MAC0337/5900 - Computação Musical
1^a Lista de Exercícios

André Jucovsky Bianchi
3682247 - drebs@linux.ime.usp.br

Santiago Davila
xxxxxxx - kurgan1@gmail.com

Arthur Tofani
yyyyyyy - gramofone@gmail.com

Danilo J. S. Bellini
zzzzzzz - danilo.bellini@gmail.com

1 de junho de 2009

1 Primeiro Exercício: Série de Fourier

1.a

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t < 3 \end{cases} \qquad f(t+3) = f(t), \forall t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$f(t)$ pode ser vista na figura 1. Notamos pela definição que o período de f é $T = 3$, e que portando sua velocidade angular é $\omega = \frac{2\pi}{3}$ e portanto $\omega_n = \frac{n2\pi}{3}$.

Primeiro, calculamos F_0, a primeira parcela da série:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt\right) = \\ &= \frac{1}{3}(1+2+0) = 1 \end{aligned}$$

Em seguida, os termos gerais F_n que dependem do harmônico considerado:

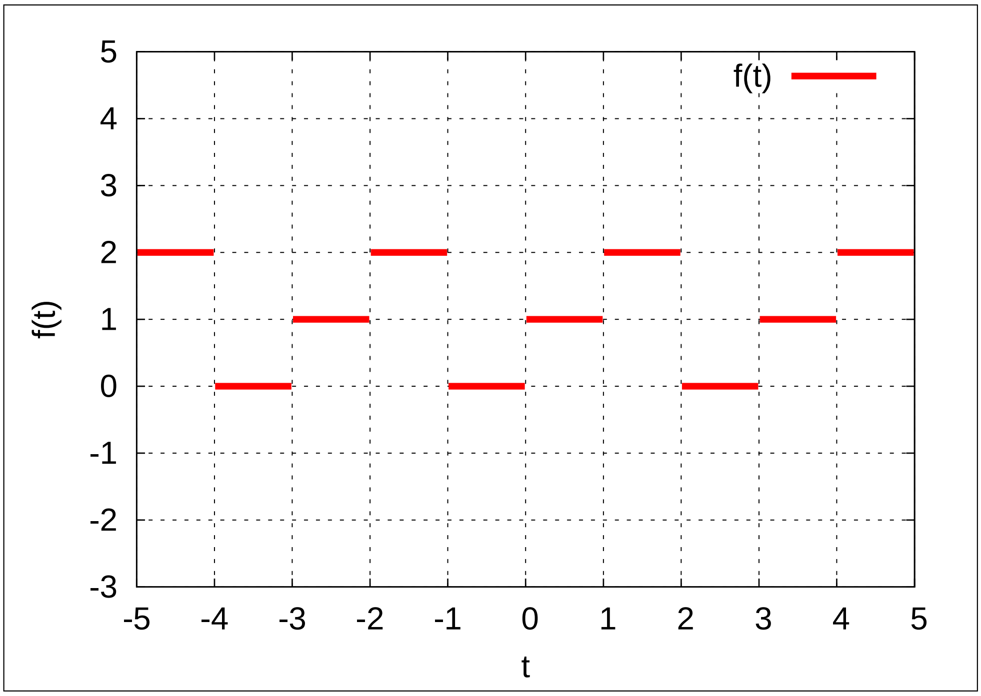

Figura 1: $f(t)$ do exercício **1.a**.

$$
\begin{aligned}
F_n &= \tfrac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt \quad = \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\int_0^1 f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_1^2 f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_2^3 f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right) \quad = \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\int_0^1 1e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_1^2 2e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_2^3 0e^{-i\omega_n t}\,dt\right) \quad = \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{e^{-i\omega_n t}}{-i\omega_n}|_0^1 + 2\tfrac{e^{-i\omega_n t}}{-i\omega_n}|_1^2\right) \quad = \quad \tfrac{e^{\frac{-2in\pi}{3}}-2e^{\frac{-4in\pi}{3}}+1}{2in\pi}
\end{aligned}
$$

Dessa forma, o $n-$ésimo harmônico fica definido por:

$$
\begin{aligned}
h_n^f(t) &= F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n}e^{i\omega_{-n} t} \quad = \quad F_n e^{i\omega_n t} + F_n^* e^{-i\omega_{-n} t} \quad = \\
&= \left(\tfrac{e^{\frac{-2in\pi}{3}}-2e^{\frac{-4in\pi}{3}}+1}{in2\pi}\right) e^{\frac{in2\pi t}{3}} + \left(\tfrac{e^{\frac{2in\pi}{3}}-2e^{\frac{4in\pi}{3}}+1}{-in2\pi}\right) e^{\frac{-in2\pi t}{3}}
\end{aligned}
$$

E $f(t)$ pode ser escrita como uma soma infinita de todos os harmônicos:

$$
f(t) = 1+\sum_{n\geq 1}\left[\left(\frac{e^{\frac{-2in\pi}{3}} - 2e^{\frac{-4in\pi}{3}} + 1}{in2\pi}\right) e^{\frac{in2\pi t}{3}} + \left(\frac{e^{\frac{2in\pi}{3}} - 2e^{\frac{4in\pi}{3}} + 1}{-in2\pi}\right) e^{\frac{-in2\pi t}{3}}\right] \tag{2}
$$

