Dynamische Systeme erzeugt von autonomen DGL-Systemen

Wir betrachten das folgende DGL-System 1. Ordnung:

$$(1)\begin{cases} x'(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(x(t), y(t)) \end{cases}$$

$x = x(t)$ und $y = y(t)$ sind die gesuchten Funktionen und t ist die unabh. Var.

<u>Def</u>: Das DGL-System heißt <u>autonom</u>, weil die Funktionen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ nicht explizit von t abhängen.

Satz: Sei $f=(f_1,f_2) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Dann hat das folgende Cauchyproblem:

$$(2)\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \\ x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{cases} \quad , \forall (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$$

eine eindeutige maximale Lösung.

Sei $I_{max} = (\alpha_\eta, \beta_\eta)$, $\alpha_\eta < 0 < \beta_\eta$ das maximale Existenzintervall. Das C.P.(2) hat eine eindeutige Lösung auf I_{max}.

Wir definieren die folgenden Funktionen:

$x(t, \eta_1, \eta_2): I_{max} \to \mathbb{R}$.

$y(t, \eta_1, \eta_2): I_{max} \to \mathbb{R}$

Die Funktion: $\varphi: I_{max} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(t, \eta_1, \eta_2) = (x(t, \eta_1, \eta_2), y(t, \eta_1, \eta_2))$

heißt der Fluss erzeugt von einem autonomen DGL-System.

Die Eigenschaften:

- φ ist stetig
- $\varphi(0, \eta_1, \eta_2) = (\eta_1, \eta_2)$, $\forall (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$
- $\varphi(t+s, \eta_1, \eta_2) = \varphi(t, \varphi(s, \eta_1, \eta_2))$ $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$, $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$

Die Trajektorie

- Die positive Halbtrajektorie:

$$\gamma^+(\eta_1, \eta_2) = \bigcup_{t \in [0, \beta_\eta)} \varphi(t, \eta_1, \eta_2)$$

- Die negative Halbtrajektorie:

$$\gamma^-(\eta_1, \eta_2) = \bigcup_{t \in (\alpha_\eta, 0]} \varphi(t, \eta_1, \eta_2)$$

$$\gamma(\eta_1, \eta_2) = \gamma^+(\eta_1, \eta_2) \cup \gamma^-(\eta_1, \eta_2)$$

Das Phasenporträt: Die Vereinigung aller Trajektorien zusammen mit den Pfeilen, die die Richtungen zunehmender Zeit zeigen.

Beispiel

① Bestimme den Fluss und zeichne das Phasenporträt des Systems:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

a) Der Fluss:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{cases}$$

$\to$ die Lösung C.P. $\Rightarrow$ Fluss.

$$\begin{cases} x' = y \quad \Big|' \\ y' = -x \end{cases} \Rightarrow x'' = y'$$

$$x'' = -x \iff x'' + x = 0$$

$$r^2 + 1 = 0.$$

$$r = \pm i$$

$$x = c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t \quad \Big)'$$

$$y = x' = -c_1 \cdot \sin t + c_2 \cos t$$

$$x(0) = \eta_1 \Rightarrow c_1 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} = \eta_1$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = \eta_1}$$

$$y(0) = \eta_2 \Rightarrow -c_1 \cdot \sin 0 + c_2 \cos 0 = \eta_2$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2 = \eta_2}.$$

$$\begin{cases} x(t) = \eta_1 \cdot \cos t + \eta_2 \cdot \sin t \\ y(t) = -\eta_1 \cdot \sin + \eta_2 \cdot \cos t \end{cases} \qquad (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$$

$I_{max} = \mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{aligned}&\varphi(t,\eta_1,\eta_2) = (\eta_1 \cdot \cos t + \eta_2 \cdot \sin t,\ -\eta_1 \sin t + \eta_2 \cos t)\\ &\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.\end{aligned}}$$

der Fluss

<u>Das Phasenporträt.</u>

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} x(t) = \eta_1 \cdot \cos t + \eta_2 \cdot \sin t & \Big|^2 \\ y(t) = -\eta_1 \cdot \sin t + \eta_2 \cdot \cos t & \Big|^2 \end{cases}$$

$$x^2 = \eta_1^2 \cdot \cos^2 t + \eta_2^2 \cdot \sin^2 t + 2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \cos t \cdot \sin t$$

