# Algorithmische Graphentheorie

## Kapitel 7: Graphen in der Ebene

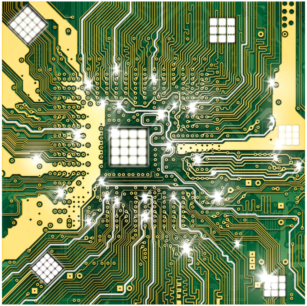
Babeş-Bolyai Universität, Fachbereich Informatik,
Klausenburg

# PLANARITÄT

Ein praktisches Problem, bei dem nicht nur Eigenschaften eines Graphen wie Knotengrade und Zusammenhang wichtig sind, sondern auch seine Darstellung, ist die Frage, wie man Leiterbahnen auf Platinen verlegt.

## Beispiel 1

Leiterbahnen auf Platinen: Es geht darum, Bauteile auf einer Platine so anzuordnen und mit Leiterbahnen zu verbinden, dass diese sich **nicht kreuzen**. Will man dieses Problem graphentheoretisch formulieren, so betrachtet man jedes Bauteil als Knoten und die dazwischen notwendigen Leiterbahnen als Kanten. Dann stellt sich die Frage: Kann man den Graphen so zeichnen, dass sich die Kanten nicht kreuzen?

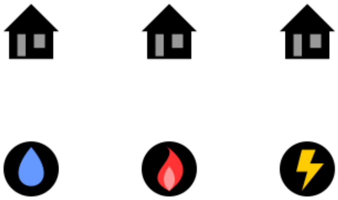


# Planarität

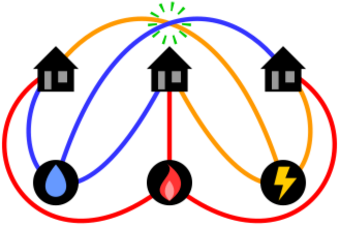
## Beispiel 2

Strom-/Gas-/Wasserleitungen: Wenn neue Häuser gebaut werden, dann müssen diese an das Wasser-, Gas- und Stromnetz angeschlossen werden. Die hierfür nötigen Leitungen sollten aus Sicherheitsgründen so verlegt werden, dass sie sich nicht kreuzen.

**Frage.** Geht dies in folgendem Beispiel?



Hier scheint es ein Problem zu geben.



Wir werden diesen Sachverhalt in diesem Kapitel formalisieren.

# Graphendarstellung in der Ebene

- Ein *Polygonzug* ist eine zum abgeschlossenen Einheitsintervall $[0, 1]$ homöomorphe Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, die die Vereinigung endlich vieler Strecken ist.
- Zur Erinnerung: $f$ *homöomorph* := $f$ bijektiv, $f$ und $f^{-1}$ stetig.
- Die Bilder von 0 und 1 unter einem solchen Homöomorphismus sind die *Endpunkte* des Polygonzuges; dieser verläuft *zwischen* seinen Endpunkten und *verbindet* sie.

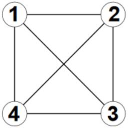
Ein Paar $(V, E)$ endlicher Mengen heißt *ebener Graph* (*plane graph*), wenn gelten:

1. $V$ ist eine Menge von Punkten im $\mathbb{R}^2$.
2. Jede Kante $e \in E$ ist ein Polygonzug und die beiden Endpunkte von $e$ liegen in $V$. (Aus ästhetischen Gründen werden wir manchmal Kanten mit nichtpolygonalen Kurven darstellen – in dieser Vorlesung lassen sich in allen derartigen Fällen diese Kurven ohne Weiteres in Polygonzüge umwandeln.)
3. Abgesehen von ihren Endpunkten teilt jede Kante $e \in E$ keinen Punkt mit einer anderen Kante $e' \neq e$ oder einem Knoten $v \in V$.
4. Um von Graphen (und nicht Multigraphen) sprechen zu können, fordern wir hier auch, dass die Endpunkte einer Kante verschieden sind und dass es zwischen je zwei Knoten höchstens eine Kante gibt.

Die Elemente von $V$ heißen wieder Knoten, die Elemente von $E$ Kanten.

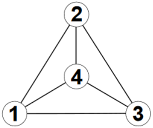
Ein gerichteter oder ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *planar*, wenn $G$ isomorph zu einem ebenen Graphen ist. Salopp ausgedrückt: $G$ heißt *planar*, wenn man $G$ so in der Ebene zeichnen kann, dass sich seine Kanten nicht kreuzen.

nicht-planare Zeichnung



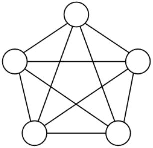

planarer Graph

planare Zeichnung




planarer Graph

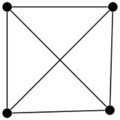
nicht-planare Zeichnung



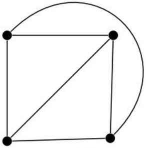
nicht-planarer Graph

- Für einen ebenen Graphen $G$ ist die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus G$ offen; ihre Gebiete sind die *Flächen* von $G$.
- Da $G$ beschränkt ist, hat genau eine seiner Flächen einen unendlichen Flächeninhalt. Diese Fläche wird *unbeschränkt* (unbounded) oder unendlich (infinite) genannt. (Beachten Sie, dass sie immer noch einen Rand hat.)
- Wir bezeichnen die Menge der Flächen von $G$ mit $F(G)$.
- Man kann mit Methoden aus der elementaren Topologie (siehe z.B. das Buch von Diestel) zeigen, dass für einen ebenen Graphen $G$ folgendes gilt:
  (i) der Rand einer Fläche ist immer ein Untergraph von $G$,
  (ii) eine Kante, die zu einem Kreis $C$ in $G$ gehört, liegt auf dem Rand von genau zwei Flächen von $G$, und diese sind in verschiedenen Flächen von $C$ enthalten, und
  (iii) wenn eine Kante auf keinem Kreis liegt, dann liegt sie auf dem Rand von genau einer Fläche von $G$.

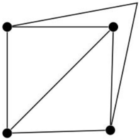
# IST $K_4$ PLANAR?



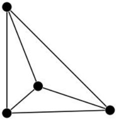
(a) klassische Darstellung von $K_4$



(b) planare Darstellung von $K_4$ mit glatten Kanten

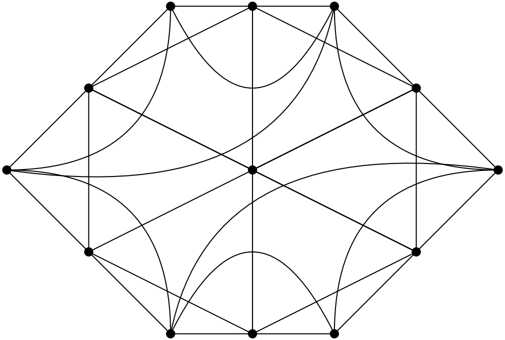


(c) planare Darstellung von $K_4$ mit polygonalen Kanten

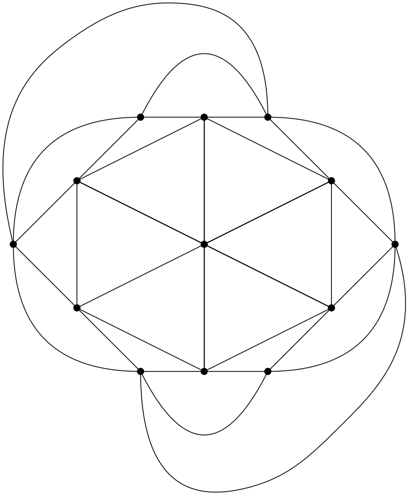


(d) planare Darstellung von $K_4$ mit geraden Kanten

Abbildungen (b), (c) und (d) zeigen, dass $K_4$ planar ist.



**Fragen.** Ist diese Darstellung eines Graphen $G$ eben? Ist $G$ planar?



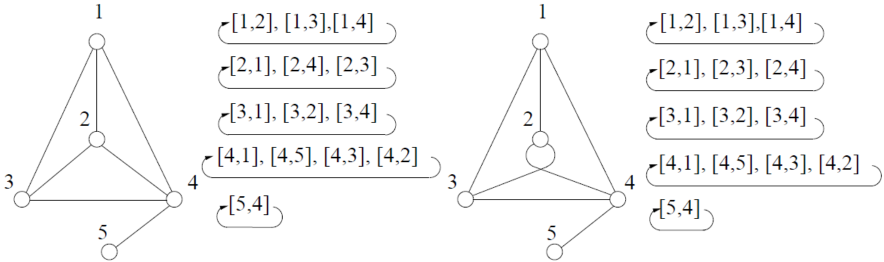
Die Darstellung ist offensichtlich nicht eben, da sich Kanten kreuzen. Die obige alternative Darstellung zeigt jedoch, dass G planar ist.