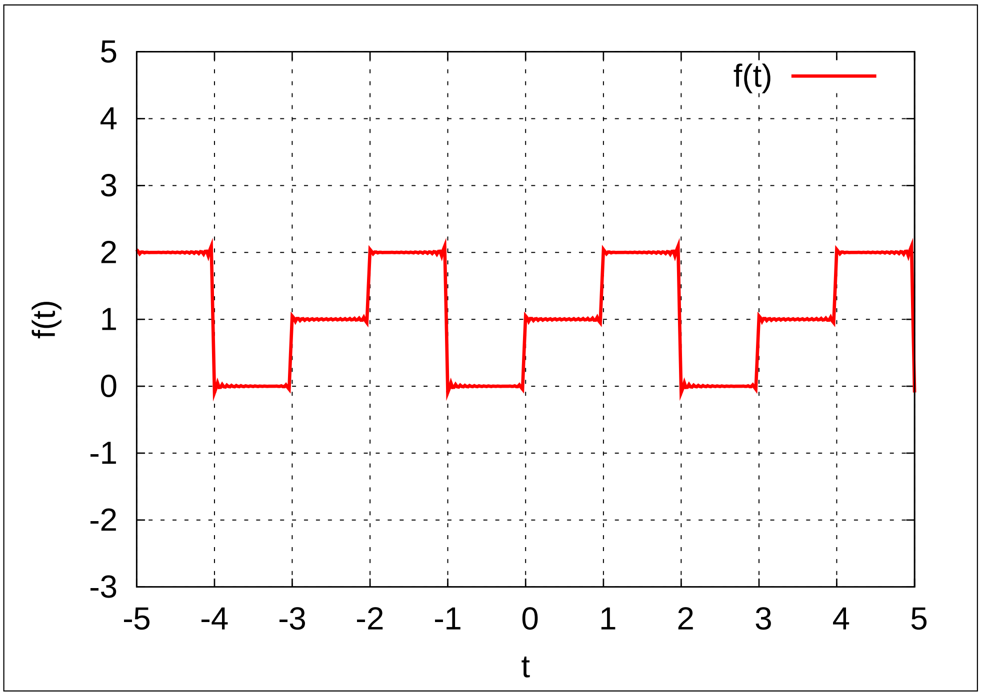

Figura 2: $f(t)$ do exercício **1.a** calculada com 100 harmônicos através do cálculo da Série de Fourier.

O resultado do cálculo de $f(t)$ pela fórmula (2) com 100 harmônicos pode ser visto na figura 2.

1.b

$$g(t) = \begin{cases} sen(\pi t), & 0 \le t < 1 \\ 2 - t, & 1 \le t < 3 \end{cases} \qquad g(t+3) = g(t), \forall t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$g(t)$ pode ser vista na figura 3. Notamos pela definição que o período de f é $T = 3$, e que portando sua velocidade angular é $\omega = \frac{2\pi}{3}$ e portanto $\omega_n = \frac{n2\pi}{3}$.

Primeiro, calculamos G_0, a primeira parcela da série:

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-i\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^3 g(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 g(t)\,dt + \int_1^3 g(t)\,dt\right) = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 sen(\pi t)\,dt + \int_1^3 (2-t)\,dt\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{-cos(\pi t)}{\pi}\Big|_0^1 + \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^3\right) = \frac{2}{3\pi} \end{aligned}$$

Em seguida, os termos gerais G_n que dependem do harmônico considerado:

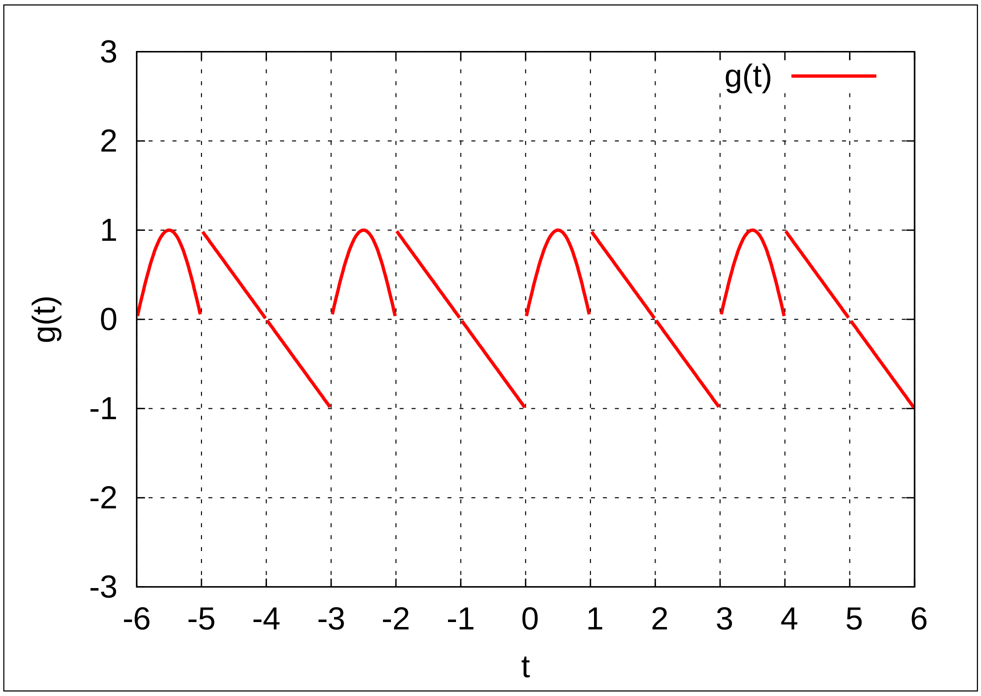

Figura 3: $g(t)$ do exercício **1.b**.