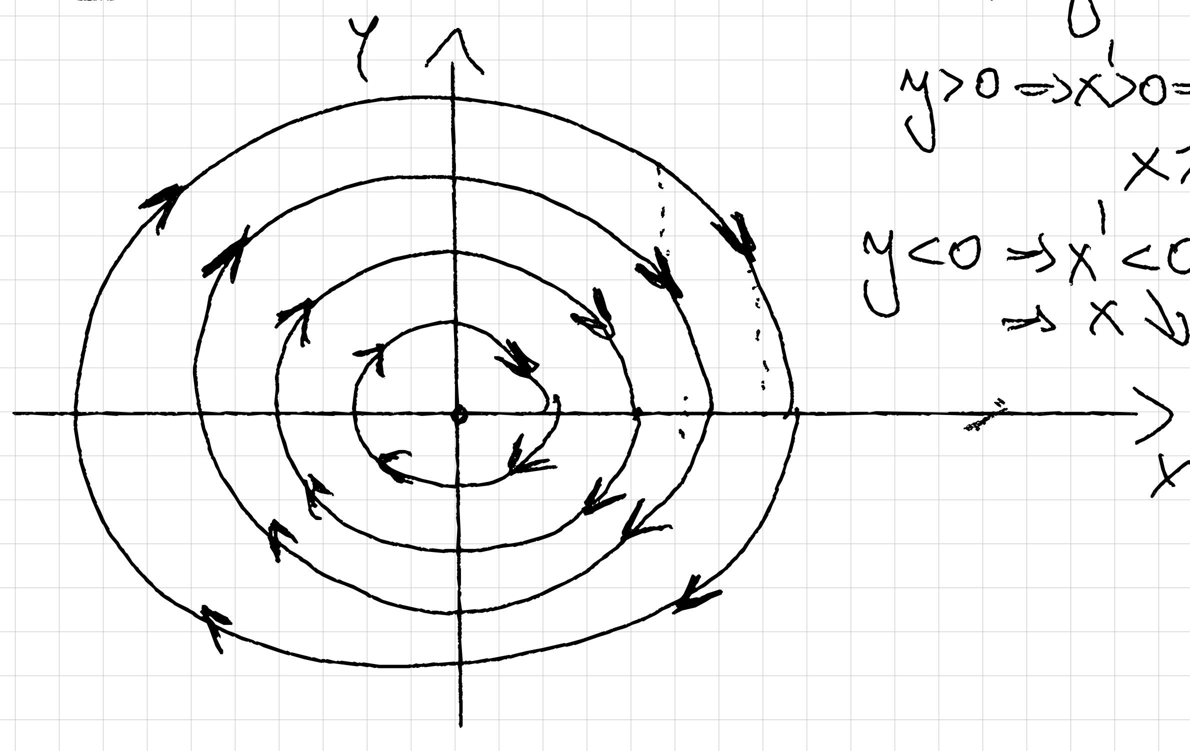
$$y^2 = \eta_1^2 \cdot \sin^2 t + \eta_2^2 \cdot \cos^2 t - 2\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \sin t \cdot \cos t$$

$(+)$

$$x^2 + y^2 = \eta_1^2 \cdot (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}) + \eta_2^2 \cdot (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1})$$

$$x^2 + y^2 = \underbrace{\overset{\in \mathbb{R}}{\eta_1^2} + \overset{\in \mathbb{R}}{\eta_2^2}}_{= c}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}}$$



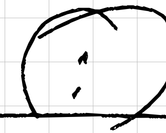
$x' = y$

$y > 0 \Rightarrow x' > 0 \Rightarrow x \nearrow$

$y < 0 \Rightarrow x' < 0 \Rightarrow x \searrow$

II. Methode.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \iff \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned}$$