Wir haben ebene Graphen **topologisch** eingeführt. Dies kann man jedoch auch – äquivalent – rein **kombinatorisch** tun:

- Für einen ungerichteten Graphen $G$ bezeichnen wir mit $V(G)$ ($E(G)$) seine Knotenmenge (Kantenmenge).
- Kanten $\{u, v\}$ in einem eingebetteten Graphen werden als zwei gegensinnig gerichtete Kanten $[u, v]$ von $u$ nach $v$ und $[u, v]^{-1} = [v, u]$ von $v$ nach $u$ interpretiert.
- Ein eingebetteter Graph ist ein zusammenhängender Graph $G$ mit einer zyklischen Ordnung der orientierten Kanten, die am gleichen Knoten beginnt, die wir als *im Uhrzeigersinn* interpretieren werden.

- Jeder Kreis $C$ in $G$ entspricht zwei entgegengesetzt orientierten gerichteten Kreisen $C^+, C^-$, die aus orientierten Kanten bestehen.
- Eine Fläche in einem eingebetteten Graphen ist eine zyklische Folge $e_0, \ldots, e_{k-1}$ von orientierten Kanten, so dass für $0 \leq i < k$ die Kante $e_{(i+1) \pmod k}$ die nächste Kante von $e_i^{-1}$ in der Ordnung um den Endknoten von $e_i$ ist.

- Wenn man einen eingebetteten Graphen zeichnet und eine Fläche als die von Kanten begrenzte Region betrachtet, ist aufgrund der rechtsdrehenden Interpretation der Ordnung um die Knoten eine Fläche die Folge von orientierten Kanten, wobei man die links liegende Fläche durch eine Traversierung der orientierten Randkanten gegen den Uhrzeigersinn erhält.
- Informell liegen Flächen **links** von diesen orientierten Kreisen.
- Wenn wir einen Untergraphen eines eingebetteten Graphen haben, wird die Einbettung des Untergraphen aus der Orientierung um die Knoten induziert.



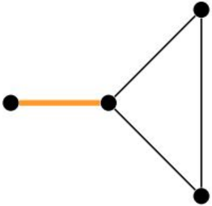

Isomorphe Graphen mit unterschiedlichen Einbettungen.
Links: Flächen offensichtlich.
Rechts: Flächen sind 1234213241 und 543145.

Wie zuvor bezeichnen wir für einen eingebetteten Graphen $G$ die Menge der Flächen von $G$ mit $F(G)$. Dann nennen wir $G$ *eben*, falls $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$. Wir kehren später zurück zu dieser wichtigen Formel. Desweiteren heißt ein Graph $G$ *planar*, falls $G$ isomorph ist zu einem ebenen Graphen.

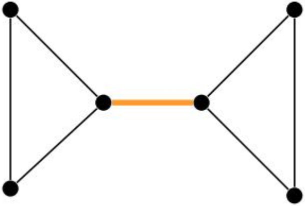
# IST JEDER GRAPH PLANAR?

- Ist *jeder* Graph planar?
- Wenn nicht, wie kann man erkennen, ob ein Graph planar ist?
- Dies ist einem Graphen nicht so ohne Weiteres anzusehen, da auch ein planarer Graph Darstellungen haben kann, die nicht eben sind, vergleiche Abb. (a) von $K_4$ auf Folie 10.
- Ob ein Graph planar ist, wird aber offensichtlich nicht davon beeinflusst, ob Kanten eine Richtung haben oder nicht. Daher können wir uns bei der Untersuchung von Planarität auf ungerichtete Graphen beschränken.
- Ebenso macht es keinen Unterschied, ob eine Kante nur einmal existiert oder ob es zu ihr parallele Kanten gibt, oder ob Schleifen vorliegen. Im Folgenden – bis zur Diskussion der Dualität – werden wir unsere Überlegungen daher auf einfache, ungerichtete Graphen beschränken.

Aber auch Kanten, die nur einmal vorkommen, können manchmal entfernt werden, ohne etwas an der Planarität oder Nichtplanarität eines Graphen zu ändern, vergleiche Abbildung:



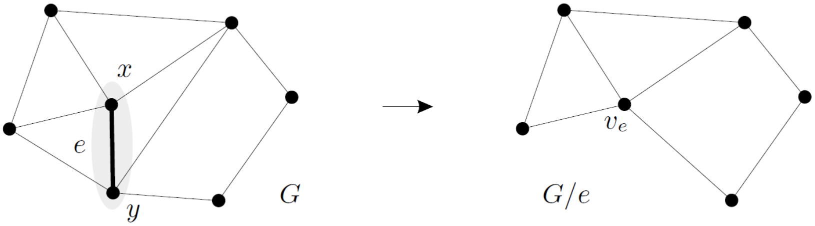
(a) Graph mit Blatt



(b) Graph mit Brücke

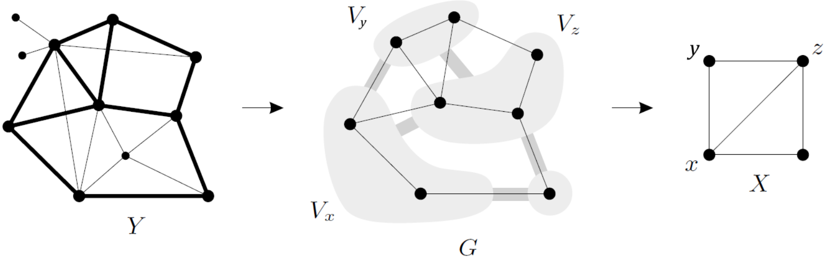
# Kantenkontraktion

- Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher und ungerichteter Graph und $e = \{x, y\} \in E$.
- Die *Kontraktion* der Kante $e$ ergibt den Graphen $G/e$, indem in $G$ die Kante $e$ entfernt wird und die Knoten $x, y$ zu einem neuen Knoten $v_e$ verschmolzen werden, der zu allen Kanten inzident ist, die in $G$ zu $x$ oder $y$ inzident waren. Möglicherweise entstehende parallele Kanten werden entfernt.



# Minor

Ein Minor ist ein Graph, der aus einem anderen Graphen durch wiederholtes Löschen von Knoten und Kanten und Kontrahieren von Kanten entsteht.




Ein Graph $Y$ und darin ein Teilgraph $G$. $X$ entsteht aus $G$ durch Kontraktion der Mengen $V_x, V_y, V_z$ auf jeweils einen Knoten, unter Löschung dabei entstehender Mehrfachkanten und Schlingen. $X$ ist ein Minor von $Y$.

# Planarität

**Proposition.** *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, einfacher Graph. Dann ist $G$ genau dann planar, wenn alle Minoren von $G$ planar sind.*

*Beweis.*
„$\Rightarrow$“: Es sei $G$ planar. Dann sind offensichtlich alle Teilgraphen von $G$ ebenfalls planar. Da Kantenkontraktionen Planarität erhalten, sind alle Minoren von $G$ ebenfalls planar.

„$\Leftarrow$“: Es sei $G$ nicht planar. Da $G$ ein Teilgraph von $G$ ist, gibt es dann auch (mindestens) einen nicht planaren Minor von $G$.

# Planarität

**Proposition.** *Alle ungerichteten, einfachen Graphen* $G = (V, E)$ *mit* $|V| \leq 4$ *sind planar.*

*Beweis.* Die vollständigen Graphen $K_1, K_2, K_3$ und $K_4$ sind planar. Alle anderen einfachen Graphen mit höchstens 4 Knoten sind Teilgraphen einer dieser vier planaren Graphen und daher auch planar.

# Planarität

**Proposition.** *Alle ungerichteten, einfachen Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \leq 4$ sind planar.*

*Beweis.* Die vollständigen Graphen $K_1, K_2, K_3$ und $K_4$ sind planar. Alle anderen einfachen Graphen mit höchstens 4 Knoten sind Teilgraphen einer dieser vier planaren Graphen und daher auch planar.

**Frage.** Gilt obige Proposition auch, wenn wir $|V| \leq 4$ durch $|V| \leq 5$ ersetzen?

# Planarität

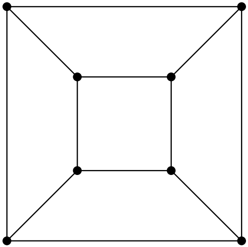
**Proposition.** *Alle ungerichteten, einfachen Graphen* $G = (V, E)$ *mit* $|V| \leq 4$ *sind planar.*

*Beweis.* Die vollständigen Graphen $K_1, K_2, K_3$ und $K_4$ sind planar. Alle anderen einfachen Graphen mit höchstens 4 Knoten sind Teilgraphen einer dieser vier planaren Graphen und daher auch planar.

**Frage.** Gilt obige Proposition auch, wenn wir $|V| \leq 4$ durch $|V| \leq 5$ ersetzen? Nein, mit $K_5$ scheint es nicht so recht zu klappen, eine ebene Einbettung zu finden – wir werden in diesem Kapitel näher hierauf eingehen.

