

MAC0337/5900 - Computação Musical

1ª Lista de Exercícios

André Jucovsky Bianchi
3682247 - drebs@linux.ime.usp.br

Santiago Davila
xxxxxxx - kurgan1@gmail.com

Arthur Tofani
yyyyyyy - gramofone@gmail.com

Danilo J. S. Bellini
zzzzzzzz - danilo.bellini@gmail.com

24 de maio de 2009

1 Primeiro Exercício: Série de Fourier

1.a

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t < 3 \end{cases} \quad f(t+3) = f(t), \forall t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$f(t)$ pode ser vista na figura 1. Notamos pela definição que o período de f é $T = 3$, e que portando sua velocidade angular é $\omega = \frac{2\pi}{3}$ e portanto $\omega_n = \frac{n2\pi}{3}$.

Primeiro, calculamos F_0 , a primeira parcela da série:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_0 t} dt = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t) dt = \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{3} (1 + 2 + 0) = 1 \end{aligned}$$

Em seguida, os termos gerais F_n que dependem do harmônico considerado:

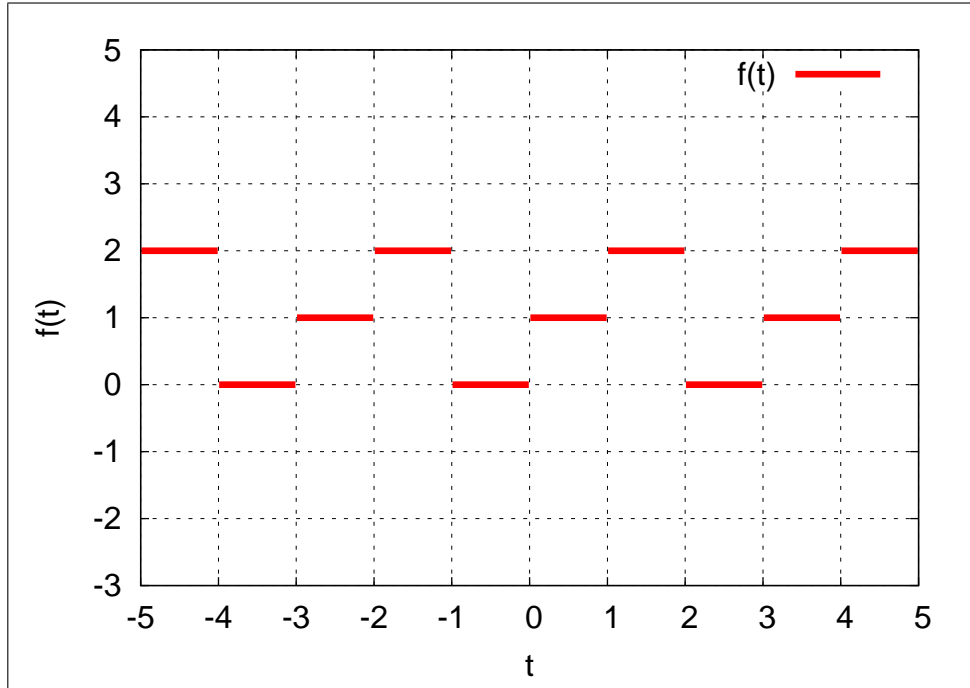


Figura 1: $f(t)$ do exercício 1.a.

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \\
 &= \frac{1}{3} \left(\int_0^1 f(t) e^{-i\omega_n t} dt + \int_1^2 f(t) e^{-i\omega_n t} dt + \int_2^3 f(t) e^{-i\omega_n t} dt \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \left(\int_0^1 1 e^{-i\omega_n t} dt + \int_1^2 2 e^{-i\omega_n t} dt + \int_2^3 0 e^{-i\omega_n t} dt \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{e^{-i\omega_n t}}{-i\omega_n} \Big|_0^1 + 2 \frac{e^{-i\omega_n t}}{-i\omega_n} \Big|_1^2 \right) = \frac{e^{-\frac{2in\pi}{3}} - 2e^{-\frac{4in\pi}{3}} + 1}{2in\pi}
 \end{aligned}$$

Dessa forma, o n -ésimo harmônico fica definido por:

$$\begin{aligned}
 h_n^f(t) &= F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t} = F_n e^{i\omega_n t} + F_n^* e^{-i\omega_{-n} t} = \\
 &= \left(\frac{e^{-\frac{2in\pi}{3}} - 2e^{-\frac{4in\pi}{3}} + 1}{in2\pi} \right) e^{\frac{in2\pi t}{3}} + \left(\frac{e^{\frac{2in\pi}{3}} - 2e^{\frac{4in\pi}{3}} + 1}{-in2\pi} \right) e^{-\frac{in2\pi t}{3}}
 \end{aligned}$$