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-i\omega_n t}\,dt &= \\ &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 g(t)e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_1^3 g(t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right) &= \\ &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 sen(\pi t)e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_1^3 (2-t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right) &= \end{aligned}$$

Agora, sabemos que

$$\begin{aligned} \int sen(\pi t)e^{-i\omega_n t}\,dt &= \int sen(\pi t)\left(cos(\omega_n t) - i.sen(\omega_n t)\right)\,dt &= \\ &= \int sen(\pi t)cos(\omega_n t)\,dt - i\int sen(\pi t)sen(\omega_n t) \end{aligned}$$

Podemos então calcular as duas integrais separadas, e as contas em anexo mostram que:

$$\int_0^1 sen(\pi t)e^{-i\omega_n t}\,dt = 3\left(\frac{1-e^{i(\pi-\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi-n4\pi} + \frac{1-e^{-i(\pi+\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi+n4\pi}\right)$$

E também que:

$$\int_1^3 (2-t)e^{-i\omega_n t}\,dt = 3\left(\frac{-e^{-in2\pi}-e^{\frac{-in2\pi}{3})}}{-in2\pi} - 3\frac{-e^{-in2\pi}+e^{\frac{-in2\pi}{3})}}{4n^2\pi^2}\right)$$

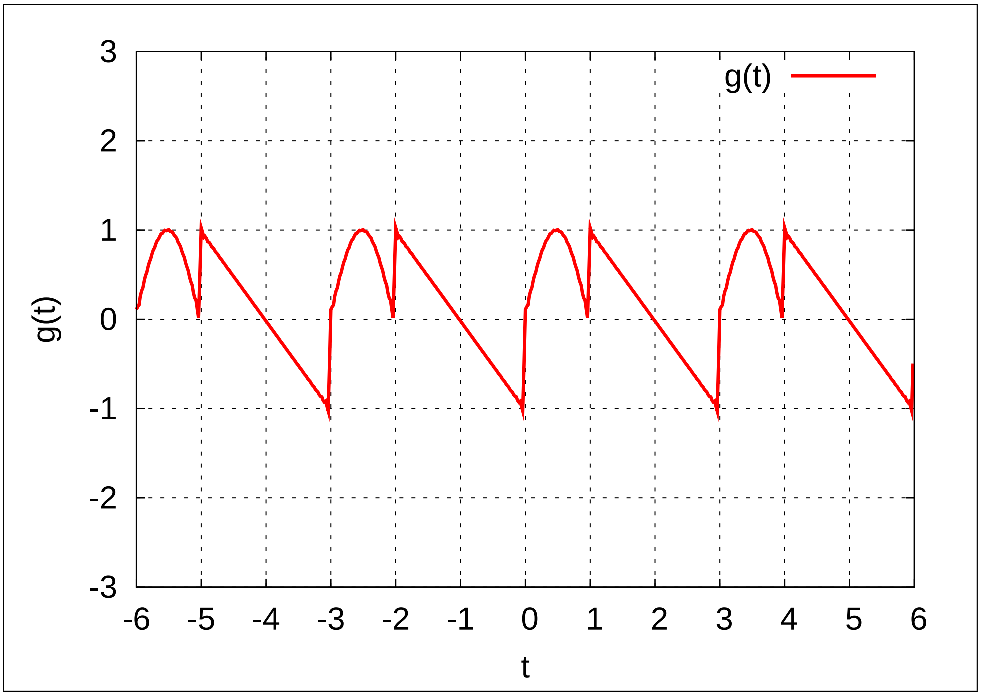

Figura 4: $g(t)$ do exercício **1.b** calculada com 100 harmônicos através do cálculo da Série de Fourier.

Assim, o $n-$ésimo harmônico fica definido por:

$$\begin{aligned}
h_n^g(t) &= G_n e^{i\omega_n t} + G_{-n} e^{i\omega_{-n} t} \quad = \quad G_n e^{i\omega_n t} + G_n^* e^{-i\omega_{-n} t} \quad = \\
&= \left[\frac{1-e^{i(\pi-\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi-n4\pi} + \frac{1-e^{-i(\pi+\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi+n4\pi} + \frac{-e^{-in2\pi}-e^{\frac{-in2\pi}{3})}}{-in2\pi} - 3\frac{-e^{-in2\pi}+e^{\frac{-in2\pi}{3})}}{4n^2\pi^2} \right] e^{\frac{in2\pi t}{3}} \quad + \\
&+ \left[\frac{1-e^{-i(\pi-\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi-n4\pi} + \frac{1-e^{i(\pi+\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi+n4\pi} + \frac{-e^{in2\pi}-e^{\frac{in2\pi}{3})}}{-in2\pi} - 3\frac{-e^{in2\pi}+e^{\frac{in2\pi}{3})}}{4n^2\pi^2} \right] e^{\frac{-in2\pi t}{3}}
\end{aligned}$$

E $g(t)$ pode ser escrita como uma soma infinita de todos os harmônicos:

$$g(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} h_n(t) \tag{4}$$

O resultado do cálculo de $g(t)$ pela fórmula (4) com 100 harmônicos pode ser visto na figura 4.

