MAC0337/5900 - Computação Musical
1^a Lista de Exercícios

André Jucovsky Bianchi
3682247 - drebs@linux.ime.usp.br

Santiago Davila
xxxxxxx - kurgan1@gmail.com

Arthur Tofani
yyyyyyy - gramofone@gmail.com

Danilo J. S. Bellini
zzzzzzz - danilo.bellini@gmail.com

24 de maio de 2009

1 Primeiro Exercício: Série de Fourier

1.a

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 2, & 1 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t < 3 \end{cases} \qquad f(t+3) = f(t), \forall t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$f(t)$ pode ser vista na figura **??**. Notamos pela definição que o período de f é $T = 3$, e que portando sua velocidade angular é $\omega = \frac{2\pi}{3}$ e portanto $\omega_n = \frac{n2\pi}{3}$.

Primeiro, calculamos F_0, a primeira parcela da série:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_0 t}\,dt &= \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt &= \\ &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt\right) &= \\ &= \frac{1}{3}(1+2+0) &= 1 \end{aligned}$$

Em seguida, os termos gerais F_n que dependem do harmônico considerado:

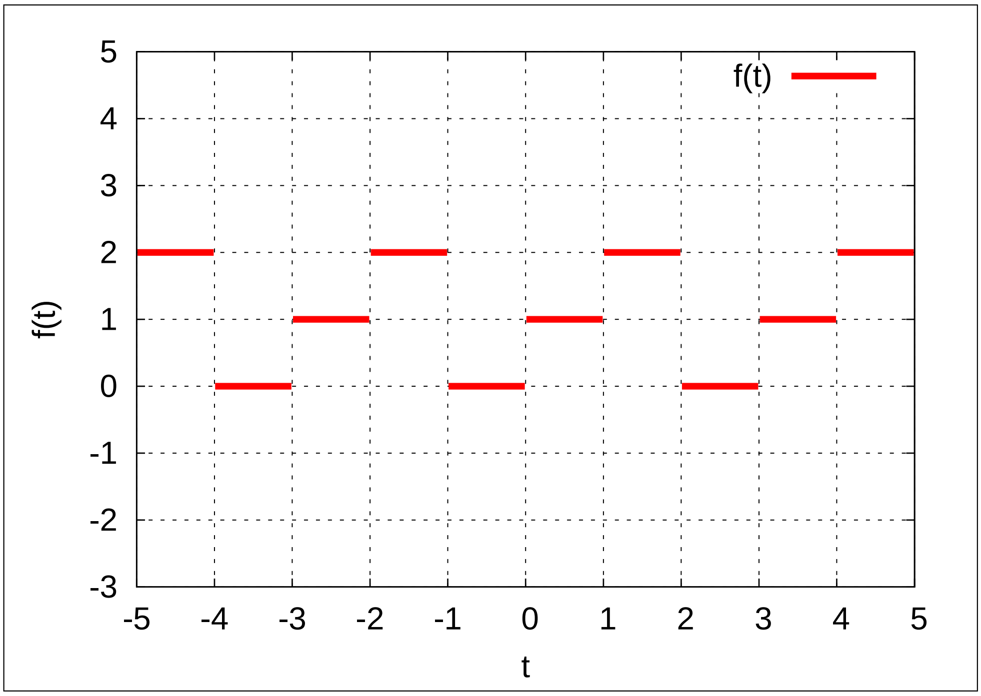

Figura 1: $f(t)$ do exercício **1.a**.

$$
\begin{aligned}
F_n &= \tfrac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt \quad = \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\int_0^1 f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_1^2 f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_2^3 f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right) \quad = \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\int_0^1 1e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_1^2 2e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_2^3 0e^{-i\omega_n t}\,dt\right) \quad = \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{e^{-i\omega_n t}}{-i\omega_n}|_0^1 + 2\tfrac{e^{-i\omega_n t}}{-i\omega_n}|_1^2\right) \quad = \quad \frac{e^{\frac{-2in\pi}{3}}-2e^{\frac{-4in\pi}{3}}+1}{2in\pi}
\end{aligned}
$$

