerkung: Ein bipartiter Graph ist nichts anderes als ein Graph mit chromatischer Zahl 2.

BEISPIELE

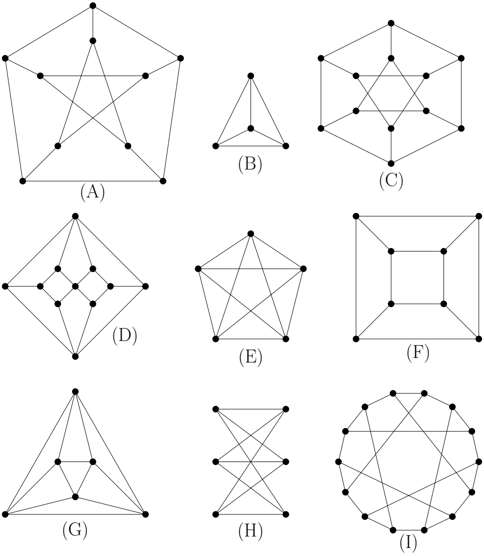






Vorsicht: obige Färbungen geben, a priori, nur eine obere Schranke für χ. Man muss dann beweisen, dass man nicht mit $< \chi$ Farben färben kann.

Aufgabe. Geben Sie für folgende Graphen möglichst effiziente Knotenfärbungen an – wie viele Farben sind mind. nötig?



Lösung.
(A) 3, s. Folie 10.
(B) 4, da vollständiger Graph.
(C) 3.
(D) 2, da bipartit.
(E) 5, da vollständiger Graph.
(F) 2, da bipartit.
(G) 3.
(H) 2, da bipartit.
(I) 2, da bipartit.

Sequentieller Färbungsalgorithmus

Wiederholung: Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann heißt

$$\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg(v)$$

der *Maximalgrad* von G.

Ein einfaches Verfahren, mit dem man eine Knotenfärbung bestimmen kann, ist der sequentielle Färbungsalgorithmus. Dieser verwendet aber nicht notwendigerweise die minimale Anzahl Farben.

Sequentieller Färbungsalgorithmus

Input: Ein ungerichteter, einfacher Graph $G = (V, E)$. Setze $n := |V|$.

1. Lege eine beliebige Reihenfolge $v_1, \ldots, v_n$ der Knoten fest.
2. Setze $c(v_1) = 1$.
3. **for** $i = 2, \ldots, n$ **do**
   Setze
   $$c(v_i) = \min\{q \in \mathbb{N} : \forall j < i \text{ mit } \{v_j, v_i\} \in E \text{ gilt } c(v_j) \neq q\}.$$
   end for

Output: Die Knotenfärbung c des Graphen G.

Sequentieller Färbungsalgorithmus

Proposition. *Es sei G ein ungerichterer, einfacher Graph. Dann ist der Algorithmus wohldefiniert und erzeugt eine Knotenfärbung mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben.*

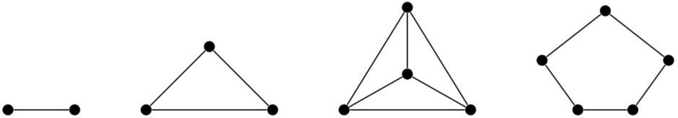
BEWEIS

- Da G endlicher Ordnung ist, gibt es in jeder Iteration eine natürliche Zahl q, die der Bedingung aus Schritt 3 genügt, nämlich i. Folglich ist der Algorithmus wohldefiniert.
- Die erzeugte Abbildung ist eine Knotenfärbung: angenommen, es gäbe benachbarte Knoten $v_i \neq v_j$ mit $c(v_i) = c(v_j)$ und o.B.d.A. $i > j$.
- Dann wird in der i-ten Iteration die Farbe $c(v_i)$ so gewählt, dass sie von der Farbe aller schon betrachteten, zu v_i benachbarten, Knoten verschieden ist.
- Dies schließt aber den Knoten v_j ein, daher kann nicht $c(v_i) = c(v_j)$ gelten.
- Es sei $v_i \in V$ beliebig. Dann gibt es zu v_i genau $\deg(v_i)$ Nachbarn, folglich gilt $c(v_i) \leq \deg(v_i) + 1$.
- Daher ist

$$\max_{v_i \in V} c(v_i) \leq \Delta(G) + 1.$$

SEQUENTIELLER FÄRBUNGSALGORITHMUS

Korollar. *Für jeden ungerichteten, einfachen Graphen G gilt* $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.



(a) K_2 (b) K_3, Kreis der Länge 3 (c) K_4 (d) Kreis der Länge 5

Graphen G mit $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Verbesserter Färbungsalgorithmus

Im sequentiellen Färbungsalgorithmus von Folie 14 hatten wir eine **beliebige** Reihenfolge $v_1, \ldots, v_n$ der Knoten festgelegt.

Wir betrachten nun den folgenden, verbesserten Färbungsalgorithmus, bei dem die Reihenfolge der Knoten nicht mehr beliebig festgelegt wird. Dieser liefert für einen nichtregulären Graphen G stets eine Knotenfärbung, die mit höchstens $\Delta(G)$ Farben auskommt.