1.c

$$h(t) = 3cos(5t) + 2sen(8t) \qquad h(t+3) = h(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

$h(t)$ pode ser vista na figura 5. Podemos encontrar seu período (e velocidade angular) calculando o mínimo múltiplo comum dos períodos em graus dos somandos da expressão:

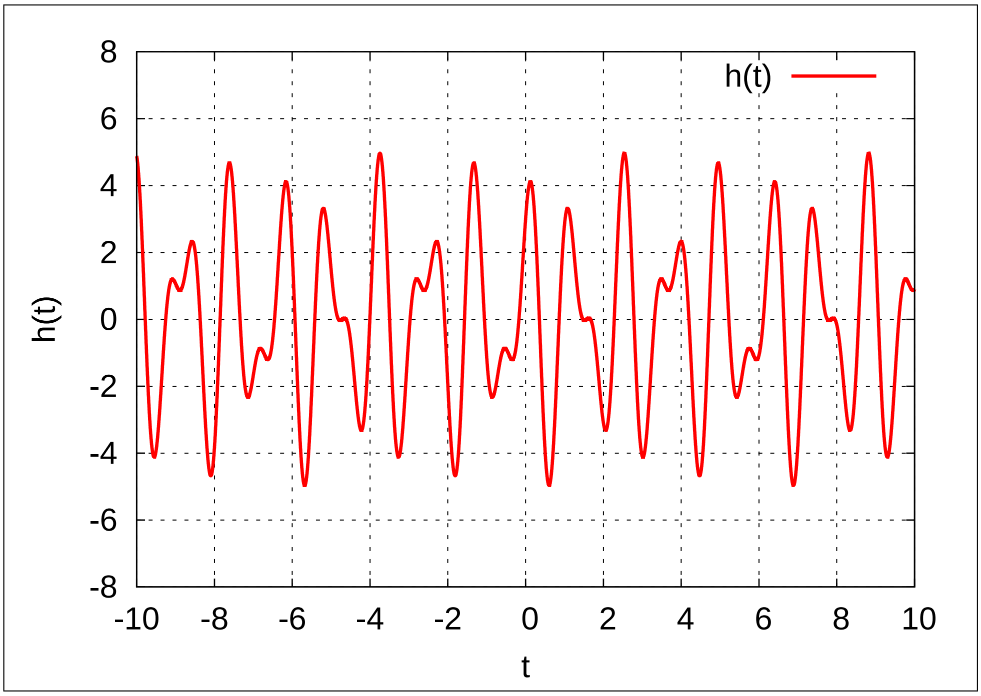

Figura 5: $h(t)$ do exercício **1.c**.

$$
\begin{array}{lclcl}
\omega_{3cos(5t)} & = & 5 & \Rightarrow & T_{3cos(5t)} = \frac{2\pi}{5} = 72^o \\
\omega_{2sen(8t)} & = & 8 & \Rightarrow & T_{2sen(8t)} = \frac{2\pi}{8} = 45^o \\
mmc(72,45) & = & 360 & \Rightarrow & T_h = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_n = n
\end{array}
$$

Primeiro, calculamos H_0, a primeira parcela da série:

$$
\begin{array}{rclcl}
H_0 & = & \frac{1}{T}\int\limits_0^T h(t)e^{-i\omega_0 t}\,dt & = & \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} 3cos(5t) + 2sen(8t)\,dt \quad = \\
 & = & \frac{1}{2\pi}\left(3\int\limits_0^{2\pi} cos(5t)\,dt + 2\int\limits_0^{2\pi} sen(8t)\,dt\right) & = & \\
 & = & \frac{1}{2\pi}\left(\frac{3sen(5t)}{5}|_0^{2\pi} + \frac{-2cos(8t)}{8}|_0^{2\pi}\right) & = & 0
\end{array}
$$

Em seguida, os termos gerais H_n que dependem do harmônico considerado:

$$
\begin{aligned}
H_n &= \tfrac{1}{T}\int_0^T h(t)e^{-i\omega_n t}\,dt \quad = \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(3cos(5t) + 2sen(8t)\right) e^{-i\omega_n t}\,dt \quad = \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\left(3\int_0^{2\pi} cos(5t)e^{-i\omega_n t}\,dt + 2\int_0^{2\pi} sen(8t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right) \quad = \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\left(3\int_0^{2\pi} cos(5t)cos(nt)\,dt + 2\int_0^{2\pi} sen(8t)cos(nt)\,dt \quad - \right. \\
&- \left. 3i\int_0^{2\pi} cos(5t)sen(nt)\,dt - 2i\int_0^{2\pi} sen(8t)sen(nt)\,dt\right)
\end{aligned}
$$

