



IEL – protokol k projektu

Andrej, Mokriš
xmokri01

12. decembra 2021

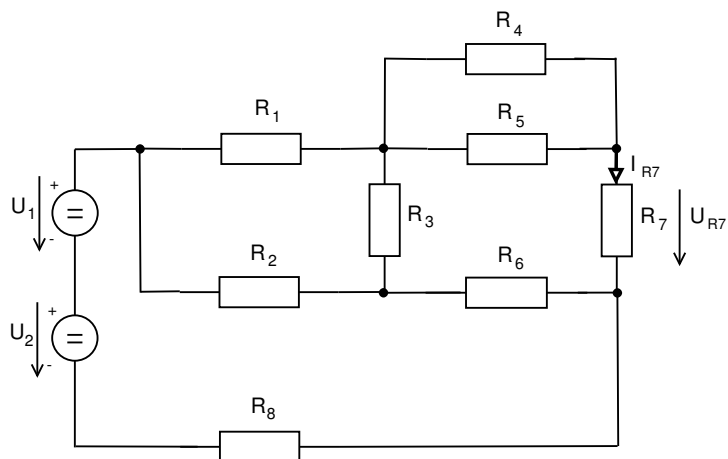
Obsah

1	Příklad 1	2
2	Příklad 2	6
3	Příklad 3	9
4	Příklad 4	11
5	Příklad 5	13
6	Shrnutí výsledků	16

Příklad 1

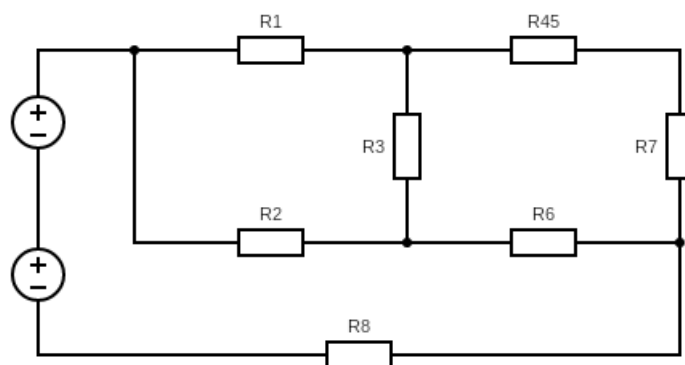
Stanovte napětí U_{R7} a proud I_{R7} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
G	130	60	380	420	330	440	450	650	410	275



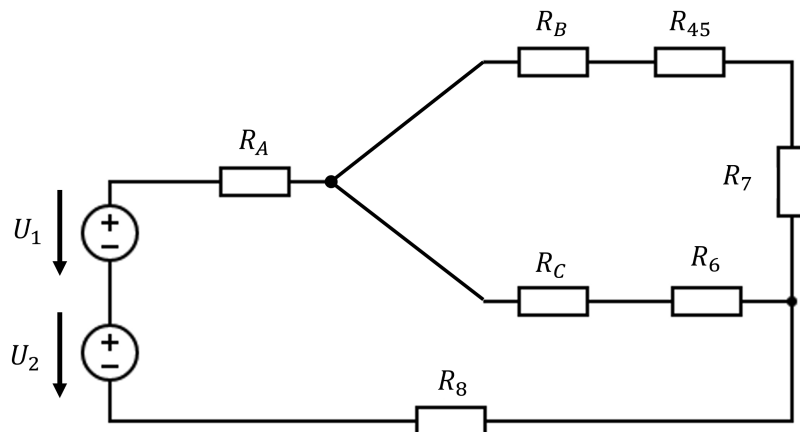
Výpočet R_{EKV} (Metóda postupného zjednodušovania):

Krok 1 - Zjednodušenie R_4 a R_5 podľa vzorca pre paralelne zapojené rezistory.



$$R_{45} = \frac{R_4 \times R_5}{R_4 + R_5} = \frac{440 \times 450}{440 + 450} = 222,4719\Omega$$