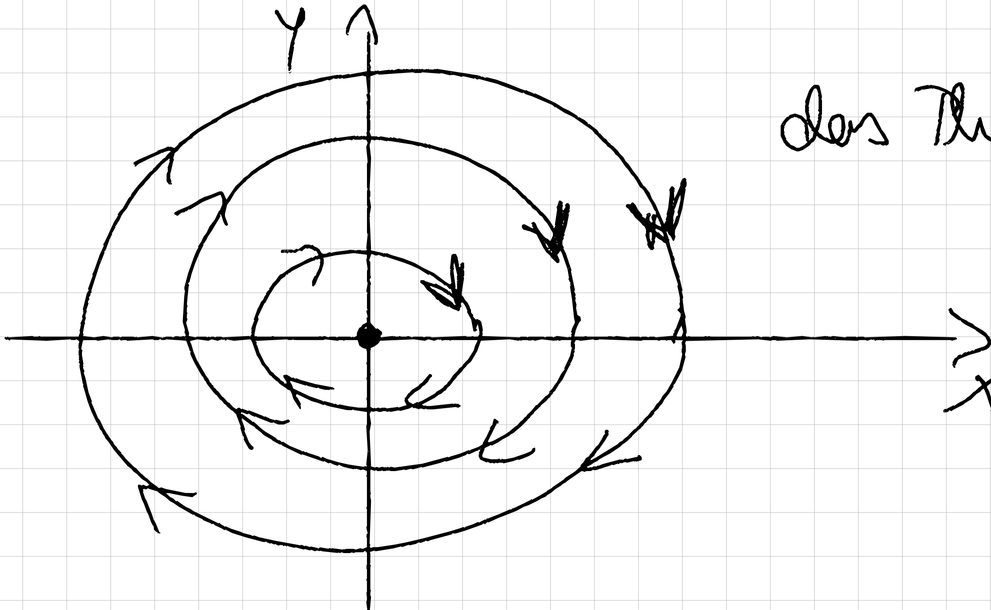


$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-x} \longrightarrow \text{DGL. der Trajektorien}$$

$$x \cdot dx = -y\,dy \quad \Big| \int$$

$$\frac{x^2}{2} + c_1 = -\frac{y^2}{2} + c_2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = c}, \quad c = 2(c_2 - c_1).$$



das Phasenporträt.

Def Eine Lösung des Systems:

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \end{cases}$$

von der Gestalt: $\begin{cases} x(t) = x^* \\ y(t) = y^* \end{cases}$

heißt konstante Lösung.

Der Punkt (x^*, y^*) heißt Gleichgewichtspunkt
G.gp.

die Ggp sind Lösungen des Systems:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

Def: Der Ggp $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}$ heißt:

a) lokal stabil genau dann wenn:
$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ s.d.:

$$\max\{|\eta_1 - x^*|, |\eta_2 - y^*|\} < \delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \max\{|x(t,\eta_1,\eta_2) - x^*|, |y(t,\eta_1,\eta_2) - y^*|\} < \varepsilon.$$

b) lokal asymptotisch stabil genau dann wenn der Punkt lokal stabil ist und es gilt: $|x(t,\eta_1,\eta_2) - x^*| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$$|y(t,\eta_1,\eta_2) - y^*| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

c) instabil genau dann wenn er nicht lokal stabil ist.

Lineare Systeme

$$\begin{cases} x' = \underbrace{a_{11} \cdot x + a_{12} y}_{f_1(x,y)} \\ y' = \underbrace{a_{21} \cdot x + a_{22} y}_{f_2(x,y)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} y = 0 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (0,0)$ $\qquad a_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = \overline{1,2}$

der GgP.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix A.

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \;.\; \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \;.$$

$\Rightarrow$ die Eigenwerte λ.

<u>Satz</u>: (der Stabilitätssatz für lineare Systeme)

a) $(0,0)$ ist asymptotisch stabil genau dann wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben.

b) $(0,0)$ ist stabil genau dann wenn alle Eigenwerte von A der Form: $\pm i\beta$ sind.