E $f(t)$ pode ser escrita como uma soma infinita de todos os harmônicos:

$$f(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} \left[\left(\frac{e^{-\frac{2in\pi}{3}} - 2e^{-\frac{4in\pi}{3}} + 1}{in2\pi} \right) e^{\frac{in2\pi t}{3}} + \left(\frac{e^{\frac{2in\pi}{3}} - 2e^{\frac{4in\pi}{3}} + 1}{-in2\pi} \right) e^{-\frac{in2\pi t}{3}} \right] \quad (2)$$

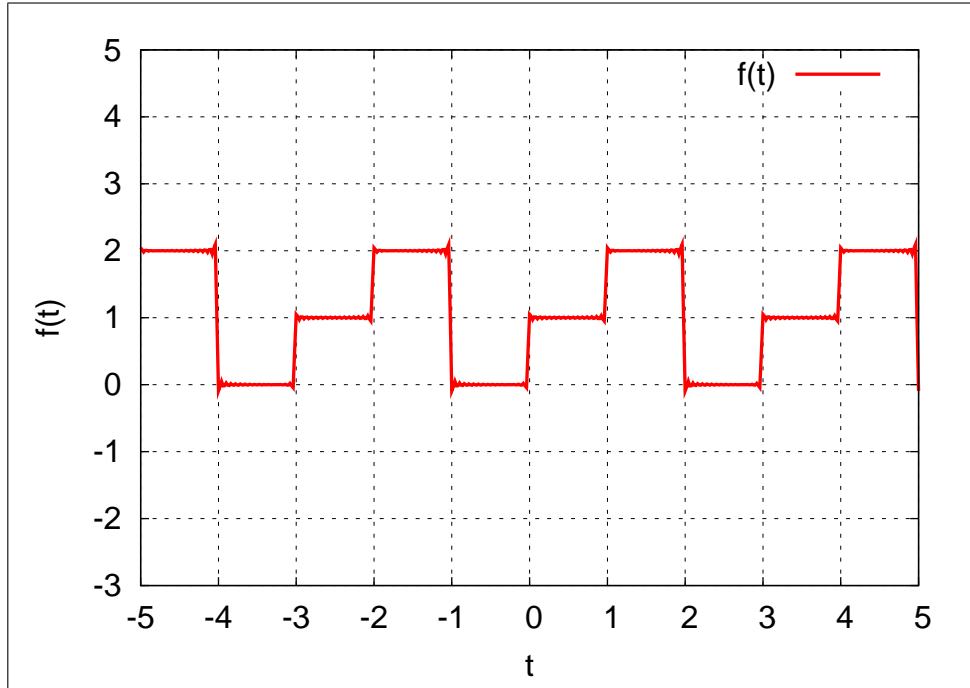


Figura 2: $f(t)$ do exercício 1.a calculada com 100 harmônicos através do cálculo da Série de Fourier.

O resultado do cálculo de $f(t)$ pela fórmula (2) com 100 harmônicos pode ser visto na figura 2.

1.b

$$g(t) = \begin{cases} \text{sen}(\pi t), & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 3 \end{cases} \quad g(t+3) = g(t), \forall t \in \mathbb{R} \quad (3)$$

$g(t)$ pode ser vista na figura 3. Notamos pela definição que o período de f é $T = 3$, e que portanto sua velocidade angular é $\omega = \frac{2\pi}{3}$ e portanto $\omega_n = \frac{n2\pi}{3}$.

Primeiro, calculamos G_0 , a primeira parcela da série:

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-i\omega_0 t} dt = \frac{1}{3} \int_0^3 g(t) dt = \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_0^1 g(t) dt + \int_1^3 g(t) dt \right) = \frac{1}{3} \left(\int_0^1 \text{sen}(\pi t) dt + \int_1^3 (2-t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\left. \frac{-\cos(\pi t)}{\pi} \right|_0^1 + \left(2t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^3 \right) = \frac{2}{3\pi} \end{aligned}$$

Em seguida, os termos gerais G_n que dependem do harmônico considerado:

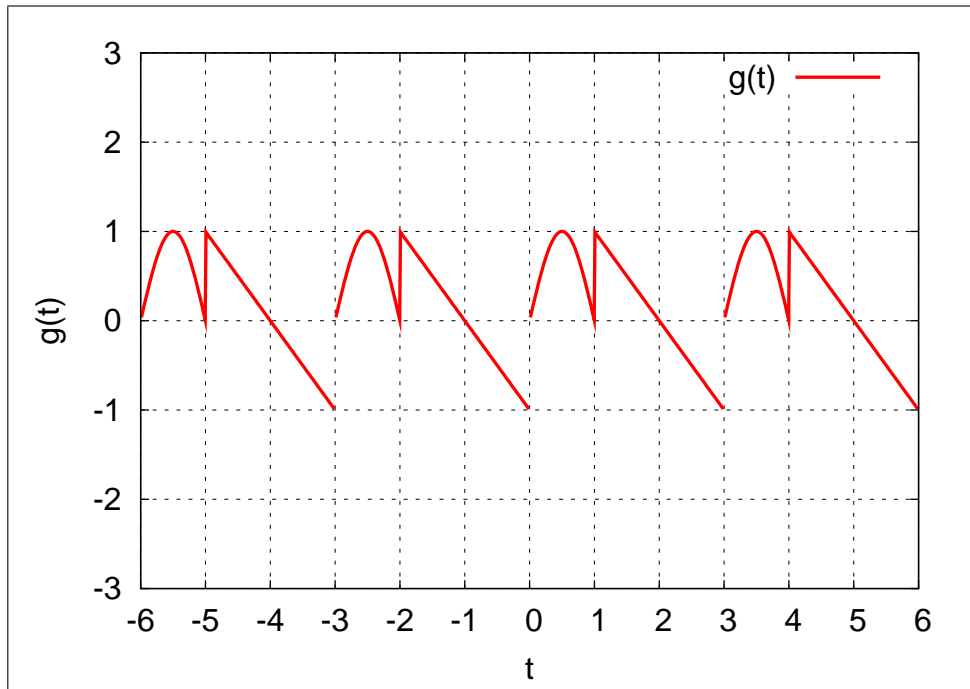


Figura 3: $g(t)$ do exercício 1.b.

$$\begin{aligned}
 G_n &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-i\omega_n t} dt = \\
 &= \frac{1}{3} \left(\int_0^1 g(t) e^{-i\omega_n t} dt + \int_1^3 g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \left(\int_0^1 \sin(\pi t) e^{-i\omega_n t} dt + \int_1^3 (2-t) e^{-i\omega_n t} dt \right) =
 \end{aligned}$$

Agora, sabemos que

$$\begin{aligned}
 \int \sin(\pi t) e^{-i\omega_n t} dt &= \int \sin(\pi t) (\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)) dt = \\
 &= \int \sin(\pi t) \cos(\omega_n t) dt - i \int \sin(\pi t) \sin(\omega_n t) dt
 \end{aligned}$$

Podemos então calcular as duas integrais separadas, e as contas em anexo mostram que:

$$\int_0^1 \sin(\pi t) e^{-i\omega_n t} dt = 3 \left(\frac{1 - e^{i(\pi - \frac{n2\pi}{3})}}{6\pi - n4\pi} + \frac{1 - e^{-i(\pi + \frac{n2\pi}{3})}}{6\pi + n4\pi} \right)$$

E também que:

$$\int_1^3 (2-t) e^{-i\omega_n t} dt = 3 \left(\frac{-e^{-in2\pi} - e^{-\frac{in2\pi}{3}}}{-in2\pi} - 3 \frac{e^{-in2\pi} + e^{-\frac{in2\pi}{3}}}{4n^2\pi^2} \right)$$