Krok 2 - Transfigurácia - Trojuholník \Rightarrow Hviezda

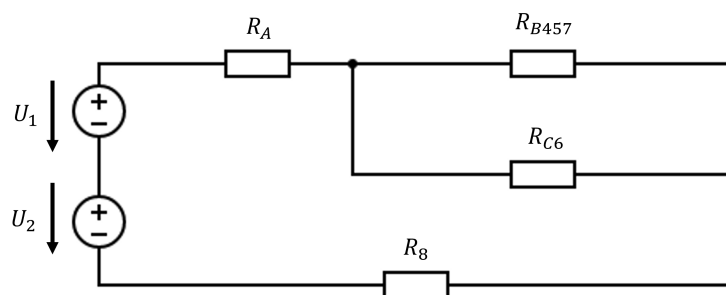


$$R_A = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{380 \times 420}{380 + 420 + 330} = 141,2389\Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 \times R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{380 \times 330}{380 + 420 + 330} = 110,9735\Omega$$

$$R_C = \frac{R_2 \times R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{420 \times 330}{380 + 420 + 330} = 122,6549\Omega$$

Krok 3 - Zjednodušenie sériových rezistorov R_B , R_{45} a R_7

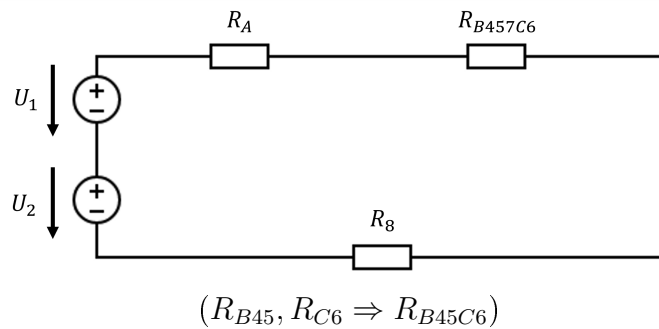


$$(R_B, R_{45}, R_7, \Rightarrow R_{B457} \mid R_C, R_6 \Rightarrow R_{C6})$$

$$R_{B457} = R_B + R_{45} + R_7 = 110,9735 + 222,4719 + 410 = 743,4454\Omega$$

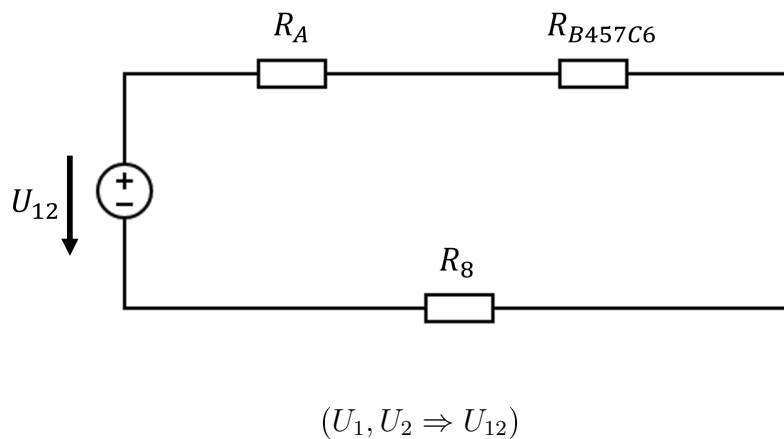
$$R_{C6} = R_C + R_6 = 122,6549 + 650 = 772,6549\Omega$$

Krok 4 - Zjednodušenie paralelných rezistorov R_{B457} a R_{C6}



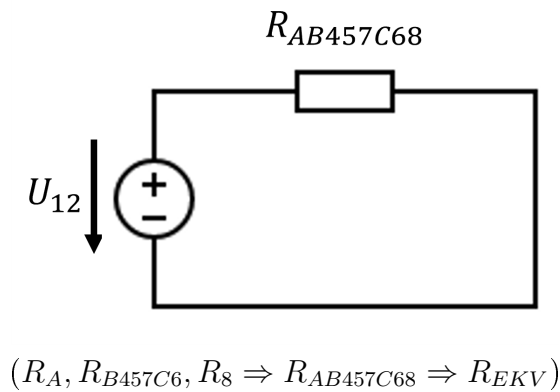
$$R_{B457C6} = \frac{R_{B457} \times R_{C6}}{R_{B457} + R_{C6}} = \frac{743,4454 \times 772.6549}{743,4454 + 772.6549} = 378,8844\Omega$$

Krok 5 - Zjednodušenie sériových zdrojov U_1 a U_2



$$U_{12} = U_1 + U_2 = 130 + 60 = 190V$$

Krok 6 - Výpočet R_{EKV} - zjednodušenie sériových rezistorov R_{B457C6} , R_A a R_8



$$R_{EKV} = R_A + R_{B457C6} + R_8 = 141,2389 + 378.8844 + 275 = 795,1233\Omega$$

