MAC0337/5900 - Computação Musical
1^a Lista de Exercícios

André Jucovsky Bianchi
3682247 - drebs@linux.ime.usp.br

Santiago Davila
xxxxxxx - kurgan1@gmail.com

Arthur Tofani
yyyyyyy - gramofone@gmail.com

Danilo J. S. Bellini
zzzzzzz - danilo.bellini@gmail.com

27 de maio de 2009

1 Primeiro Exercício: Série de Fourier

1.a

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t < 3 \end{cases} \qquad f(t+3) = f(t), \forall t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$f(t)$ pode ser vista na figura 1. Notamos pela definição que o período de f é $T = 3$, e que portando sua velocidade angular é $\omega = \frac{2\pi}{3}$ e portanto $\omega_n = \frac{n2\pi}{3}$.

Primeiro, calculamos F_0, a primeira parcela da série:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt\right) = \\ &= \frac{1}{3}(1+2+0) = 1 \end{aligned}$$

Em seguida, os termos gerais F_n que dependem do harmônico considerado:

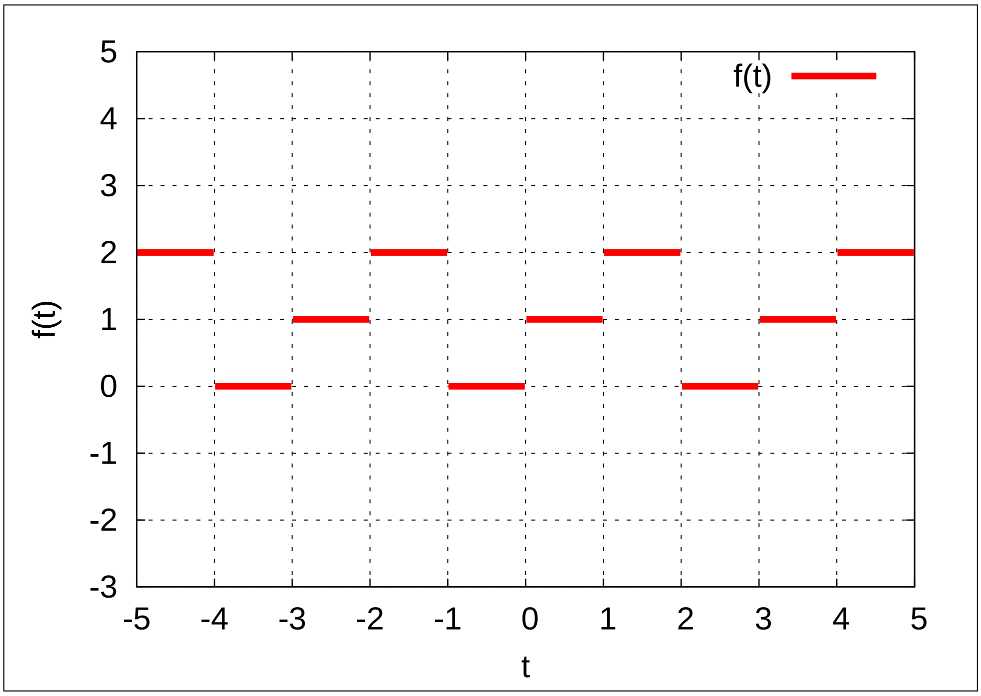

Figura 1: $f(t)$ do exercício **1.a**.

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt \quad = \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_1^2 f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_2^3 f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right) \quad = \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 1e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_1^2 2e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_2^3 0e^{-i\omega_n t}\,dt\right) \quad = \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-i\omega_n t}}{-i\omega_n}\Big|_0^1 + 2\frac{e^{-i\omega_n t}}{-i\omega_n}\Big|_1^2\right) \quad = \quad \frac{e^{\frac{-2in\pi}{3}} - 2e^{\frac{-4in\pi}{3}} + 1}{2in\pi}
\end{aligned}
$$

