Algorithmische Graphentheorie

Kapitel 8: Hamiltonsche Graphen

Babeş-Bolyai Universität, Fachbereich Informatik,
Klausenburg

Der Ägyptologe Petrie hatte es sich zum Ziel gesetzt, die ca. 3000 in Naqada gefundenen Gräber chronologisch anzuordnen. Sein Ansatz hierfür ist ein Vorläufer der heute noch in der Archäologie gebräuchlichen Seriation. Allerdings führte er diesen Vorgang damals von Hand durch, während heute Computer eingesetzt werden.

Petrie teilte die in den Gräbern gefundene Keramik in 9 Kategorien (teilweise mit Unterkategorien) auf. Die einzelnen Kategorien unterschieden sich durch die Form der Keramiken, der Glasur, des Vorhandenseins eines Henkels, der Farbe, usw.

Anschließend ordnete er jedem Grab einen Vektor (in seinem Fall ein Papierstreifen) zu, in dem komponentenweise jeweils eine 1 stand, falls das Grab Keramiken aus der zugehörigen Kategorie enthielt, und sonst eine 0.

Basierend auf diesen Vektoren definierte er den Abstand zweier Gräber als die Anzahl der unterschiedlichen Einträge, d.h. für zwei Gräber mit zugehörigen Vektoren $u = (u_1, \ldots, u_9)^T, v = (v_1, \ldots, v_9)^T$ betrachtete er

$$\sum_{i=1}^{9} |u_i - v_i|$$

als den Abstand. Petrie nahm an, dass zwei Gräber mit kleiner Distanz, also ähnlichen Keramikbeigaben, auch zeitlich in kurzem Abstand entstanden sind. Daher versuchte er, eine Reihenfolge zu finden, in der für alle aufeinander folgenden Gräber der Abstand möglichst klein ist.

Dies ist eine archäologische Fassung eines der bekanntesten Probleme in der Graphentheorie: das Problem des Handlungsreisenden, auch Traveling Salesman Problem (TSP) genannt.

Das Problem des Handlungsreisenden tritt schon in seiner Reinform in vielen praktischen Anwendungen auf, beispielsweise in der Logistik oder im Design von Mikrochips.

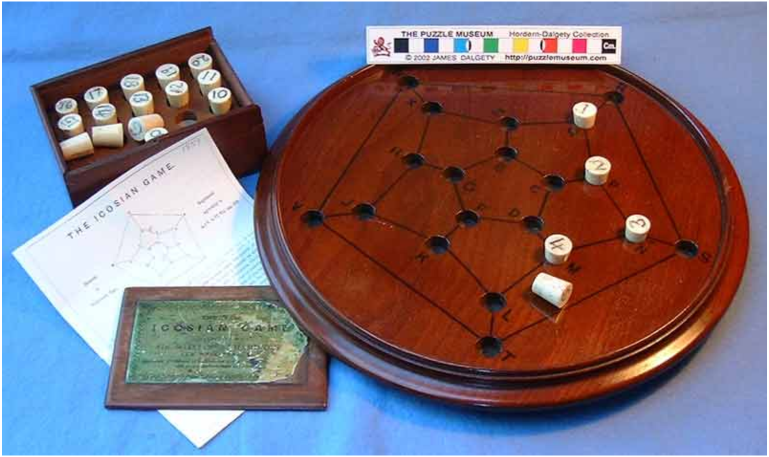
Noch häufiger tritt es allerdings als Unterproblem auf, wie zum Beispiel bei der Verteilung von Waren, bei der Planung von Touren eines Kunden- oder Pannendienstes oder bei der Genom-Sequenzierung.

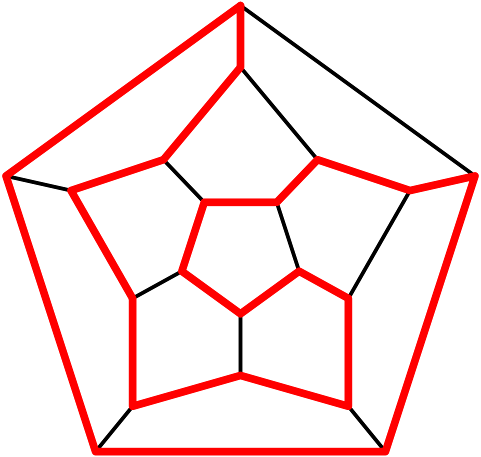
Hamiltonsche Graphen

Es sei G ein Graph.

- Ein Weg oder Kreis heißt *hamiltonsch* (*hamiltonian*), wenn er jeden Knoten von G enthält.
- G heißt *hamiltonsch* gdw. G einen hamiltonschen Kreis enthält.
- In der englischsprachigen Literatur ist der Begriff *traceable* üblich für Graphen, die einen Hamiltonweg besitzen. Im Deutschen gibt es hierfür keine kanonische Bezeichnung – wir werden in dieser Vorlesung hierfür das Wort *trassierbar* verwenden.
- Natürlich beinhaltet jeder hamiltonsche Graph einen Hamiltonweg.

- Namensgeber des Problems ist der irische Astronom und Mathematiker Sir William Rowan Hamilton.
- Hamilton erfand 1857 das Spiel *The Icosian Game* (und verbesserte dies später zum *Traveller's Dodecahedron or A Voyage Round The World*).
- Gespielt wird auf der ebenen Einbettung eines Dodekaedergraphen, wobei die 20 Knoten mit Namen bekannter Städte assoziiert sind: „Brussels, Canton, Delhi, Frankfort“ usw.
- Ziel ist es, eine Reiseroute entlang der Kanten des Dodekaeders zu finden, die jede Stadt genau einmal besucht und dort aufhört, wo sie beginnt.
- Im Gegensatz zum Königsberger Brückenproblem muss hier also jeder *Knoten* genau einmal besucht werden und nicht zwangsläufig jede *Kante*.


THE PUZZLE MUSEUM
Hordern-Dalgety Collection
© 2002 JAMES DALGETY
http://puzzlemuseum.com
THE ICOSIAN GAME



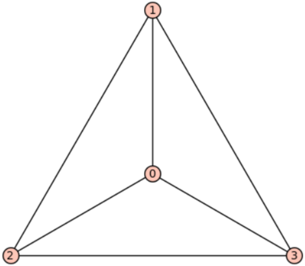
Der Dodekaedergraph ist hamiltonsch.