(Wiederholung: ein Graph G ist regulär, falls alle Knoten in G denselben Grad haben.)

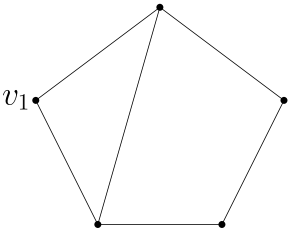
Input: Ein ungerichteter, einfacher, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$. Setze $n := |V|$. G habe mindestens einen Knoten s mit $\deg(s) < \Delta(G)$. (G sei also nicht regulär.)

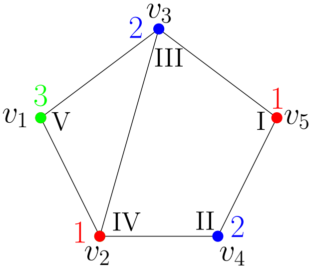
1. Führe Breiten- oder Tiefensuche mit Startknoten s durch und nummeriere die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ von G in der Reihenfolge ihres Auftretens.
2. Setze $c(v_n) = 1$.
3. **for** $i = n - 1, \ldots, 1$ **do**
   Setze
   $$c(v_i) = \min\{q \in \mathbb{N} : \forall j > i \text{ mit } \{v_j, v_i\} \in E \text{ gilt } c(v_j) \neq q\}.$$
   end for

Output: Die Knotenfärbung c des Graphen G.

Beispiel

Da der unten abgebildete Graph nicht regulär ist, kann man den verbesserten Färbungsalgorithmus darauf anwenden. Wir wenden BFS mit Startknoten v_1 an und finden dann mithilfe dieses Algorithmus eine Knotenfärbung:





Römische Zahlen geben die Reihenfolge an, in der Knoten gefärbt werden.

Verbesserter Färbungsalgorithmus

Dieser Algorithmus unterscheidet sich von dem vorherigen nur dadurch, dass wir die Reihenfolge der Knoten nicht mehr beliebig festlegen, sondern durch einen Spannbaum bestimmen.

Satz. *Es sei* $G = (V, E)$ *ein ungerichterer, einfacher, zusammenhängender Graph mit (mindestens) einem Knoten* $s \in V$ *mit* $\deg(s) < \Delta(G)$. *Dann ist der verbesserte Färbungsalgorithmus wohldefiniert und erzeugt eine Knotenfärbung mit höchstens* $\Delta(G)$ *Farben.*

Beweis (1/2)

- Da G zusammenhängend ist, sind Breiten- und Tiefensuche wohldefiniert und finden Wege zu allen Knoten $v \in V$.
- Abgesehen von der dadurch erzeugten Nummerierung der Knoten stimmt der Algorithmus mit dem sequentiellen Färbungsalgorithmus überein und findet daher eine Knotenfärbung c.

Beweis (2/2)

- Es sei nun $v_i \in V$ ein beliebiger Knoten mit $i > 1$.
- v_i hat genau $\deg(v_i)$ Nachbarn.
- Da zwischen v_1 ($= s$) und v_i ein Weg im Suchbaum existiert und alle Knoten auf diesem Weg Index $< i$ haben, können höchstens $\deg(v_i) - 1 \leq \Delta(G) - 1$ der Nachbarn von v_i in der Menge $\{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ enthalten sein und damit vor v_i eine Farbe erhalten haben.
- Also gilt für alle $i > 1$:

$$c(v_i) \leq \deg(v_i) - 1 \underbrace{+1}_{\text{Farbe für } v_i} \leq \Delta(G).$$

- Da $\deg(v_1) = \deg(s) \leq \Delta(G) - 1$ gilt, ist auch $c(v_1) \leq \Delta(G)$.
- Insgesamt folgt

$$\max_{v_i \in V} c(v_i) \leq \Delta(G).$$

Sequentieller Färbungsalgorithmus

Lemma. *Es sei G ein ungerichteter, einfacher Graph. Ist G vollständig oder ein Kreis ungerader Länge, so gilt* $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

BEWEIS (1/2)

- Es sei G ein vollständiger Graph mit n Knoten. Dann gilt für alle $v \in V$: $\deg(v) = n - 1$.
- In G kann es keine zwei Knoten derselben Farbe geben, da alle Knoten benachbart sind. Folglich ist

$$\chi(G) = n = 1 + \max_{v \in V} \deg(v) = 1 + \Delta(G).$$

Beweis (2/2)

- Es sei $G = v_1 v_2 \dots v_n$ nun ein Kreis ungerader Länge. Dann gilt für alle $v \in V$: $\deg(v) = 2$.
- Wir müssen also zeigen, dass es keine Knotenfärbung gibt mit ein oder zwei Farben. Ersteres ist trivialerweise unmöglich.
- Angenommen, es gibt eine Knotenfärbung mit zwei Farben.
- O.B.d.A. habe v_1 Farbe 1. Somit muss v_2 Farbe 2 haben.
- Allgemein gilt also: Knoten mit ungeradem Index erhalten Farbe 1, Knoten mit geradem Index Farbe 2.
- Dies bedeutet jedoch, dass Knoten v_1 und v_n beide Farbe 1 erhalten, obwohl diese benachbart sind – ein Widerspruch.
- Kreise ungerader Länge benötigen also $\Delta(G) + 1 = 2 + 1 = 3$ Farben.