Dos resultados vistos em aula, temos que:

$$
\begin{aligned}
3\int_0^{2\pi} cos(5t)cos(nt)\,dt &= \begin{cases} 0, & n \neq 5 \\ 3\pi, & n = 5 \end{cases} \\
2\int_0^{2\pi} sen(8t)cos(nt)\,dt &= 0, \forall\, n \\
-3i\int_0^{2\pi} cos(5t)sen(nt)\,dt &= 0, \forall\, n \\
-2i\int_0^{2\pi} sen(8t)sen(nt)\,dt &= \begin{cases} 0, & n \neq 8 \\ -2i\pi, & n = 8 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Assim, o $n-$ésimo harmônico fica definido por:

$$
h_n^h(t) \quad = \quad H_n e^{i\omega_n t} + H_{-n}e^{i\omega_{-n} t} \quad = \quad H_n e^{i\omega_n t} + H_n^* e^{-i\omega_n t}
$$

Como H_n só está definida para $n = 5$ e $n = 8$, $h(n)$ pode ser escrita como soma de apenas quatro parcelas:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= H_5 e^{i\omega_5 t} + H_5^* e^{-i\omega_5 t} + H_8 e^{i\omega_8 t} + H_8^* e^{-i\omega_8 t} \quad = \\
&= \tfrac{3}{2}e^{i5t} + \tfrac{3}{2}e^{-i5t} - ie^{i8t} + ie^{-i8t}
\end{aligned} \tag{5}
$$

O resultado do cálculo de $h(t)$ pela fórmula (5), com apenas as duas componentes harmônicas, pode ser visto na figura 6.

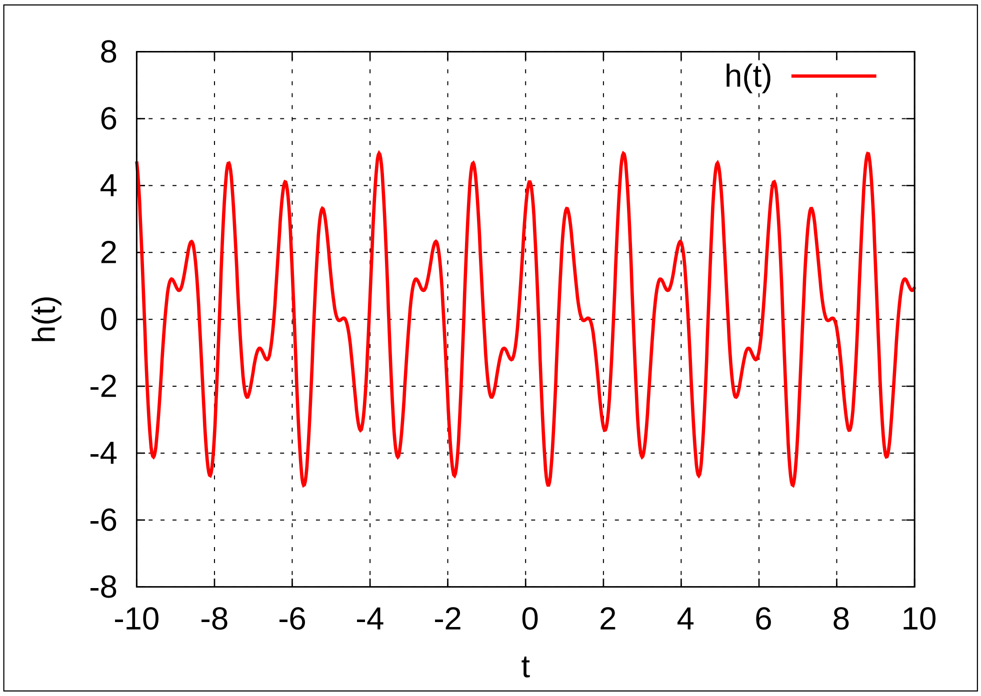

Figura 6: $h(t)$ do exercício **1.c** calculada com as duas componentes da transformada de Fourier.

2 Segundo Exercício:

2.a

2.b

2.c

3 Terceiro Exercício:

3.a

3.b

3.c

4 Quarto Exercício: Polos e Zeros

4.a

Podemos escrever a função de transferência $H(z)$ associada ao filtro $y(n)$ como quociente de produtos que envolvem os valores dos zeros e dos pólos do filtro:

$$
\begin{aligned}
H(z) &= a_0 \frac{\prod_{i=1}^{M}(1-Z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1-P_i z^{-1})} = \frac{a_0(1-Z_1 z^{-1})(1-Z_2 z^{-1})}{(1-P_1 z^{-1})(1-P_2 z^{-1})} = \\
&= \frac{a_0(1+\sqrt{A}z^{-1})(1-\sqrt{A}z^{-1})}{(1-Ae^{i\theta}z^{-1})(1-Ae^{-i\theta}z^{-1})} = \frac{a_0(1-Az^{-2})}{1-Ae^{i\theta}z^{-1}-Ae^{-i\theta}z^{-1}+A^2e^{i\theta-i\theta}z^{-2}} = \\
&= \frac{a_0(1-Az^{-2})}{1-A(e^{i\theta}+e^{-i\theta})z^{-1}+A^2z^{-2}} = \frac{a_0(1-Az^{-2})}{1-2Acos(\theta)z^{-1}+A^2z^{-2}} = \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)}
\end{aligned}
$$

Na relação acima, os coeficientes de $N(z)$ e $D(z)$ são, respectivamente, os coeficientes a_i e b_i do filtro $y(n)$. Se supusermos $a_0 = 1$, por conveniência nos cálculos, teremos:

$$
\begin{aligned}
N(z) &= 1 - Az^{-2} & \Rightarrow\ & a_1 = 0, \quad a_2 = -A \\
D(z) &= 1 - 2Acos(\theta)z^{-1} + A^2z^{-2} & \Rightarrow\ & b_1 = -2Acos(\theta), \quad b2 = A^2
\end{aligned}
$$

E portanto, a equação do filtro fica:

$$
y(n) = x(n) - Ax(n-2) - 2Acos(\theta)y(n-1) + A^2y(n-2) \tag{6}
$$

4.b

Para encontrar o ganho de um filtro em uma certa frequência ω, basta calcular a magnitude da equação de transferência do filtro nesta frequência, ou seja, medir $H(e^{i\omega})$. Ao substituir z na equação por $e^{i\omega}$, teremos termos da forma $e^{-i\omega k}$, onde ω representará uma frequência em radianos/amostra.