# Eulersche Formel

Diese gibt einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Knoten $n$, der Kanten $k$, der von Knoten und Kanten eingeschlossenen Flächen $f$ (wobei man die unbeschränkte Fläche mitzählt) und der Zusammenhangskomponenten $z$ einer ebenen Graphendarstellung an.



Dieser ebene Graph hat $n = 8$ Knoten, $k = 12$ Kanten, $f = 6$ Flächen und $z = 1$ Zusammenhangskomponente. Es gilt also $n - k + f = z + 1$, denn $8 - 12 + 6 = 1 + 1$. Zufall?

# Eulersche Formel

**Satz.** *Es sei* $\Gamma = (V, E)$ *ein ebener Graph mit* $n$ *Knoten,* $k$ *Kanten,* $f$ *Flächen (inklusive der unbeschränkten) und* $z$ *Zusammenhangskomponenten. Dann gilt*

$$n - k + f = z + 1.$$

# Beweis (1/4)

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage durch Induktion über die Anzahl der Kanten $k$. Gilt $k = 0$, so besteht $\Gamma$ nur aus isolierten Knoten, d.h. die Anzahl der Zusammenhangskomponenten ist $z = n$.

Es gibt nur eine Fläche, nämlich die unbeschränkte, also ist $f = 1$. (Vorsicht: Vergessen Sie diese nicht in Beweisführungen!) Damit folgt wie gewünscht

$$n - k + f = n + 1 = z + 1.$$

# Beweis (2/4)

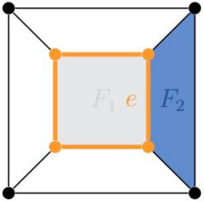
Es sei nun für ein $k \geq 1$ die Formel richtig für alle Graphen mit weniger als $k$ Kanten. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle: Sind alle $z$ Zusammenhangskomponenten von $\Gamma$ Bäume, so gilt $k = n - z$ (siehe Kap. 2).

Da Bäume keine Kreise enthalten, gibt es auch hier wieder nur die unbeschränkte Fläche, d.h. es gilt $f = 1$. Insgesamt folgt dann

$$n - k + f = n - (n - z) + 1 = z + 1.$$

# Beweis (3/4)

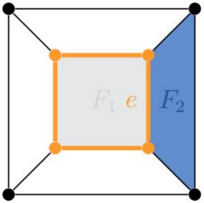
Gibt es eine Zusammenhangskomponente von $\Gamma$, die kein Baum ist, so enthält diese einen Kreis (orange hervorgehoben):




Es sei $e$ eine Kante auf diesem Kreis. Dann liegt $e$ auf dem Rand von zwei verschiedenen Flächen $F_1$ und $F_2$. Wir verwenden hier implizit eine Fassung des jordanschen Kurvensatzes:

**Satz** (Jordanscher Kurvensatz für Polygone). *Ist $P \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon, so hat $\mathbb{R}^2 \setminus P$ genau zwei Gebiete, von denen genau eines beschränkt ist. Jedes der beiden Gebiete hat als Rand ganz $P$.*

# Beweis (4/4)




Betrachten wir nun die Graphendarstellung $\Gamma' = (V, E \setminus \{e\})$, so hat diese immer noch $n$ Knoten, aber $k-1$ Kanten und immer noch $z$ Zusammenhangskomponenten, da $e$ auf einem Kreis lag (Übung), aber $f-1$ Flächen, da durch das Entfernen von $e$ die Flächen $F_1$ und $F_2$ verschmelzen. Nach Induktionsannahme gilt daher für $\Gamma'$

$$n - (k-1) + (f-1) = z + 1 \Leftrightarrow n - k + f = z + 1.$$

**Frage.** Können verschiedene ebene Darstellungen eines planaren Graphen $G$ verschieden viele Flächen haben?

**Frage.** Können verschiedene ebene Darstellungen eines planaren Graphen $G$ verschieden viele Flächen haben?
**Nein**: Die Anzahl der Flächen $f$ ist bei allen ebenen Darstellungen von $G$ gleich, denn $f$ folgt nach der eulerschen Formel direkt aus der Ordnung, Größe und Anzahl der Zshgs.komp., und diese sind in jeder Darstellung gleich.

Ist der dargestellte Graph zusammenhängend, so vereinfacht sich die eulersche Formel zu der Formel für dreidimensionale konvexe Polyeder (diese allgemeinhin übliche Bezeichnung kann etwas verwirrend sein, denn die Formel gilt nicht nur für Polyeder, sondern für **alle** ebenen Graphen).

**Korollar** (Eulersche Polyederformel). *Es sei $\Gamma = (V, E)$ ein ebener, einfacher, zusammenhängender Graph. $\Gamma$ habe Ordnung $n$, Größe $m$ und $f$ Flächen. Dann gilt $n - m + f = 2$.*

(Wir schreiben hier für die Größe $m$ statt $k$, da dies die klassische Schreibweise ist.) Wir schauen uns später einen weiteren Beweis dieser wichtigen Gleichung an.

**Satz.** *Es sei* $\Gamma = (V, E)$ *eine ebene Graphendarstellung eines einfachen, zusammenhängenden Graphen.* $\Gamma$ *habe Ordnung* $n \geq 3$*, Größe* $k$ *und* $f$ *Flächen. Dann gelten*

$$k \leq 3n - 6 \quad \textit{und} \quad f \leq 2n - 4.$$

*Insbesondere haben planare Graphen* $O(n)$ *viele Kanten.*

# Beweis (1/2)

- Schauen wir uns die Nachbarschaften zwischen Kanten und Flächen an, so gibt es für jede Kante genau zwei Seiten zu betrachten (rechts und links von der Kante).
- Es ist zu beachten, dass rechts und links von einer Kante dieselbe Fläche liegen kann.
- Da der Rand jeder beschränkten Fläche einen Kreis beinhaltet [warum?] und dieser aus mindestens 3 Kanten besteht, wird jede Fläche mindestens dreimal gezählt.

# Beweis (2/2)

- Die unbeschränkte Fläche wird ebenfalls entweder von mindestens 3 verschiedenen Kanten berandet oder es gibt nur 2 Kanten ($G$ ist zusammenhängend und hat mindestens 3 Knoten, also mindestens 2 Kanten), dann wird sie aber für jede Seite gezählt, insgesamt also 4 mal. Folglich gilt
$$3f \leq 2k.$$
- Mit der eulerschen Polyederformel folgt dann
$$3f = 3(2 - n + k) \leq 2k \Rightarrow k \leq 3n - 6.$$
- Löst man nach $k$ auf, folgt
$$2k = 2(n + f - 2) \geq 3f \Rightarrow f \leq 2n - 4.$$

# Knotengrade in planaren Graphen

**Korollar.** *Jeder ungerichtete, einfache planare Graph* $G = (V, E)$ *mit* $|V| \geq 3$ *hat mindestens drei Knoten von Grad* $< 6$.

## Beweis

- Wir nehmen an, dass $G$ zusammenhängend ist. Sonst können wir, ohne die Planarität zu zerstören, solange Kanten einfügen, bis $G$ zusammenhängend ist, und erhöhen dabei die Knotengrade nur.
- Dann hat jeder Knoten wegen des Zusammenhangs mindestens Grad 1. Gäbe es höchstens 2 Knoten mit Grad kleiner als 6, so würde

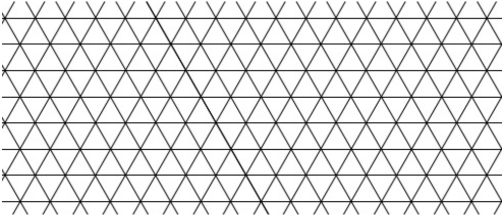
$$2k = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq (n-2) \cdot 6 + 2 = 6n - 10 \Rightarrow k \geq 3n - 5$$

  gelten.
- Dies widerspricht jedoch dem Satz von Folie 30 – dieser besagt, dass $k \leq 3n - 6 < 3n - 5$.

# Durchschnittlicher Knotengrad in planaren Graphen

**Korollar.** *In jedem ungerichteten, einfachen, planaren Graphen $G = (V, E)$ ist der durchschnittliche Knotengrad streng kleiner als 6, d.h.*

$$\frac{1}{|V(G)|} \cdot \sum_{v \in V} \deg(v) < 6.$$



In **un**endlichen planaren Graphen ist Durchschnittsgrad 6 möglich.

# Beweis

Setze $n := |V|$ und $k := |E|$. Angenommen, es würde

$$\frac{1}{n}\sum_{v\in V}\deg(v) \geq 6$$

gelten. Dann folgt

$$6n \leq \sum_{v\in V}\deg(v) = 2k \overset{\textit{Folie } 30}{\leq} 6n - 12 < 6n,$$

ein Widerspruch.

Wir haben gesehen, dass der Minimalgrad eines planaren Graphen höchstens 5 ist, d.h. falls $G$ planar ist, so gilt $\delta(G) \leq 5$.