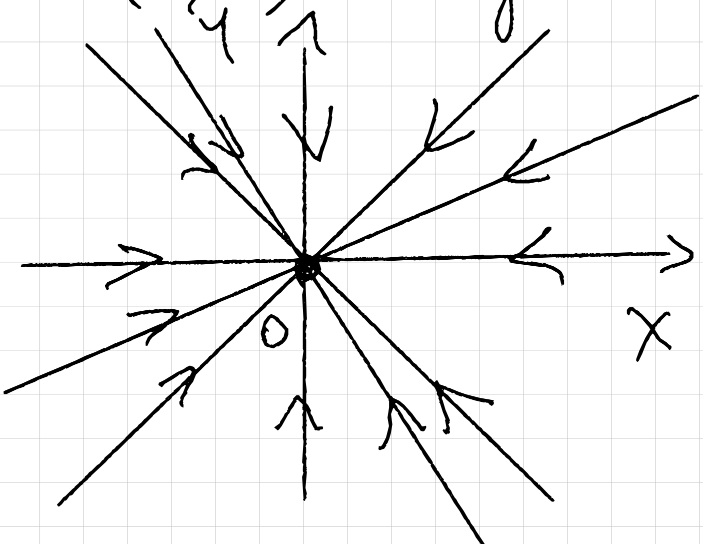
c) $(0,0)$ ist instabil genau dann wenn es einen Eigenwert mit dem positiven Realteil gibt.

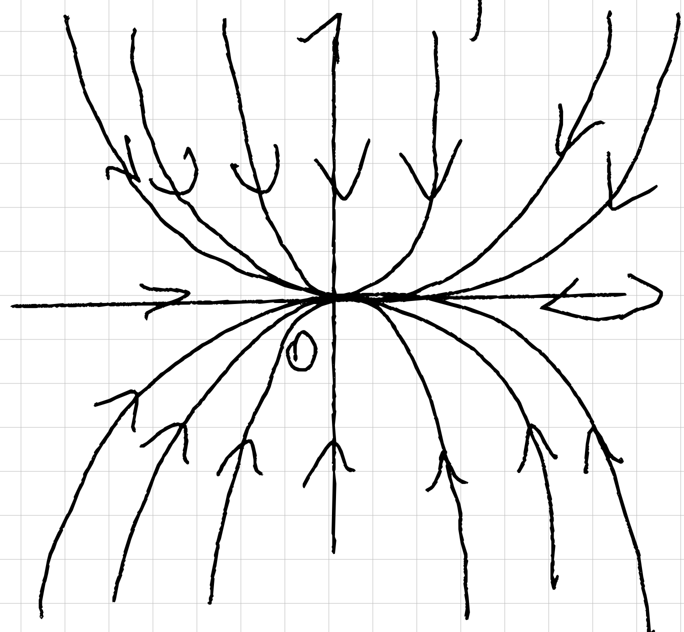
Klassifikation in der Phasenebene.

I. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. (die Eigenwerte)

a) $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$

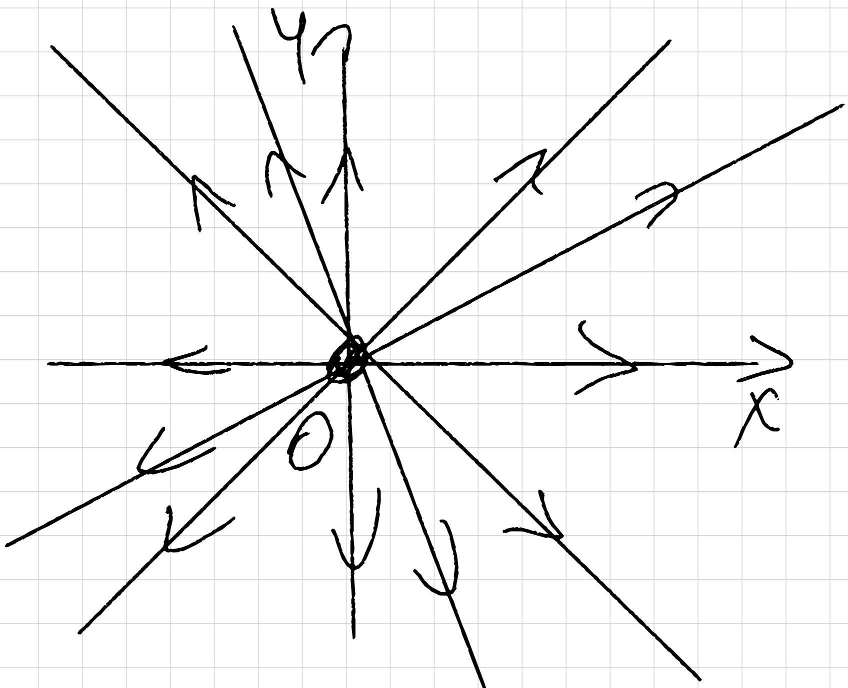
$(0,0)$ asympt. stabiler Knotenpunkt.