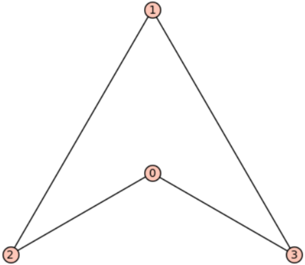
Tatsächlich sind alle platonischen Körper hamiltonsch.

```
T = graphs.TetrahedralGraph()
print T.is_hamiltonian()
T.show()
H=T.hamiltonian_cycle()
H.show(figsize=[4,4])
```

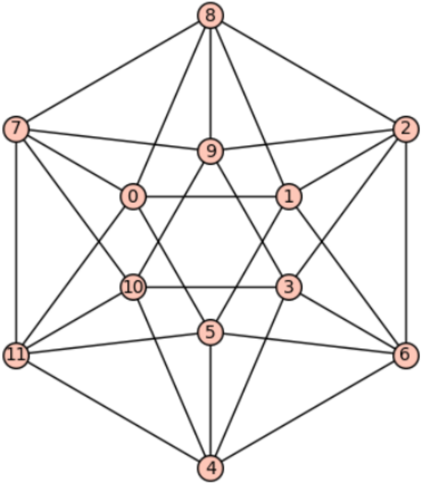
liefert

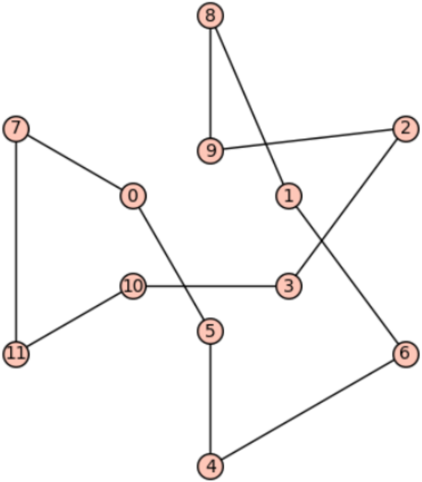
```
True
```





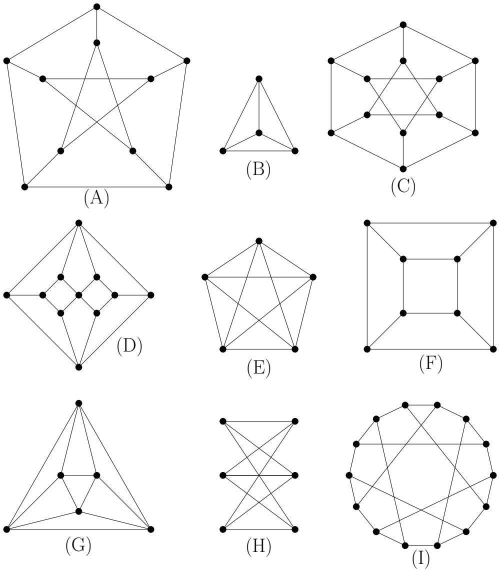
Der Tetraedergraph ist hamiltonsch.
Ebenso sind es der Würfel- und Oktaedergraph.



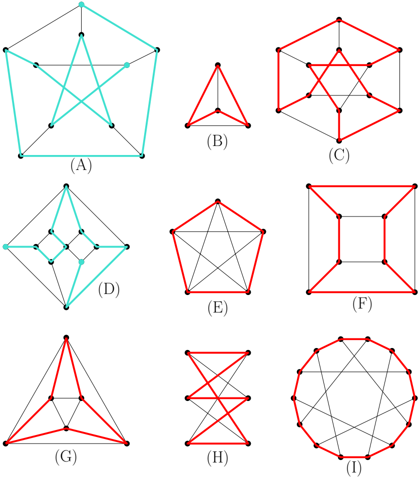


Der Ikosaedergraph ist hamiltonsch.

Aufgabe. Versuchen Sie, in folgenden Graphen einen Hamiltonweg oder sogar Hamiltonkreis zu finden:



Lösung. (A) und (D) sind nicht hamiltonsch (jedoch trassierbar) – da die Graphen klein sind, kann man dies mit einer stumpfen *brute force* Fallunterscheidung beweisen. Stattdessen geben wir für (D) in diesem Kapitel und für (A) im nächsten Kapitel strukturelle Argumente, die dies zeigen.



Der Satz von Dirac bildet historisch den Ausgangspunkt der Entdeckung einer ganzen Reihe von Bedingungen an die Knotengrade eines Graphen, die jeweils die Existenz eines Hamiltonkreises sichern:

Satz (Dirac, 1952). *Es sei G ein Graph mit $n \geq 3$ Knoten und Minimalgrad $\delta(G) \geq n/2$. Dann ist G hamiltonsch.*

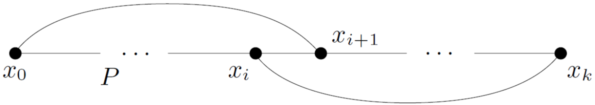
Der Grad eines Knotens lässt sich unmittelbar in der Adjazenzmatrix ablesen: bilden Sie einfach die entsprechende Zeilensumme (oder Spaltensumme).

Beweis (1/2)

- G ist zusammenhängend: wenn nicht, so hätte eine kleinste Komponente von G Minimalgrad höchstens $\frac{n}{2} - 1$, Widerspruch.
- Es sei $P = x_0 \ldots x_k$ ein längster Weg in G. $\quad (k + 1 \leq n.)$
- Wegen der Maximalität von P liegen alle Nachbarn von x_0 und alle Nachbarn von x_k auf P.
- Mindestens $n/2$ der $k < n$ Knoten $x_0, \ldots, x_{k-1}$ sind also ein Vorgänger auf P (d.h.: kleinerer Index) eines Nachbarn von x_0, und mindestens $n/2$ dieser Knoten sind ein Nachbar von x_k.

Beweis (2/2)

- Nach dem Schubfachprinzip hat einer dieser Knoten $x_0, \ldots, x_{k-1}$ beide Eigenschaften, also existiert ein $i < k$ mit $x_0 x_{i+1} \in E(G)$ und $x_i x_k \in E(G)$.