Dessa forma, o $n-$ésimo harmônico fica definido por:

$$
\begin{aligned}
h_n^f(t) &= F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n}e^{i\omega_{-n} t} \quad = \quad F_n e^{i\omega_n t} + F_n^* e^{-i\omega_{-n} t} \quad = \\
&= \left(\frac{e^{\frac{-2in\pi}{3}}-2e^{\frac{-4in\pi}{3}}+1}{in2\pi}\right) e^{\frac{in2\pi t}{3}} + \left(\frac{e^{\frac{2in\pi}{3}}-2e^{\frac{4in\pi}{3}}+1}{-in2\pi}\right) e^{\frac{-in2\pi t}{3}}
\end{aligned}
$$

E $f(t)$ pode ser escrita como uma soma infinita de todos os harmônicos:

$$
f(t) = 1+\sum_{n\geq 1}\left[\left(\frac{e^{\frac{-2in\pi}{3}}-2e^{\frac{-4in\pi}{3}}+1}{in2\pi}\right) e^{\frac{in2\pi t}{3}} + \left(\frac{e^{\frac{2in\pi}{3}}-2e^{\frac{4in\pi}{3}}+1}{-in2\pi}\right) e^{\frac{-in2\pi t}{3}}\right] \tag{2}
$$

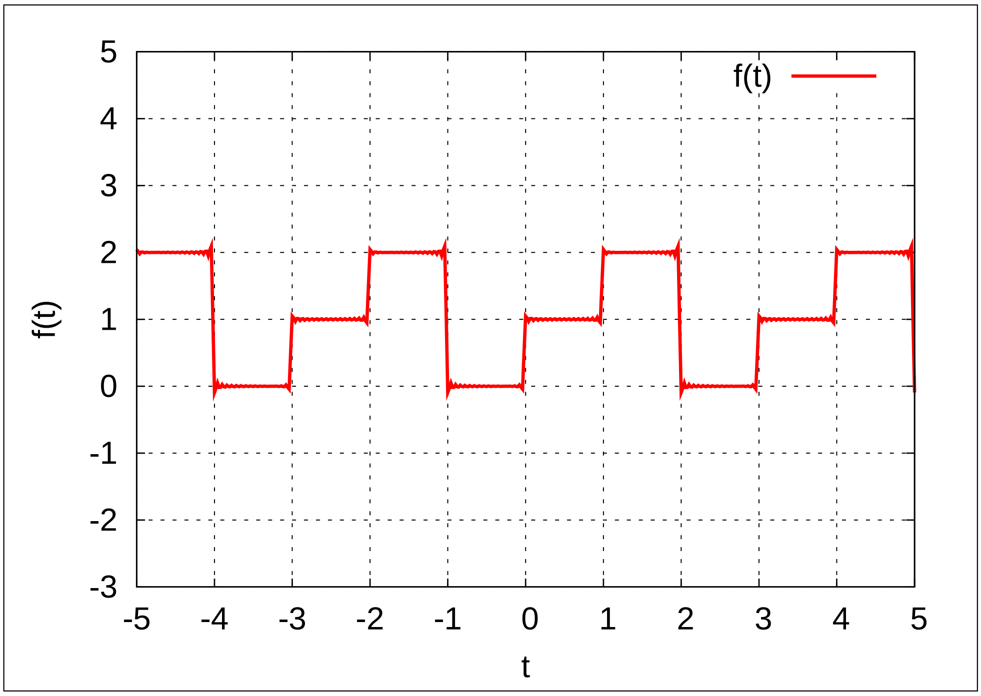

Figura 2: $f(t)$ do exercício **1.a** calculada com 100 harmônicos através do cálculo da Série de Fourier.

O resultado do cálculo de $f(t)$ pela fórmula (**??**) com 100 harmônicos pode ser visto na figura **??**.