Satz von Brooks

Es stellt sich heraus, dass vollständige Graphen und Kreise ungerader Länge die **einzigen** Graphen G sind, für die wir $\Delta(G) + 1$ Farben benötigen:

Satz (Brooks, 1941). *Es sei G ein ungerichteter, einfacher, zusammenhängender Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$, außer G ist vollständig oder ein Kreis ungerader Länge. In diesen beiden Fällen gilt $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.*

Die Bestimmung der chromatischen Zahl beliebiger Graphen und die Bestimmung von Knotenfärbungen mit $\chi(G)$ Farben sind schwere Probleme, für die keine schnellen Verfahren existieren. Betrachtet man jedoch spezielle Klassen von Graphen, so wird das Problem einfacher.

Bestimmung der chromatischen Zahl

Proposition. *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, einfacher Graph mit $E \neq \emptyset$. Dann ist $\chi(G) = 2$ genau dann, wenn G bipartit ist. In diesem Fall bestimmt der sequentielle Färbungsalgorithmus eine Knotenfärbung mit zwei Farben.*

Beweis. Es gilt $\chi(G) = 2$ genau dann, wenn V sich in zwei disjunkte, nichtleere Mengen V_1, V_2 aufteilen lässt, sodass keine Kanten zwischen zwei Knoten aus der gleichen Menge existieren und mindestens eine Kante zwischen V_1 und V_2 besteht.

Dies ist aber genau die Definition dafür, dass ein Graph mit $E \neq \emptyset$ bipartit ist. Da alle Nachbarn eines Knotens aus V_1 in V_2 liegen und umgekehrt, kommt der sequentielle Färbungsalgorithmus bei solchen Graphen mit 2 Farben aus.

Färbung planarer Graphen

Die Färbung von planaren Graphen (s. Kap. 6) ist besonders interessant, da ein enger Zusammenhang zur Färbung von Landkarten besteht. Betrachten wir eine Landkarte, so können wir die Grenzen von Ländern als Kanten eines Graphen G auffassen, dessen Knoten die Stellen sind, wo sich drei oder mehr Länder berühren. Dieser Graph G ist planar.

Für die Färbung der Landkarte ist allerdings ein anderer Graph G^* wichtiger, der als Knoten gerade die Länder hat und in dem Kanten zwischen zwei Knoten bestehen, wenn die Länder eine gemeinsame Grenze haben. Dies ist genau der sogenannte **duale Graph**, den wir in Kapitel 6 besprochen hatten.

Obere Schranke für die chromatische Zahl in planaren Graphen

Satz. *Für jeden ungerichteten, einfachen,* ***planaren*** *Graphen G gilt* $\chi(G) \leq 6$.

BEWEIS (1/2)

- Es gibt in $G_0 := G$ mindestens einen Knoten v_1 mit $\deg(v_1) \leq 5$. (Siehe Kap. 6.)
- Entfernen wir diesen Knoten und alle inzidenten Kanten aus G, so erhalten wir den ebenfalls planaren Graphen G_1.
- Dieser besitzt folglich auch einen Knoten v_2 mit $\deg(v_2) \leq 5$.
- Wir entfernen nun solange immer einen Knoten vom Grad höchstens 5, bis wir einen planaren Graphen G_i mit höchstens sechs Knoten erhalten.
- Dieser lässt sich offensichtlich mit höchstens sechs Farben färben.

Beweis (2/2)

- Nehmen wir nun zu G_i wieder den Knoten v_i hinzu, so hat dieser höchstens fünf Nachbarn in G_i.
- Somit lässt sich v_i färben mit einer der sechs uns zur Verfügung stehenden Farben.
- Daher lässt sich auch der Graph G_{i-1} mit höchstens sechs Farben färben.
- Dieses Argument können wir nun so lange wiederholen, bis wir wieder beim Ausgangsgraphen G angelangt sind.

Färbung planarer Graphen

Wenn man allerdings probiert, die Knoten planarer Graphen mit einer minimalen Anzahl von Farben zu färben, stellt man fest, dass man stets mit weniger als sechs Farben auskommt. Daher wollen wir unsere Abschätzung verschärfen:

Satz (Heawood, 1890).
Jeder ungerichtete, einfache, planare Graph G erfüllt $\chi(G) \leq 5$.

Beweis (1/7)

- Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Knoten n in dem planaren Graphen G geführt.
- **Induktionsanfang**: Aussage gilt offensichtlich für $n = 1$.
- **Induktionsschritt**: Der Satz gilt für $n - 1$ Knoten $\rightarrow$ Der Satz gilt für n Knoten.
- Wie wir in Kapitel 6 gesehen haben, hat jeder planare Graph mindestens einen Knoten mit Grad < 6.
- **Fall 1**: In G gibt es einen Knoten v mit Grad < 5.
- Man wende die Induktionsannahme auf den Graphen $G - v$ an: $G - v$ kann mit höchstens fünf Farben gültig gefärbt werden.
- v hat höchstens vier Nachbarn und kann mit der fünften vorhandenen Farbe gefärbt werden.
- Der Graph G kann also gültig gefärbt werden.

