Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2024-2025

6. Vorlesung

Ab jetzt sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

Definition

Seien $f : M \to \mathbb{R}$, $\alpha \in M'$ und $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Man sagt, dass ℓ der Grenzwert von f in (bei) α ist, wenn $\forall\ V \in \mathcal{U}(\ell)\ \exists\ U \in \mathcal{U}(\alpha)$, so dass $\forall\ x \in (U \setminus \{\alpha\}) \cap M$ gilt $f(x) \in V$.

Bezeichnung: $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$.

Bemerkung

Der Begriff des Grenzwertes einer Funktion verallgemeinert den Grenzwertbegriff von Folgen: Eine Folge ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (wobei man $x_n := f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ setzt). Da $\mathbb{N}' = \{\infty\}$ ist, kann man bei Folgen nur vom Grenzwert bei ∞ reden. Der in der 2. Vorlesung eingeführte Grenzwertbegriff von Folgen ist äquivalent zur obigen Definition im Fall $M = \mathbb{N}$.

Th1 (Die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Funktion)

Seien $f\colon M \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in M'$. Hat f einen Grenzwert in α, dann ist dieser eindeutig bestimmt.

Th2 (Die Charakterisierung für den Grenzwert von Funktionen mit Hilfe von Folgen)

Seien $f\colon M \to \mathbb{R}$, $\alpha \in M'$ und $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind äquivalent:

1° $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$.

2° Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M \setminus \{\alpha\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Th3 (Das Vergleichstheorem für Funktionen)

Seien $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in M'$, so dass $\exists\ U \in \mathcal{U}(\alpha)$ mit

$$f(x) \leq g(x),\ \forall\ x \in (U \setminus \{\alpha\}) \cap M.$$

Falls $\exists \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ und $\exists \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$, dann ist

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) \leq \lim_{x\to\alpha} g(x).$$

Bemerkung

Ist $f(x) < g(x),\ \forall\ x \in (U \setminus \{\alpha\}) \cap M \not\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) < \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$.

Z. B.: $\frac{x}{x+1} < 1,\ \forall\ x > 0$, aber $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$.

Th4 (Das Sandwich-Theorem für Funktionen)

Seien $f, g, h \colon M \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in M'$, so dass $\exists\ U \in \mathcal{U}(\alpha)$ mit

$$f(x) \le h(x) \le g(x),\ \forall\ x \in (U \setminus \{\alpha\}) \cap M.$$

Falls f und g in α den gleichen Grenzwert $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ haben, dann hat auch h den Grenzwert ℓ in α.

Die einseitigen Grenzwerte

Seien $f\colon M \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Ist $\alpha \in (M \cap (-\infty, \alpha))'$, und hat die Einschränkung von f auf $M \cap (-\infty, \alpha)$ einen Grenzwert in α, so nennt man diesen den linksseitigen Grenzwert von f in α, und bezeichnet ihn mit $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} f(x)$.
- Analog führt man den rechtsseitigen Grenzwert von f in α ein, und bezeichnet ihn mit $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} f(x)$.

Definition

Seien $f\colon M \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in M$. Die Funktion f ist stetig in α, falls $\forall\ V \in \mathcal{U}(f(\alpha))\ \exists\ U \in \mathcal{U}(\alpha)$, so dass $\forall\ x \in U \cap M$ gilt $f(x) \in V$.
In diesem Fall nennt man α eine Stetigkeitsstelle von f.
Ist f nicht stetig in α, so nennt man f unstetig in α und α eine Unstetigkeitsstelle von f.
Ist $\emptyset \neq D \subseteq M$, so heißt f stetig auf D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist. Ist f stetig auf M, dann sagt man einfach, dass f stetig ist.

Th5 (Charakterisierungen für die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt)

Seien $f: M \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in M$. Dann sind äquivalent:

1° f ist stetig in α.

2° Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M, die gegen α konvergiert, konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(\alpha)$.

3° Entweder

$$\text{ist } \alpha \text{ ein isolierter Punkt von } M$$

oder

$$\alpha \in M', \ \exists \lim_{x\to\alpha} f(x) \text{ und } \lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha).$$

Bemerkung

Aussage 2° des **Th5** zeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n), \text{ falls } f \text{ in } \alpha = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ stetig ist.}$$

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\right) = \sin 0 = 0,$$

weil sin stetig in 0 ist.

Bemerkungen

1) Summen, Produkte und Quotienten (falls definiert) stetiger Funktionen sind stetig.
2) Die Verknüpfung von zwei stetigen Funktionen ist stetig.
3) Die elementaren Funktionen (Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, Winkelfunktionen) sind auf ihrem maximalen Definitionsbereich stetig.

$$\Downarrow$$

Funktionen, die man anhand der bei 1) und 2) erwähnten Operationen, aus den elementaren Funktionen erhält, sind ebenfalls stetig.