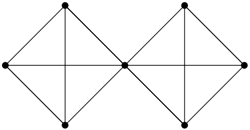


- Damit ist $C := x_0 x_{i+1} x_{i+2} \ldots x_{k-1} x_k x_i \underbrace{x_{i-1} \ldots x_1}_{\text{absteigend}} x_0$ ein Kreis.
- Es gilt $V(C) = V(P)$.
- Wegen der Maximalität von $|V(P)|$ ist C sogar ein Hamiltonkreis in G: da G zusammenhängend ist, hätte C sonst einen Nachbarn in $G - C$, der zusammen mit einem geeigneten Teilweg von C einen längeren Weg als P ergäbe, Widerspruch.

Zusammenhang

- Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.
- Wiederholung: Ein nicht vollständiger, zusammenhängender Graph mit $> k$ Knoten heißt *k-zusammenhängend* (*k-connected*), wenn das Löschen beliebiger $< k$ Knoten aus G stets einen zusammenhängenden Graphen liefert. Der K_n sei $(n-1)$-zusammenhängend.
- Die größte natürliche Zahl $k < |V|$, für die G k-zusammenhängend ist, ist die *Zusammenhangszahl* oder der *Zusammenhang* (*connectivity*) $\kappa(G)$ von G.
- Insbesondere ist $\kappa(G) = 0$ genau dann, wenn G nicht zusammenhängend oder K_1 ist.
- Es gilt $\kappa(K_n) = n - 1$ für alle $n \geq 1$.
- Ein Graph mit Zusammenhang 1 kann nicht hamiltonsch sein. [Wieso?]

- Eine natürliche Frage ist, ob man die Gradbedingung im Satz von Dirac abschwächen kann.
- Ersetzen wir $n/2$ durch $\lfloor n/2 \rfloor$, so gibt es bereits eine unendliche Familie von Gegenbeispielen:
- Für n ungerade identifiziere man genau einen Knoten in zwei disjunkten Kopien von $K_{\lceil n/2 \rceil}$, s. Abb. für $n = 7$.



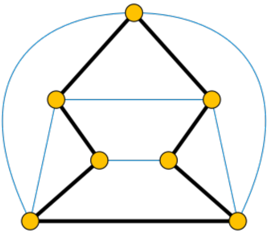
- Ein derartiger Graph hat Minimalgrad $\lceil n/2 \rceil - 1 = \lfloor n/2 \rfloor$, jedoch Zusammenhang $\kappa = 1$, ist also nicht hamiltonsch.
- Für n gerade können wir natürlich $n/2$ durch $\lfloor n/2 \rfloor$ ersetzen, da dies dasselbe ergibt.

- Eine weitere Frage ist, ob die Rückrichtung im Satz von Dirac gilt, sprich:
- **Frage:** Gilt in jedem hamiltonschen Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten, dass dieser Minimalgrad $\delta(G) \geq n/2$ hat?

- Eine weitere Frage ist, ob die Rückrichtung im Satz von Dirac gilt, sprich:
- **Frage:** Gilt in jedem hamiltonschen Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten, dass dieser Minimalgrad $\delta(G) \geq n/2$ hat?
- Nein, im Allgemeinen nicht: betrachte z.B. einen Kreis der Länge > 4.

Verallgemeinerung des Satzes von Dirac:

Satz (Ore, 1960). *Es sei G ein Graph der Ordnung n. Ist die Summe der Grade je zweier **nicht benachbarter** Knoten von G mindestens n, so ist G hamiltonsch.*



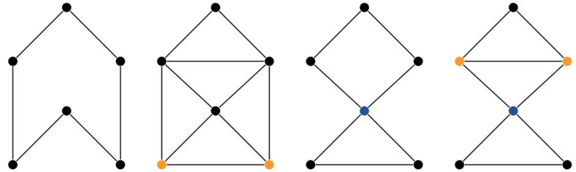
Dieser Graph erfüllt nicht die Bedingung aus dem Satz von Dirac (da $\delta(G) < n/2$). Wir können jedoch seine Hamiltonschheit mit dem Satz von Ore nachweisen.

Bemerkung

In gewichteten Graphen kann man zusätzlich die Frage nach einem kürzesten Hamiltonkreis stellen. Im Gegensatz zur Bestimmung von (geschlossenen) eulerschen Kantenzügen ist die Bestimmung von Hamiltonkreisen rechnerisch ungleich schwerer und es gibt keine *schöne* Charakterisierung von hamiltonschen Graphen.

Das Entscheidungsproblem, ob ein Graph G hamiltonsch ist (HC), ist NP-vollständig.

Beispiel: Eulersch vs. hamiltonsch



(a) eulersch und hamiltonsch

(b) nicht eulersch, aber hamiltosch

(c) eulersch, aber nicht hamiltonsch

(d) weder hamiltonsch noch eulersch

Traveling Salesman Problem

Gegeben sei ein vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit einer Kostenfunktion $c \colon E \to \mathbb{N}$ auf den Kanten.

Die **Entscheidung**svariante des Traveling Salesman Problems (TSP) lautet:

Existiert ein hamiltonscher Kreis (eine TSP-Tour) K in G, für den die Summe der Kantengewichte $c(K) \leq k$ ist.

Bemerkung

Die Entscheidungsvariante des TSP ist NP-vollständig.

TSP als Optimierungsproblem

Die **Optimierung**svariante des TSP lautet: Finde einen hamiltonschen Kreis mit minimalem Gewicht.

Durch die NP-Vollständigkeit des zugehörigen Entscheidungsproblems kann es optimal nur für *kleine n* gelöst werden.

Für große n müssen Heuristiken zur Berechnung einer möglichst guten Lösung angewendet werden.

TSP: Problem des Handlungsreisenden

- Gegeben sei ein ungerichteter, **vollständiger** und gewichteter Graph $G = (V, E)$.
- Es wird ein Hamiltonkreis minimaler Länge gesucht.
- Da der Graph vollständig ist, gibt es einen solchen immer.
- Wie wir aus dem letzten Abschnitt wissen, ist es schon sehr schwer überhaupt Hamiltonkreise zu finden.
- Noch schwerer ist es dann natürlich unter den $(|V| - 1)!/2$ Hamiltonkreisen jene(n) minimaler Länge ausfindig zu machen.