Beweis (2/7)

- **Fall 2**: Es gibt in G keinen Knoten mit Grad < 5.
- Aus der eulerschen Polyederformel folgt dann, dass es einen Knoten w in G mit Grad 5 geben muss.
- Der Graph $G - w$ ist nach Induktionsannahme mit fünf Farben färbbar.
- **Fall 2.1**: Die fünf Nachbarn von w sind nur mit höchstens *vier* paarweise unterschiedlichen Farben gefärbt.
- Dann wird w mit der fünften vorhandenen Farbe gefärbt und man erhält eine gültige Färbung von G.

BEWEIS (3/7)

- **Fall 2.2**: Die fünf Nachbarn von w sind in *fünf* paarweise unterschiedlichen Farben gefärbt.
- Wähle eine beliebige ebene Einbettung von G und bezeichne die Nachbarn von w mit $w_1, \ldots, w_5$ im Uhrzeigersinn.
- Gibt es nun einen $w_1 w_3$-Weg P, der nicht über w führt, also in $G - w$ liegt, und nur die Farben $\underbrace{c(w_1)}_{\text{Farbe von } w_1}$ und $c(w_3)$ (nach Induktionsannahme abwechselnd) verwendet?

BEWEIS (4/7)

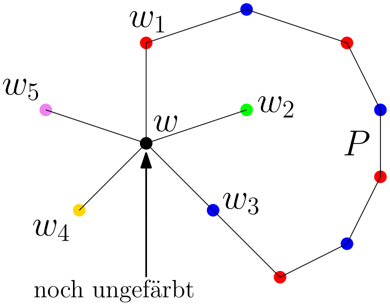
- **Fall 2.2.1**: *Nein*.
- Dann wird der Knoten w_1 auf die Farbe von w_3 umgefärbt.
- Alle benachbarten Knoten von w_1 mit der Farbe von w_3 werden auf die ehemalige Farbe von w_1 umgefärbt usw.
- Man erhält eine neue, gültige Färbung mit höchstens fünf Farben von $G - w$.
- Die Nachbarn von w verwenden nun jedoch nur noch vier Farben, denn jetzt haben w_1 und w_3 dieselbe Farbe, und w kann mit der fünften vorhandenen Farbe gefärbt werden, was eine gültige Graphenfärbung von G ergibt.

Beweis (5/7)

- **Fall 2.2.2**: *Ja*.
- Bemerkung: Durch das Wechseln der Färbung wie im vorigen Fall kann man hier nichts erreichen, da im Endeffekt nur w_1 und w_3 die Farben wechseln.
- Betrachte die Knoten w_2 und w_4.
- Zwischen diesen beiden Knoten kann es keinen Weg geben, der abwechselnd die Farben $c(w_2)$ und $c(w_4)$ verwendet, denn dieser Weg müsste unweigerlich über einen Knoten gehen, der auf dem Weg P liegt und damit eine andere Farbe als die von w_2 und w_4 hat:

BEWEIS (6/7)

Das begründet sich dadurch, dass w_2 von dem Kreis $(V(P) \cup \{w\}, E(P) \cup \{ww_1, ww_3\})$ eingekreist wird – hier wird der jordansche Kurvensatz benutzt und es ist entscheidend, dass G planar ist.



Beweis (7/7)

- Somit kann man auf w_2 und w_4 dasselbe Umfärbprinzip anwenden wie im vorigen Fall auf w_1 und w_3.
- Damit haben die fünf Nachbarn von w wieder nur höchstens vier Farben und man kann w mit der fünften vorhandenen Farbe färben, um eine gültige Färbung von G zu erreichen.
- Damit ist der Beweis abgeschlossen.
- Bemerkung: Man kann diesen Beweis verwenden, um einen Algorithmus zu erhalten, der eine 5-Färbung eines planaren Graphen G der Ordnung n und Größe m in $O((m+n)n)$ Zeit liefert. (Es gibt jedoch auch Linearzeitalgorithmen zur Bestimmung einer 5-Färbung.)

Vierfarbensatz

Tatsächlich gilt sogar die noch schärfere Aussage des folgenden Satzes, welcher unter dem Namen **Vierfarbensatz** bekannt ist. Die Behauptung wurde zwar schon 1852 von Guthrie formuliert, bis zu einem ersten Beweis, der auf dem Einsatz von Computern beruht, dauerte es jedoch bis 1976.