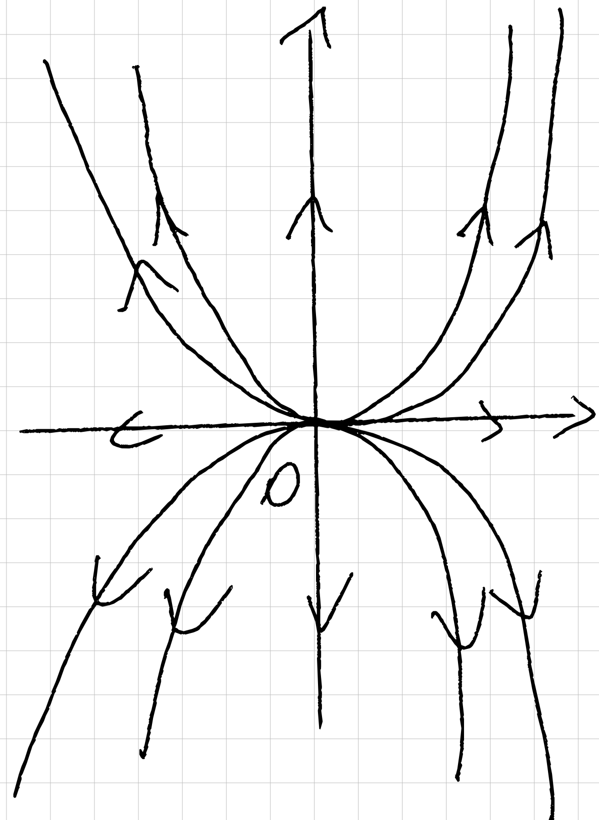




b) $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$.