- Daher werden wir in diesem Abschnitt sogenannte Heuristiken zur Lösung des Problems des Handlungsreisenden betrachten.
- Unter einer Heuristik versteht man ein Verfahren zur Lösung eines Optimierungsproblems, das versucht, mit Hilfe von *Faustregeln* und *intelligentem Raten* eine gute Lösung zu finden, aber **nicht garantieren kann, eine optimale Lösung zu finden**.
- Wir betrachten eine einfache solche Heuristik:

Nächster-Nachbar-Heuristik

Input: Ein ungerichteter, vollständiger und gewichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w(e)$ für alle $e \in E$.

```
Wähle einen beliebigen Startknoten s ∈ V und setze P = ({s}, ∅).
Setze v = s.
for k = 1 to |V| − 1 do
    Wähle aus allen Kanten e = {v, u} ∈ E diejenige Kante e* = {v, u*} mit minimalem
    Gewicht w(e*), so dass u* ∉ P gilt.
    Füge  e*, u*  hinten an P an.
    Setze v = u*.
end for
Schließe den Kreis mit der Kante e* = {v, s} ∈ E minimalen Gewichts.
```

Output: Einen Hamiltonkreis P.

Korrektheit des Algorithmus

Satz. *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, vollständiger und gewichteter Graph mit Kantengewichten $w(e)$ für alle $e \in E$. Dann findet der Algorithmus einen Hamiltonkreis in G.*

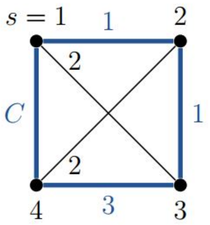
Beweis. Da G vollständig ist, gibt es in jeder Iteration mindestens eine Kante zu einem noch nicht besuchten Knoten und folglich auch (mindestens) eine mit minimalem Gewicht.

Daher ist die Wahl von e^* wohldefiniert. Nach $|V| - 1$ Iterationen enthält P nach Konstruktion $|V|$ verschiedene Knoten, also alle Knoten in V. Da G vollständig ist, existiert eine Kante vom letzten Knoten zum Startknoten und der Kreis P ist ein Hamiltonkreis in G.

Bemerkung: Tatsächlich ist in Schritt 8 der Zusatz „mit der Kante $e^* = \{v, s\} \in E$ minimalen Gewichts“ überflüssig, denn es gibt nur eine Kante, die wir wählen können.

Der Algorithmus findet zwar immer einen Hamiltonkreis, nicht aber immer den kürzesten. Tatsächlich kann die Länge des gefundenen Hamiltonkreises sogar beliebig länger sein als die des kürzesten Hamiltonkreises!

Aufgabe. Überlegen Sie sich ein strukturell einfaches Beispiel G, in dem dieser Algorithmus einen Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$ in G findet, welcher nicht der kürzeste Hamiltonkreis $\mathfrak{h}^*$ in G ist. Versuchen Sie dabei, $w(\mathfrak{h}) - w(\mathfrak{h}^*)$ zu maximieren.



Wählt man hier $C > 1$, so hat der blau eingezeichnete Hamiltonkreis, der von der Nächster-Nachbar-Heuristik mit Startknoten $s = 1$ gefunden wurde, Länge $5 + C$. Nutzt man die Diagonalen, so sieht man jedoch, dass dieser Graph einen Hamiltonkreis der Länge 8 besitzt.

Für $C > 3$ ist der von der Heuristik gefundene Kreis also nicht optimal und kann für $C \to \infty$ sogar beliebig länger als der optimale Hamiltonkreis werden.

Bessere Heuristiken

Eine weitere Heuristik, bei der man abschätzen kann, wie viel schlechter der gefundene Hamiltonkreis im Vergleich zum optimalen höchstens sein kann, beruht auf der Konstruktion minimaler Spannbäume. Diese funktioniert allerdings nur in sogenannten metrischen Graphen, die wir jetzt einführen.

METRISCHE GRAPHEN

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, gewichteter Graph mit positiven Kantengewichten $w(e) > 0$ für alle $e \in E$. Der Graph G heißt *metrisch*, wenn für alle $u, v, z \in V$ mit $\{u, v\}, \{u, z\}, \{z, v\} \in E$ die **Dreiecksungleichung**

$$w(\{u, v\}) \leq w(\{u, z\}) + w(\{z, v\})$$

gilt.

Beispiele: Jeder ebene Graph mit Strecken als Kanten und dem euklidischen Abstand als Gewicht. Ebenso ein beliebiger vollständiger Graph in dem jede Kante Gewicht 1 hat.

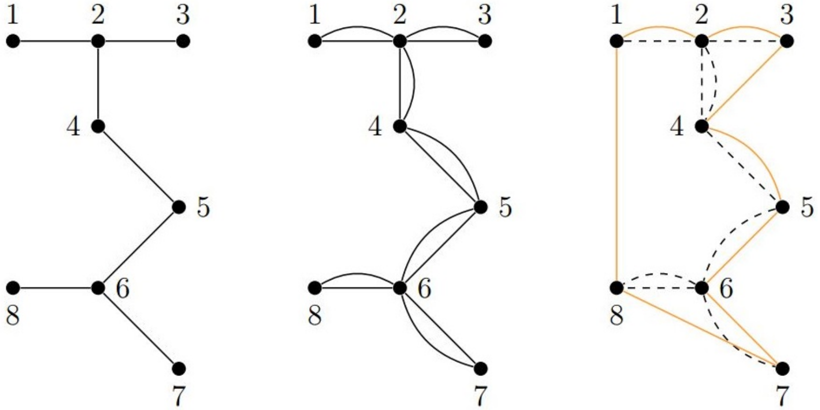
Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, vollständiger und metrischer Graph. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Länge des kürzesten Hamiltonkreises $\mathfrak{h}^*$ und dem Gewicht eines minimalen Spannbaums T^*?