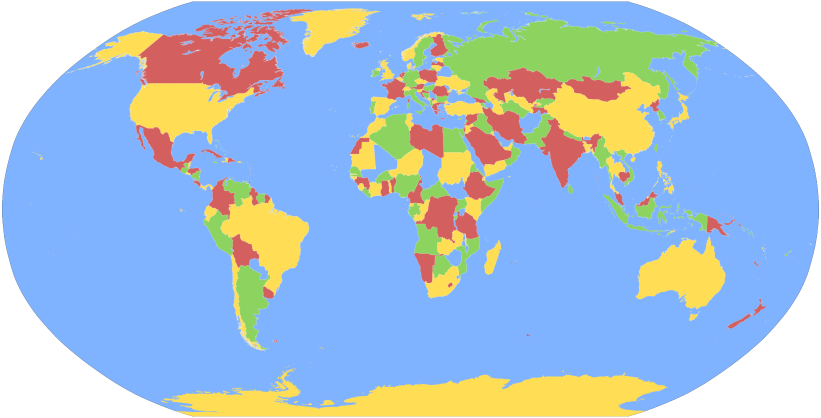
In den ersten Versionen des damals verwendeten Programms fand sich jedoch ein Fehler. Viele Mathematiker lehnten den computerbasierten Beweis außerdem ab, weil er von einem Menschen unmöglich nachvollzogen werden konnte.

Deswegen wurden 1997 und 2005 einfachere (aber immer noch hochkomplizierte) Beweise vorgeschlagen, die aber immer noch nicht ohne den Einsatz von Computern auskommen.

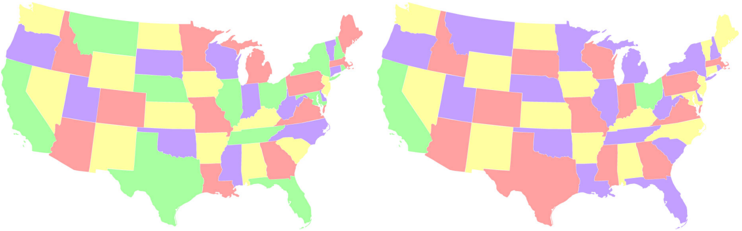
Vielleicht der wichtigste Satz der Graphentheorie:

Satz (Appel und Haken, 1976; Robertson, Sanders, Seymour und Thomas, 1997).
Jeder ungerichtete, einfache, planare Graph G erfüllt $\chi(G) \leq 4$.

Es ist üblich, diesen Satz in seiner dualen Fassung zu visualisieren: man kann die Länder und Meere einer Landkarte (also Flächen eines ebenen Graphen) stets mit höchstens vier Farben färben derart, dass keine zwei benachbarten Flächen dieselbe Farbe erhalten:

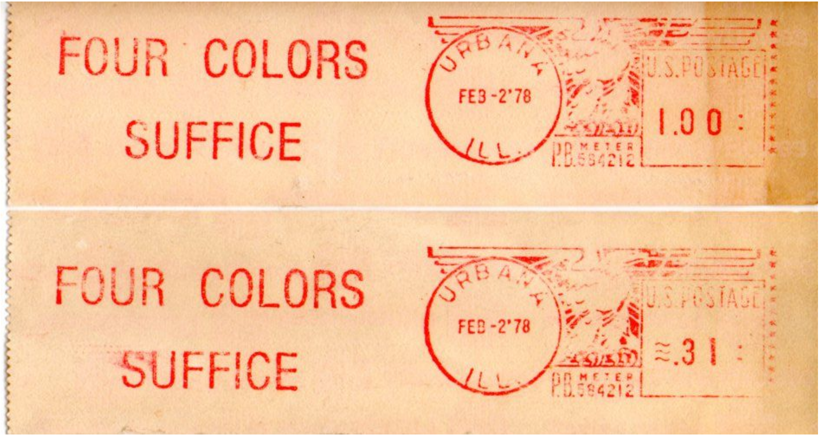


Ehrlicherweise muss man zugeben, dass dies praktisch gesehen keine besonders gute Färbung ist: Man assoziiert blau mit Wasser, was bei dieser Darstellung insbesondere auf dem afrikanischen Kontinent zu falschen Schlüssen führen könnte...

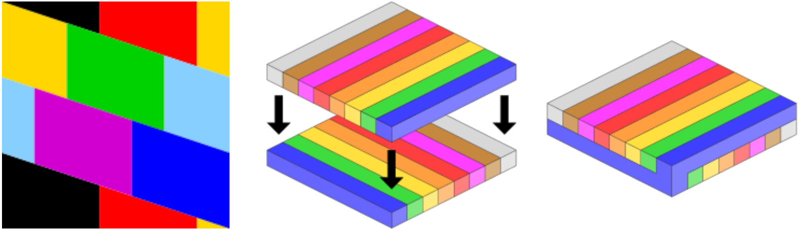


Zwei der 533.816.322.048 Färbungen der *Contiguous United States* (48 Bundesstaaten). Links eine ausgewogene Färbung (jede Farbe kommt genau 12 mal vor), rechts eine Färbung, in der die Farbe grün so wenig wie möglich verwendet wird (2 mal).

Vollständigkeitshalber sei auch hier bemerkt: eigentlich müsste die unbeschränkte Fläche auch eine Farbe bekommen – weiß ist nicht zulässig. Rechts kann man dies reparieren, in dem man die Farben von Kalifornien (grün) und Nevada (gelb) vertauscht und die Farben von Ohio (grün) und Kentucky (gelb) vertauscht und dann die unbeschränke Fläche grün färbt.



Freistempel mit Zusatzinschrift FOUR COLORS SUFFICE, vom Fachbereich Mathematik der University of Illinois at Urbana-Champaign, USA.