Dada uma frequência f em Hertz (ciclos/segundo) e um valor R da taxa de amostragem da entrada em amostras/segundo, podemos representá-la como $2\pi f$ radianos/segundo, ou $\frac{2\pi f}{R}$ radianos/amostra. Dessa forma, uma frequência f dentro da taxa de Nyquist será mapeada em uma frequência $\omega = \frac{2\pi f}{R}$ entre $-\pi$ e π. Então, supondo que o sinal de entrada tenha passado por um filtro passa-baixo e que portanto não possui frequências maiores que a taxa de Nyquist, definimos $G(f) : [\frac{-R}{2}, \frac{R}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ com $G(f) = |H(e^{\frac{i2\pi f}{R}})|$. Daí, temos:

$$
\begin{aligned}
G(f) &= |H(e^{i\omega})| = \left| \frac{(1+\sqrt{A}e^{-i\omega})(1-\sqrt{A}e^{-i\omega})}{(1-Ae^{i\theta}e^{-i\omega})(1-Ae^{-i\theta}e^{-i\omega})} \right| = \\
&= \frac{\left|(1+\sqrt{A}e^{-i\omega})\right| \left|(1-\sqrt{A}e^{-i\omega})\right|}{\left|(1-Ae^{i\theta}e^{-i\omega})\right| \left|(1-Ae^{-i\theta}e^{-i\omega})\right|} = \frac{\left|H_1(e^{i\omega})\right| \left|H_2(e^{i\omega})\right|}{\left|H_3(e^{i\omega})\right| \left|H_4(e^{i\omega})\right|}
\end{aligned}
$$

Podemos calcular cada termo separadamente:

$$
\begin{aligned}
|H_1(e^{i\omega})| &= \left|(1+\sqrt{A}cos(\omega)-i\sqrt{A}sen(\omega))\right| \quad = \\
&= \sqrt{(1+\sqrt{A}cos(\omega))^2+(-\sqrt{A}sen(\omega))^2} \quad = \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{A}cos(\omega)+A} \\
|H_2(e^{i\omega})| &= \left|(1-\sqrt{A}cos(\omega)+i\sqrt{A}sen(\omega))\right| \quad = \\
&= \sqrt{(1-\sqrt{A}cos(\omega))^2+(\sqrt{A}sen(\omega))^2} \quad = \\
&= \sqrt{1-2\sqrt{A}cos(\omega)+A} \\
|H_3(e^{i\omega})| &= |(1-Acos(\theta-\omega)+iAsen(\theta-\omega))| \quad = \\
&= \sqrt{(1-Acos(\theta-\omega))^2+(Asen(\omega-\theta))^2} \\
&= \sqrt{1-2Acos(\theta-\omega)+A^2} \\
|H_4(e^{i\omega})| &= |(1-Acos(\theta+\omega)+iAsen(\theta+\omega))| \quad = \\
&= \sqrt{(1-Acos(\theta+\omega))^2+(Asen(\omega+\theta))^2} \\
&= \sqrt{1-2Acos(\theta+\omega)+A^2}
\end{aligned}
$$

E finalmente substituir $\omega = \frac{2\pi f}{R}$, para obter a expressão final:

$$
G(f) = \left|H(e^{i\frac{2\pi f}{R}})\right| = \frac{\sqrt{1+2\sqrt{A}cos(\frac{2\pi f}{R})+A}\sqrt{1-2\sqrt{A}cos(\frac{2\pi f}{R})+A}}{\sqrt{1-2Acos(\theta-\frac{2\pi f}{R})+A^2}\sqrt{1-2Acos(\theta+\frac{2\pi f}{R})+A^2}} \tag{7}
$$