Da $\mathfrak{h}^*$ ein Hamiltonkreis ist, ist $\mathfrak{h}^*$ ohne die schwerste Kante $e^* \in E(\mathfrak{h}^*)$ ein Spannbaum. Es gilt also $w(\mathfrak{h}^*) - w(e^*) \geq w(T^*)$. Da $\mathfrak{h}^*$ genau $|V|$ Kanten enthält und e^* die schwerste davon ist, folgt $w(e^*) \geq w(\mathfrak{h}^*)/|V|$ (dies ist das durchschn. Gewicht einer Kante aus $\mathfrak{h}^*$). Damit erhalten wir

$$w(T^*) \leq w(\mathfrak{h}^*) - w(e^*) \leq w(\mathfrak{h}^*) - \frac{w(\mathfrak{h}^*)}{|V|} = w(\mathfrak{h}^*)\left(1 - \frac{1}{|V|}\right).$$

Umgekehrt lässt sich in einem vollständigen Graphen aus einem minimalen Spannbaum auch ein Hamiltonkreis erzeugen:

Konstruktion eines Hamiltonkreises



Links: Minimaler Spannbaum T^*.

Mitte: Verdoppeln der Kanten liefert geschlossenen eulerschen Kantenzug K.

Rechts: Abkürzen liefert Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$.

Geschlossener eulerscher Kantenzug

Durch das Verdoppeln der Kanten in dem zusammenhängenden Graphen T^* entsteht ein ebenfalls zusammenhängender Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad hat. (Stichwort *Eulerisierung*, Kapitel 5.)

Folglich besitzt dieser Graph einen geschlossenen eulerschen Kantenzug K, den wir z.B. mit dem Algorithmus von Hierholzer bestimmen können. Der geschlossene eulersche Kantenzug hat dann die Länge $2w(T^*)$, da er jede Kante von T^* genau einmal durchläuft.

Vom geschlossenen eulerschen Kantenzug zum Hamiltonkreis

Wähle einen beliebigen Startknoten auf dem geschlossenen eulerschen Kantenzug und folge diesem so lange, bis ein Knoten zum zweiten Mal besucht würde. Da der Graph G vollständig ist, ist es möglich, stattdessen direkt zum nächsten unbesuchten Knoten auf dem geschlossenen eulerschen Kantenzug weiterzugehen.

Man **kürzt** also im Vergleich zu dem geschlossenen eulerschen Kantenzug **ab**. Dadurch werden Teile des geschlossenen eulerschen Kantenzuges durch eine einzelne neue Kante ersetzt, die aufgrund der Dreiecksungleichung aber nicht länger als der ersetzte Teil des geschlossenen eulerschen Kantenzuges sein kann. Schließlich erhält man so einen Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$ mit $w(\mathfrak{h}) \leq w(K) = 2w(T^*)$.

Somit gilt:

Lemma. *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter und vollständiger Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}_{>0}$. Desweiteren sei G ein metrischer Graph, $\mathfrak{h}^*$ ein minimaler Hamiltonkreis in G und T^* ein minimaler Spannbaum in G. Dann gilt*

$$\frac{|V|}{|V|-1} \cdot w(T^*) \leq w(\mathfrak{h}^*) \leq 2 \cdot w(T^*).$$

Minimaler Spannbaum Heuristik

Input: Ein ungerichteter, vollständiger und metrischer Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w(e) > 0$ für alle $e \in E$.

1. Bestimme minimalen Spannbaum T^* von G (z.B. mit dem Algorithmus von Prim oder dem Algorithmus von Kruskal).
2. Verdoppele in T^* alle Kanten.
3. Bestimme in dem entstandenen Graphen einen geschlossenen eulerschen Kantenzug K (z.B. mit dem Algorithmus von Hierholzer).
4. Erzeuge aus dem geschlossenen eulerschen Kantenzug K einen Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$ durch Überspringen bereits besuchter Knoten.

Output: Ein Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$ in G.

Satz. *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, vollständiger und metrischer Graph mit Kantengewichten $w(e) > 0$ für alle $e \in E$. Dann bestimmt der Algorithmus einen Hamiltonkreis, der höchstens $2(1 - \frac{1}{|V|})$ mal so lang wie der kürzeste Hamiltonkreis ist.*

Beweis. Der Algorithmus bestimme einen Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$ in G. Es sei $\mathfrak{h}^*$ ein kürzester Hamiltonkreis in G. Dann gilt

$$w(\mathfrak{h}) \overset{\textit{Folie } 36}{\leq} 2w(T^*) \overset{\textit{Folie } 33}{\leq} 2w(\mathfrak{h}^*)\left(1 - \frac{1}{|V|}\right).$$

Hamiltonkreise in ebenen Graphen: Kriterium von Grinberg

In einem ebenen Graphen nennen wir eine Fläche mit Randlänge (also Anzahl der Kanten im Rand) p eine *p-Fläche*.

Satz (Grinberg, 1968). *In einem ebenen Graphen, der einen Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$ enthält und in dem f_p (f'_p) p-Flächen innerhalb von (außerhalb von) $\mathfrak{h}$ liegen, gilt*

$$\sum_{p \geq 3} (p-2)(f_p - f'_p) = 0.$$

Beweis

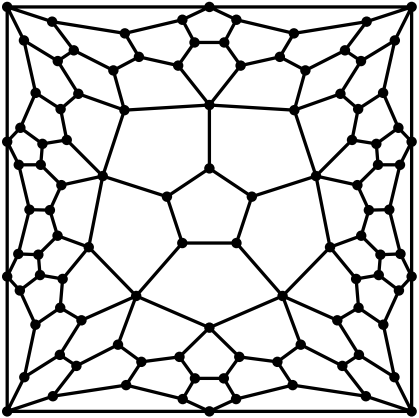
Es sei G der betrachtete (ebene) Graph und f (k; n) die Anzahl der Flächen (Kanten; Knoten) auf oder **inner**halb von $\mathfrak{h}$ und f' (k'; n') die Anzahl der Flächen (Kanten; Knoten) auf oder **außer**halb von $\mathfrak{h}$. (Wir verwenden hier den jordanschen Kurvensatz für Polygone, s. Kap. 6.)

Da $\mathfrak{h}$ ein Hamiltonkreis ist, gilt $n = n'$. Nach der eulerschen Polyederformel gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{p \geq 3} (p-2) f_p &= \sum_{p \geq 3} (p f_p - 2 f_p) \\
&= 2k - 2f \overset{\text{Euler}}{=} 2n - 4 = 2n' - 4 \overset{\text{Euler}}{=} 2k' - 2f' \\
&= \sum_{p \geq 3} (p-2) f'_p .
\end{aligned}
$$

BEISPIEL 1 (1/2)

Beispiel. Man zeige, dass folgender Graph **nicht** hamiltonsch ist:



Alle Flächen bis auf die unbeschränkte sind Fünfecke. Die unbeschränkte Fläche ist ein Zehneck.