Links: Auf dem Torus benötigen wir manchmal 7 Farben, es gibt jedoch keine Graphen auf dem Torus, die mehr benötigen (Heawood, 1890);

Mitte und rechts: Im 3-dimensionalen Raum gibt es keine obere Schranke für die Anzahl der benötigten Farben.

Museumswärterproblem

Wir kommen noch einmal auf das Museumswärterproblem zurück. Um dieses zu lösen, hatten wir das Museum mit einem planaren Graphen modelliert, dessen Knoten wir mit drei Farben färben wollten. Nach dem Vierfarbensatz lässt sich der Graph immer mit höchstens vier Farben färben.

Wir wollen uns nun überlegen, warum in dem hier betrachteten Fall schon drei Farben ausreichen. Dazu nutzen wir eine Eigenschaft des Graphen aus: Da der zu überwachende Raum keine *Löcher* hatte, ist der entstehende Graph kreisplanar (siehe Folie 5, Abb. (b)). Wir zeigen daher, dass jeder kreisplanare Graph mit **drei Farben** gefärbt werden kann.

Satz. *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, einfacher, kreisplanarer Graph. Dann gelten:*

1. *Es gibt mindestens einen Knoten $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 2$; und*
2. $\chi(G) \leq 3$.

Zur Erinnerung: Ein Graph G heißt *kreisplanar*, wenn er eine ebene Graphendarstellung besitzt, in der alle Knoten am Rand der gleichen – üblicherweise der unbeschränkten – Fläche liegen. G heißt *maximal kreisplanar*, wenn G kreisplanar ist, aber jede hinzugefügte Kante einen Graphen entstehen lässt, der nicht mehr kreisplanar ist.

Beweis von Aussage 1 (1/3)

- O.B.d.A. sei G **maximal** kreisplanar (ansonsten füge Kanten hinzu, bis der resultierende Graph maximal kreisplanar ist).
- Dann ist G 2-zusammenhängend [wieso?] und planar.
- Wir betrachten eine Darstellung von G in der Ebene, in der alle Knoten auf dem Rand der unbeschränkten Fläche F liegen.
- Nach der eulerschen Polyederformel gilt

$$n - k + f = 2,$$

wobei $n := |V(G)|$, $k := |E(G)|$ und f die Anzahl der Flächen von G ist.
- Andererseits ist jede beschränkte Fläche von G ein Dreieck und der Rand von F ein Kreis der Länge n. Somit gilt

$$3(f-1) + n = 2k, \quad \text{also} \quad 3(f-1) = 2k - n.$$

Beweis von Aussage 1 (2/3)

- Beide Formeln zusammen ergeben

$$f - 1 = n - 2,$$

d.h. es gibt $n - 2$ Dreiecke in G.

- Da jede der n Kanten im Rand von F auch zum Rand mindestens eines dieser Dreiecke gehört, muss es ein Dreieck geben, das zwei Kanten e_1, e_2 mit F teilt (Schubfachprinzip).
- Der Knoten, der inzident zu e_1 und e_2 ist, hat Grad 2 in G. Damit ist Aussage 1 bewiesen.

Beweis von Aussage 2 (3/3)

- Induktion über n. Für $n \leq 3$ offensichtlich.
- Es sei die Aussage nun für alle kreisplanaren Graphen mit n Knoten gezeigt und G ein kreisplanarer Graph mit $n+1$ Knoten.
- Entferne einen Knoten v von Grad 2 aus G. (Dieser existiert nach Aussage 1.)
- Nach Induktionsvoraussetzung lässt sich der entstehende kreisplanare Graph mit n Knoten mit höchstens drei Farben färben.
- Da v genau zwei Nachbarn in G hat, lässt sich auch G mit höchstens drei Farben färben.

Wir besprechen das Zusammenspiel zwischen dem Vierfarbensatz und Kapitel 7: Hamiltonsche Graphen. Tatsächlich war es eine Vermutung von Tait, die das Hamiltonkreisproblem erst so richtig ins Zentrum der Graphentheorieforschung brachte:

Vermutung (Tait, 1884). *Jeder planare, 3-zusammenhängende, 3-reguläre Graph hat einen Hamiltonkreis.*

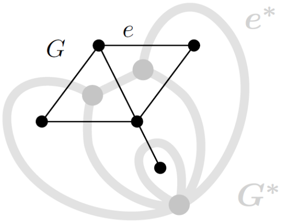
Tait hatte zeigen können, dass *wenn seine Vermutung gilt*, er den Vierfarbensatz beweisen kann. Wir skizzieren nun die Idee anhand eines Beispiels.

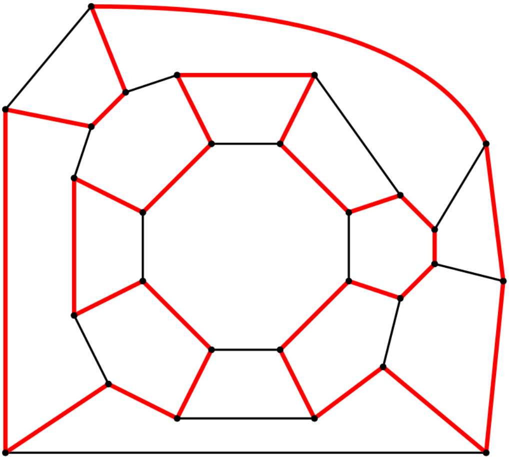
WIEDERHOLUNG

Baum: zusammenhängender, kreisfreier Graph.