Dessa forma, o $n-$ésimo harmônico fica definido por:

$$
\begin{aligned}
h_n^f(t) &= F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n}e^{i\omega_{-n} t} \quad = \quad F_n e^{i\omega_n t} + F_n^* e^{-i\omega_{-n} t} \quad = \\
&= \left(\frac{e^{\frac{-2in\pi}{3}} - 2e^{\frac{-4in\pi}{3}} + 1}{in2\pi}\right) e^{\frac{in2\pi t}{3}} + \left(\frac{e^{\frac{2in\pi}{3}} - 2e^{\frac{4in\pi}{3}} + 1}{-in2\pi}\right) e^{\frac{-in2\pi t}{3}}
\end{aligned}
$$

E $f(t)$ pode ser escrita como uma soma infinita de todos os harmônicos:

$$
f(t) = 1 + \sum_{n\geq 1}\left[\left(\frac{e^{\frac{-2in\pi}{3}} - 2e^{\frac{-4in\pi}{3}} + 1}{in2\pi}\right) e^{\frac{in2\pi t}{3}} + \left(\frac{e^{\frac{2in\pi}{3}} - 2e^{\frac{4in\pi}{3}} + 1}{-in2\pi}\right) e^{\frac{-in2\pi t}{3}}\right] \tag{2}
$$

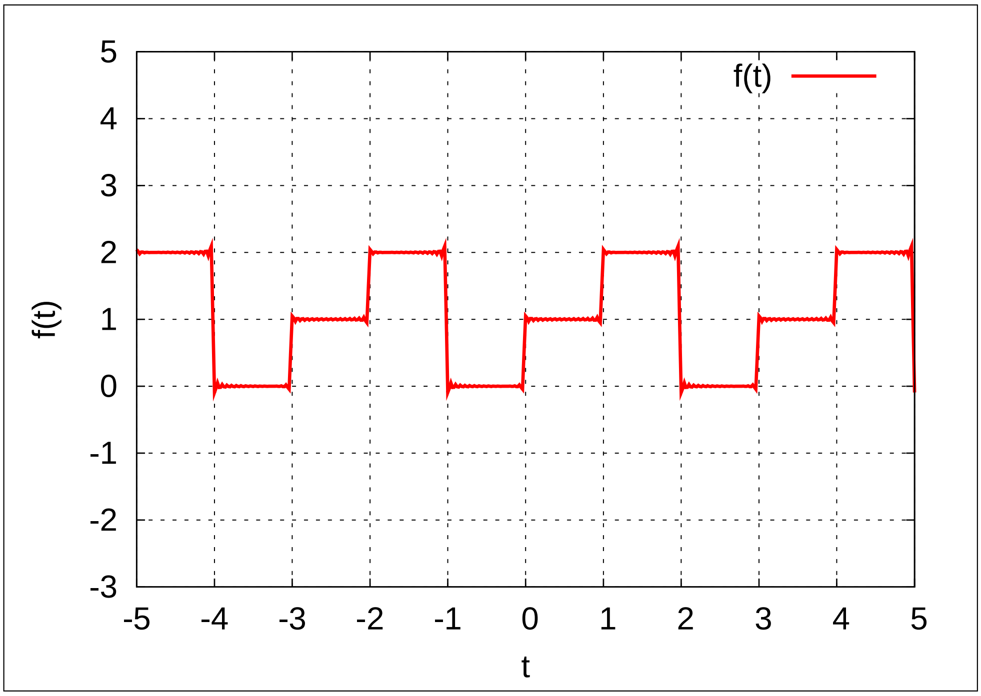

Figura 2: $f(t)$ do exercício **1.a** calculada com 100 harmônicos através do cálculo da Série de Fourier.

O resultado do cálculo de $f(t)$ pela fórmula (2) com 100 harmônicos pode ser visto na figura 2.

1.b

$$g(t) = \begin{cases} sen(\pi t), & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 3 \end{cases} \qquad g(t+3) = g(t), \forall t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$g(t)$ pode ser vista na figura 3. Notamos pela definição que o período de f é $T = 3$, e que portando sua velocidade angular é $\omega = \frac{2\pi}{3}$ e portanto $\omega_n = \frac{n2\pi}{3}$.

