Mathematische Modellierung

1. Der radioaktiver Zerfall

Gesetz: Die Zerfallgeschwindigkeit $x'(t)$ ist proportional zu der zum Zeitpunkt t vorhandenen Stoffmenge $x(t)$.

- $x(t)$ – die Stoffmenge zum Zeitpunkt t
- x_0 – die Stoffmenge am Anfang des Prozesses
- k – die Zerfallkonstante.

Die DGL: $x'(t) = -k \cdot x(t)$

" $-$ " zeigt Abnahme.

$x' = -k \cdot x$ $\to$ DGL mit getrennten Var.

$x' = \frac{dx}{dt}$ $\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = -k \cdot x \quad | \cdot dt, \; : x \neq 0.$

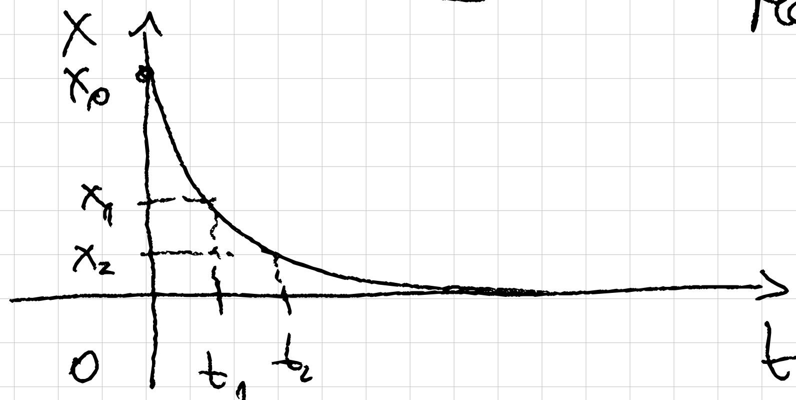
$\Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -k \cdot dt \quad | \int$

$\ln|x| = -k \cdot t + C.$

$\boxed{x = c \cdot e^{-kt}}$ $\to$ die Stoffmenge bei einem Zeitpunkt t.

$x(0) = x_0 \Rightarrow c \cdot e^{-k \cdot 0} = x_0 \Rightarrow c = x_0.$

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{-kt}} \rightarrow \text{die Lösung des Modells.}$$



$t \to \infty \Rightarrow x(t) \to 0.$

Die Halbwertszeit: die Zeit nach der nur noch die Hälfte der anfänglichen Stoffmenge vorhanden ist.

Sei $T_{1/2}$ die Halbwertszeit

$$\left.\begin{aligned} x(T_{1/2}) &= \frac{x_0}{2} \\ x(T_{1/2}) &= x_0 \cdot e^{-k \cdot T_{1/2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x_0}{2} = x_0 \cdot e^{-k \cdot T_{1/2}} \quad | : x_0 \neq 0$$

$$\frac{1}{2} = e^{-k \cdot T_{1/2}} \quad | \ln$$

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{-k \cdot T_{1/2}}$$

$$-\ln 2 = -k \cdot T_{1/2} \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}}$$

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}}$$

Beispiel 1 Für das Radium Isotop ist $k = 0{,}01682$, wenn die Zeit in Minuten gemessen wird. Wenn anfänglich $x_0 = 2\,g$ Radium sind, berechne die Hwz und die Stoffmenge nach 20 Minuten.

$k = 0{,}01682$; $x_0 = 2\,g$

$x(t) = x_0 \cdot e^{-kt}$

$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{0{,}01682} \simeq 41{,}2$ Minuten.

Nach 41,2 Minuten ist die Hälfte der Stoffmenge zerfallen.

$t = 20$ Minuten

$x(20) = x_0 \cdot e^{-k \cdot 20} = 2 \cdot e^{-0{,}01682 \cdot 20} \simeq 1{,}42\,g.$

Nach 20 Minuten sind 1,42 g geblieben.

(2) In klaren Gewässern nimmt die Beleuchtungsstärke „B" durch das Tageslicht mit zunehmender Tiefe „t" ab. Bei einem Gewässer sei die Beleuchtungsstärke an der Oberfläche $B_0 = 4000$ Lux. Nach einem Meter beträgt sie nur noch 80% des Wertes an der Oberfläche.

a) Bestimme die Abnahmekonstante.

$$B(t) = B_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$B_0 = 4000 \; ; \; t = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} B(1) = \frac{8\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 400\cancel{0} = 3200 \\ B(1) = 4000 \cdot e^{-k \cdot 1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$3200 = 4000 \cdot e^{-k}$$

$$\frac{32\cancel{00}}{40\cancel{00}} = e^{-k} \Rightarrow k = -\ln \frac{32}{40} \simeq 0{,}22$$

b) In welcher Tiefe ist die Beleuchtungsstärke nur noch halb so groß wie an der Oberfläche?