Krok 7 - Výpočet prúdu

$$I = \frac{U_{12}}{R_{EKV}} = \frac{190}{795,1233} = 0.23895A$$

Teraz môžeme spätne dopočítať hodnoty U_{R7} a I_{R7} :

Vypočítame si napätie na R_{B457C6} pomocou prúdu I , ktorý je v sériovom zapojení rovnaký na každom rezistore v danom obvode.

$$U_{R_{B457C6}} = I \times R_{B457C6} = 0.23895 \times 378,8844 = 90,5344V$$

Ďalej vieme, že napätie, prechádzajúce cez paralelné rezistory je na týchto rezistoroch taktiež rovnaké a pomocou toho dopočítame prúd na R_{B457}

$$U_{R_{B457}} = U_{R_{B457C6}} = 90,5334V$$

Pomocou Ohmovho zákona vieme dopočítať prúd na R_{B457}

$$I_{R_{B457}} = \frac{U_{R_{B457}}}{R_{B457}} = \frac{90,5334}{743,4454} = 0,12177A$$

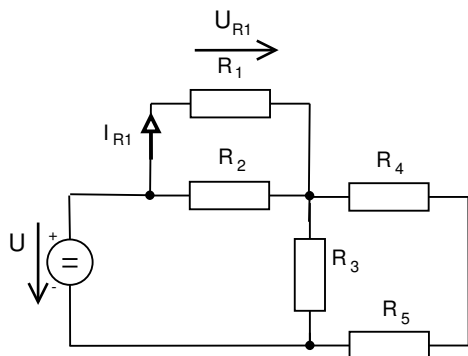
Pomocou $I_{R_{B457}}$ a Ohmovho zákona už vieme dopočítať U_{R7} a I_{R7}

$$\begin{aligned} I_{R7} &= I_{R_{B457}} = 0,12177A \\ U_{R7} &= I_{R7} \times R7 = 0,12177 \times 410 = 49,9279V \end{aligned}$$

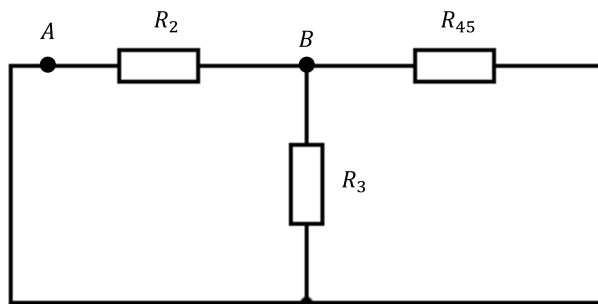
Příklad 2

Stanovte napětí U_{R_1} a proud I_{R_1} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
D	150	200	200	660	200	550

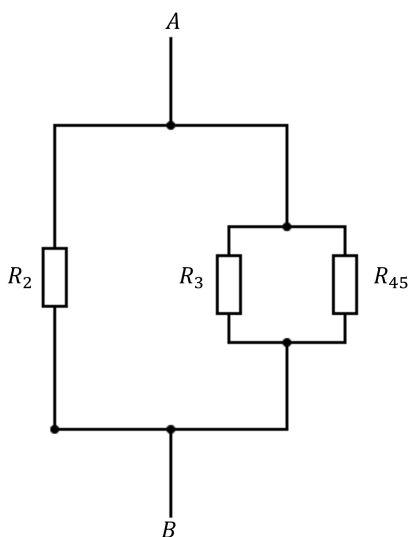


Krok 1 - Prekreslíme obvod bez R_1 a napáťový zdroj zoskratujeme



$$R_{45} = R_4 + R_5 = 200 + 550 = 750\Omega$$

Krok 2 - Vypočítame vnútorný odpor R_i - odpor medzi bodmi A a B



$$R_{453} = \frac{R_3 \times R_{45}}{R_3 + R_{45}} = \frac{660 \times 750}{660 + 750} = 351,0638\Omega$$

$$R_i = \frac{R_2 \times R_{453}}{R_2 + R_{453}} = \frac{200 \times 351,0638}{200 + 351,0638} = 127,4131\Omega$$

Krok 2 - Vypočítame U_i pomocou slučkového prúdu I_A

$$\begin{pmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_{45} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix}$$

