Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

6. Übung zur Vorlesung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 20) (Häufungspunkte)

Man bestimme A' in den folgenden Fällen
a) $A = (-\infty, 5) \cup (10, \infty)$, b) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(A 21)

1) Man bestimme die Polynomfunktion 3. Grades $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(-1) = -2$, $f'(-1) = 0$, $f''(-1) = 1$ und $f^{(3)}(-1) = -5$.

2) Man bestimme die folgenden Ableitungen höherer Ordnung:

a) $(e^{5x})^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, b) $(x^2 \sin 2x)^{(100)}$, c) $((x^3 + 2x - 1)e^{2x})^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{2x} \sin x$. Man bestimme:

a) das Taylorpolynom $T_2(x, 0)$,

b) das Restglied $R_2(x, 0)$, für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nach der Taylorschen Formel.

(A 22)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \cos x$.

a) Man bestimme $f^{(n)}$, für $n \in \mathbb{N}$.

b) Man gebe das n-te Taylorpolynom $T_n(x, 0)$, für $n \in \mathbb{N}$, an.

c) Man gebe das Restglied $R_n(x, 0)$, für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, nach der Taylorschen Formel an.

d) Man zeige, dass f eine Taylorentwicklung an der Stelle $x_0 = 0$ hat und bestimme diese.

(A 23)

Es sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \ln(1 + x)$.

a) Man bestimme $f^{(n)}$, für $n \in \mathbb{N}$.

b) Man gebe das n-te Taylorpolynom $T_n(x, 0)$, für $n \in \mathbb{N}$, an.

c) Man gebe das Restglied $R_n(x, 0)$, für $x \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$, nach der Taylorschen Formel an.

d) Man zeige, dass f eine Taylorentwicklung (auf $[0, 1]$) an der Stelle $x_0 = 0$ hat und bestimme diese.

e) Das bei d) erhaltene Ergebnis verwendend, bestimme man die Summe der alternierenden harmonischen Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

(A 24) (Die Regel von L'Hospital)

Seien α, $\beta > 0$. Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}}$, e) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha} \ln x$, f) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{x}$.