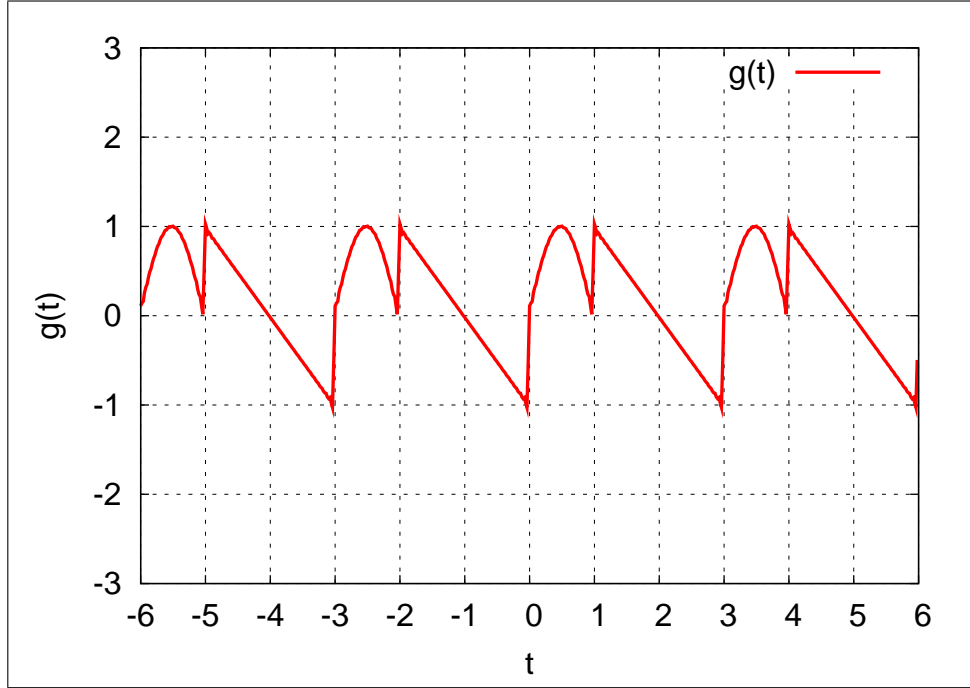


Figura 4: $g(t)$ do exercício 1.b calculada com 100 harmônicos através do cálculo da Série de Fourier.

Assim, o n -ésimo harmônico fica definido por:

$$\begin{aligned}
 h_n^g(t) &= G_n e^{i\omega_n t} + G_{-n} e^{i\omega_{-n} t} = G_n e^{i\omega_n t} + G_n^* e^{-i\omega_{-n} t} = \\
 &= \left[\frac{1 - e^{i(\pi - \frac{n2\pi}{3})}}{6\pi - n4\pi} + \frac{1 - e^{-i(\pi + \frac{n2\pi}{3})}}{6\pi + n4\pi} + \frac{-e^{-in2\pi} - e^{\frac{-in2\pi}{3}}}{-in2\pi} - 3 \frac{-e^{-in2\pi} + e^{\frac{-in2\pi}{3}}}{4n^2\pi^2} \right] e^{\frac{in2\pi t}{3}} + \\
 &+ \left[\frac{1 - e^{-i(\pi - \frac{n2\pi}{3})}}{6\pi - n4\pi} + \frac{1 - e^{i(\pi + \frac{n2\pi}{3})}}{6\pi + n4\pi} + \frac{-e^{in2\pi} - e^{\frac{in2\pi}{3}}}{-in2\pi} - 3 \frac{-e^{in2\pi} + e^{\frac{in2\pi}{3}}}{4n^2\pi^2} \right] e^{\frac{-in2\pi t}{3}}
 \end{aligned}$$

E $g(t)$ pode ser escrita como uma soma infinita de todos os harmônicos:

$$g(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} h_n(t) \quad (4)$$

O resultado do cálculo de $g(t)$ pela fórmula (4) com 100 harmônicos pode ser visto na figura 4.

1.c

$$h(t) = 3\cos(5t) + 2\sin(8t) \quad h(t+3) = h(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

$h(t)$ pode ser vista na figura 5. Podemos encontrar seu período (e velocidade angular) calculando o mínimo múltiplo comum dos períodos em graus dos somandos da expressão:

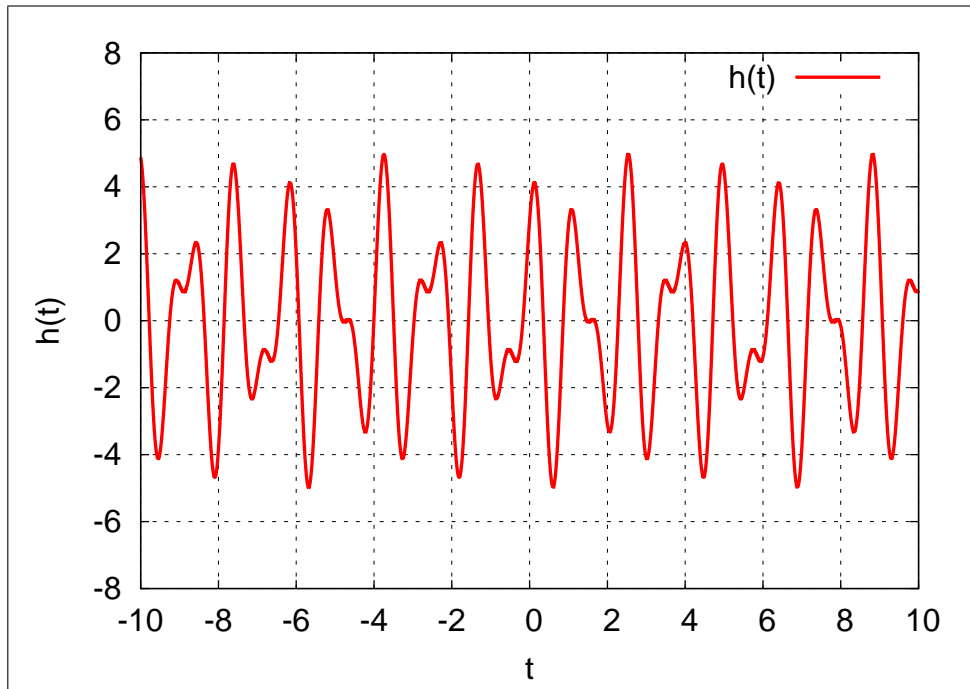


Figura 5: $h(t)$ do exercício 1.c.

$$\begin{aligned}
 \omega_{3\cos(5t)} &= 5 \Rightarrow T_{3\cos(5t)} = \frac{2\pi}{5} = 72^\circ \\
 \omega_{2\text{sen}(8t)} &= 8 \Rightarrow T_{2\text{sen}(8t)} = \frac{2\pi}{8} = 45^\circ \\
 \text{mmc}(72, 45) &= 360 \Rightarrow T_h = 2\pi \Rightarrow \omega_n = n
 \end{aligned}$$

Primeiro, calculamos H_0 , a primeira parcela da série:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T h(t) e^{-i\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 3\cos(5t) + 2\text{sen}(8t) dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(3 \int_0^{2\pi} \cos(5t) dt + 2 \int_0^{2\pi} \text{sen}(8t) dt \right) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3\text{sen}(5t)}{5} \Big|_0^{2\pi} + \frac{-2\cos(8t)}{8} \Big|_0^{2\pi} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Em seguida, os termos gerais H_n que dependem do harmônico considerado:

$$\begin{aligned}
H_n &= \frac{1}{T} \int_0^T h(t) e^{-i\omega_n t} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (3\cos(5t) + 2\sin(8t)) e^{-i\omega_n t} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(3 \int_0^{2\pi} \cos(5t) e^{-i\omega_n t} dt + 2 \int_0^{2\pi} \sin(8t) e^{-i\omega_n t} dt \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(3 \int_0^{2\pi} \cos(5t) \cos(nt) dt + 2 \int_0^{2\pi} \sin(8t) \cos(nt) dt - \right. \\
&\quad \left. - 3i \int_0^{2\pi} \cos(5t) \sin(nt) dt - 2i \int_0^{2\pi} \sin(8t) \sin(nt) dt \right)
\end{aligned}$$

Dos resultados vistos em aula, temos que:

$$\begin{aligned}
3 \int_0^{2\pi} \cos(5t) \cos(nt) dt &= \begin{cases} 0, & n \neq 5 \\ 3\pi, & n = 5 \end{cases} \\
2 \int_0^{2\pi} \sin(8t) \cos(nt) dt &= 0, \forall n \\
-3i \int_0^{2\pi} \cos(5t) \sin(nt) dt &= 0, \forall n \\
-2i \int_0^{2\pi} \sin(8t) \sin(nt) dt &= \begin{cases} 0, & n \neq 8 \\ -2i\pi, & n = 8 \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, o n -ésimo harmônico fica definido por:

$$h_n^h(t) = H_n e^{i\omega_n t} + H_{-n} e^{i\omega_{-n} t} = H_n e^{i\omega_n t} + H_n^* e^{-i\omega_n t}$$

Como H_n só está definida para $n = 5$ e $n = 8$, $h(n)$ pode ser escrita como soma de apenas quatro parcelas:

$$\begin{aligned}
h(t) &= H_5 e^{i\omega_5 t} + H_5^* e^{-i\omega_5 t} + H_8 e^{i\omega_8 t} + H_8^* e^{-i\omega_8 t} = \\
&= \frac{3}{2} e^{i5t} + \frac{3}{2} e^{-i5t} - i e^{i8t} + i e^{-i8t}
\end{aligned} \tag{5}$$

O resultado do cálculo de $h(t)$ pela fórmula (5), com apenas as duas componentes harmônicas, pode ser visto na figura 6.