1.b

$$g(t) = \begin{cases} sen(\pi t), & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 3 \end{cases} \qquad g(t+3) = g(t), \forall t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$g(t)$ pode ser vista na figura **??**. Notamos pela definição que o período de f é $T = 3$, e que portando sua velocidade angular é $\omega = \frac{2\pi}{3}$ e portanto $\omega_n = \frac{n2\pi}{3}$.

Primeiro, calculamos G_0, a primeira parcela da série:

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-i\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^3 g(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 g(t)\,dt + \int_1^3 g(t)\,dt\right) = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 sen(\pi t)\,dt + \int_1^3 (2-t)\,dt\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{-cos(\pi t)}{\pi}|_0^1 + \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)|_1^3\right) = \frac{2}{3\pi} \end{aligned}$$

Em seguida, os termos gerais G_n que dependem do harmônico considerado:

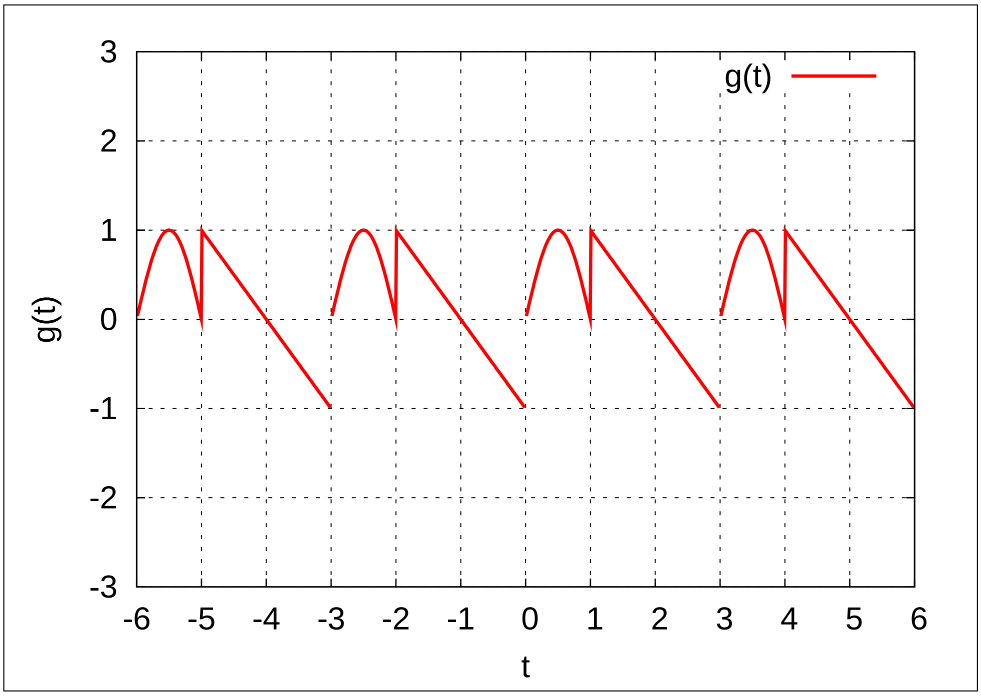

Figura 3: $g(t)$ do exercício **1.b**.

$$
\begin{aligned}
G_n &= \tfrac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-i\omega_n t}\,dt \quad = \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\int_0^1 g(t)e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_1^3 g(t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right) \quad = \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\int_0^1 sen(\pi t)e^{-i\omega_n t}\,dt + \int_1^3 (2-t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right) \quad =
\end{aligned}
$$

Agora, sabemos que

$$
\begin{aligned}
\int sen(\pi t)e^{-i\omega_n t}\,dt &= \int sen(\pi t)\left(cos(\omega_n t) - i.sen(\omega_n t)\right)\,dt \quad = \\
&= \int sen(\pi t)cos(\omega_n t)\,dt - i\int sen(\pi t)sen(\omega_n t)
\end{aligned}
$$

