Vaje iz funkcij

Andrej Bauer Micka Kovačeva

3. december 2017

Kazalo

Poglavje 1

Uvod

Tu bo en lep uvod.

Poglavje 2

Polinomi

2.1 Pregled snovi

2.1.1 Definicija polinoma

Polinom je vsaka taka funkcija, ki jo lahko zapišemo v obliki:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Pri tem naravno število n imenujemo stopnja polinoma oz. st(p), koeficienti a_j so realna števila, koeficient a_n (tj. tisti, pri najvišji potenci) imenujemo **vodilni** koeficient, a_0 pa **prosti člen**.

2.1.2 Posebni primeri

- Polinom ničte stopnje je konstantni polinom, $p(x) = a$. V primeru $a = 0$, ga imenujemo ničelni polinom.
- Polinom prve stopnje je linearna funkcija, $p(x) = kx + n$
- Polinom druge stopnje je kvadratna funkcija.

2.1.3 Računske operacije s polinomi

Vrednost polinoma v danem številu a dobimo tako, da v polinom vstavimo to število oz. izračunamo $p(a)$. Tako kot vse funkcije lahko tudi polinome seštevamo, odštevamo, množimo in delimo (paziti moramo le na deljenje z 0). Veljajo pravila:

Recimo: $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
in $q(x) = b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$
Tedaj velja: $p(x) + q(x) = (p+q)(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$
Podobne formule dobimo tudi za $(p-q)(x)$, $(p*q)(x)$, $(\frac{p}{q})(x)$.

2.1.4 Osnovni izrek o deljenju polinomov

Vsak polinom $p(x)$ (deljenec), lahko delimo s poljubnim neničelnim polinomom $q(x)$ (deljitelj). Zapišemo ju lahko v obliko **p(x)=k(x)*q(x) + o(x)**, pri čemer je $k(x)$ polinom količnik, $o(x)$ pa polinom ostanek. Velja tudi **st(o)< st(q)**. Deljenje polinoma $p(x)$ z polinomom $q(x) = x - a$, kjer je a neko število, lahko krajše napišemo s Hornerjevim algoritmom.

2.1.5 Razcep polinoma, iskanje ničel

V primeru, ko je število a ničla polinoma p, je ostanek pri deljenju polinoma p z $(x - a)$ enak 0, zato lahko zapišemo $p(x) = k(x) * (x - a)$ postopek ponavljamo, sedaj na $k(x)$. Tako lahko polinom zapišemo v **ničelno obliko**:

$$p(x) = a_n * (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)$$

Pri tem je a_n **vodilni koeficient**, x_i pa **ničle** polinoma $p(x)$. V splošnem so te ničle lahko tudi nerealne. V tem primeru nastopajo v konjugiranih parih. Velja tudi **st(p)=n**. Ta zapis nam omogoča **Gaussov izrek**: Vsak nekonstanten polinom ima v $\mathbb{C}$ vsaj eno ničlo.

Za iskanje ničel poznamo več metod:

- Najlažji se zdi **razcep polinoma**, kjer se držimo pravil za razcep izrazov. Iz te oblike lahko enostavno razberemo ničle, a se metode ne da enostavno uporabiti pri vseh izrazih.
- Ugibamo možne ničle in jih potem preverimo s **Hornerjevim algoritmom**. Pri tem upoštevamo dve pravili:
  - Cele ničle polinoma, ki ima le cele koeficiente, iščemo le med deljitelji prostega člena
  - Kandidati za racionalne ničle polinoma s celimi koeficienti so le ulomki, ki imajo v števcu deljitelj prostega člena, v imenovalcu pa deljitelj vodilnega člena.
- Zgornji metodi nista vedno uporabni, ostaja nam možnost uporabe numeričnih metod (za približke ničel), npr. **metoda bisekcije**:
  1. Najprej poiščemo interval $[a, b]$ na katerem polinom spremeni predznak (tj. da sta vrednosti polinoma v krajiščih različno predznačeni).
  2. Izračunamo razpolovišče intervala: $c = \frac{a+b}{2}$
  3. Izračunamo $p(c)$. Če je vrednost enaka 0, smo dobili ničlo in postopek je uspešno zaključen. Če dobimo neničelno vrednost, moramo ugotoviti, na katerem od intervalov $[a, c]$ ali $[c, b]$ polinom spremeni predznak. Postopek ponovimo na tem intervalu. Večkrat kot ponovimo postopek, bolj natančen bo naš približek za ničlo.