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{0{,}22} \simeq 3{,}11 \text{ m}$$

In etwa 3,11 m Tiefe hat sich die Beleuchtungsstärke halbiert.

③ Zerfall von Bierschaum

In einem Becher wird Bier eingegossen. Am Anfang ist die Höhe der Schaumsäule 24,3 mm. Man weiß dass die HWZ 533 Sekunden ist. Wv. mm beträgt die Höhe der Schaumsäule nach 5 Minuten?

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{-kt}}$$

$x(300) \simeq 16,4$ mm.

2. Exponentielles Wachstum (Malthus)

Zum Zeitpunkt t sei ein Anfangsbestand $x(t)$ von Bakterien vorhanden.

Die Wachstumsgeschwindigkeit $x'(t)$ ist proportional der zum Zeitpunkt t vorhandenen Anzahl $x(t)$ von Bakterien.

Die DGL des exponentiellen Wachstums:

$$x'(t) = r \cdot x(t)$$

Am Anfang: $x_0 \rightarrow$ Anfangsbestand.

$$\begin{cases} x'(t) = r \cdot x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{r \cdot t}}$$

Typisch für das exp. Wachstum ist die Verdopplungszeit.

T_D –

$$\left.\begin{aligned} x(T_D) &= x_0 \cdot e^{r \cdot T_D} \\ x(T_D) &= 2 \cdot x_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 e^{r \cdot T_D} = 2 x_0 \,\Big|\, : x_0 \neq 0$$

$$e^{r \cdot T_D} = 2 \Rightarrow \boxed{r = \frac{\ln 2}{T_D}}$$

$$\boxed{T_D = \frac{\ln 2}{r}}$$

3. Das Newtonsche Abkühlungsgesetz.

$$\begin{cases} T'(t) = -k \cdot (T - T_u) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

T_u – die Umgebungstemperatur

T_0 – die Anfangstemperatur

k – die Abkühlungkonstante.

$$T' = \frac{dT}{dt} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_u) \quad \Big| : |T - T_u| \neq 0$$

$$\frac{dT}{T - T_u} = -k \cdot dt \quad \Big| \int$$

$$\ln|T - T_u| = -kt + C$$

$$T - T_u = e^{-kt} \cdot C$$

$$T = T_u + e^{-k \cdot t} \cdot C$$

$$T(0) = T_0 \Rightarrow T_0 = T_u + C \Rightarrow$$

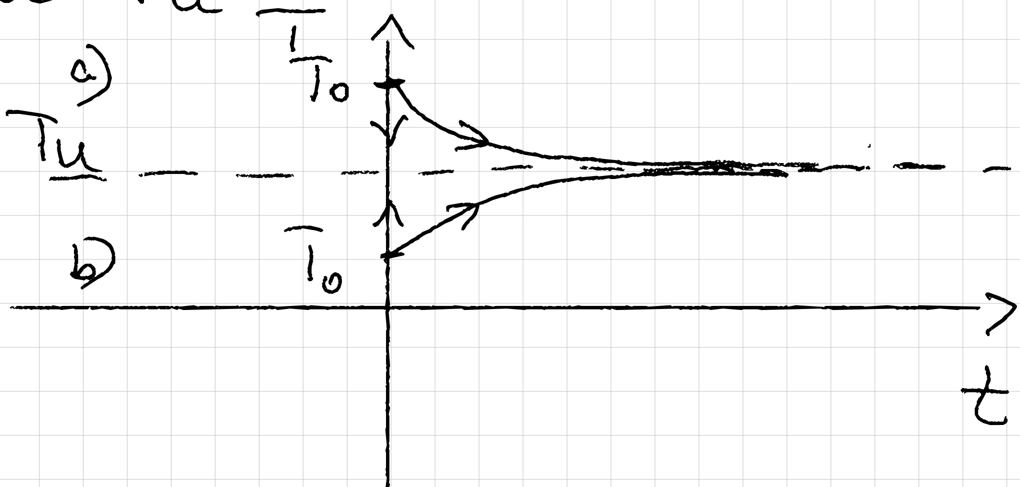
$$\Rightarrow C = T_0 - T_u$$

die Lösung des Modells.

$$\boxed{T = T_u + (T_0 - T_u) \cdot e^{-kt}}$$

a) Ist $T_0 > T_u$, nimmt $T(t)$ mit der Zeit ab und nähert sich, für $t \to \infty$ der Umgebungstemperatur T_u an.

b) Ist $T_0 < T_u$, nimmt $T(t)$ mit der Zeit zu, und nähert sich für $t \to \infty$ der T_u an.