Podemos então calcular as duas integrais separadas, e as contas em anexo mostram que:

$$
\int_0^1 sen(\pi t)e^{-i\omega_n t}\,dt = 3\left(\frac{1-e^{i(\pi-\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi-n4\pi} + \frac{1-e^{-i(\pi+\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi+n4\pi}\right)
$$

E também que:

$$
\int_1^3 (2-t)e^{-i\omega_n t}\,dt = 3\left(\frac{-e^{-in2\pi}-e^{\frac{-in2\pi}{3})}}{-in2\pi} - 3\frac{e^{-in2\pi}-e^{\frac{-in2\pi}{3})}}{4n^2\pi^2}\right)
$$

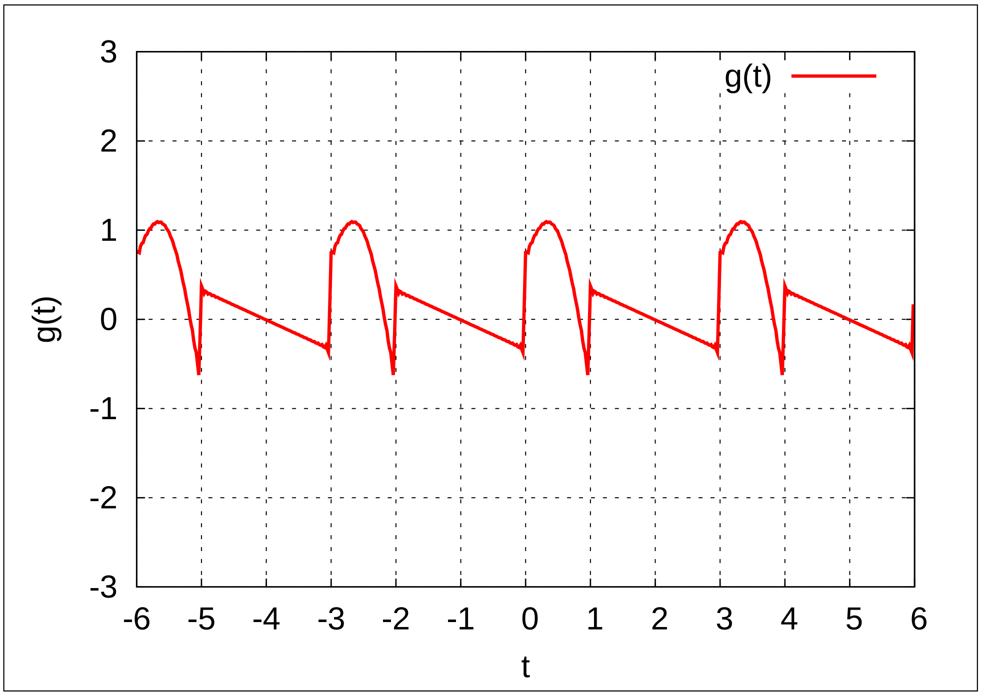

Figura 4: $g(t)$ do exercício **1.b** calculada com 100 harmônicos através do cálculo da Série de Fourier.

Assim, o $n-$ésimo harmônico fica definido por:

$$\begin{aligned}
h_n^g(t) &= G_n e^{i\omega_n t} + G_{-n} e^{i\omega_{-n} t} \quad = \quad G_n e^{i\omega_n t} + G_n^* e^{-i\omega_{-n} t} \quad = \\
&= \left[\frac{1-e^{i(\pi-\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi-n4\pi} + \frac{1-e^{-i(\pi+\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi+n4\pi} + \frac{-e^{-in2\pi}-e^{\frac{-in2\pi}{3})}}{-in2\pi} - 3\frac{e^{-in2\pi}-e^{\frac{-in2\pi}{3})}}{4n^2\pi^2}\right] e^{\frac{in2\pi t}{3}} \quad + \\
&+ \left[\frac{1-e^{-i(\pi-\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi-n4\pi} + \frac{1-e^{i(\pi+\frac{n2\pi}{3})}}{6\pi+n4\pi} + \frac{-e^{in2\pi}-e^{\frac{in2\pi}{3})}}{-in2\pi} - 3\frac{e^{in2\pi}-e^{\frac{in2\pi}{3})}}{4n^2\pi^2}\right] e^{\frac{-in2\pi t}{3}}
\end{aligned}$$