Primeiro, calculamos G_0, a primeira parcela da série:

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-i\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^3 g(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 g(t)\,dt + \int_1^3 g(t)\,dt\right) = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 sen(\pi t)\,dt + \int_1^3 (2-t)\,dt\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{-cos(\pi t)}{\pi}\Big|_0^1 + \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^3\right) = \frac{2}{3\pi} \end{aligned}$$

Em seguida, os termos gerais G_n que dependem do harmônico considerado:

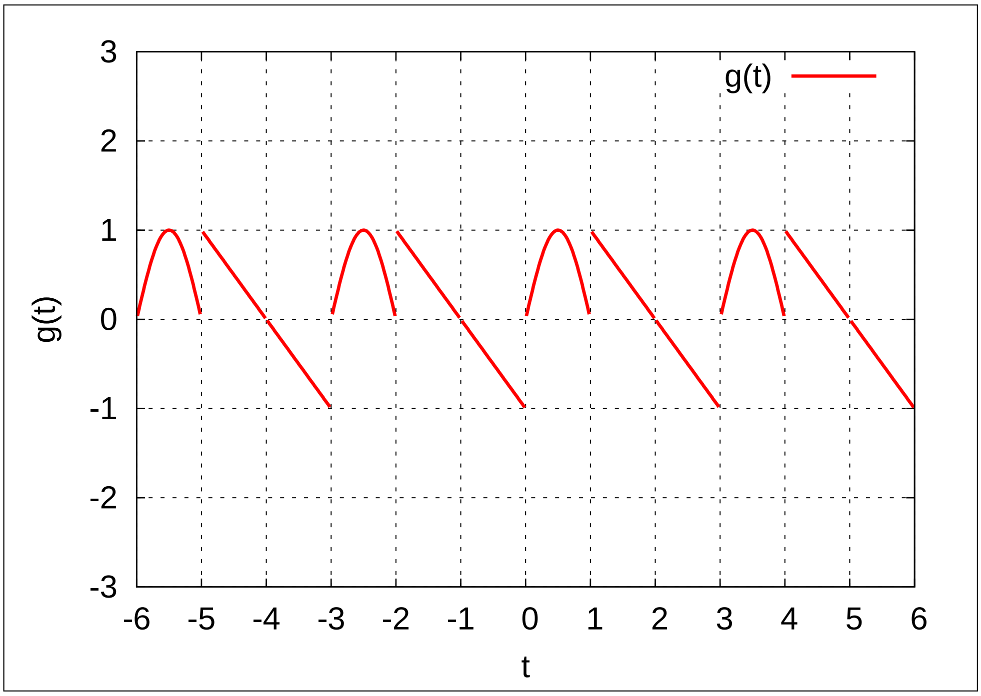

Figura 3: $g(t)$ do exercício **1.b**.

$$\begin{aligned}
G_n &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-i\omega_n t}\,dt = \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 g(t)e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_1^3 g(t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right) = \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 sen(\pi t)e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_1^3 (2-t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right) =
\end{aligned}$$

Agora, sabemos que

$$\begin{aligned}
\int sen(\pi t)e^{-i\omega_n t}\,dt &= \int sen(\pi t)\left(cos(\omega_n t) - i.sen(\omega_n t)\right)\,dt = \\
&= \int sen(\pi t)cos(\omega_n t)\,dt - i\int sen(\pi t)sen(\omega_n t)
\end{aligned}$$

Podemos então calcular as duas integrais separadas, e as contas em anexo mostram que:

$$\int_0^1 sen(\pi t)e^{-i\omega_n t}\,dt = 3\left(\frac{1-e^{i(\pi-\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi-n4\pi} + \frac{1-e^{-i(\pi+\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi+n4\pi}\right)$$

E também que:

$$\int_1^3 (2-t)e^{-i\omega_n t}\,dt = 3\left(\frac{-e^{-in2\pi}-e^{\frac{-in2\pi}{3})}}{-in2\pi} - 3\frac{-e^{-in2\pi}+e^{\frac{-in2\pi}{3})}}{4n^2\pi^2}\right)$$