4.c

$$
\begin{aligned}
G(\tfrac{R\theta}{2\pi}) &= \left|H(e^{i\theta})\right| \quad = \quad \frac{\sqrt{1+2\sqrt{A}cos(\theta)+A}\sqrt{1-2\sqrt{A}cos(\theta)+A}}{\sqrt{1-2Acos(\theta-\theta)+A^2}\sqrt{1-2Acos(\theta+\theta)+A^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1+2\sqrt{A}cos(\theta)+A-2\sqrt{A}cos(\theta)-4Acos^2(\theta)-2\sqrt{A}Acos(\theta)+A+2A\sqrt{A}cos(\theta)+A^2}}{\sqrt{1-2A+A^2}\sqrt{1-2A(cos^2(\theta)-sen^2(\theta)+A^2)}} \quad = \\
&= \frac{\sqrt{1-4Acos^2(\theta)+2A+A^2}}{\sqrt{(1-A)^2}\sqrt{1-4Acos^2(\theta)+2A+A^2)}} = \frac{1}{1-A}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(0) &= \left|H(e^{i0})\right| \quad = \quad \frac{\sqrt{1+2\sqrt{A}cos(0)+A}\sqrt{1-2\sqrt{A}cos(0)+A}}{\sqrt{1-2Acos(\theta-0)+A^2}\sqrt{1-2Acos(\theta+0)+A^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1+2\sqrt{A}+A}\sqrt{1-2\sqrt{A}+A}}{\sqrt{1-2Acos(\theta)+A^2}\sqrt{1-2Acos(\theta)+A^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1-2A+A^2}}{1-2Acos(\theta)+A^2} \quad = \quad \frac{(1-A)}{1-2Acos(\theta)+A^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(\tfrac{R}{2}) &= \left|H(e^{i\pi})\right| \quad = \quad \frac{\sqrt{1+2\sqrt{A}cos(\pi)+A}\sqrt{1-2\sqrt{A}cos(\pi)+A}}{\sqrt{1-2Acos(\theta-\pi)+A^2}\sqrt{1-2Acos(\theta+\pi)+A^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1-2\sqrt{A}+A}\sqrt{1+2\sqrt{A}+A}}{\sqrt{1-2Acos(\theta-\pi)+A^2}\sqrt{1-2Acos(\theta+\pi)+A^2}} \quad = \\
&= \frac{1-A}{1-2Acos(\theta+\pi)+A^2}
\end{aligned}
$$

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$:

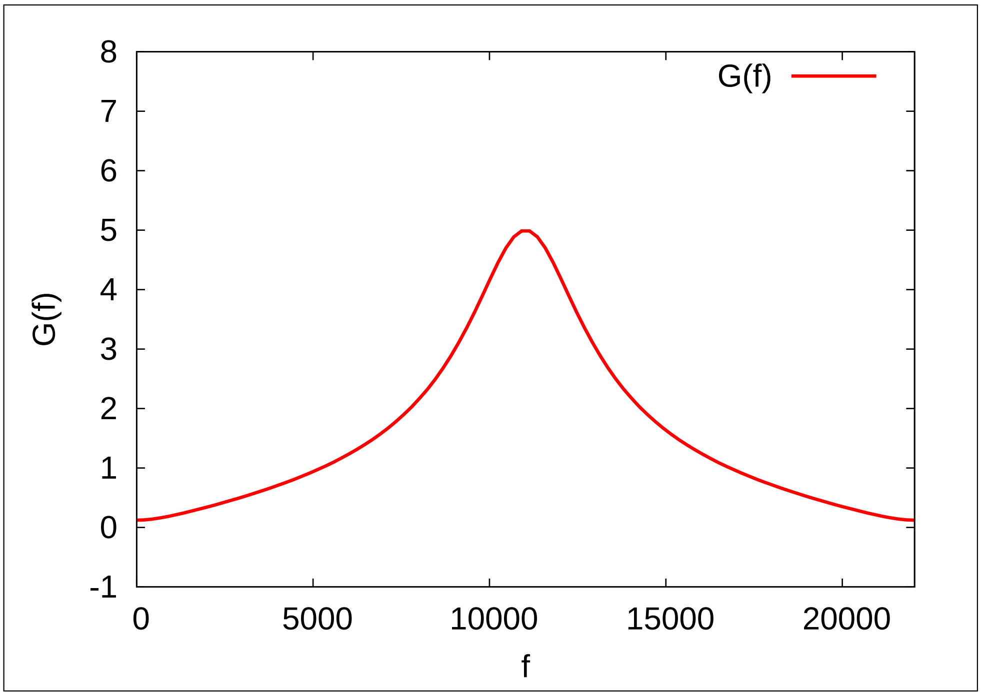

Figura 7: $G(f)$ com $\theta = \frac{\pi}{2}$, $A = 0,8$ e $R = 44100$Hz.

$$G(0) = \frac{(1-A)}{1-2Acos(\frac{\pi}{2})+A^2} = \frac{1-A}{1+A^2}$$

$$G(\frac{R}{2}) = \frac{1-A}{1-2Acos(\frac{3\pi}{2})+A^2} = \frac{1-A}{1+A^2}$$

O gráfico de $G(f)$ com $\theta = \frac{\pi}{2}$ pode ser visto na figura 7. Podemos notar a influência simétrica em $f = \frac{44100}{2} = 22050$Hz.

4.d

Os gráficos de $G(f)$ no intervalo $[\frac{-R}{2}, \frac{R}{2}]$ com $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$podem ser vistos nas figuras 8 e 9, respectivamente. Podemos notar em cada figura como a proximidade dos pólos dos pontos do círculo unitário com ângulo $\frac{\pm\pi}{4}$ e $\frac{\pm 3\pi}{4}$ influenciam as frequências próximas de $\frac{R}{8} = 5012,5$ e $\frac{3R}{8} = 1537,5$.

