Vaje iz funkcij

Andrej Bauer Micka Kovačeva

11. november 2017

Kazalo

Poglavje 1

Uvod

Tu bo en lep uvod.

Poglavje 2

Polinomi

2.1 Pregled snovi

2.1.1 Definicija polinoma

Polinom je vsaka taka funkcija, ki jo lahko zapišemo v obliki:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Pri tem naravno število n imenujemo stopnja polinoma oz. st(p), koeficienti a_j so realna števila, koeficienta_n (tj. tisti, pri najvišji potenci) imenujemo vodilni koeficient,a_0 pa prosti člen.

2.1.2 Posebni primeri

- Polinom ničte stopnje je konstantni polinom, p(x)=a. V primeru a=0, ga imenujemo ničelni polinom.
- Polinom prve stopnje je linearna funkcija, p(x)=kx + n
- Polinom druge stopnje je kvaratna funkcija.

2.1.3 Računske operacije s polinomi

Vrednost polinoma v danem številu dobimo tako, da v polinom vstavimo to število. Tko kot vse funkcije lahko tudi polinome seštevamo, odštevamo, množimo in delimo (paziti moramo le na deljenje z 0). Veljajo pravila:

$Recimo: p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 in q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 p(x) + q(x) = (p+q$

Podobne formule dobimo tudi za $(p-q)(x), (p*q)(x), (\frac{p}{q})(x)$.

2.1.4 Osnovni izrek o deljenju polinomov

Vsak polinom p(x) (deljenec), lahko delimo s poljubnim neničelnim polinomom q(x) (deljitelj). Zapišemo ju lahko v obliko $p(x) = k(x) * q(x) + o(x)$, pri čemer je $k(x)$ polinom količnik, $o(x)$ pa polinom ostanek. Velja tudi $st(o) < st(q)$. Deljenje polinoma p(x) z polinomom q(x)=x-a, kjer je a neko število, lahko krajše napišemo s Hornerjevim algoritmom.

2.1.5 Razcep polinoma, iskanje ničel

V primeru, ko je število a ničla polinoma p, je ostanek pri deljenju polinoma p z (x-a) enak 0, zato lahko zapišemo $p(x) = k(x) * (x - a)$ postopek ponavljamo, sedaj na k(x). Tako lahko polinom zapišemo v ničelno obliko

$$p(x) = a_n * (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)$$

Pri tem je a_n vodilni koeficient, x_i pa ničle polinoma p(x). V splošnem so te ničle lahko tudi nerealne. v tem primeru nastopajo v konjugiranih parih. Velja tudi st(p)=n. Ta zapis nam omogoča Gaussov izrek: Vsak nekonstanten polinom ima v $\mathbb{C}$ vsaj eno ničlo.

Za iskanje ničel poznamo več metod:

- Najlažji se zdi razcep polinoma, kjer se držimo pravil za razcep izrazov. Iz te oblike lahko enostavno razberemo ničle, a se metode ne da enostavno uporabiti pri vseh izrazih.

- Ugibamo možne ničle in jih potem preverimo s Hornerjevim algoritmom. Pri tem upoštevamo dve pravili: cele ničle polinoma, ki ima le cele koeficiente, iščemo le med deljitelji prostega člena ter kandidati za racionalne ničle polinoma s celimi koeficienti so le ulomki, ki imajo v števcu deljitelj prostega člena, v imenovalcu pa deljitelj vodilnega člena.

- Zgornji metodi nista vedno uporabni, ostaja nam možnost uporabe numeričnih metod (za približke ničel), npr. metoda bisekcije.

  1. Najprej poiščemo interval [a, b] na katerem polinom spremeni predznak (tj. da sta vrednosti polinoma v krajiščih različno predznačeni).
  2. Izračunamo razpolovišče intervala: $c = \frac{a+b}{2}$
  3. Izračunamo p(c). Če je vrednost enaka 0, smo dobili ničlo in postopek je uspešno zaključen. Če dobimo neničelno vrednost, moramo ugotoviti, na katerem od intervalov [a, c] ali [c, b] polinom spremeni predznak. Postopek ponovimo na tem intervalu. Večkrat kot ponovimo postopek, bolj natančen bo naš približek za ničlo.

2.1.6 Graf polinoma

Za risanje grafa moramo prej izračunati nekaj podatkov:

- Ničle polinoma, so presečišča grafa z abscisno osjo. Njademo jih po zgoraj opisanih postopkih. Pri tem upoštevamo, da je pomembna tudi stopnja ničel.
  - V enostavnih ničlah (ničle prve stopnje) graf seka absciso pod nekim kotom.
  - V ničlah sode stopnje se graf abscise le dotakne, v tisti točki je tangent na graf enaka abscisi.
  - V ničlah lihe stopnje, večje od 1, graf seka absciso, a se ji v ničli lepo prilega in je vodoraven. Graf ima v tej ničli vodoravni prevoj.
- Začetna vrednost je presečišče grafa z ordinatno osjo. Izračunamo jo kot p(0) in opazimo, da je enaka prostemu členu.
- Zavedati se moramo, da je polinom zvezna funkcija, to pomeni, da je njen graf napretrgana krivulja.
- Ko gre $x \to \pm\infty$ je graf polinoma podoben grafu vodilnega člena, torej $a_n x^n$:
  1. Če je n liho število, se predznak grafa zamenja v neskončnosti. Če je a_n pozitiven, graf narašča, če je negativen, pa pada.
  2. Če je n sodo število, se predznak grafa ohrani. Če je a_n pozitiven, se graf prične in konča v pozitivni smeri, če pa je negativen, se prične in konča v $-\infty$.
- Za podrobnejši graf moramo pogledati tudi odvod polinoma p'(x). Stacionarne točke so vsi x, ki rešijo enačbo $p'(x) = 0$. Če odvod v x spremeni predznak iz pozitivnega na negativni, ima graf v x lokalni maksimum, v obratnem primeru pa lokalni minimum. Če predznaka ne spremeni, garf v x nima ekstrema. Velja namreč, da na območju, kjer $p'(x) > 0$ graf narašča, kjer $p'(x) < 0$ pa graf pada.

2.2 Vaje

Vaja 2.1. Poiščite ničle polinoma $x^3 + 3x + 1$.

2.3 Odgovori