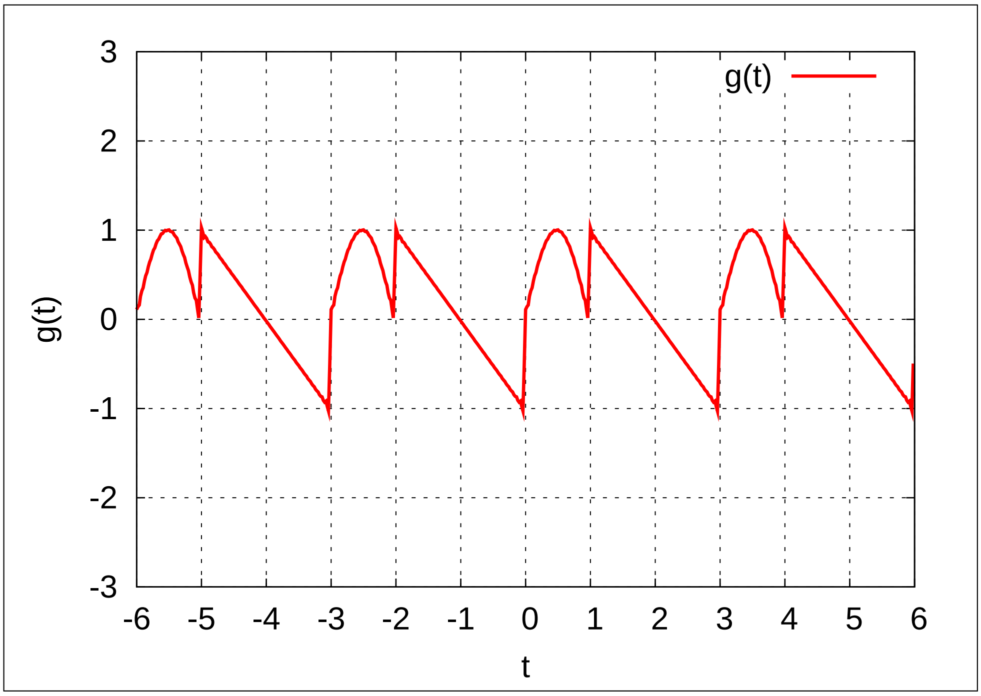

Figura 4: $g(t)$ do exercício **1.b** calculada com 100 harmônicos através do cálculo da Série de Fourier.

Assim, o $n-$ésimo harmônico fica definido por:

$$\begin{aligned}
h_n^g(t) &= G_n e^{i\omega_n t} + G_{-n} e^{i\omega_{-n} t} \quad = \quad G_n e^{i\omega_n t} + G_n^* e^{-i\omega_{-n} t} \quad = \\
&= \left[\frac{1-e^{i(\pi-\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi-n4\pi} + \frac{1-e^{-i(\pi+\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi+n4\pi} + \frac{-e^{-in2\pi}-e^{\frac{-in2\pi}{3})}}{-in2\pi} - 3\frac{-e^{-in2\pi}+e^{\frac{-in2\pi}{3})}}{4n^2\pi^2}\right] e^{\frac{in2\pi t}{3}} \quad + \\
&+ \left[\frac{1-e^{-i(\pi-\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi-n4\pi} + \frac{1-e^{i(\pi+\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi+n4\pi} + \frac{-e^{in2\pi}-e^{\frac{in2\pi}{3})}}{-in2\pi} - 3\frac{-e^{in2\pi}+e^{\frac{in2\pi}{3})}}{4n^2\pi^2}\right] e^{\frac{-in2\pi t}{3}}
\end{aligned}$$

E $g(t)$ pode ser escrita como uma soma infinita de todos os harmônicos:

$$g(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} h_n(t) \tag{4}$$

O resultado do cálculo de $g(t)$ pela fórmula (4) com 100 harmônicos pode ser visto na figura 4.