**Frage.** Ist für einen planaren $G$ sein Maximalgrad $\Delta(G)$ auch beschränkt?

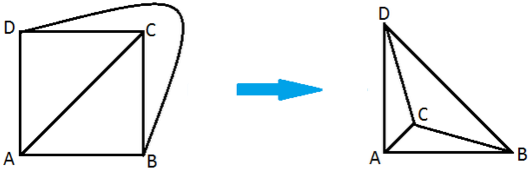
Wir haben gesehen, dass der Minimalgrad eines planaren Graphen höchstens 5 ist, d.h. falls $G$ planar ist, so gilt $\delta(G) \leq 5$.

**Frage.** Ist für einen planaren $G$ sein Maximalgrad $\Delta(G)$ auch beschränkt?

Nein, z.B. sind Sterne planar und können beliebig großen Maximalgrad haben.

Man kann sich fragen, in welchem Maße man Einfluss hat auf die *Form* der Kanten in einem ebenen Graphen. Das folgende Resultat ist dieser Frage gewidmet. Eine ebene Darstellung eines planaren Graphen, in der jede Kante eine geradlinige Strecke ist, heißt *Streckengraph*.

**Satz** (Wagner, 1936). *Jeder ebene Graph kann durch einen Homöomorphismus der euklidischen Ebene auf sich in einen Streckengraphen überführt werden.*

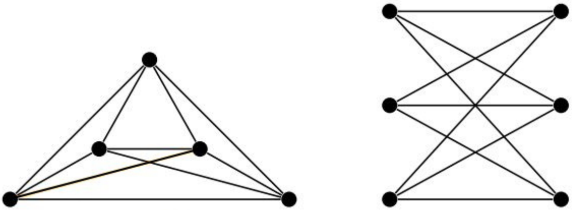


# Bipartite Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls es disjunkte Mengen $A \subset V$ und $B \subset V$ gibt mit $A \cup B = V$ ($A$ und $B$ bilden also eine *Partition* von $V$), sodass keine Kante von $G$ zwischen zwei Knoten von $A$ oder zwischen zwei Knoten von $B$ verläuft. Kanten zwischen $A$ und $B$ sind natürlich erlaubt!

$A$ und $B$ heißen *Partitionsklassen*. Sind *alle* möglichen Kanten vorhanden, so nennen wir den Graphen *vollständig bipartit* und schreiben $K_{|A|,|B|}$.

**Proposition.** *Der vollständige Graph $K_5$ und der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$ sind nicht planar.*

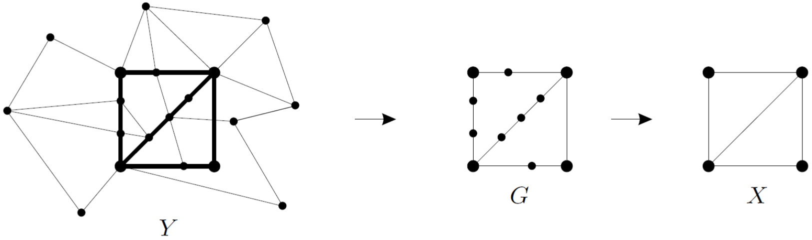


(a) $K_5$ (b) $K_{3,3}$

# Beweis

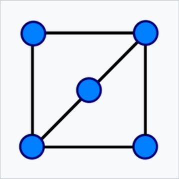
- In $K_5$ gilt $n = 5$ und $k = 10$. Folglich ist die Bedingung $10 = k \leq 3n - 6 = 9$ (Folie 30) verletzt.
- In $K_{3,3}$ gilt $n = 6$ und $k = 9$. Angenommen, es gäbe eine Darstellung von $K_{3,3}$ in der Ebene mit $f$ Flächen. Da $K_{3,3}$ zusammenhängend ist, folgt durch die eulersche Polyederformel $f = 2 - n + k = 5$.
- Andererseits wird jede der Flächen von einem Kreis umrandet [wieso?] und, da $K_{3,3}$ einfach und bipartit ist, hat jeder dieser Kreise gerade Länge [wieso?], besteht also aus mindestens 4 Kanten.
- Es gilt also $4f \leq 2k = 18$ beziehungsweise $f \leq 4$, ein Widerspruch.
- Daher ist $K_{3,3}$ nicht planar.

Ein *Unterteilungsgraph* ist ein Graph, der durch Kantenunterteilung aus einem anderen Graphen entsteht.

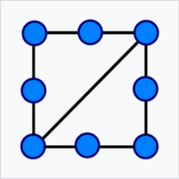



$G$, ein Teilgraph von $Y$, ist ein Unterteilungsgraph von $X$.

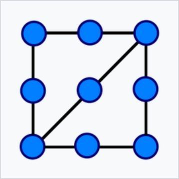
Zwei Graphen heißen *homöomorph*, falls sie isomorphe Unterteilungsgraphen besitzen.



Graph A



Graph B



Gemeinsamer Unterteilungsgraph C

Die Graphen $A$ und $B$ sind homöomorph, da sie den gemeinsamen Unterteilungsgraphen $C$ besitzen.

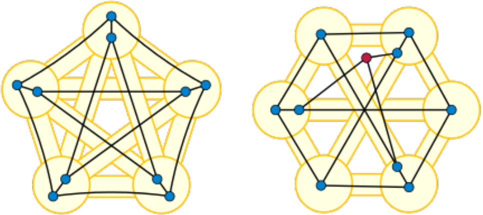
# Sätze von Kuratowski und Wagner

**Satz** (Kuratowski, 1930). *Ein ungerichteter, einfacher Graph ist genau dann planar, wenn er keinen Teilgraphen besitzt, der ein Unterteilungsgraph des $K_5$ oder des $K_{3,3}$ ist.*

Unterteilungen von $K_5$ und $K_{3,3}$ nennt man auch *Kuratowski Teilgraphen*. $K_5$ und $K_{3,3}$ selbst sind bekannt als *Kuratowski-Graphen*. Vorsicht: So schön der Satz von Kuratowski aus mathematischer Sicht auch ist, er liefert kein effizientes Kriterium, um die Planarität eines vorgegebenen Graphen zu testen. Ein weiterer, wichtiger Satz, der äquivalent ist zum Satz von Kuratowski (aber algorithmisch gesehen ebenso wenig nützlich ist):

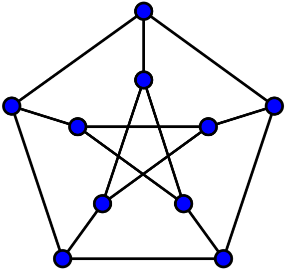
**Satz** (Wagner, 1937). *G is planar genau dann, wenn G keinen der beiden Kuratowski-Graphen als Minor enthält.*

$K_5$ und $K_{3,3}$ als Minoren des Petersen-Graphen:

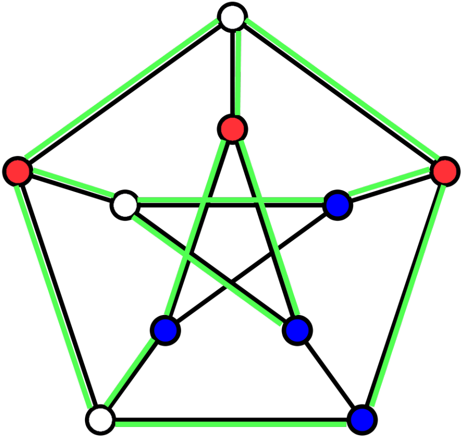


Um die Nichtplanarität des Petersen-Graphen durch den Satz von Wagner zu zeigen, würde es natürlich reichen, *einen* dieser Minoren nachzuweisen.

**Satz** (Kuratowski, 1930). *Ein ungerichteter, einfacher Graph ist genau dann planar, wenn er keinen Teilgraphen besitzt, der ein Unterteilungsgraph des $K_5$ oder des $K_{3,3}$ ist.*



**Aufgabe.** Verwende den Satz von Kuratowski, um zu bestimmen, ob der Graph $G$ von Petersen planar ist oder nicht. Kann $G$ eine Unterteilung von $K_5$ beinhalten?



Unterteilter $K_{3,3}$ in $G$ (siehe weiße und rote Knoten und grüne Kanten). Somit ist der Graph von Petersen nach dem Satz von Kuratowski nicht planar. $G$ kann keine Unterteilung von $K_5$ besitzen: es gibt keine Knoten von Grad 4.

# ÜBERS. PLANARITÄTSTESTS, NACH J. M. SCHMIDT

| Jahr | Algorithmus | Laufzeit |
|---|---|---|
| 1961 | Auslander, Parter (Goldstein '63: Korrektur) | $O(n^3)$ |
| 1964 | Demoucron, Malgrange, Pertuiset | $O(n^2)$ |
| 1967 | Lempel, Even, Cederbaum | $O(n^2)$ |
| 1974 | Hopcroft, Tarjan | $O(n)$ |
| 1976 | Booth, Lueker | $O(n)$ |
| 1985/2003 | de Fraysseix, Ossona de Mendez, Rosenstiehl | $O(n)$ |
| 1993/2003 | Shih, Hsu | $O(n)$ |
| 1999/2004 | Boyer, Myrvold | $O(n)$ |

State-of-the-Art:

- In Praxis am schnellsten (100.000 Kanten in ca. 0,1 Sekunden)
- Zertifizierend: Geben planare Einbettung oder Kuratowski-Teilgraph aus.