Definition

Seien $f : M \to \mathbb{R}$ und $a \in M \cap M'$. Die Funktion f hat eine Ableitung in a, falls

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Dieser Grenzwert wird mit $f'(a)$ bezeichnet und die Ableitung von f in a genannt. Falls f eine Ableitung in a hat und diese Ableitung eine reelle Zahl ist, dann nennt man f differenzierbar in a.
Ist $\emptyset \neq D \subseteq M$, so heißt f differenzierbar auf D, falls f in jedem Punkt von D differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man die Funktion, $f' : D \to \mathbb{R}$, $x \in D \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$, die Ableitung von f auf D. Ist f differenzierbar auf M, so sagt man einfach, dass f differenzierbar ist, und nennt die Ableitung von f auf M einfach die Ableitung von f.

Definition

Die Ableitungen höherer Ordnung einer Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ werden rekursiv wie folgt definiert:

- $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f'$,
- sei $n \in \mathbb{N}^*$, so dass die n-te Ableitung $f^{(n)}\colon M \to \mathbb{R}$ von f eingeführt worden ist; ist $f^{(n)}\colon M \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann nennt man
$$f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$$
die $n+1$-te Ableitung von f.

Definition

Ein Intervall in $\mathbb{R}$ nennt man nichtentartet, wenn es wenigstens 2 Punkte enthält.

Die Produktregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

kann wie folgt verallgemeinert werden:

Th6 (Die Leibnizsche Regel)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtentartetes Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Dann ist

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x), \ \forall\, x \in I.$$

Bemerkung

Die Binomialkoeffizienten C_n^k, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$ kann man mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks bestimmen:

$$1 \quad (n = 0)$$

$$1 \quad 1 \quad (n = 1)$$

$$1 \quad 2 \quad 1 \quad (n = 2)$$

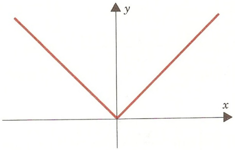
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad (n = 3)$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad (n = 4) \ldots$$

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Seien $f: M \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in M \cap M'$. Ist f differenzierbar in α, dann ist f stetig in α.

Stetigkeit $\not\Longrightarrow$ Differenzierbarkeit

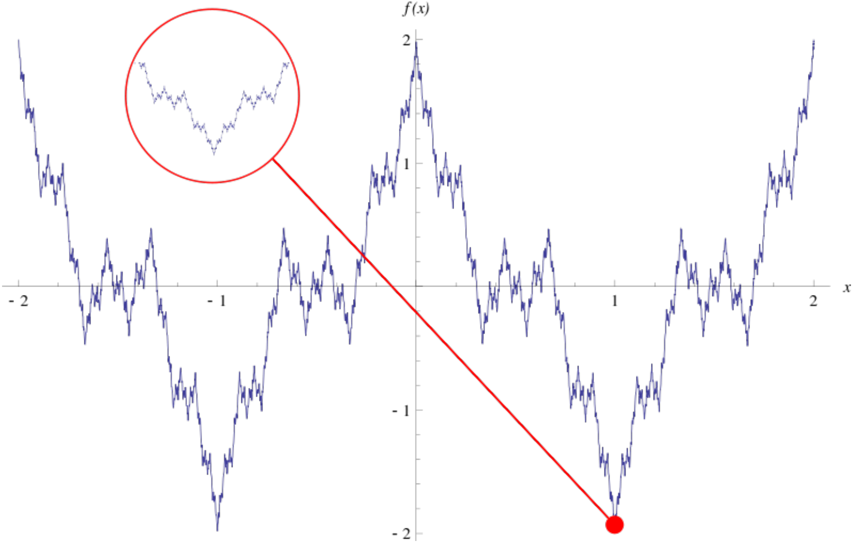


no derivative at 0

Eine bemerkenswerte Tatsache

Es gibt stetige Funktionen, die in keinem Punkt ihres Definitionsbereiches differenzierbar sind.
$\hookrightarrow$ Das erste Beispiel wurde 1872 von K. Weierstrass konstruiert. Der Graph dieser Funktion ist ein Fraktal.

Der Graph der Weierstrass-Funktion



Die Regel von L'Hospital

Seien $a,\, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, und $f,\, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

(1) $g'(x) \neq 0,\ \forall\ x \in (a,b)$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x) = \ell$, wobei $\ell \in \{-\infty,\, 0,\, \infty\}$.

(3) $\exists \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\Longrightarrow \exists \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ und } \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bemerkung

Ein analoges Ergebnis gilt für $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Wie man L'Hospitals Regel zum Bestimmen von Grenzwerten von Folgen einsetzen kann:

- nicht direkt: Folgen kann man nicht ableiten; man beachte: $(\mathbb{N})' = \{\infty\} \Longrightarrow$ man kann keine Ableitung von auf $\mathbb{N}$ definierten Funktionen (also von Folgen) erklären,
- indem man zu geeigneten Funktionen übergeht und für diese L'Hospitals Regel anwendet,
- und schließlich den Zusammenhang zwischen Grenzwerten von Funktionen und Grenzwerten von Folgen verwendet.

Beispiel

Man bestimme $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n}$.

Man betrachte $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$. Aus

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

folgt, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$.