1.c

$$h(t) = 3cos(5t) + 2sen(8t) \qquad h(t+3) = h(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

$h(t)$ pode ser vista na figura 5. Podemos encontrar seu período (e velocidade angular) calculando o mínimo múltiplo comum dos períodos em graus dos somandos da expressão:

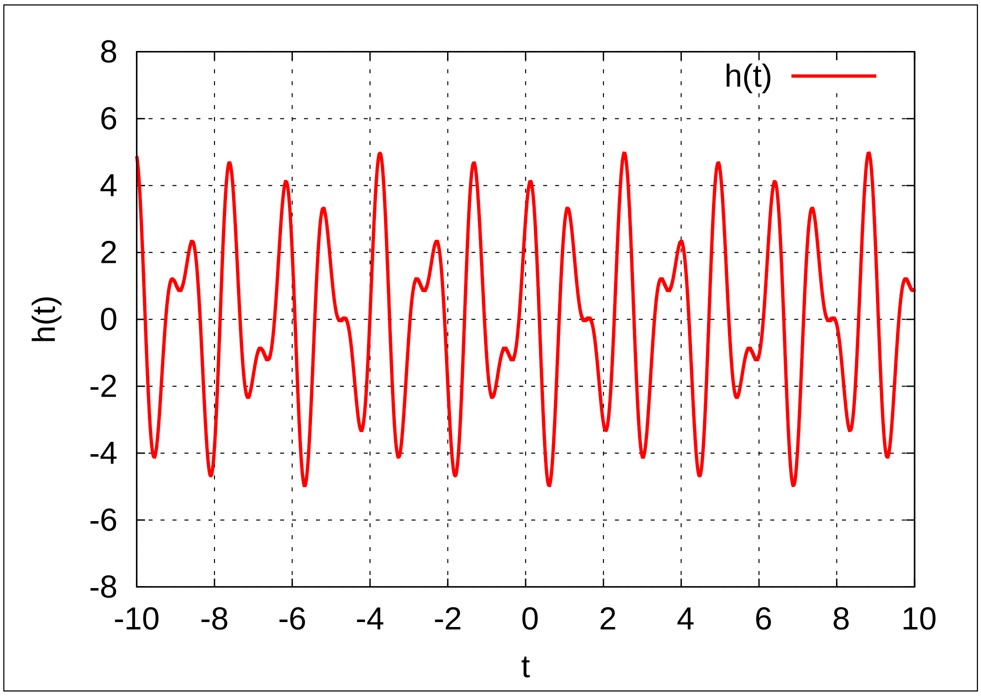

Figura 5: $h(t)$ do exercício **1.c**.

$$\begin{array}{lclcl} \omega_{3cos(5t)} & = & 5 & \Rightarrow & T_{3cos(5t)} = \frac{2\pi}{5} = 72^o \\ \omega_{2sen(8t)} & = & 8 & \Rightarrow & T_{2sen(8t)} = \frac{2\pi}{8} = 45^o \\ mmc(72,45) & = & 360 & \Rightarrow & T_h = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_n = n \end{array}$$

Primeiro, calculamos H_0, a primeira parcela da série:

$$\begin{array}{rcl} H_0 & = & \frac{1}{T}\int\limits_0^T h(t)e^{-i\omega_0 t}\,dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} 3cos(5t) + 2sen(8t)\,dt \quad = \\ & = & \frac{1}{2\pi}\left(3\int\limits_0^{2\pi} cos(5t)\,dt + 2\int\limits_0^{2\pi} sen(8t)\,dt\right) \quad = \\ & = & \frac{1}{2\pi}\left(\frac{3sen(5t)}{5}|_0^{2\pi} + \frac{-2cos(8t)}{8}|_0^{2\pi}\right) \quad = \quad 0 \end{array}$$

Em seguida, os termos gerais H_n que dependem do harmônico considerado:

$$
\begin{aligned}
H_n &= \tfrac{1}{T}\int_0^T h(t)e^{-i\omega_n t}\,dt \quad = \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(3cos(5t)+2sen(8t)\right)e^{-i\omega_n t}\,dt \quad = \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\left(3\int_0^{2\pi} cos(5t)e^{-i\omega_n t}\,dt + 2\int_0^{2\pi} sen(8t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right) \quad = \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\left(3\int_0^{2\pi} cos(5t)cos(nt)\,dt + 2\int_0^{2\pi} sen(8t)cos(nt)\,dt \quad - \right.\\
&- \left. 3i\int_0^{2\pi} cos(5t)sen(nt)\,dt - 2i\int_0^{2\pi} sen(8t)sen(nt)\,dt\right)
\end{aligned}
$$