$T - T_u = 0$?

$T^* = T_u$. $\longrightarrow$ Gleichgewichtspunkt.

$f(T) = -k \cdot (T - T_u) \qquad k > 0.$

$f(T) = 0 \implies T^* = T_u.$

$f'(T) = -k < 0 \quad \forall T.$

$\implies T^*$ as. stabil.

T_u as-stabil.

Beispiel

① Die Anfangstemperatur eines Kaffees in einer Tasse sei 80°C, die Raumtemp. 21°C und der Abkühlungsfaktor 0,13.
Bestimme die Temp. des Kaffees nach 5 Min, bzw. 10 Min.

$$T(t) = Tu + (T_0 - Tu) \cdot e^{-kt}$$

$$T(t) = 21 + (80-21) \cdot e^{-kt}$$

$$= 21 + 59 e^{-0{,}13 \cdot t}$$

$$T(5) = 21 + 59 e^{-0{,}13 \cdot 5} \simeq 51{,}8°C$$

$$T(10) = 21 + 59 \cdot e^{-0{,}13 \cdot 10} \simeq 37{,}1°C.$$

(2). Für ein Experiment wird ein Topf mit warmem Wasser ins Freie bei einer Temperatur von 0°C gestellt. Das Wasser im Topf hat zu Beginn eine Temperatur von 50°C. Nach 30 Minuten beträgt die Temp. des Wassers 36°C. Bestimme „k".

$$T(t) = T_u + (T_0 - T_u)\, e^{-kt}$$

$$T_u = 0^\circ C \quad ; \quad T_0 = 50^\circ C$$

$$\left.\begin{array}{l} T(30) = 0 + (50-0) \cdot e^{-k \cdot 30} \\ T(30) = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$50\, e^{-k \cdot 30} = 36$$

$$e^{-k \cdot 30} = \frac{36}{50}$$

$$-k \cdot 30 = \ln \frac{36}{50}$$

$$k \cdot 30 = \ln \frac{50}{36}$$

$$\boxed{k = \frac{1}{30} \cdot \ln \frac{25}{18}} \simeq 0{,}011.$$

4. Begrenztes Wachstum

Auf einem großen Empfang, an dem „G" Personen teilnehmen, wird ein Gerücht verbreitet. Sei $N(t)$ die Anzahl der Personen, die das Gerücht zur Zeit t kennen.

Hier liegt begrenztes Wachstum vor, denn das Gerücht kann maximal alle G Personen erreichen.

G – heißt Grenzbestand.

Der Kreis der noch nicht erfassten Personen verkleinert sich beständig.

$$\begin{cases} N'(t) = k\cdot(G - N(t)) & k>0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

N_0 – die Anzahl der Personen, die das Gerücht am Anfang kennen.

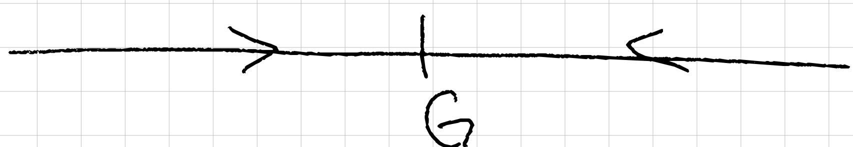
$$\boxed{N(t) = G - e^{-kt}\cdot(G - N_0)}$$

Ggp. und stabilität.

$$\left.\begin{array}{l} f(N) = k\cdot(G-N) \\ f(N)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow k\cdot(G-N)=0.$$

$\Rightarrow N^* = G$ – den Ggp.

$f'(N) = -k < 0 \Rightarrow N^* = G$ as. stabil.



Bsp.:

(1) In einer Reisegruppe kursiert ein Witz. Anfangs kennen ihn 10 der 100 Teilnehmer. Nach 2 Stunden sind es schon 50 Personen. Wv. Personen kennen ihn nach 6 Stunden?

$N(6) \approx 84$ Personen.