Vypočítame determinanty matice

$$M = \begin{vmatrix} 860 & -660 \\ -660 & 1410 \end{vmatrix} = 777000$$

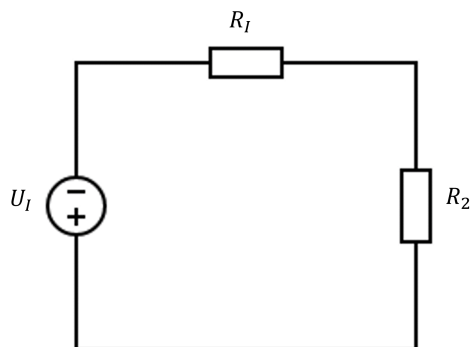
$$M_{I_A} = \begin{vmatrix} 150 & -660 \\ 0 & 1410 \end{vmatrix} = 211500$$

Použijeme Cramerovo pravidlo a determinanty matíc pre výpočet I_A :

$$I_A = \frac{M_{I_A}}{M} = \frac{211500}{777000} = 0.2722A$$

$$U_i \equiv U_{R_2} = I_A \times R_2 = 0.2722 \times 200 = 54,44V$$

Krok 3 - Pomocou ekvivalentného obvodu dopočítame U_1 a I_1



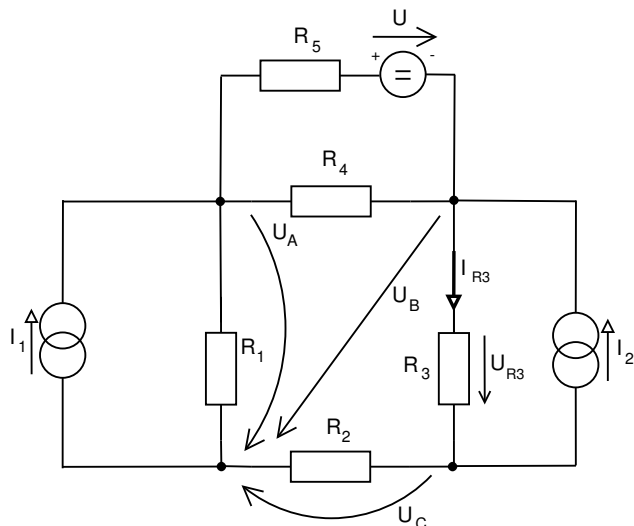
$$I_{R_1} = \frac{U_i}{R_1 + R_i} = \frac{54,44}{200 + 127,4131} = 166,2731mA$$

$$U_{R_1} = R_1 \times I_{R_1} = 200 \times 0,166273 = 33,2546V$$

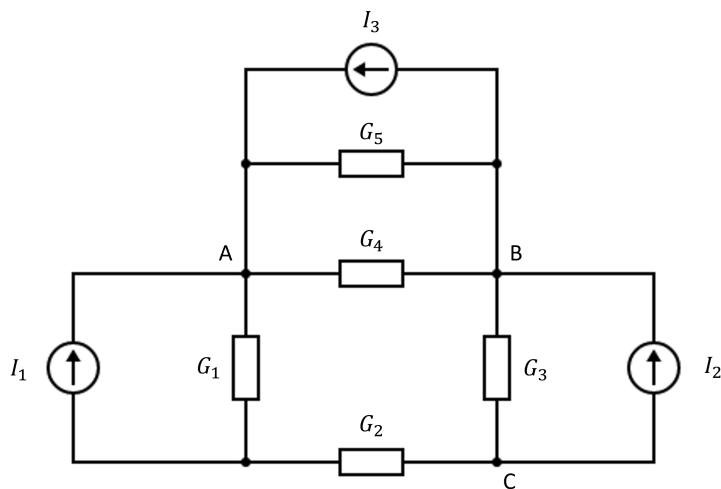
Příklad 3

Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A , U_B , U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
H	130	0.95	0.50	47	39	58	28	25