Dos resultados vistos em aula, temos que:

$$
\begin{aligned}
3\int_0^{2\pi} cos(5t)cos(nt)\,dt &= \begin{cases} 0, & n \neq 5 \\ 3\pi, & n = 5 \end{cases} \\
2\int_0^{2\pi} sen(8t)cos(nt)\,dt &= 0, \forall\, n \\
-3i\int_0^{2\pi} cos(5t)sen(nt)\,dt &= 0, \forall\, n \\
-2i\int_0^{2\pi} sen(8t)sen(nt)\,dt &= \begin{cases} 0, & n \neq 8 \\ -2i\pi, & n = 8 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Assim, o $n-$ésimo harmônico fica definido por:

$$
h_n^h(t) \quad = \quad H_n e^{i\omega_n t} + H_{-n}e^{i\omega_{-n} t} \quad = \quad H_n e^{i\omega_n t} + H_n^* e^{-i\omega_n t}
$$

Como H_n só está definida para $n = 5$ e $n = 8$, $h(n)$ pode ser escrita como soma de apenas quatro parcelas:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= H_5 e^{i\omega_5 t} + H_5^* e^{-i\omega_5 t} + H_8 e^{i\omega_8 t} + H_8^* e^{-i\omega_8 t} \quad = \\
&= \tfrac{3}{2}e^{i5t} + \tfrac{3}{2}e^{-i5t} - ie^{i8t} + ie^{-i8t}
\end{aligned} \tag{5}
$$

O resultado do cálculo de $h(t)$ pela fórmula (5), com apenas as duas componentes harmônicas, pode ser visto na figura 6.

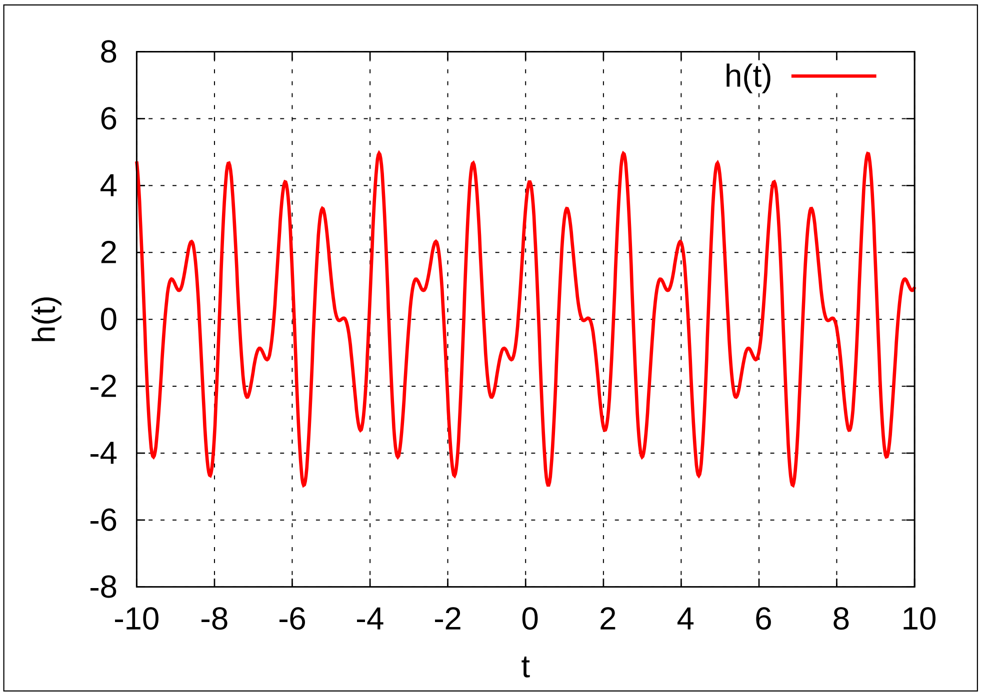

Figura 6: $h(t)$ do exercício **1.c** calculada com as duas componentes da transformada de Fourier.