2.1.6 Graf polinoma

Za risanje grafa moramo prej izračunati nekaj podatkov:

- Ničle polinoma, so presečišča grafa z abscisno osjo. Najdemo jih po zgoraj opisanih postopkih. Pri tem upoštevamo, da je pomembna tudi stopnja ničel.
  - V **enostavnih** ničlah (ničle prve stopnje) graf seka absciso pod nekim kotom.
  - V ničlah **sode** stopnje se graf abscise le dotakne, v tisti točki je tangent na graf enaka abscisi.
  - V ničlah **lihe** stopnje, večje od 1, graf seka absciso, a se ji v ničli lepo prilega in je vodoraven. Graf ima v tej ničli vodoravni prevoj.
- **Začetna vrednost** je presečišče grafa z ordinatno osjo. Izračunamo jo kot $p(0)$ in opazimo, da je enaka prostemu členu.
- Zavedati se moramo, da je polinom **zvezna** funkcija, to pomeni, da je njen graf napretrgana krivulja.
- Ko gre $x \to \pm\infty$ je graf polinoma podoben grafu vodilnega člena, torej $a_n x^n$:
  1. Če je n liho število, se predznak grafa zamenja v neskončnosti. Če je a_n pozitiven, graf narašča, če je negativen, pa pada.
  2. Če je n sodo število, se predznak grafa ohrani. Če je a_n pozitiven, se graf prične in konča v pozitivni smeri, če pa je negativen, se prične in konča v $-\infty$.
- Za podrobnejši graf moramo pogledati tudi odvod polinoma $p'(x)$. Stacionarne točke so vsi x, ki rešijo enačbo $p'(x) = 0$. Če odvod v stacionarni točki x spremeni predznak iz pozitivnega na negativni, ima graf v x lokalni maksimum, v obratnem primeru pa lokalni minimum. Če predznaka ne spremeni, graf v x nima ekstrema. Velja namreč, da na območju, kjer $p'(x) > 0$ graf narašča, kjer $p'(x) < 0$ pa graf pada.

2.2 Vaje

Vaja 2.1. Dani so polinomi: **p(x)** $= 6x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x + 4$, **q(x)** $= 3x^6 + 12x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2$ in **r(x)** $= x + 2$

Izračunaj:

1. $p(x) + q(x)$
2. $r(x) * p(x)$

Vaja 2.2. Dana sta polinoma: **p(x)** $= 4x^4 + 3x^2 + 4$ in **q(x)** $= 2x + 3$. Določi k(x) in o(x) v enačbi $p(x) = k(x) * q(x) + o(x)$!

Vaja 2.3. Razcepi polinome v ničelno obliko:

1. $p_1(x) = 2x^2 - 4x + 2$
2. $p_2(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$
3. $p_3(x) = 2x^2 - 7x + 6$

Vaja 2.4. Razcepi $p(x) = x^5 + 2x^4 - 41x^3 + 62x^2 + 40x - 64$ s pomočjo Hornerjevega algoritma!

Vaja 2.5. Razcepi polinom $p(x) = 2x^4 - 4x^3 - 14x^2 + 16x + 24$ v ničelno obliko!

Vaja 2.6. Dan je polinom $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$.