Beispiel 1 (2/2)

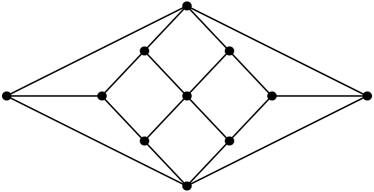
- Nehme an, der Graph besitzt doch einen Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$.
- Es sei f_p (f'_p) die Anzahl der p-Flächen innerhalb von (außerhalb von) $\mathfrak{h}$.
- Es gilt $f_p = f'_p = 0$ für alle $p \notin \{5, 10\}$ sowie $f_{10} = 0$ und $f'_{10} = 1$.
- Nach dem Kriterium gilt

$$\sum_{p \geq 3} (p-2)(f_p - f'_p) = (5-2)(f_5 - f'_5) + (10-2)(f_{10} - f'_{10}) = 3(f_5 - f'_5) - 8 = 0.$$

- Es sei $q := f_5 - f'_5$. Offensichtlich gilt $q \in \mathbb{Z}$.
- Es ist also $3q = 8$. Dies ist jedoch unmöglich für $q \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 2 (1/3)

Beispiel. Man zeige, dass folgender Graph – der Graph von Herschel – **nicht** hamiltonsch ist:



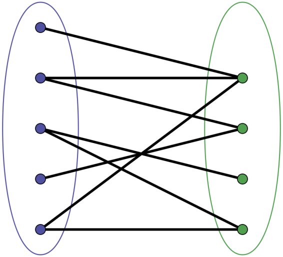
Alle Flächen sind Vierecke. Nehme an, der Graph ist hamiltonsch. Also ist

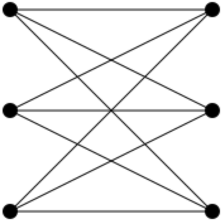
$$\sum_{p \geq 3} (p-2)(f_p - f'_p) = (4-2)(f_4 - f'_4) = 2(f_4 - f'_4) = 0.$$

Der Graph hat eine ungerade Anzahl von Vierecken, also ist $f_4 + f'_4$ ungerade. Daher muss auch $f_4 - f'_4$ ungerade sein. Somit gilt $2(f_4 - f'_4) \neq 0$, ein Widerspruch.

Beispiel 2 (2/3)

Man kann auch anders vorgehen. Wiederholung: Ein Graph $G = (V, E)$ ist *bipartit*, falls es Mengen $A \subset V$ und $B \subset V$ gibt mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = V$, sodass keine Kante von G zwischen zwei Knoten von A oder zwischen zwei Knoten von B verläuft. Kanten zwischen A und B sind natürlich erlaubt! A und B heißen *Partitionsklassen*. Sind *alle* Kanten zwischen A und B vorhanden, so nennen wir den Graphen *vollständig bipartit* und schreiben $K_{|A|,|B|}$, s. Abb. rechts für $|A| = |B| = 3$.

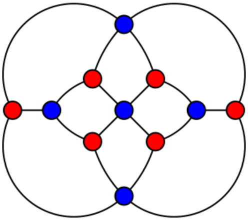




Beispiel 2 (3/3)

Proposition. *Ein bipartiter Graph G mit Partitionsklassen ungleicher Kardinalität enthält keinen Hamiltonkreis.*

Korollar. *Der Graph von Herschel ist nicht hamiltonsch.*



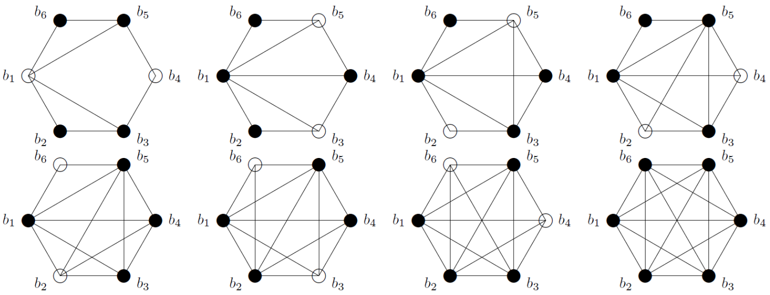
Proposition. *Es sei G ein schlichter Graph mit $n \geq 3$ Knoten und es seien v_1 und v_2 zwei nicht benachbarte Knoten von G mit*

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) \geq n.$$

Es sei G' jener Graph, der aus G durch Hinzufügen der Kante $v_1 v_2$ entsteht. Dann gilt: G ist genau dann hamiltonsch, wenn G' hamiltonsch ist.

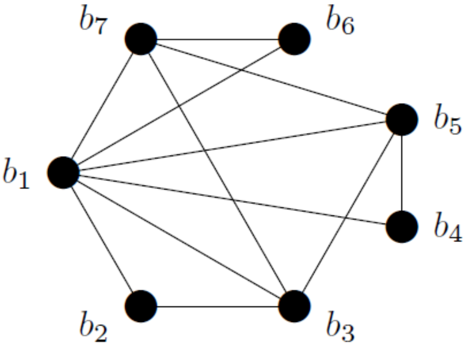
- Es sei G_0 ein schlichter Graph mit $n \geq 3$ Knoten.
- Gibt es in G_0 nicht benachbarte Knoten a_1 und b_1 mit $\deg(a_1) + \deg(b_1) \geq n$, dann verbindet man die beiden Knoten a_1 und b_1 und erhält einen Graphen G_1.
- Gibt es in G_1 nicht benachbarte Knoten a_2 und b_2, für die in G_1 die Ungleichung $\deg(a_2) + \deg(b_2) \geq n$ gilt, dann verbindet man diese beiden Knoten und erhält einen Graphen G_2.
- Iteriere.
- Die Konstruktion endet nach endlich vielen Schritten mit einem Graphen G_k und spätestens mit dem vollständigen Graphen K_n.
- G_k heißt *Hamilton-Abschluss* (*closure*) von G_0 und wird mit $\mathrm{cl}(G_0)$ bezeichnet.