E $g(t)$ pode ser escrita como uma soma infinita de todos os harmônicos:

$$g(t) = 1 + \sum_{n\geq 1} h_n(t) \tag{4}$$

O resultado do cálculo de $g(t)$ pela fórmula (**??**) com 100 harmônicos pode ser visto na figura **??**. A princípio podemos desconfiar da inclinação da reta, mas é bom lembrar que foram computados somente 100 harmônicos, e que certamente infinitos harmônicos serão suficientes para conseguir dar a ela a inclinação correta.

1.c

$$h(t) = 3cos(5t) + 2sen(8t) \qquad h(t+3) = h(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

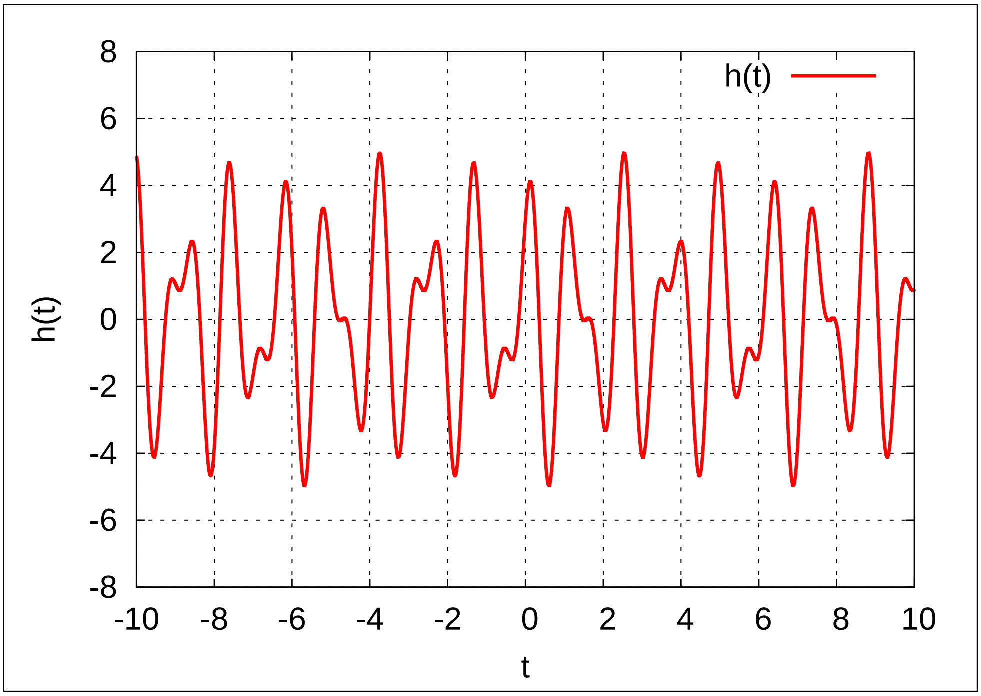

Figura 5: $h(t)$ do exercício **1.c**.

$h(t)$ pode ser vista na figura **??**. Podemos encontrar seu período (e velocidade angular) calculando o mínimo múltiplo comum dos períodos em graus dos somandos da expressão:

$$\begin{array}{lclclcl} \omega_{3cos(5t)} & = & 5 & \Rightarrow & T_{3cos(5t)} = \frac{2\pi}{5} = 72^o & & \\ \omega_{2sen(8t)} & = & 8 & \Rightarrow & T_{2sen(8t)} = \frac{2\pi}{8} = 45^o & & \\ mmc(72,45) & = & 360 & \Rightarrow & T_h = 2\pi & \Rightarrow & \omega_n = n \end{array}$$