# Planaritätsalgorithmus nach Demoucron, Malgrange und Pertuiset

- Wir besprechen nun den $O(|V|^2)$ Algorithmus von Demoucron, Malgrange und Pertuiset (1964).
- Ein nicht vollständiger, zusammenhängender Graph mit $> k$ Knoten heißt *$k$-zusammenhängend*, wenn das Löschen von beliebigen $< k$ Knoten aus $G$ einen zusammenhängenden Graphen liefert. Der $K_n$ sei $(n-1)$-zusammenhängend.
- Zwei $vw$-Wege $P, Q$ in einem Graphen heißen *intern disjunkt*, falls $V(P) \cap V(Q) = \{v, w\}$.
- Es gilt der folgende fundamentale Satz der Graphentheorie, den wir in Kapitel 10 beweisen werden:

**Satz** (Menger, 1927). *Ein Graph G ist genau dann k-zusammenhängend, wenn G zwischen je zwei Knoten k intern disjunkte Wege enthält.*

Hiermit kann man das folgende, nützliche Resultat zeigen, das wir in den Erläuterungen zum Demoucron-Malgrange-Pertuiset-Algorithmus immer wieder implizit benutzen werden:

**Lemma.** *Es sei $G = (V, E)$ ein 2-zusammenhängender Graph und $P$ ein Weg, sodass nur seine Endknoten in $V$ liegen. Dann ist $G \cup P$ auch 2-zusammenhängend.*

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ und ein Teilgraph $G' = (V', E')$ von $G$. Es gibt zwei Sorten *Fragmente* für $G'$ in $G$:

- Falls $e = \{v, w\} \in E \setminus E'$ und $\{v, w\} \subset V'$, dann ist der Graph $(\{v, w\}, \{\{v, w\}\})$ ein (triviales) Fragment;
- Falls $C = (V_C, E_C)$ eine Zshgs.komponente von $G[V \setminus V']$,

  $$E'_C = \{e \in E : e \cap V_C \neq \emptyset,\ e \cap V' \neq \emptyset\}$$

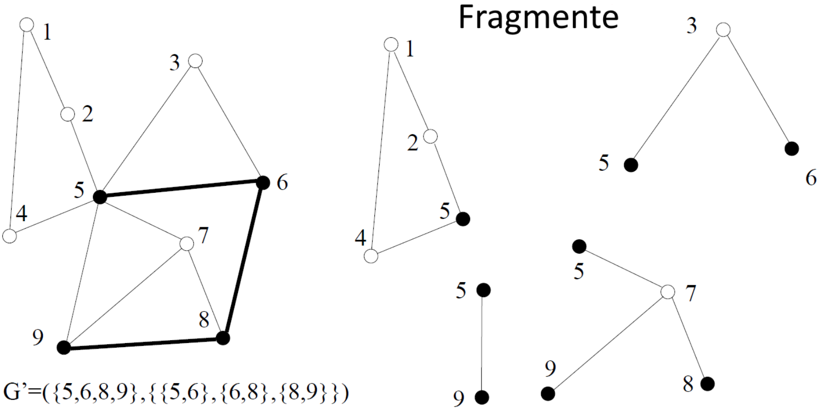
  und

  $$V'_C = \{v \in V' : \exists\, e \in E'_C \text{ sodass } v \in e\}$$

  sind, dann ist
  $(V_C \cup V'_C, E_C \cup E'_C)$ ein (nicht-triviales) Fragment.

Es ist klar, dass Fragmente stets zusammenhängend sind. Wir erläutern diese unübersichtliche Definition an einigen Beispielen:

# FRAGMENTE: BEISPIELE




Das Fragment von Ordnung 2, das Knoten 5 und 9 enthält, ist trivial, alle anderen Fragmente nicht.

# Algorithmus von Demoucron, Malgrange und Pertuiset

Es sei $G$ 2-zusammenhängend [das ist keine echte Einschränkung – wieso nicht?] und $C$ ein Kreis in $G$. Bette $C$ in der Ebene ein (es gibt nur eine Möglichkeit). Setze $G_1 := C$.

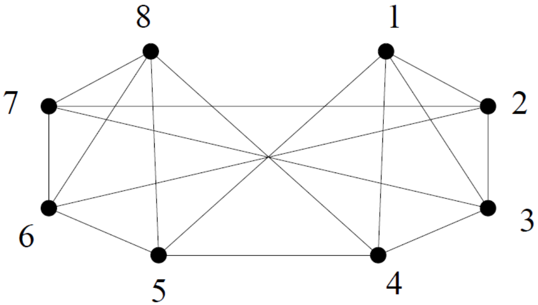
(a) $G_i$ sei der Teilgraph, für den bereits eine Einbettung besteht (falls also $G_i = G$, so sind wir fertig). Falls $G_i \neq G$, so bestimme alle Fragmente $B_k$ für $G_i$ in $G$ und bestimme desweiteren für jedes Fragment $B_k$ die Menge $F(B_k, G_i)$, welche aus jeder Fläche mit der Eigenschaft, dass jeder Knoten von $V(B_k) \cap V(G_i)$ im Rand dieser Fläche ist, besteht. (Dies ist die Menge der potentiellen Flächen, in die wir $B_k$ noch einfügen können.)

(b) Gibt es ein Fragment $B_k$ mit $|F(B_k, G_i)| = 0$, so ist $G$ nicht planar. Andernfalls: Gibt es ein $B_k$ mit $|F(B_k, G_i)| = 1$, so wähle die (eindeutige) Fläche $F \in F(B_k, G_i)$, ansonsten wähle ein beliebiges $B_k$ und eine beliebige Fläche $F \in F(B_k, G_i)$.

(c) Wähle einen Weg $W$ in $B_k$ zwischen zwei Knoten in $V(B_k) \cap V(G_i)$ und lege die Einbettung fest, sodass $W$ in $F$ liegt.

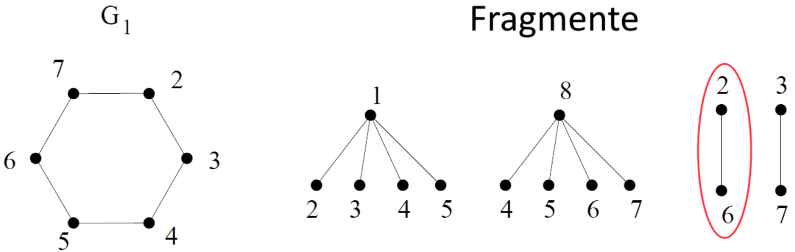
Setze nun $G_{i+1} := G_i \cup W$ und beginne von Neuem mit a) und $i + 1$ statt $i$.

# BEISPIEL (1/10)



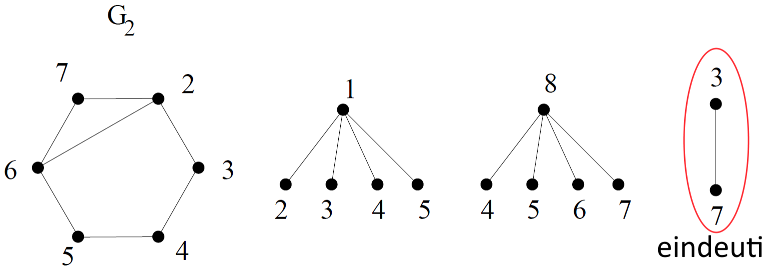

Am besten ist es, möglichst lange Kreise zu wählen, optimalerweise hier also 1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 1. Dabei wird aber weniger deutlich, wie der Algorithmus funktioniert, wir treffen also eine andere Wahl.

# Beispiel (2/10)



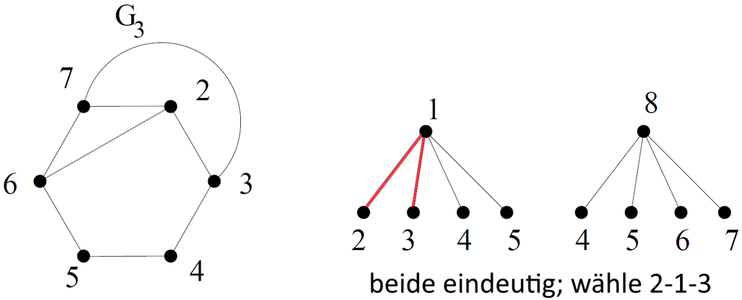

Offensichtlich sind alle Fragmente in beide Flächen von $G_1$ einfügbar ($|F(B, G_1)| = 2$ für alle Fragmente $B$). Wähle das Fragment mit Kante $\{2, 6\}$.