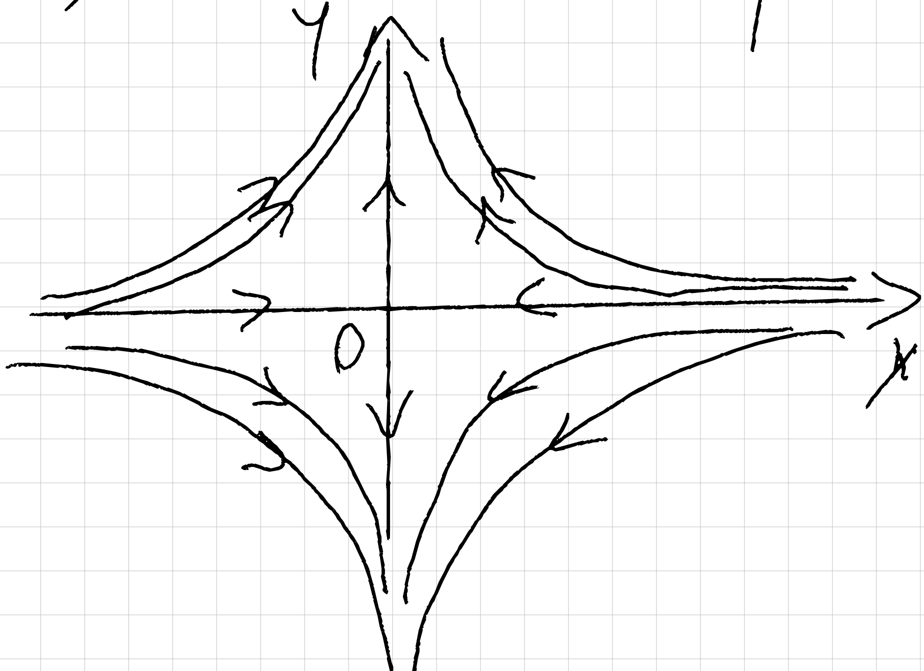
$(0,0)$ instabiler Knotenpunkt





c) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ $\quad$ $(\lambda_1 > 0 ; \lambda_2 < 0$
$\lambda_1 < 0 , \lambda_2 > 0)$

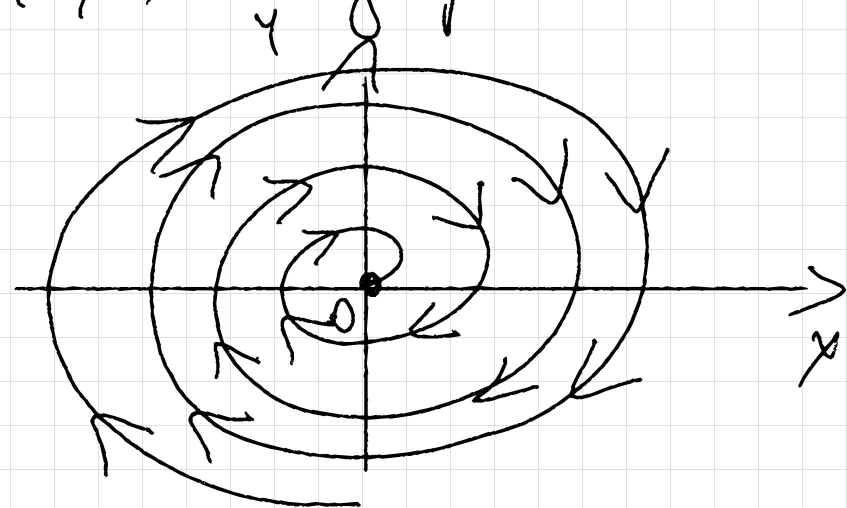
$(0,0)$ instabiler Sattelpunkt



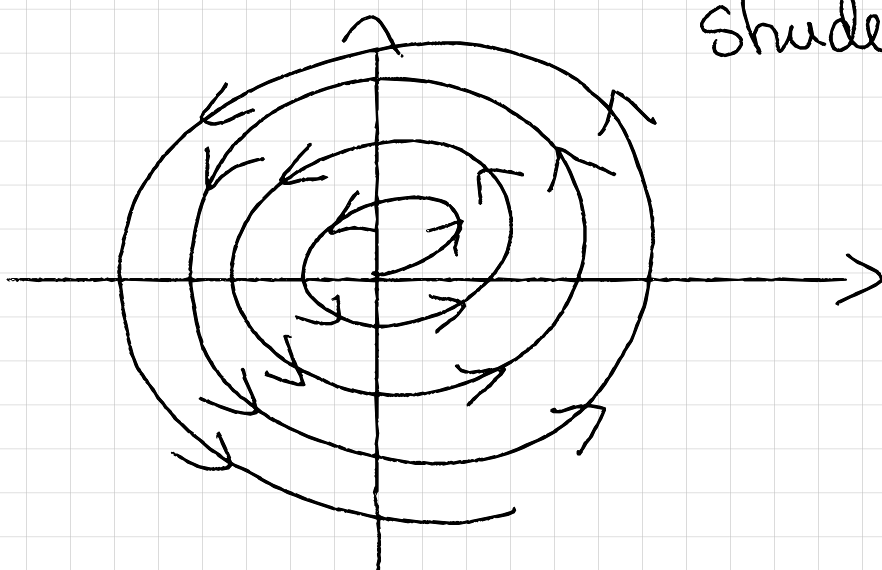
II. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$: $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$