Primeiro, calculamos H_0, a primeira parcela da série:

$$\begin{array}{lclcl} H_0 & = & \frac{1}{T}\int\limits_0^T h(t)e^{-i\omega_0 t}\,dt & = & \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} 3cos(5t) + 2sen(8t)\,dt \quad = \\ & = & \frac{1}{2\pi}\left(3\int\limits_0^{2\pi} cos(5t)\,dt + 2\int\limits_0^{2\pi} sen(8t)\,dt\right) & = & \\ & = & \frac{1}{2\pi}\left(\frac{3sen(5t)}{5}|_0^{2\pi} + \frac{-2cos(8t)}{8}|_0^{2\pi}\right) & = & 0 \end{array}$$

Em seguida, os termos gerais H_n que dependem do harmônico considerado:

$$
\begin{array}{rcl}
H_n & = & \frac{1}{T}\int\limits_0^T h(t)e^{-i\omega_n t}\,dt \quad = \\
& = & \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(3cos(5t)+2sen(8t)\right)e^{-i\omega_n t}\,dt \quad = \\
& = & \frac{1}{2\pi}\left(3\int\limits_0^{2\pi} cos(5t)e^{-i\omega_n t}\,dt + 2\int\limits_0^{2\pi} sen(8t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right) \quad = \\
& = & \frac{1}{2\pi}\left(3\int\limits_0^{2\pi} cos(5t)cos(nt)\,dt + 2\int\limits_0^{2\pi} sen(8t)cos(nt)\,dt \quad - \right. \\
& - & \left. 3i\int\limits_0^{2\pi} cos(5t)sen(nt)\,dt - 2i\int\limits_0^{2\pi} sen(8t)sen(nt)\,dt\right)
\end{array}
$$

Dos resultados vistos em aula, temos que:

$$
\begin{array}{lcl}
3\int\limits_0^{2\pi} cos(5t)cos(nt)\,dt & = & \left\{\begin{array}{ll} 0, & n \neq 5 \\ 3\pi, & n = 5 \end{array}\right. \\
2\int\limits_0^{2\pi} sen(8t)cos(nt)\,dt & = & 0, \forall\, n \\
-3i\int\limits_0^{2\pi} cos(5t)sen(nt)\,dt & = & 0, \forall\, n \\
-2i\int\limits_0^{2\pi} sen(8t)sen(nt)\,dt & = & \left\{\begin{array}{ll} 0, & n \neq 8 \\ -2i\pi, & n = 8 \end{array}\right.
\end{array}
$$

Assim, o $n-$ésimo harmônico fica definido por:

$$
h_n^h(t) \quad = \quad H_n e^{i\omega_n t} + H_{-n}e^{i\omega_{-n}t} \quad = \quad H_n e^{i\omega_n t} + H_n^* e^{-i\omega_n t}
$$

Como H_n só está definida para $n = 5$ e $n = 8$, $h(n)$ pode ser escrita como soma de apenas quatro parcelas:

$$
\begin{array}{rcl}
h(t) & = & H_5 e^{i\omega_5 t} + H_5^* e^{-i\omega_5 t} + H_8 e^{i\omega_8 t} + H_8^* e^{-i\omega_8 t} \quad = \\
& = & \frac{3}{2}e^{i5t} + \frac{3}{2}e^{-i5t} - ie^{i8t} + ie^{-i8t}
\end{array} \tag{5}
$$

O resultado do cálculo de $h(t)$ pela fórmula (**??**), com apenas as duas componentes harmônicas, pode ser visto na figura **??**.

