Babeş–Bolyai-Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

7. Übung zur Vorlesung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 25) (Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$)

Es seien $u,\, v \in \mathbb{R}^n$. Man bezeichne mit $a := \langle u, v\rangle\,,\; b := ||u||$ und $c := ||v||$.

a) Die Eigenschaften des Skalarproduktes sowie die Definition der euklidischen Norm verwendend, bestimme man, in Abhängigkeit von a, b und c, die Zahlen $\langle u+v, v\rangle$, $\langle u, 2u-3v\rangle$ und $||u-v||$.

b) Sind $n=3$, $u=(-1,2,3)$ und $v=(-2,1,-3)$, bestimme man:

b1) a, b und c,

b2) alle reellen Zahlen $r>0$ mit der Eigenschaft, dass die offene Kugel $B(u,r)$ den Punkt v nicht enthält,

b3) alle reellen Zahlen t mit der Eigenschaft, dass die abgeschlossene Kugel $\overline{B}(u,5)$ den Vektor $(1,-1,t)$ enthält.

(A 26) (Folgen im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$)

Man entscheide, ob die Folgen $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ im $\mathbb{R}^n$ konvergent sind oder nicht, und bestimme im Fall von Konvergenz deren Grenzwert:

a) $n=2$ und $x^k = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^k, (-1)^k\right)$,

b) $n=3$ und $x^k = \left(\frac{2^k}{k!}, \frac{1-4k^7}{k^7+12k}, \frac{\sqrt{k}}{e^{3k}}\right)$,

c) $n=2$ und $x^k = \left(\frac{\sin k}{k}, -k^3+k\right)$,

d) $n=4$ und $x^k = \left(\frac{2^{2k}}{\left(2+\frac{1}{k}\right)^{2k}}, \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}, (e^k+k)^{\frac{1}{k}}, \frac{\alpha^k}{k}\right)$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}_+$ fest ist.

(A 27) (Taylorpolynome)

Es sei $f\colon\left(-\frac{2}{5},\infty\right) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x)=\ln(5x+2)$. Man bestimme:

a) das Taylorpolynom $T_2(x,1)$,

b) das Restglied $R_2(x,1)$, für $x \in \left(-\frac{2}{5},\infty\right)\setminus\{1\}$, nach der Taylorschen Formel.

(A 28) (Der Satz des Pythagoras im $\mathbb{R}^n$)

Man beweise die folgende Äquivalenz für die Vektoren $x,\, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \perp y \Longleftrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$