Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2024-2025

4. Vorlesung

Sei $(x_n)_{n\geq k}$ eine Zahlenfolge.

- $s_n = \sum_{i=k}^{n} x_i$, $n \geq k$, sind die Teilsummen der Folge $(x_n)_{n\geq k}$.
- Das geordnete Paar $((x_n)_{n\geq k}, (s_n)_{n\geq k})$ ist die zu der Folge $(x_n)_{n\geq k}$ gehörige Reihe und wird mit $\sum_{n\geq k} x_n$ bezeichnet.
- Falls die Folge $(s_n)_{n\geq k}$ den Grenzwert $s \in \overline{\mathbb{R}}$ hat, so nennt man s die Summe der Reihe $\sum_{n\geq k} x_n$ und bezeichnet sie mit $\sum_{n=k}^{\infty} x_n$.
- Eine Reihe heißt konvergent, falls sie eine Summe $s \in \mathbb{R}$ hat.
- Eine Reihe, die nicht konvergent ist, nennt man divergent.

Beispiele

1) Die harmonische Reihe: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

- ist divergent, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

2) Die verallgemeinerte harmonische Reihe: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- für $\alpha > 1$ ist $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent;
- für $\alpha \leq 1$ ist $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ divergent, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty$.

Beispiele

3) Die geometrische Reihe: $\sum_{n\geq 0} q^n$, $q \in \mathbb{R}^*$

- ist konvergent für $q \in (-1, 1)$ mit Summe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$;
- für $q \in (-1, 1)$, $k \in \mathbb{N}$, gilt $\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}$;
- ist divergent für $q \geq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$;
- ist divergent für $q \leq -1$, hat keine Summe.

Beispiele

4) Die e-Reihe: $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$

- ist konvergent, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

5) Teleskopreihen: $\sum_{n\geq k} (a_n - a_{n+1})$, bzw. $\sum_{n\geq k} (a_{n+1} - a_n)$, wobei

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$

- $\sum_{n=k}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_k - \lim_{n\to\infty} a_n$;
- $\sum_{n=k}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - a_k$.

S1 (Rechenregeln für konvergente Reihen)

Sind $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} y_n$ konvergente Reihen und ist $t \in \mathbb{R}$, dann gelten

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n), \quad \sum_{n=0}^{\infty} (t x_n) = t \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

S2

Ist die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ konvergent, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

S3

Jede Reihe mit nichtnegativen Gliedern hat eine Summe.