a) Wenn $\alpha < 0$

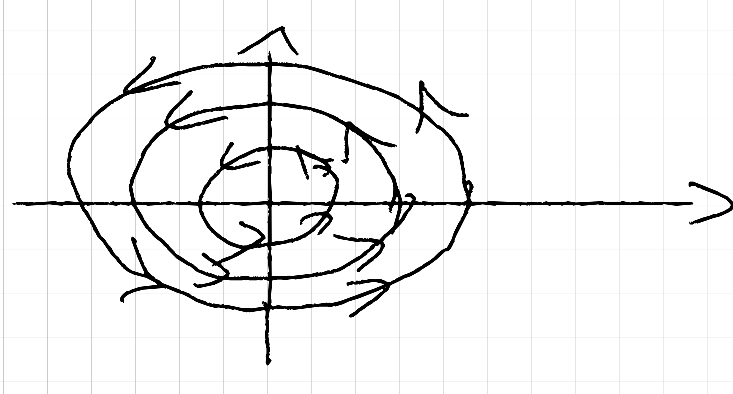
$(0,0)$ asympt. stabiler Strudelpunkt



b) Wenn $\alpha > 0$ $(0,0)$ instabiler Strudelpunkt



c) $\alpha = 0$: $(0,0)$ stabiler Wirbelpunkt



Beispiel:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Bestimme die Ggp und ihre Stabilität.
Zeichne das Phasenporträt:

$(0,0) \to$ der Ggp.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I_2 - A| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1.$$

$$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{1,2} > 0.$$

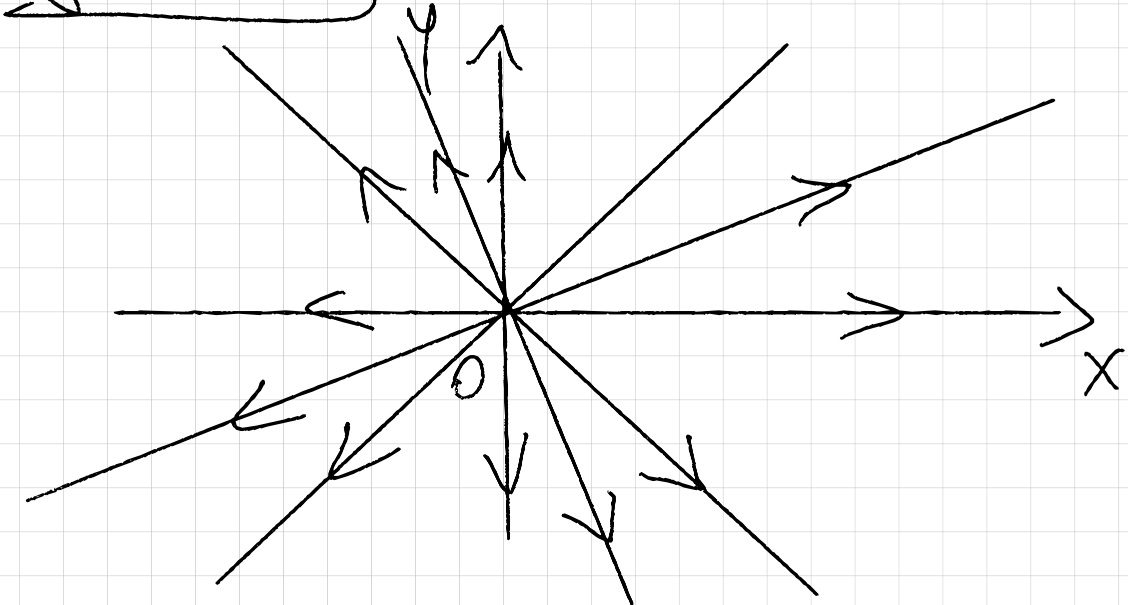
$\Rightarrow (0,0)$ instabiler Knotenpunkt

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \iff \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c$$

$\boxed{y = c \cdot x}$ → die Trajektorien



$$\boxed{y = \frac{c}{x}}$$