Beispiel 1: $\mathrm{cl}(G) = K_6$



Oben links der Graph G. In jeder Iteration verbinden wir die weißen Knoten – diese erfüllen die Bedingung $\deg(v) + \deg(w) \geq n$. Unten rechts der Hamilton-Abschluss $\mathrm{cl}(G) = K_6$.

BEISPIEL 2: $\mathrm{cl}(G) = G$



Dieser Graph ist gleich seinem Hamilton-Abschluss.

Hamilton-Abschluss eines Graphen

Proposition. *Es sei G ein schlichter Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Dann gelten:*

1. *Der Hamilton-Abschluss $\mathrm{cl}(G)$ ist durch G eindeutig bestimmt.*
2. *G ist genau dann hamiltonsch, wenn sein Hamilton-Abschluss hamiltonsch ist. Insbesondere gilt: Ist $\mathrm{cl}(G) = K_n$, so ist G hamiltonsch.*

Wir zeigen nun Aussage 2.

Beweis (1/2)

- Trivialerweise gilt: G hamiltonsch $\Longrightarrow \mathrm{cl}(G)$ hamiltonsch. Zu zeigen ist also die Umkehrrichtung.
- Es sei nun also $\mathrm{cl}(G)$ hamiltonsch. Wir bezeichnen die Graphen, die wir in den Zwischenschritten zur Erstellung des Hamilton-Abschlusses erzeugen, mit $G = G_0, G_1, G_2, \ldots, \mathrm{cl}(G)$.
- Nehme an, es gibt ein k, sodass G_{k+1} hamiltonsch ist mit Hamiltonkreis $\mathfrak{h}$, G_k jedoch nicht hamiltonsch ist.

Beweis (2/2)

- Es sei vw jene Kante, die zu G_k hinzugefügt wurde, um G_{k+1} zu erzeugen. Offensichtlich gilt $vw \in E(\mathfrak{h})$.
- Es sei $\mathfrak{h} = vx_2x_3 \dots x_{n-1}w$.
- Nehme an, dass x_i und w benachbart sind in G_k für ein $i < n - 1$.
- Sind x_{i+1} und v nun benachbart, erhalten wir einen Hamiltonkreis $vx_2 \dots x_i w \underbrace{x_{n-1} \dots x_{i+1}}_{\text{absteigend}}$; Widerspruch.

  (Dies ist ähnlich zum Beweis des Satzes von Dirac.)
- Es gilt also: Sind x_i und w benachbart, so sind x_{i+1} und v **nicht** benachbart.
- Hieraus können wir schließen, dass

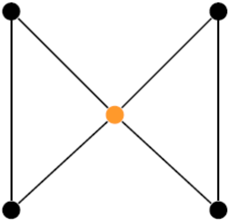
  $$\underbrace{\deg_{G_k}(v)}_{\text{Grad von } v \text{ in } G_k} + \deg_{G_k}(w) < n; \text{ Widerspruch!}$$

Elementare notwendige Bedingungen für hamiltonsche Graphen

- Ist $G = (V, E)$ ungerichtet und hamiltonsch, so enthält V keinen Knoten v von Grad 1.
- Ist $G = (V, E)$ ungerichtet und hamiltonsch, so ist G zusammenhängend.
- Diese Bedingungen sind nicht hinreichend, sondern nur notwendig ...

Aufgabe. Geben Sie einen zusammenhängenden, nicht hamiltonschen Graphen mit Minimalgrad mindestens 2 an.

BEISPIEL



Ein zusammenhängender, nicht hamiltonscher Graph mit Minimalgrad 2.

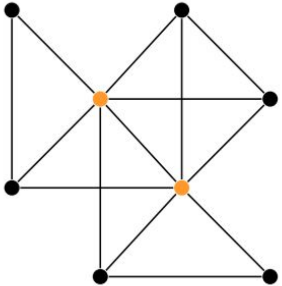
Das folgende Resultat kann man als Weiterführung der Argumentation von Folie 46 (bzgl. bipartiten Graphen) sehen:

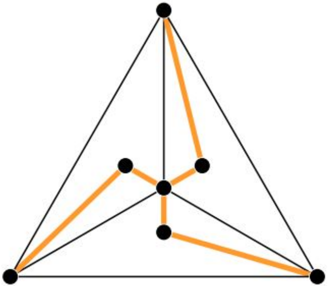
Proposition. *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, hamiltonscher Graph. Dann gilt: Werden $k \leq |V|$ Knoten mit den zugehörigen Kanten aus dem Graphen G entfernt, so besteht der Restgraph aus höchstens k Zusammenhangskomponenten.*

Beweis

- Es sei $\mathfrak{h} = (V(\mathfrak{h}), E(\mathfrak{h}))$ ein Hamiltonkreis in $G = (V, E)$.
- Entfernen wir aus $\mathfrak{h}$ genau k Knoten (und alle zu ihnen inzidenten Kanten), so zerfällt $\mathfrak{h}$ in $\ell \leq k$ Zusammenhangskomponenten, da $\mathfrak{h}$ ein Kreis ist.
- Fügen wir zu $\mathfrak{h}$ nun alle Kanten aus E hinzu, deren Endknoten nicht gelöscht wurden, so erhalten wir einen Graphen mit höchstens ℓ Zusammenhangskomponenten.
- Wir sind fertig, denn $\ell \leq k$.

Nicht hamiltonsche Graphen

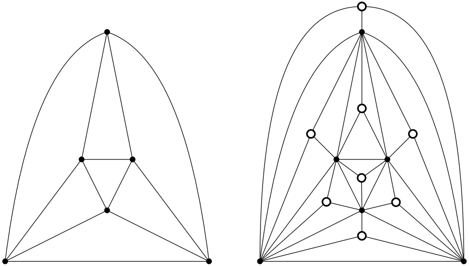




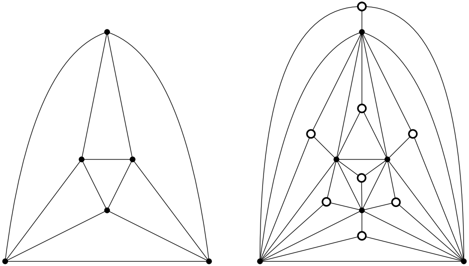
Links: Entferne 2 Knoten und erhalte 3 Komponenten: der Graph ist also nicht hamiltonsch.