# BEISPIEL (3/10)



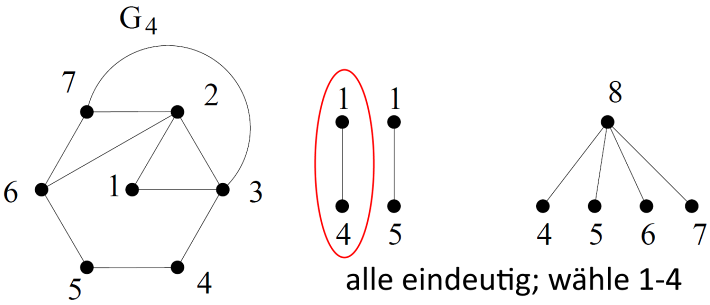

eindeutig
einfügbar

# BEISPIEL (4/10)



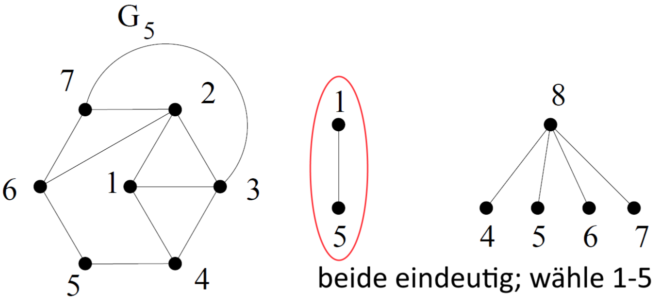

Der gewählte Weg 2-1-3 (siehe Schritt c)) im gewählten Fragment (links) ist rot markiert.

# BEISPIEL (5/10)

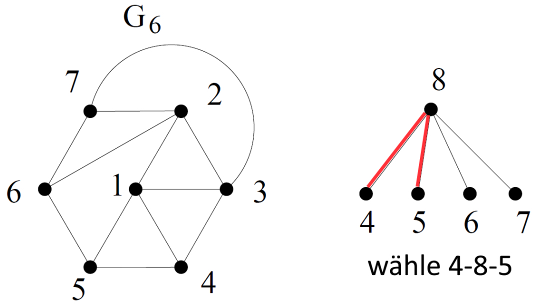



alle eindeutig; wähle 1-4

# BEISPIEL (6/10)

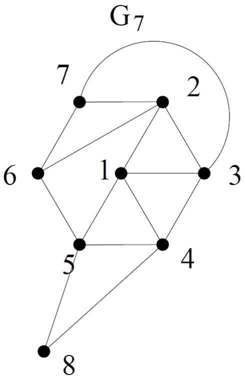


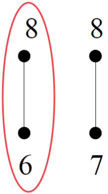
# BEISPIEL (7/10)



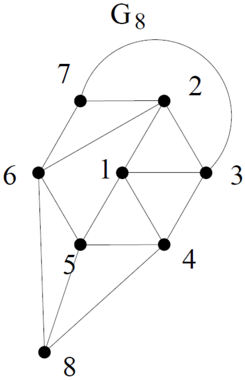

Wiederholung: Eine Fläche $F$ ist in $F(B_k, G_i)$, falls jeder Knoten von $V(B_k) \cap V(G_i)$ im Rand von $F$ ist. Für obiges Fragment ist $V(B_k) \cap V(G_i) = \{4, 5, 6, 7\}$, womit nur eine Fläche in Betracht kommt (nämlich die unbeschränkte).

# BEISPIEL (8/10)

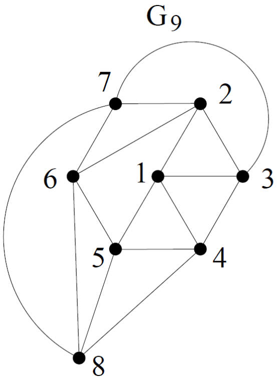


# BEISPIEL (9/10)




# Beispiel (10/10)




Der Graph ist planar.

## TAILLENWEITE

Für einen Graphen $G$ sei die Länge eines kürzesten Kreises in $G$ seine *Taillenweite* (*girth*).

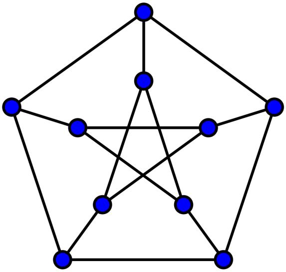
**Proposition.** *Für einen ebenen Graphen mit Taillenweite $g$, Flächenanzahl $f$ und Größe $m$ gilt*

$$fg \leq 2m.$$

*Beweis.* Jede Fläche des Graphen ist berandet von einem geschlossenen Kantenzug der Länge $\geq g$, sonst gäbe es einen Kreis in $G$ der Länge $< g$, ein Widerspruch zur Definition der Taillenweite.

Jede Kante hat rechts und links von sich eine Fläche (möglicherweise dieselbe!). Zählen wir jede Kante von rechts und links, so erhalten wir $2m$. Durch obigen Paragraphen ist also $fg$ eine untere Schranke für $2m$, was zu zeigen war.

**Korollar.** *Der Graph von Petersen ist nicht planar.*



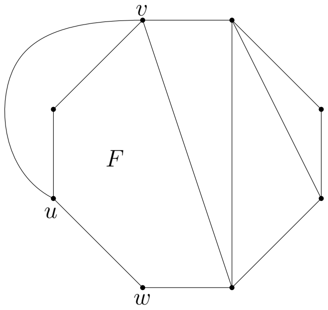
*Beweis.* Nehme an, der Petersen-Graph $G$ ist planar. Er habe $f$ Flächen. Nach der eulerschen Polyederformel gilt $f - k + n = 2$, hier also $f = 2 + 15 - 10 = 7$ (da $G$ Ordnung $n = 10$ und Größe $k = 15$ hat). Nach dem Korollar auf Folie 65 gilt $fg \leq 2k$. Die Taillenweite von $G$ ist 5, es gilt hier also $5 \cdot 7 \leq 2 \cdot 15$, ein Widerspruch.

# Kreisplanare Graphen

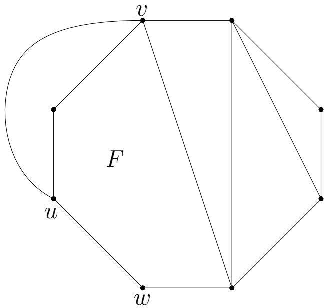
Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, einfacher, planarer Graph.

1. $G$ heißt *kreisplanar* (*outerplanar*), wenn $G$ eine ebene Graphendarstellung besitzt, in der alle Knoten am Rand der gleichen – üblicherweise der unbeschränkten – Fläche liegen.
2. $G$ heißt *maximal kreisplanar*, wenn $G$ kreisplanar ist, aber jede hinzugefügte Kante einen Graphen liefert, der diese Eigenschaft verletzt.

**Frage.** Es sei $G$ ein Graph, der isomorph zu dem unten dargestellten ebenen Graphen ist. Ist $G$ kreisplanar? Ist er maximal kreisplanar?



**Frage.** Es sei $G$ ein Graph, der isomorph zu dem unten dargestellten ebenen Graphen ist. Ist $G$ kreisplanar? Ist er maximal kreisplanar?




$G$ ist kreisplanar, da wir die Kante $uv$ in das Innere der Fläche $F$ verlegen können und somit eine ebene Darstellung von $G$ erhalten, in der alle Knoten auf dem Rand einer Fläche liegen (in diesem Fall die unbeschränkte). $G$ ist nicht maximal kreisplanar, da $G + vw$ kreisplanar ist.

# Kreisplanare Graphen

**Proposition.** *Es sei* $G = (V, E)$ *ein ungerichteter, einfacher Graph und* $G' = (V', E')$ *jener Graph, der entsteht, wenn man zu* $G$ *einen Knoten* $v$ *hinzufügt und diesen mit allen Knoten in* $V$ *verbindet. Dann gilt:* $G'$ *ist genau dann planar, wenn* $G$ *kreisplanar ist.*

# Beweis

„$\Leftarrow$": Es sei zunächst $G$ kreisplanar. Dann können wir $G$ so in der Ebene einbetten, dass alle Knoten auf dem Rand einer Fläche $F$ liegen, und keine Kante von $G$ durch das Innere von $F$ verläuft. Platzieren wir nun $v$ im Inneren von $F$, so können wir $v$ mit allen Knoten von $G$ verbinden, ohne die Planarität zu zerstören. Somit ist $G'$ planar.

„$\Rightarrow$": Es sei umgekehrt $G'$ planar. Wir betten $G'$ in der Ebene ein. Entferne $v$ und alle zu $v$ inzidenten Kanten. Wir erhalten den Graphen $G$. Jene Fläche, in der vorher $v$ lag, besitzt die Eigenschaft, dass auf ihrem Rand alle Knoten von $V$ liegen müssen. Somit ist $G$ kreisplanar.