1. Izračunal ničle $p(x)$ ter začetno vrednost $p(0)$!
2. Kakšni sta vrednosti v $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$?
3. Opiši vedenje grafa v $\pm\infty$!
4. Izračunaj $p'(x)$, stacionarne točke ter intervale naraščanja in padanja funkcije!
5. Izračunaj minimum in maksimum!
6. Skiciraj graf $p(x)$!

2.3 Odgovori

Odgovor 2.1

1. $p(x) + q(x) = 3x^6 + 6x^5 + 19x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x + 6$
2. $r(x) * p(x) = 6x^6 + 19x^5 + 16x^4 + 4x^3 + x^2 + 6x + 8$

Odgovor 2.2 $k(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 9$, $o(x) = 31$

Odgovor 2.3

1. $p_1(x) = 2(x-1)^2$
2. $p_2(x) = 2(x-1)^3$
3. $p_3(x) = (x-2)(2x-3)$

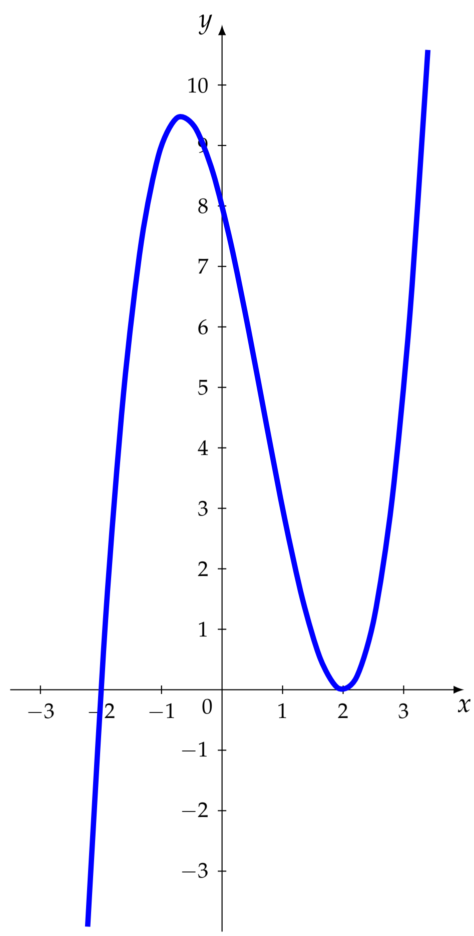
Odgovor 2.4 $p(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x-4)(x+8)$

Odgovor 2.5 $p(x) = 2(x-2)(x+2)(x-3)(x+1)$

Odgovor 2.6

1. Ničli: $x_1 = 2$ (2. stopnje) in $x_2 = -2$ (enostavna), $p(0) = 8$

2. $p(1) = 3, p(-1) = 9$
3. Ko gre x proti $-\infty$ gre $p(x)$ v $-\infty$, pri x proti $+\infty$ pa $p(x)$ proti $+\infty$
4. $p'(x) = 3x^2 - 4x - 4$, stacionarni točki: $x_1 = 2$ in $x_2 = -\frac{2}{3}$, $p(x)$ narašča na $(-\infty, -\frac{2}{3})$ in $(2, \infty)$ ter pada na $(-\frac{2}{3}, 2)$
5. Minimum doseže v točki $(2, 0)$, maksimum pa v $(-\frac{2}{3}, \frac{256}{27})$
6. Graf:



Poglavje 3

Eksponentna in logaritemska funkcija

3.1 Pregled snovi

Pregled snovi.

3.2 Vaje

Vaja 3.1. Izračunajte 2^4.

Vaja 3.2. Še ena vaja.

3.3 Odgovori

Odgovor 3.1 $2^4 = 4^2$.

Odgovor 3.2 Rešitev bi bila tu.

Poglavje 4

Kotne funkcije

4.1 Pregled snovi

Pregled snovi.

4.2 Vaje

Vaja 4.1. Izračunajte $\sin(1928398213\pi)$.

Vaja 4.2. Še ena vaja.

4.3 Odgovori

Odgovor 4.1 0.

Odgovor 4.2 Rešitev bi bila tu.