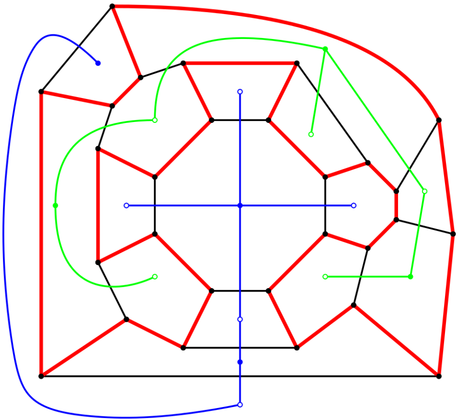
Bipartit: chromatische Zahl 2. Jeder Baum ist bipartit.

Dual: Es sei $G = (V, E)$ die ebene Darstellung eines planaren Graphen. Dann ist $G^* = (V^*, E^*)$ der zu G *duale* Graph, wenn gelten: In jeder Fläche F von G liegt genau ein $v^* \in V^*$, in jeder Fläche F^* von G^* liegt genau ein $v \in V$, jede Kante $e \in E$ schneidet genau eine Kante $e^* \in E^*$ und jede Kante $e^* \in E^*$ schneidet genau eine Kante $e \in E$.

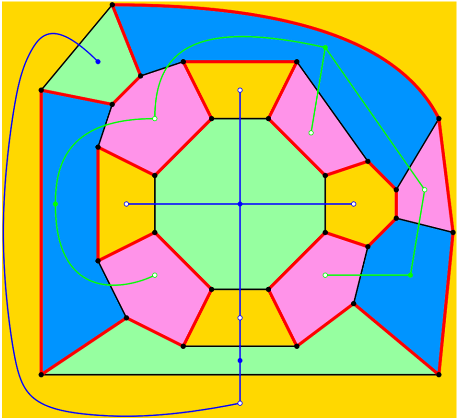




Ein planarer, 3-zusammenhängender, 3-regulärer Graph.
Nehmen wir an, die taitsche Vermutung trifft zu. Dann enthält dieser Graph einen Hamiltonkreis (in rot).

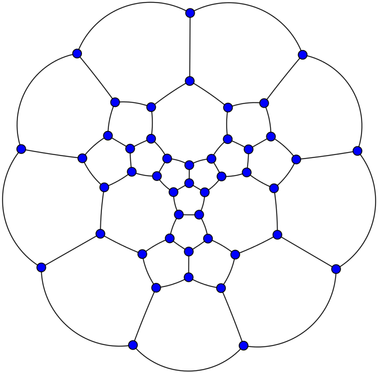


Nehme das Innere und das Äußere des Hamiltonkreises – unter Anwendung des jordanschen Kurvensatzes für Polygone – und betrachte die dualen Graphen dazu. Diese sind Bäume und somit bipartit.

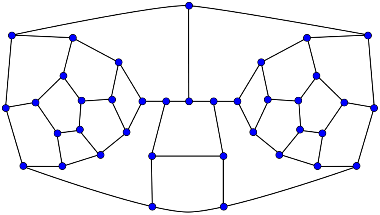


Nun ist es leicht, die Flächen des ursprünglichen Graphen mit 4 Farben zu färben, sodass keine zwei benachbarten Flächen gleichfarbig sind.

- Es stellte sich jedoch heraus, dass die taitsche Vermutung **nicht wahr** ist.
- Tutte war der erste, der ein Gegenbeispiel lieferte (1946).
- Später wurden viele Gegenbeispiele mithilfe des Kriteriums von Grinberg (Kap. 7) gefunden, z.B.:



- Das kleinste Gegenbeispiel wurde vom Nobelpreisträger Lederberg (und, unabhängig und quasi zeitgleich, von Bosák and Barnette) gefunden:



- Die Minimalität wurde von Holton und McKay bewiesen.
- Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass es eigentlich sechs paarweise nicht isomorphe Graphen derselben Ordnung gibt, die die obigen Eigenschaften innehaben. Diese sind jedoch strukturell äußerst ähnlich, sodass man durchaus von *dem* kleinsten Gegenbeispiel sprechen kann.

Kantenfärbungen

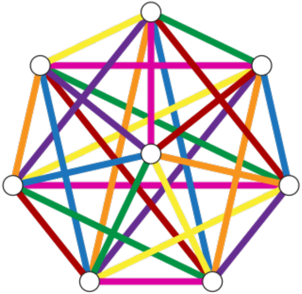
Wir beenden dieses Kapitel mit einer kurzen Übersicht zu **Kanten**färbungen, die auch eine wichtige Rolle in der Graphentheorie spielen.