# Kreisplanare Graphen

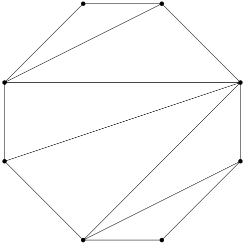
**Korollar** (des Satzes von Wagner). *Ist $G$ ein ungerichteter, einfacher Graph, so gilt: $G$ ist genau dann kreisplanar, wenn er weder $K_4$ noch $K_{2,3}$ als Minor enthält.*

Beweis.
„⇒“: Es sei zunächst $G$ kreisplanar. Dann können wir einen neuen Knoten $v$ hinzufügen und mit allen Knoten in $V$ verbinden, sodass der entstehende Graph $G'$ planar ist. Daher kann $G$ nicht $K_4$ oder $K_{2,3}$ als Minor enthalten, denn $G'$ würde dann $K_5$ bzw. $K_{3,3}$ als Minor enthalten, wäre also nicht planar nach dem Satz von Wagner – ein Widerspruch.

„⇐“: Ist umgekehrt $G$ nicht kreisplanar, so ist auch der oben konstruierte Graph $G'$ nicht planar, enthält also $K_5$ oder $K_{3,3}$ als Minor. Daher muss $G$ die Graphen $K_4$ oder $K_{2,3}$ als Minoren enthalten.

# Kreisplanare Graphen

**Proposition.** *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, einfacher, maximal kreisplanarer Graph mit $|V| \geq 3$. Dann liegen alle Knoten von $G$ auf einem Kreis und jede Fläche des (o.B.d.A.) Inneren des Kreises ist berandet von einem Kreis der Länge 3.*



*Beweisidee.* Gäbe es eine Fläche, die von einem Kreis der Länge $\geq 4$ berandet wäre, so könnte man in ihr Inneres eine Kante hinzufügen und der resultierende Graph wäre trotzdem kreisplanar, im Widerspruch zur Tatsache, dass $G$ maximal kreisplanar ist.

Wir bezeichnen mit *Polyeder* den nichttrivialen Schnitt endlich vieler Halbräume im $\mathbb{R}^3$. (Äquivalent die konvexe Hülle endlich vieler Punkte im $\mathbb{R}^3$, die nicht alle in einer Ebene liegen.)

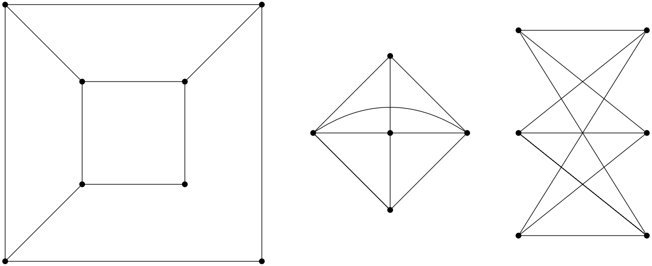
Die vielleicht berühmtesten Polyeder sind die fünf platonischen Körper – hier als Spielwürfel.

Es folgt ein alter und fundamentaler Satz aus der Theorie der planaren Graphen. (Wir werden den Beweis hier nicht führen und es ist kein einfacher Beweis bekannt.)

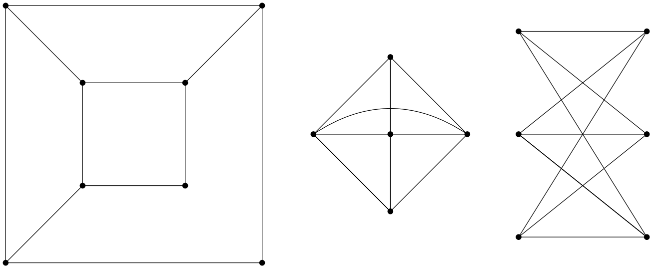
**Satz** (Steinitz, 1922). *Ein Graph $G$ ist genau dann der Graph eines Polyeders, wenn $G$ planar und 3-zusammenhängend ist.*

Wiederholung: Ein nicht vollständiger, zusammenhängender Graph mit $> k$ Knoten heißt *$k$-zusammenhängend*, wenn das Löschen von beliebigen $< k$ Knoten aus $G$ einen zusammenhängenden Graphen liefert. Der $K_n$ sei $(n-1)$-zusammenhängend.

**Frage.** Welche der folgenden Graphen sind Graphen eines Polyeders?



**Frage.** Welche der folgenden Graphen sind Graphen eines Polyeders?



Links: Kein Polyeder, da nicht 3-zusammenhängend.

Mitte: Ein Polyeder. Zwar ist die obige Darstellung nicht eben, es ist jedoch leicht, eine ebene Darstellung anzugeben, der Graph ist also planar. Es ist auch leicht zu überprüfen, dass er 3-zusammenhängend ist.

Rechts: Kein Polyeder, da der Graph zwar 3-zusammenhängend, nicht jedoch planar ist (dies ist $K_{3,3}$, einer der Kuratowski-Graphen).

# Platonische Körper

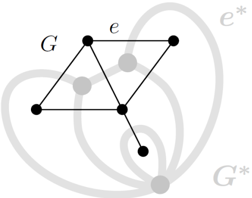
Ein Polyeder ist ein *platonischer Körper*, falls seine Seitenflächen kongruent und regulär (alle Winkel und alle Seitenlängen gleich) sind und in jeder Ecke die gleiche Anzahl Seitenflächen anzutreffen ist.

**Satz** (Theaitetos, 415–369 v. Chr.).
*Es gibt genau fünf platonische Körper.*

Die Platonischen Körper als Skulpturen im Naturschutzgebiet Am Bagno – Buchenberg (NRW).

# Dualer Graph

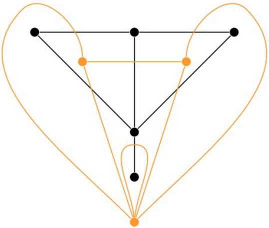
Es sei $G = (V, E)$ die ebene Darstellung eines planaren Graphen. Dann heißt $G^* = (V^*, E^*)$ der *duale Graph* – oder das *Dual* – von $G$, wenn gelten: In jeder Fläche $F$ von $G$ liegt genau ein $v^* \in V^*$, in jeder Fläche $F^*$ von $G^*$ liegt genau ein $v \in V$, jede Kante $e \in E$ schneidet genau eine Kante $e^* \in E^*$ und jede Kante $e^* \in E^*$ schneidet genau eine Kante $e \in E$.



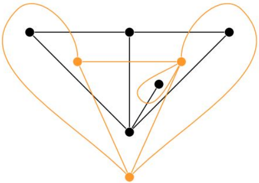

Ein Graph $G$ in schwarz und sein Dual $G^*$ in grau.

Bemerkung: Eigentlich müsste man $G^*$ mitsamt einer Funktion $E \to V \cup \binom{V}{2}$ angeben, die jeder Kante entweder einen oder zwei Knoten zuordnet (s. Kap. 1). Diese ist jedoch hier vollkommen unwesentlich und verkompliziert die Notation ungemein, sodass wir sie nicht explizit angeben.

Achtung: Zwar besitzt jeder planare Graph $G$ einen, ebenfalls planaren, dualen Graphen $G^*$, aber dieser hängt von der gewählten Graphendarstellung ab, ist also unter Umständen nicht eindeutig.



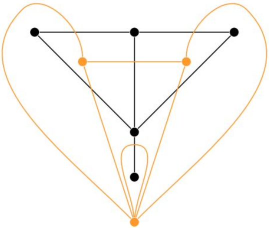
(a)



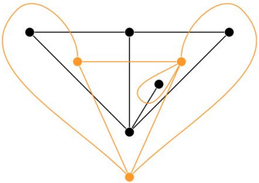
(b)

Wir betten den Beispielgraphen auf zwei verschiedene Weisen in der Ebene ein. Dies liefert zwei verschiedene (d.h. nicht isomorphe) zugehörige duale Graphen. **Frage.** Wie sieht man schnell, dass diese beiden Duale nicht isomorph sind?

Achtung: Zwar besitzt jeder planare Graph $G$ einen, ebenfalls planaren, dualen Graphen $G^*$, aber dieser hängt von der gewählten Graphendarstellung ab, ist also unter Umständen nicht eindeutig.



(a)



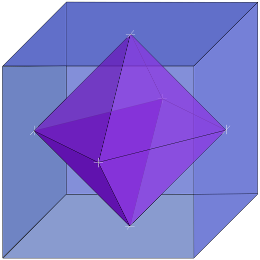
(b)

Wir betten den Beispielgraphen auf zwei verschiedene Weisen in der Ebene ein. Dies liefert zwei verschiedene (d.h. nicht isomorphe) zugehörige duale Graphen. **Frage.** Wie sieht man schnell, dass diese beiden Duale nicht isomorph sind? Knotengrade vergleichen.