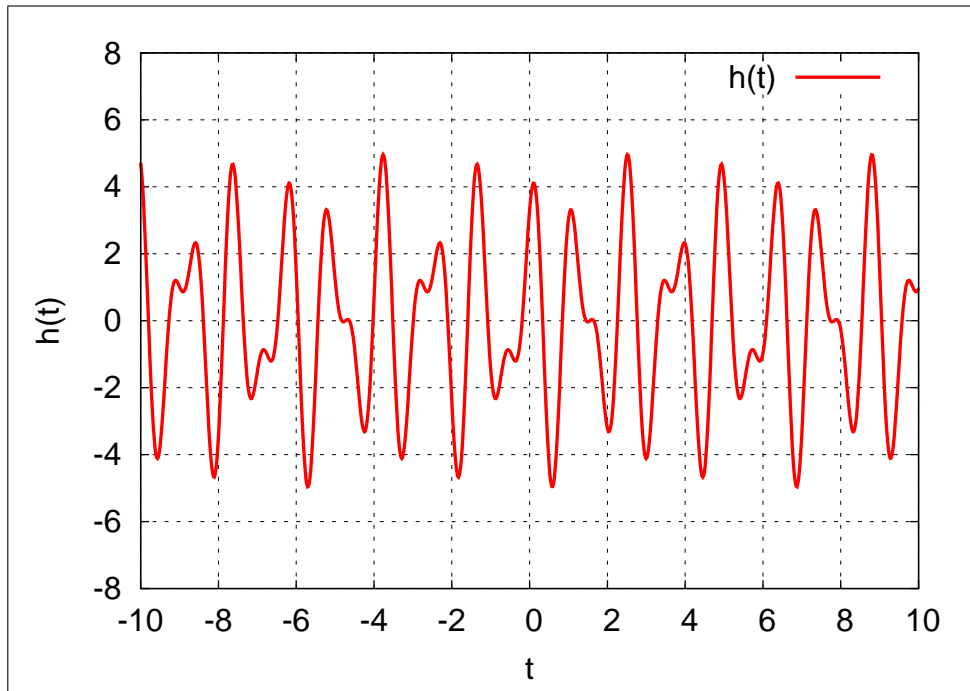


Figura 6: $h(t)$ do exercício 1.c calculada com as duas componentes da transformada de Fourier.

2 Segundo Exercício:

2.a

2.b

2.c

3 Terceiro Exercício:

3.a

3.b

3.c

4 Quarto Exercício: Polos e Zeros

4.a

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{a_0(1-Z_1z^{-1})(1-Z_2z^{-1})}{(1-P_1z^{-1})(1-P_2z^{-1})} = \frac{a_0(1+\sqrt{A}z^{-1})(1-\sqrt{A}z^{-1})}{(1-Ae^{i\theta}z^{-1})(1-Ae^{-i\theta}z^{-1})} \\
 &= \frac{a_0(1-Az^{-2})}{1-Ae^{i\theta}z^{-1}-Ae^{-i\theta}z^{-1}+A^2e^{i\theta-i\theta}z^{-2}} = \frac{a_0(1-Az^{-2})}{1-A(e^{i\theta}+e^{-i\theta})z^{-1}+A^2z^{-2}} = \\
 &= \frac{Y(z)}{X(z)}
 \end{aligned}$$

Então, temos:

$$\begin{aligned} Y(z) &= a_0(1 - Az^{-2}) \Rightarrow a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{-A}{a_0} \\ X(z) &= 1 - A(e^{i\theta} + e^{-i\theta})z^{-1} + A^2z^{-2} \Rightarrow b_1 = -A(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad b_2 = A^2 \end{aligned}$$

E portanto, a equação do filtro fica:

$$y(n) = a_0x(n) - \frac{A}{a_0}x(n-2) - A(e^{i\theta} + e^{-i\theta})y(n-1) + A^2y(n-2) \quad (6)$$

4.b

Como a transformada Z mapeia frequências dentro da taxa de Nyquist no intervalo $[0, 2\pi[$, então $G(f) = |H(e^{\frac{if2\pi}{R}})|$, então:

$$G(f) = |H(e^{\frac{if2\pi}{R}})| = \left| \frac{a_0(1 - Ae^{\frac{-i4f\pi}{R}})}{1 - A(e^{i\theta} + e^{-i\theta})e^{\frac{-i2f\pi}{R}} + A^2e^{\frac{-i4f\pi}{R}}} \right|$$

4.c

4.d