Übungsblatt für Dynamische Systeme

1. Finde die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

   (a) $y' = 2x(1 + y^2)$;
   (b) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$;
   (c) $y' = e^{x+y}$;
   (d) $y' = x^2y^2$;
   (e) $xy' = y^3 + y$;
   (f) $xy + (2x - 1)y' = 0$;
   (g) $y' = y^2 \cos(x)$
   (h) $y' = k \cdot \dfrac{y}{x}, \quad k \in \mathbb{R}^*$;
   (i) $y - xy' = a(1 + x^2y')$, $a \in \mathbb{R}^*$.

2. Bestimme die allgemeine Lösung für die folgenden homogenen(Euler) DGL:

   (a) $2x^2y' = x^2 + y^2$;
   (b) $y' = -\frac{x+y}{y}$;
   (c) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;
   (d) $2x^3y' = y^3 + x^2y$.

3. Bestimme die Lösung der folgenden exakten DGL:

   (a) $xdx + ydy = 0$;
   (b) $(x + y)\, dx + xdy = 0$;
   (c) $(6xy^2 + 1)dx + (3y^2 + 6x^2y)dy = 0$;
   (d) $y\,(e^{xy} - 4x)\, dx + x\,(e^{xy} - 2x)\, dy = 0$;
   (e) $\ln(y)\, dx + \left(\ln(y) + \frac{x}{y}\right) dy = 0$.

4. Bestimme die Lösung der folgenden liniaren DGL 1. Ordnung:

   (a) $y' - y\ ctg\,(x) = \sin(x)$;
   (b) $y' + \frac{y}{x} = 3x$;
   (c) $xy' + y = e^x$;
   (d) $y' + y\cos(x) = \cos(x)$;
   (e) $y' + 2xy = x + x^3$;
   (f) $y' + ay = bx^2$, $a, b \in \mathbb{R}$;
   (g) $x^3y' + 2y = x^3 + 2x$.

5. Bestimme die Lösung der folgenden Bernoulli'schen DGL:

    (a) $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$;
    (b) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2y^2}$;
    (c) $xy' + y = y^2 \ln(x)$;
    (d) $2x^2y' - 4xy = y^2$;
    (e) $y' - 2xy = 2x^3y^2$.

6. Finde die allgemeine Lösung der DGL:

    (a) $y'' = x - \cos(x)$;
    (b) $y'' = xe^x$;
    (c) $y'' = e^{2x} + \sin(2x)$;
    (d) $y''' = \ln(x)$;
    (e) $y''' = \frac{1}{x+1}$;
    (f) $y''' = -\frac{1}{x^2}$..

7. Finde die allgemeine Lösung der DGL:

    (a) $\left(1 + x^2\right) y'' = 2xy'$;
    (b) $xy''' - 3y'' - 4x^2 = 0$;
    (c) $y^{(4)} + y''' = 0$;
    (d) $xy'' + y' + x = 0$;
    (e) $y'(1 + (y')^2) = ay''$;
    (f) $xy^{(5)} + y^{(4)} = 0$.

8. Finde die Lösung der folgenden Cauchy-Probleme:

    (a) $y' = 2x(1 + y^2)$, $y(0) = 1$;
    (b) $y' = y^2 \cos(x)$, $y(0) = \frac{1}{2}$;
    (c) $\left(x^2 - 3y^2\right) + 2xyy' = 0$, $y(2) = 1$;
    (d) $y' - y\ ctg(x) = \sin(x)$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$;
    (e) $y' - y\ tg(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $y(0) = 0$;

9. Bestimme die algemeine Lösung der folgenden DGL, so dass die entsprechenden Funktionen Lösungen der homogenen DGL sind:

    (a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$;
    (b) $(2x - 1)y'' - \left(4x^2 + 1\right)y' + \left(4x^2 - 2x + 2\right)y = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$, $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{x^2}$;

(c) $(x-1)\,y'' - xy' + y = 3,\ y_1(x) = x,\ y_2(x) = e^x;$

(d) $xy'' + 2y' - xy = e^x,\ y_1(x) = \frac{e^x}{x},\ y_2(x) = \frac{e^{-x}}{x};$

10. Finde die allgemeine Lösung der DGL:

    (a) $y'' - y = 0;$

    (b) $y'' + 2y' + y = 0;$

    (c) $y'' - y' + y = 0;$

    (d) $y''' - y = 0;$

    (e) $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0;$

    (f) $y^{(4)} + 4y''' + 5y'' + 4y' + 4y = 0.$

11. Bestimme die allgemeine Lösung der DGL, wobei die partikuläre Lösung mit der Methode "Variation der Konstaten" berechnet wird:

    (a) $y'' + y = tg\,(x)\,;$

    (b) $y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}$

    (c) $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1};$

    (d) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$

    (e) $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2+6x+2}{x^3}.$

12. Finde die allgemeine Lösung der DGL:

    (a) $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2;$

    (b) $y'' + 3y' + 2y = e^x;$

    (c) $y'' + y = xe^{-x};$

    (d) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x;$

    (e) $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin(x) + x^2$

    (f) $y''' + y'' = x + 1 + (2x+5)\,e^x;$

    (g) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin(x) + 10e^x;$

13. Bestimme die Lösungen der Cauchy-Probleme:

    (a) $y'' + y = x^3 - 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -5;$

    (b) $y'' - 6y' + 9y = 9x - 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3;$

    (c) $y'' + 4y = 5e^{-x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3;$

    (d) $y''' - y' = -2x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2;$

    (e) $y''' + 2y'' + 2y' + y = x,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

14. Bestimme die Lösungen der folgenden Randwertprobleme:

(a) $y'' + y = x^3$, $y\,(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
(b) $y'' + \pi^2 y = 0$, $y\,(0) = 1$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$;
(c) $y'' + 4y = 5e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{4}) = 1 + e^{-\frac{\pi}{4}}$;
(d) $y'' - 6y' + 10y = 10x + 4$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + 1$;
(e) $y'' + y' = 1$, $y\,(0) = 0$, $y\,(1) = 1$;
(f) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$, $y\,(0) = 2\ln(2) + 2$, $y\,(1) = \frac{e+1}{e^2}\left(\ln(e+1) + 1\right)$;

Hinweis: Die letzte Übung wird mit der selben Methode gelöst wie die DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Aufpassen bei den Bedingungen!