Übung 10

Logik für Informatiker

Prädikatenlogik

Aufgabe 1

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{0/0, s/1, +/2\}$ und $\Pi = \{p/1, = /2\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$. Gegeben sind die Struktur $\mathcal{A}$ und die Belegung β, wobei $\{a, b, c\}^*$ die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ ist (inklusive des leeren Wortes ε). Worte werden durch Verknüpfung von Buchstaben des Alphabetes gebildet. Beispiele für Worte über dem gegebenen Alphabet sind: $a, b, c, aa, cb, ac, cb, aaaaaaaacaa$.

$\mathcal{A} = (\{a, b, c\}^*, \{0_\mathcal{A}, s_\mathcal{A} \colon \{a, b, c, \}^* \to \{a, b, c\}^*, +_\mathcal{A} \colon \{a, b, c\}^* \times \{a, b, c\}^* \to \{a, b, c\}^*\}, \{p_\mathcal{A}, =_\mathcal{A}$ $\})$ mit

- $0_\mathcal{A} = a \in \{a, b, c\}^*$
- $s_\mathcal{A}(w) = ww \in \{a, b, c\}^*$ (Konkatenation mit sich selbst)
- $+_\mathcal{A}(w_1, w_2) = w_1 w_2 \in \{a, b, c\}^*$ (Konkatenation)
- $p_\mathcal{A} = \{w \mid \text{ Die Anzahl von } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$
- $=_\mathcal{A}$ ist die Gleichheit, d.h. $=_\mathcal{A} = \{(w, w) \mid w \in \{a, b, c\}\}$.

und $\beta \colon X \to \{a, b, c\}^*$ ist definiert durch $\beta(x) = ba, \beta(y) = b$.

Evaluieren Sie

a) $\mathcal{A}(\beta)(s(x) + y + s(x))$, =baba+_A b +_A baba=bababbaba

b) $\mathcal{A}(\beta)(x = y + 0)$, =(x,y+0) ba = b +_A a, ba = ba wahr!

c) $\mathcal{A}(\beta)(\exists x \forall y(x + y = s(x) + y))$, es existiert ein Wort w1 so dass für alle Wörter w gilt w1+_A w = w1w1 +_A w, d.h. w1w=w1w1w

d) $\mathcal{A}(\beta)(\exists y p(x + y))$, es existiert ein Wort w, die Anzahl der a's in baw gerade ist. Mit w=a erhalten wir baa. Die Formel ist wahr.

e) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x \forall y((p(x) \wedge \neg p(y)) \to p(x + y)))$. Für alle Wörter w und alle Wörter q gilt dass falls die Anzahl von a in w gerade ist und die Anzahl der a in q ungerade dann ist die Anzahl der a in wq gerade. Mit w= aa und q= ba erhalten wir wq=aaba, also ist die Formel falsch.

Aufgabe 2

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{0/0, 1/0, p/1, +/2\}$ und $\Pi = \{p/1, = /2\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$. Gegeben sind die Struktur $\mathcal{A}$ und die Belegungen β_1, β_2, mit $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, \{0_\mathcal{A}, 1_\mathcal{A}, p_\mathcal{A} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, +_\mathcal{A} \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}, \{=_\mathcal{A}\})$ mit

- $0_\mathcal{A} = 1 \in \mathbb{Z}$
- $1_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{Z}$
- $p_\mathcal{A}(n_1) = n_1 - 1 \in \mathbb{Z}$
- $+_\mathcal{A}(n_1 + n_2) = n_1 + n_2 \in \mathbb{Z}$
- $=_\mathcal{A}$ ist die Gleichheit
- $\beta_1 \colon X \to \mathbb{Z}$. definiert durch $\beta_1(x) = 7, \beta_1(y) = 5$
- $\beta_2 \colon X \to \mathbb{Z}$, definiert durch $\beta_2(x) = 0, \beta_2(y) = 3$

Evaluieren Sie

a) $\mathcal{A}(\beta)(p(1) + p(p(x) + 0))$, p_A(0) +_A p(p(7) +_A 1))= -1+p(7)=-1+6=5; -1+p(p(0)+1)=-1+p(0)=-2

b) $\mathcal{A}(\beta)(x + 0 = p(y) + p(1))$, und 7+1=4+p(0) 8=4-1 Falsch; 0+1= 2+(-1) 1=1. Wahr

c) $\mathcal{A}(\beta)(p(0) + p(0) = p(p(0)))$, für p(1)+p(1)=p(p(1)) 0+0=-1 Falsch

$\beta = \beta_1$ und $\beta = \beta_2$.

Aufgabe 3

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{1/0, s/1, */2\}$ und $\Pi = \{p/1, = /2\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$. Gegeben sind die Struktur $\mathcal{A}$ und die Belegung β mit $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, \{1_\mathcal{A}, s_\mathcal{A} \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, *_\mathcal{A} \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\}, \{p_\mathcal{A}, =_\mathcal{A}\})$ und

- $1_\mathcal{A} = 1 \in \mathbb{Q}$
- $s_\mathcal{A}(q_1) = q_1 + 1 \in \mathbb{Q}$
- $*_\mathcal{A}(q_1, q_2) = q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}$
- $p_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Q}, n \in p_\mathcal{A}$ genau dann, wenn n gerade ist
- $=_\mathcal{A}$ ist die Gleichheit
- $\beta \colon X \to \mathbb{Q}$, definiert durch $\beta(x) = 11, \beta(y) = 7$

Evaluieren Sie

a) $\mathcal{A}(\beta)(s(s(x) * 1 * y)$ s(s(11)+1+7)= s(12+1+7)=s(20)=21

b) $\mathcal{A}(\beta)(s(x * y) = s(x) * 1)$ s(18)=s(11)+1 19=13 Falsch.

c) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x \forall y(s(x * y) = s(x) * y))$ Für alle rationale Zahlen p und q gilt p+q+1 = p+1+q Wahr!

d) $\mathcal{A}(\beta)(\exists y p(y * x))$ Es existiert eine rationale Zahl q so dass 11+q ist gerade. Wahr für q=1.

e) $\mathcal{A}(\beta)((\forall x \exists y((x = s(y) \land \neg p(x)) \to p(y))$. Für alle rationale Zahlen a existiert eine rationale Zahl q so dass falls a=q+1 und a ist nicht gerade ist, dann ist q gerade