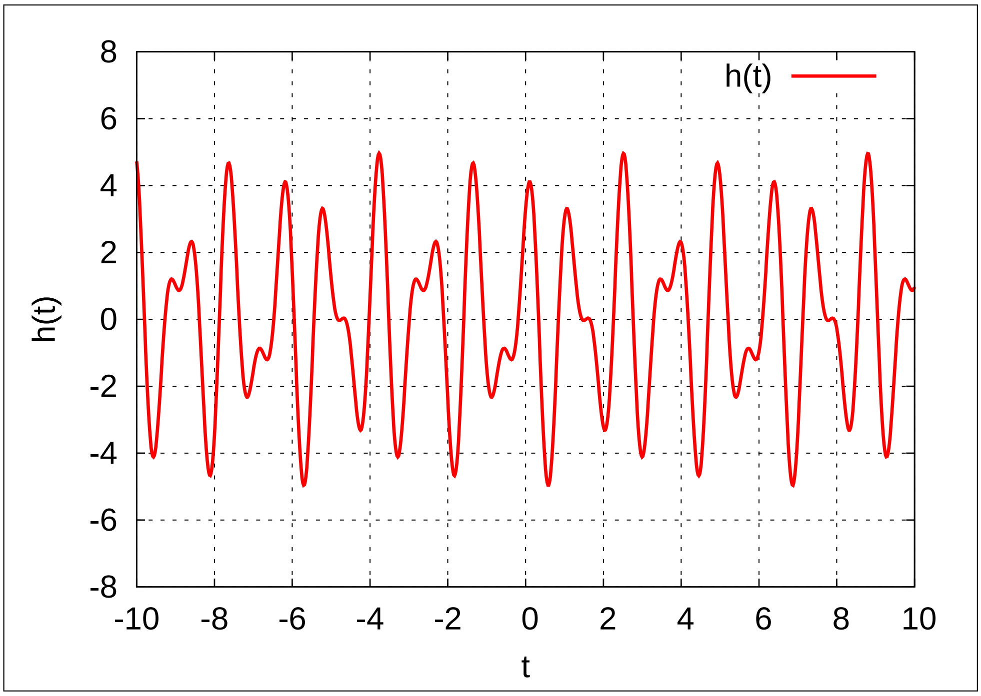

Figura 6: $h(t)$ do exercício **1.c** calculada com as duas componentes da transformada de Fourier.

2 Segundo Exercício:

2.a

2.b

2.c

3 Terceiro Exercício:

3.a

3.b

3.c

4 Quarto Exercício: Polos e Zeros

4.a

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{a_0(1-Z_1z^{-1})(1-Z_2z^{-1})}{(1-P_1z^{-1})(1-P_2z^{-1})} = \frac{a_0(1+\sqrt{A}z^{-1})(1-\sqrt{A}z^{-1})}{(1-Ae^{i\theta}z^{-1})(1-Ae^{-i\theta}z^{-1})} \\
&= \frac{a_0(1-Az^{-2})}{1-Ae^{i\theta}z^{-1}-Ae^{-i\theta}z^{-1}+A^2e^{i\theta-i\theta}z^{-2}} = \frac{a_0(1-Az^{-2})}{1-A(e^{i\theta}+e^{-i\theta})z^{-1}+A^2z^{-2}} = \\
&= \frac{Y(z)}{X(z)}
\end{aligned}
$$

Então, temos:

$$
\begin{array}{rcl}
Y(z) & = & a_0(1 - Az^{-2}) \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{-A}{a_0} \\
X(z) & = & 1 - A(e^{i\theta} + e^{-i\theta})z^{-1} + A^2 z^{-2} \quad \Rightarrow \quad b_1 = -A(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad b2 = A^2
\end{array}
$$

E portanto, a equação do filtro fica:

$$y(n) = a_0 x(n) - \frac{A}{a_0} x(n-2) - A(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) y(n-1) + A^2 y(n-2) \tag{6}$$

4.b

Como a transformada Z mapeia frequências dentro da taxa de Nyquist no intervalo $[0, 2\pi[$, então $G(f) = |H(e^{\frac{if2\pi}{R}})|$, então:

$$G(f) \quad = \quad |H(e^{\frac{i2f\pi}{R}})| = \left| \frac{a_0(1 - Ae^{\frac{-i4fpi}{R}})}{1 - A(e^{i\theta} + e^{-i\theta})e^{\frac{-i2f\pi}{R}} + A^2 e^{\frac{-i4f\pi}{R}}} \right|$$

4.c

4.d