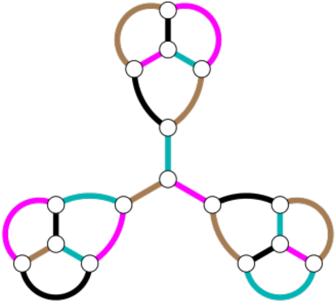
Analog zu Knotenfärbungen, müssen in einer Kantenfärbung eines Graphen alle Kanten des Graphen derart gefärbt werden, dass zu einem Knoten inzidente Kanten verschiedene Farben erhalten. Die kleinste Anzahl Farben, womit dies für einen Graphen G möglich ist, heißt der *chromatische Index* $\chi'(G)$ von G. Ein fundamentaler Satz lautet:

Satz (Vizing, 1964). *Der chromatische Index eines Graphen G ist entweder* $\Delta(G)$ *oder* $\Delta(G) + 1$.

Man nennt Graphen mit chromatischem Index gleich ihrem Maximalgrad *Klasse 1* und alle anderen *Klasse 2*.

BEISPIELE





Links: K_8 und eine Kantenfärbung mit 7 Farben.
Somit ist dieser Graph Klasse 1.

Rechts: Ein 3-regulärer Graph, in dem jede Kantenfärbung mindestens 4 Farben benötigt. Dieser Graph ist Klasse 2.

Der 3-reguläre Graph von gerade hatte eine Brücke. Lassen wir Brücken **nicht** zu, so können wir das folgende Resultat nutzen:

Satz (Tait, 1880). *Der Vierfarbensatz ist äquivalent zu der Aussage, dass jeder brückenfreie, 3-reguläre, planare Graph Klasse 1 ist.*

Ein Beispiel, das einer Beweisskizze ähnelt, zu diesem Satz haben wir eben besprochen. Folgende Konsequenz ist erwähnenswert:

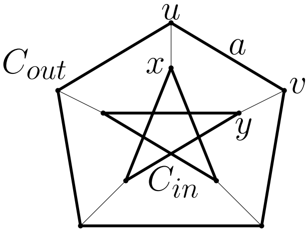
Korollar. *Jeder brückenfreie, 3-reguläre, planare Graph hat eine Kantenfärbung mit drei Farben.*

Wir beenden dieses Kapitel mit einem kurzen Beweis von R. Naserasr und R. Škrekovski (2003), dass der Petersen-Graph chromatischen Index 4 hat, und einer Konsequenz dieses Resultats.

Der Petersen-Graph hat Maximalgrad 3, nach dem Satz von Vizing ist sein chromatischer Index also 3 oder 4. Wir beweisen nun, dass er nicht 3 ist.

Beweis (1/2)

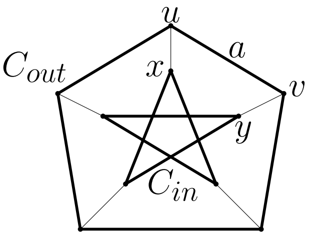
Der Petersen-Graph wird normalerweise dargestellt wie in folgender Abbildung illustriert, mit einem äußeren Kreis C_{out} und einem inneren Kreis C_{in}.



Unter der Annahme einer 3-Kantenfärbung erhalten wir einen Widerspruch, indem wir zeigen, dass jede der drei Farben zweimal auf dem Kreis C_{in}, der nur fünf Kanten hat, verwendet werden muss.

Beweis (2/2)

Da C_{out} ungerade Länge hat, erscheint jede der drei Farben auf ihm. Es sei uv eine Kante auf C_{out} mit der Farbe a. In einer 3-Kantenfärbung eines 3-regulären Graphen muss jede Farbe an jedem Knoten erscheinen.



Da a weder auf ux noch auf vy erscheinen kann, wobei x und y die Nachbarn von u und v auf C_{in} sind (s. Abb.) und xy keine Kante ist, erscheint die Farbe a auf **verschiedenen** Kanten von C_{in} bei x und y. Damit ist die Aussage bewiesen.

Hiermit folgt anhand des eben erwähnten Korollars (*jeder brückenfreie,* 3*-reguläre, planare Graphen hat eine Kantenfärbung mit* 3 *Farben*), dass der Petersen-Graph nicht planar sein kann.

Wir hatten in Kapitel 6 drei alternative Beweise dieser Beobachtung gegeben, einen über den Satz von Kuratowski, einen über den Satz von Wagner, und einen über die eulersche Polyederformel und die Taillenweite.

Aus der Tatsache, dass der Petersen-Graph chromatischen Index 4 hat, folgt auch, dass er nicht hamiltonsch ist (also keinen Kreis enthält, der jeden Knoten des Graphen besucht). Wieso?

Man nehme an, der Petersen-Graph G habe doch einen Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$. $|E(\mathfrak{h})|$ ist gerade [wieso?], wir können also die Kanten von $\mathfrak{h}$ alternierend färben mit Farben 1 und 2.

Betrachten wir $G - E(\mathfrak{h})$, so erhalten wir aufgrund der 3-Regularität des Petersen-Graphen fünf paarweise disjunkte Kanten. Diese färben wir mit Farbe 3. Insgesamt haben wir also eine Kantenfärbung des Petersen-Graphen gefunden mit 3 Farben – Widerspruch! Allgemein formuliert:

Proposition. *Kein 3-regulärer Graph mit chromatischem Index 4 ist hamiltonsch.*