2 Segundo Exercício:

2.a

2.b

2.c

3 Terceiro Exercício:

3.a

3.b

3.c

4 Quarto Exercício: Polos e Zeros

4.a

Podemos escrever a função de transferência $H(z)$ associada ao filtro $y(n)$ como quociente de produtos que envolvem os valores dos zeros e dos pólos do filtro:

$$
\begin{aligned}
H(z) &= a_0 \frac{\prod\limits_{i=1}^{M}(1-Z_i z^{-1})}{\prod\limits_{i=1}^{N}(1-P_i z^{-1})} &= \frac{a_0(1-Z_1 z^{-1})(1-Z_2 z^{-1})}{(1-P_1 z^{-1})(1-P_2 z^{-1})} &= \\
&= \frac{a_0(1+\sqrt{A}z^{-1})(1-\sqrt{A}z^{-1})}{(1-Ae^{i\theta}z^{-1})(1-Ae^{-i\theta}z^{-1})} &= \frac{a_0(1-Az^{-2})}{1-Ae^{i\theta}z^{-1}-Ae^{-i\theta}z^{-1}+A^2e^{i\theta-i\theta}z^{-2}} &= \\
&= \frac{a_0(1-Az^{-2})}{1-A(e^{i\theta}+e^{-i\theta})z^{-1}+A^2z^{-2}} &= \frac{a_0(1-Az^{-2})}{1-2Acos(\theta)z^{-1}+A^2z^{-2}} &= \\
&= \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N} b_k z^{-k}} &= \frac{N(z)}{D(z)}
\end{aligned}
$$

Na relação acima, os coeficientes de $N(z)$ e $D(z)$ são, respectivamente, os coeficientes a_i e b_i do filtro $y(n)$. Se supusermos $a_0 = 1$, por conveniência nos cálculos, teremos:

$$
\begin{aligned}
N(z) &= 1 - Az^{-2} & \Rightarrow\ & a_1 = 0, \quad a_2 = -A \\
D(z) &= 1 - 2Acos(\theta)z^{-1} + A^2z^{-2} & \Rightarrow\ & b_1 = -2Acos(\theta), \quad b2 = A^2
\end{aligned}
$$

E portanto, a equação do filtro fica:

$$
y(n) = x(n) - Ax(n-2) - 2Acos(\theta)y(n-1) + A^2y(n-2) \tag{6}
$$

4.b

Para encontrar o ganho de um filtro em uma certa frequência ω, basta calcular a magnitude da equação de transferência do filtro nesta frequência, ou seja, medir $H(e^{i\omega})$. Ao substituir z na equação por $e^{i\omega}$, teremos termos da forma $e^{-i\omega k}$, onde ω representará uma frequência em radianos/amostra.

Dada uma frequência f em Hertz (ciclos/segundo) e um valor R da taxa de amostragem da entrada em amostras/segundo, podemos representá-la como $2\pi f$ radianos/segundo, ou $\frac{2\pi f}{R}$ radianos/amostra. Dessa forma, uma frequência f dentro da taxa de Nyquist será mapeada em uma frequência $\omega = \frac{2\pi f}{R}$ entre $-\pi$ e π. Então, supondo que o sinal de entrada tenha passado por um filtro passa-baixo e que portanto não possui frequências maiores que a taxa de Nyquist, definimos $G(f) : [\frac{-R}{2}, \frac{R}{2}] \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ com $G(f) = |H(e^{\frac{i2\pi f}{R}})|$. Daí, temos:

$$
\begin{aligned}
G(f) &= |H(e^{i\omega})| &= \sqrt{H(e^{i\omega})H(e^{-i\omega})} &= \\
&= \sqrt{\frac{1-Ae^{-i2\omega}}{1-2Acos(\theta)e^{-i\omega}+A^2e^{-i2\omega}} \frac{1-Ae^{i2\omega}}{1-2Acos(\theta)e^{i\omega}+A^2e^{i\omega}}} &= \\
&= \sqrt{\frac{1-A(e^{-2i\omega}+e^{i2\omega})+A^2e^{-i2\omega+i2\omega}}{}} &= \sqrt{\frac{1-2Acos(2\omega)+A^2}{}}
\end{aligned}
$$

4.c

4.d