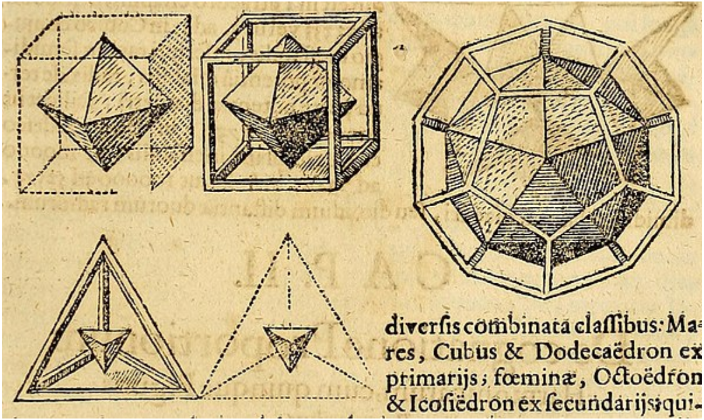
# Satz von Whitney

Ist der Graph jedoch 3-zusammenhängend, so gilt Folgendes:

**Satz** (Whitney, 1932). *Polyedergraphen, nach dem Satz von Steinitz also planare, 3-zusammenhängende Graphen, haben genau eine Einbettung in der Ebene. Somit ist das Dual eines planaren und 3-zusammenhängenden Graphen eindeutig bestimmt.*



Das Dual des Würfels ist das Oktaeder (und umgekehrt).




Duale der platonischen Körper
in Keplers *Harmonices Mundi* (1619).

Mithilfe des Duals kann man einen besonders schönen Beweis der eulerschen Polyederformel geben, der wohl auf Von Staudt (1847) zurückgeht. Wir skizzieren jetzt diesen Beweis, wiederholen aber erst die Aussage, die wir zeigen wollen:

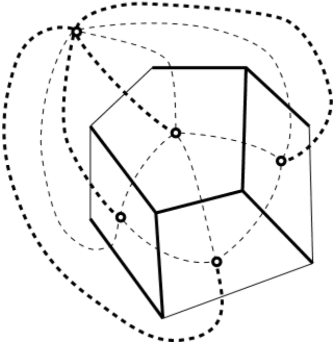
**Satz.** *Es sei $G$ ein zusammenhängender, ebener Graph mit $n$ Knoten, $m$ Kanten und $f$ Flächen. Dann gilt*

$$f - m + n = 2.$$

Es sei $G^*$ das Dual von $G$. Es sei $T$ ein Spannbaum von $G$ und $E_T^*$ die Menge der Kanten in $G^*$, die Kanten in $T$ entsprechen. Es ist leicht zu sehen, dass $T^* := (V^*, E^* \setminus E_T^*)$ ein Spannbaum von $G^*$ ist. Wegen $|V(G^*)| = |V(T^*)| = f$ gilt

$$\underbrace{|E(T)|}_{n-1} + \underbrace{|E(T^*)|}_{f-1} = \underbrace{|E(G)|}_{m},$$

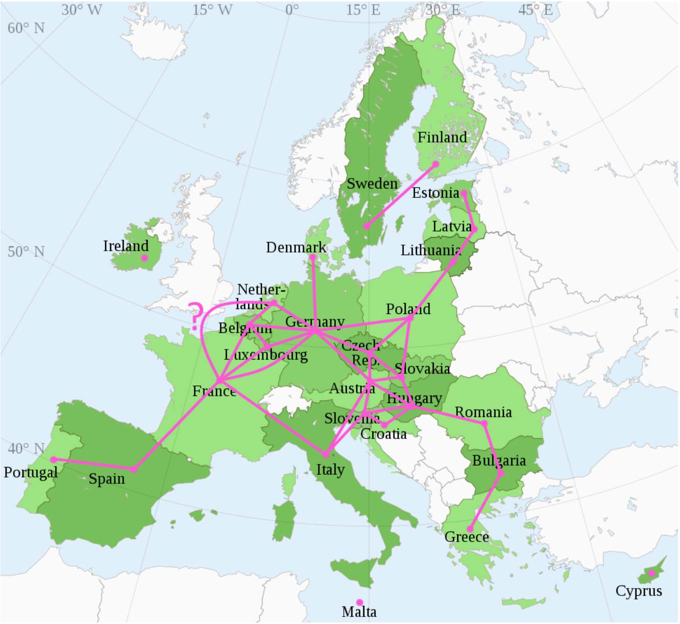
woraus das Resultat unmittelbar folgt.



**Aufgabe.** Man assoziiere jedem Land der E.U. einen Knoten. Zwei solche Knoten seien verbunden, wenn die entsprechenden Länder (auf Land) benachbart sind.

(a) Zeichnen Sie diesen Graphen $G$.
(b) Wie viele Komponenten hat $G$?
(c) Wie viele Knoten hat $G$?
(d) Bestimmen Sie Minimal- und Maximalgrad von $G$. (Achten Sie auf die Komponenten!)
(e) Ist $G$ planar?
(f) Ist $G$ bipartit?
(g) Was ist die maximale Länge eines kürzesten Weges zwischen zwei Knoten in $G$?


30° W
15° W
0°
15° E
30° E
45° E
60° N
50° N
40° N
Finland
Sweden
Estonia
Latvia
Lithuania
Ireland
Denmark
Nether-
lands
Poland
Germany
Belgium
Czech
Rep.
Luxembourg
Slovakia
France
Austria
Hungary
Romania
Slovenia
Croatia
Bulgaria
Portugal
Spain
Italy
Greece
Cyprus
Malta


30° W
15° W
0°
15° E
30° E
45° E
60° N
50° N
40° N
Finland
Sweden
Estonia
Latvia
Lithuania
Ireland
Denmark
Nether-
lands
?
Poland
Belgium
Germany
Czech
Rep.
Luxembourg
Slovakia
Austria
France
Hungary
Romania
Slovenia
Croatia
Portugal
Spain
Italy
Bulgaria
Greece
Cyprus
Malta

OCÉAN ATLANTIQUE
CANAL D'ANGUILLA
Anguilla (R.-U.)
Saint-Martin (FR.)
frontière
MARIGOT chef-lieu
route principale
route secondaire
zone urbanisée
aéroport
sommet
Projection UTM (WGS84 datum)
18° 07' 30"
18° 05'
18° 02' 30"
18°
63° 07' 30"
63° 05'
63° 02' 30"
63°
Rocher de l'Anse Marcel
Pointe des Froussards
Petites Cayes
Eastern Point
Basse Espagnole
North Curve
Bell Point
Rocher Créole
Red Rock 270 m
Grandes Cayes
Île Tintamarre
La Lagune
Grand-Case
Pointe Molly Smith
Baie de Grand-Case
Anse Heureuse
Cul-de-Sac
Îlet Pinel
Petite Clef
Baie Friar's
Aéroport de Saint-Martin Grand Case
Baie Orientale
SAINT-MARTIN (FRANCE)
Anse des Pères
Pointe Arago
Caye Verte
Mont Caréta 401 m
Montagne France 401 m
Club Orient
Rambaud
Pic Paradis 411 m
Falaise aux Oiseaux
Pointe du Bluff
Baie de la Potence
Pointe Plum
Baie Rouge
Pointe des Pierres à Chaux
Colombier
Quartier d'Orléans
Baie de l'Embouchure
Baie aux Prunes
Baie de Marigot
MARIGOT
Les Terres Basses
Flagstaff 390 m
Pointe du Canonnier
Baie Nettlé
Marigot Hill 307 m
Baie Lucas
Grand Étang
Sandy Ground
Baie Longue
Mont des Accords
Oyster Pond
Grand Îlet
Dawn Beach
Babit Point
Low Lands
St-Peter
Lower Prince's Quarter
de Simsonbaai
Middle Region
Baie Mullet
Baie Red Pond
Mullet Bay
Sentry Hill 340 m
Baie Gibb's
Aéroport de Princess Juliana
Koolbaai District
Cul-de-Sac
Simsonbaai
Upper Prince's Quarter
Baie Guana
Baie Burgeaux
Baie Simson
Pointe Baie Guana
Pelican
Cow & Calf
Baie Lay
Cape Bay
Baie Genève
Molly Beday
PHILIPSBURG
SINT MAARTEN (PAYS-BAS)
Baie Cole
Grande Baie
Pelican
Baie Cay
Petite Baie
Mer des Caraïbes
Étang Salé de Grande Baie
Baie Pointe Blanche
Hen & Chicks
0 (km) 5
0 (mi) 3
Pointe Blanche
CANAL DE SAINT-BARTÉLEMY

(b) $G$ hat 5 Komponenten.
(c) Ordnung ist 27 (Anzahl der Mitgliedsstaaten).
(d) Der Minimalgrad ist 0 (z.B. Malta). Der Maximalgrad ist 8 (Deutschland).
(e) $G$ ist planar, denn $G$ ist Dual eines planaren Graphen.
(f) $G$ enthält Dreiecke, ist also nicht bipartit.
(g) Die maximale Länge eines kürzesten Weges zwischen zwei Knoten in $G$ ist 8 (z.B. Portugal-Griechenland).