Rechts: Es gibt keine Menge $X \subset V$, sodass $G - X$ mehr als $|X|$ Komponenten hat. Der Graph ist aus einem anderen strukturellen Grund nicht hamiltonsch.

Wir nennen einen ebenen Graphen G eine *Triangulierung*, falls jede Fläche von G – auch die unbeschränke – ein Dreieck ist, also von einem Kreis der Länge 3 berandet wird.



Links das Oktaeder, rechts der Graph, den man erhält, wenn man in jede Fläche F des Oktaeders einen neuen (weiß dargestellten) Knoten setzt und diesen mit allen Ecken von F verbindet. Beide Graphen sind Triangulierungen, die rechte ist jedoch nicht hamiltonsch – wieso nicht?



Links das Oktaeder, rechts der Graph, den man erhält, wenn man in jede Fläche F des Oktaeders einen neuen (weiß dargestellten) Knoten setzt und diesen mit allen Ecken von F verbindet. Beide Graphen sind Triangulierungen, die rechte ist jedoch nicht hamiltonsch – wieso nicht? Jeder Hamiltonkreis verläuft entweder zwischen zwei schwarzen Knoten oder einem weißen und einem schwarzen Knoten, es sind jedoch mehr weiße als schwarze Knoten im Graphen.

Es gibt jedoch Klassen von Triangulierungen, in denen wir Hamiltonschheit garantieren können:

Satz von Tutte

Satz (Whitney, 1931). *Jede 4-zusammenhängende Triangulierung der Ebene ist hamiltonsch.*

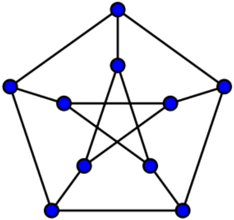
Meilenstein der Graphentheorie:

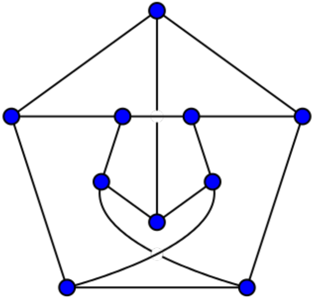
Satz (Tutte, 1956). *Planare 4-zusammenhängende Graphen sind hamiltonsch.*

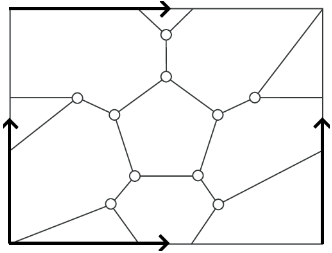
- Ein Graph ist *k-hamiltonsch*, wenn das Löschen beliebiger $\leq k$ Knoten einen hamiltonschen Graphen liefert.
- Nelson beobachtete, dass die Resultate von Tutte benutzt werden können, um zu zeigen, dass planare 4-zusammenhängende Graphen sogar 1-hamiltonsch sind.
- Es gibt eine noch stärkere Variante dieses Satzes von Tutte:

Satz (Thomas und Yu, 1994). *Planare 4-zusammenhängende Graphen sind 2-hamiltonsch.*

- Für einen Graphen G ist dessen *Kreuzungszahl* (*crossing number*) $\text{cr}(G)$ die geringste Anzahl von Kreuzungen von Kanten in einer ebenen Zeichnung des Graphen G.
- Das *Geschlecht* (*genus*) von G ist das kleinste Geschlecht einer orientierbaren, kompakten, zusammenhängenden 2-Mannigfaltigkeit, in die G einbettbar ist.
- Planare Graphen sind genau die Graphen, die Geschlecht 0 (und somit Kreuzungszahl 0) haben.







Der Graph von Petersen hat Kreuzungszahl 2 und Geschlecht 1.

Leider wissen wir nicht, ob der Satz von Tutte auch für 4-zusammenhängende Graphen von Geschlecht 1 (also auf dem Torus) gilt: dies ist eine berühmte Vermutung von Grünbaum und Nash-Williams aus den siebziger Jahren.

Für die Kreuzungszahl wissen wir etwas mehr: Aus dem gerade erwähnten Satz von Thomas und Yu folgt, dass jeder 4-zusammenhängende Graph mit Kreuzungszahl 1 hamiltonsch ist. Wir können einen Schritt weiter gehen:

Satz (Ozeki und Z., 2018). 4*-zusammenhängende Graphen mit Kreuzungszahl höchstens* 2 *sind hamiltonsch.*

Wir können den Satz von Tutte noch in eine andere Richtung verallgemeinern:

In einem 3-zusammenhängenden Graphen ist ein 3-*Separator* X (3-*vertex-cut*) eine Menge von drei Knoten aus G mit der Eigenschaft, dass $G - X$ nicht mehr zusammenhängend ist.

Satz (Jackson und Yu, 2002). *Triangulierungen mit höchstens drei 3-Separatoren sind hamiltonsch.*

Satz (Brinkmann und Z., 2019). *Planare 3-zusammenhängende Graphen mit höchstens drei 3-Separatoren sind hamiltonsch.*

Hamiltonschheit 3-zshg. Graphen mit wenigen Kreuzungen und 3-Sep.

$\phi \diagdown \mathrm{cr}$	0	1	2	3	4	5	6
0	✓[Tu]	✓[TY]	✓[OZ]	?	?	?	✗✗ [OZ]
1	✓[Th]	✓[OZ]	✗ $K_{3,4}$	✗	✗ $K_{3,5}$	✗✗ [OZ]	
2	✓[TY]	?	✗	✗	✗✗ [OZ]		
3	✓[BZ]	?	✗	✗✗ [OZ]			
4	?	✗ [Ba]	✗✗ [OZ]				
5	?	✗✗ [OZ]					
6	✗✗ [BSV]						

[Tu] Tutte
[Th] Thomassen
[TY] Thomas und Yu
[BSV] Brinkmann, Souffriau, Van Cleemput
[OZ] Ozeki und Z.
[BZ] Brinkmann und Z.
[Ba] Barish

Grüne Zellen (✓): Jeder Graph ist hamiltonsch.

Orangene Zellen (✗): Nicht alle Graphen sind hamiltonsch aufgrund von Graphen, die verwandt sind mit $K_{3,4}$ oder $K_{3,5}$.

Rote Zellen (✗✗): Es gibt nicht hamiltonsche Graphen.