Finalmente, se normalizamos a função de transferência por um fator de $(1-A)$, teremos:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(1-A)(1-Az^{-2})}{1-2Acos(\theta)z^{-1}+A^2z^{-2}} = \frac{1-Az^{-2}-A+A^2z^{-2}}{1-2Acos(\theta)z^{-1}+A^2z^{-2}} = \\ &= \frac{(1-A)+(A^2-A)z^{-2}}{1-2Acos(\theta)z^{-1}+A^2z^{-2}} \Rightarrow a_0 = (1-A), \quad a_2 = (A^2-A) \\ & \qquad b_1 = -2Acos(\theta), \quad b_2 = A^2 \end{aligned}$$

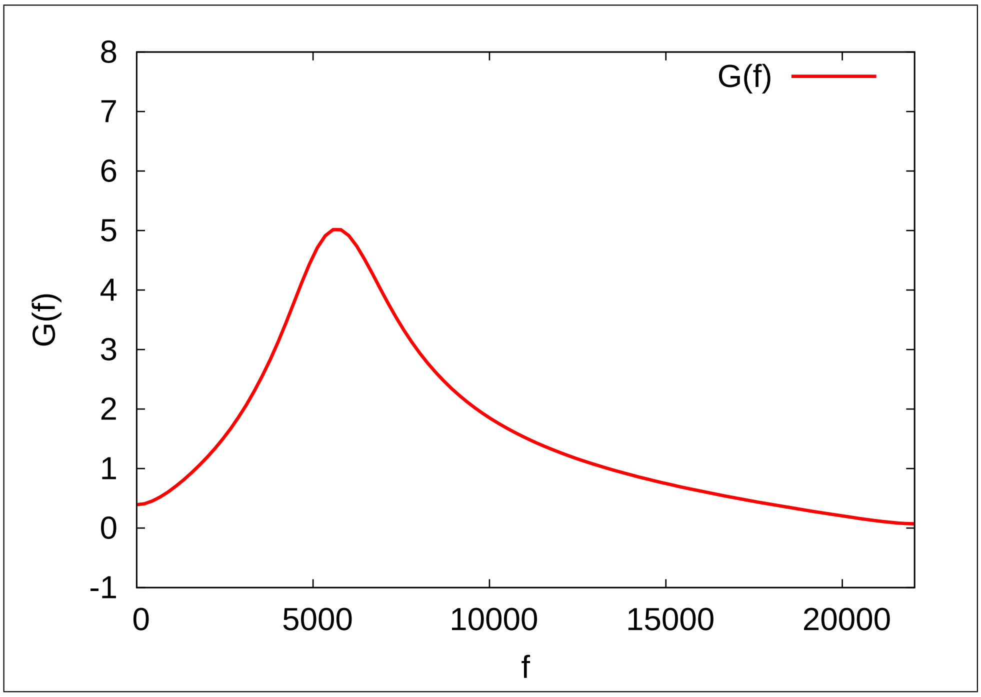

Figura 8: $G(f)$ com $\theta = \frac{\pi}{4}$, $A = 0,8$ e $R = 44100$Hz.

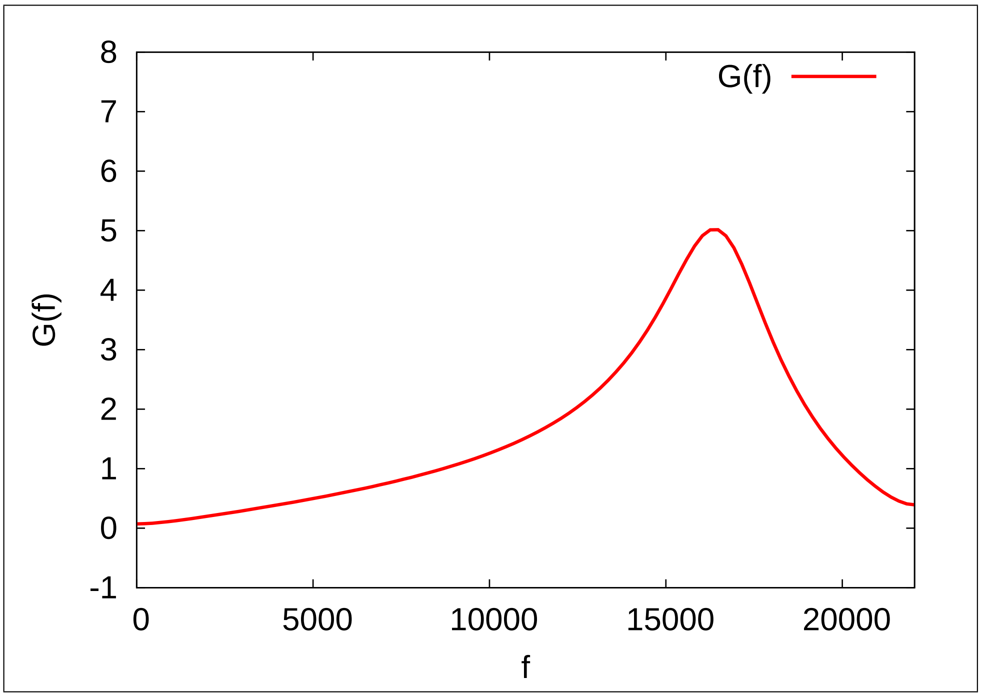

Figura 9: $G(f)$ com $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $A = 0,8$ e $R = 44100$Hz.

E o filtro normalizado, será dado por:

$$y(n) = (1-A)x(n) - (A^2 - A)x(n-2) - 2Acos(\theta)y(n-1) + A^2y(n-2) \quad (8)$$