Krok 1 - Odpor prepočítame na vodivosť a napäťové zdroje na prúdové zdroje



$$G = \frac{1}{R}$$

$$I_3 = G_1 \times U = \frac{1}{25} \times 130 = 5,2A$$

Krok 2 - Pomocou metódy uzlových napätí vypočítame U_A , U_B , U_C

$$A : U_A(-G_1 - G_4 - G_5) + U_B(G_4 + G_6) = -I_1 - I_3$$

$$B : U_A(G_4 + G_5) + U_B(-G_4 - G_3 - G_5) + U_C(-G_3) = I_2 + I_3$$

$$C : U_B(G_3) + U_C(G_2 + G_3) = I_2$$

$$\begin{pmatrix} -G_1 - G_4 - G_5 & G_4 + G_5 & 0 \\ G_4 + G_5 & -G_4 - G_3 - G_5 & -G_3 \\ 0 & G_3 & G_2 + G_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_1 - I_3 \\ -I_2 + I_3 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Do matic dosadíme hodnoty a neznáme vypočítame pomocou determinantov matic a Cramerovéhó pravidla:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3191}{32900} & \frac{53}{700} & 0 \\ \frac{53}{700} & -\frac{1887}{20300} & -\frac{1}{58} \\ 0 & \frac{1}{58} & \frac{97}{2262} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,15 \\ 4,7 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$U_A = 60,504V$$

$$U_B = -3,72V$$

$$U_C = 13,15548V$$

Krok 3 - Pomocou U_B a U_C vypočítame U_{R_3} a I_{R_3}

$$U_{R_3} = U_C + U_B = -3,72 + 13,15548 = 9,4355V$$

$$I_{R_3} = \frac{U_{R_3}}{R_3} = \frac{9,4335}{58} = 0,1627A$$

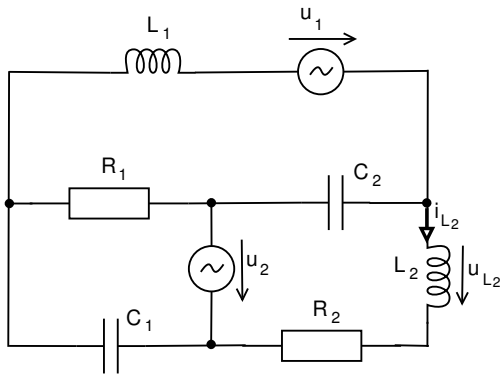
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
G	5	5	13	12	140	60	160	80	60



Krok 1 - Určíme ω , Z_{L1} , Z_{L2} , Z_{C1} , Z_{C2}

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 60$$

$$\omega = 120\pi$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

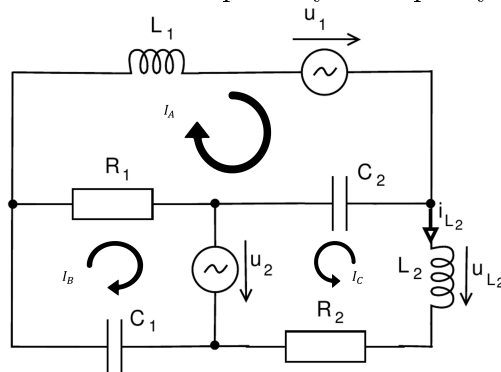
$$Z_{L1} = 52,7787j\Omega$$

$$Z_{L2} = 22,6194j\Omega$$

$$Z_{C1} = -16,5786j\Omega$$

$$Z_{C2} = -33,1572j\Omega$$

Krok 2 - Zostavit rovnice pre smyčkové prúdy I_A , I_B a I_C



$$\begin{aligned}
I_A : I_A(L_1 + C_2 + R_1) + I_B(-R_1) + I_C(C_2) &= -U_1 \\
I_B : I_A(-R_1) + I_B(R_1 + C_1) + I_C(0) &= -U_2 \\
I_C = I_A(C_2) + I_B(0) + I_C(C_2 + R_2 + L_2) &= -U_2
\end{aligned}$$

Krok 3 - Z rovníc postavíme matice a pomocou Cramerového pravidla a determinantov matíc vypočítame neznámu I_C

$$\begin{pmatrix} 19,6215j + 13 & -13 & -33,1572j \\ -13 & 13 - 16,5786j & 0 \\ -33,1572j & 0 & -10,5378j + 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M &= 18612,6139 - 21179.7337j \\
M_C &= -4374,9847 - 4508,2245j \\
I_C &= 0,0176 - 0,222098jA
\end{aligned}$$

Krok 4 - Vypočítame napätie na cievke L_2

$$\begin{aligned}
U_{L_2} &= I_C \times Z_{L_2} \\
U_{L_2} &= 0,0176 - 0,222098j \times 22,6194j = 5,0396 + 0,3998jA \\
U_{L_2} &= \sqrt{5,02374^2 + 0,3998^2} = \mathbf{5,0396 \text{ V}}
\end{aligned}$$

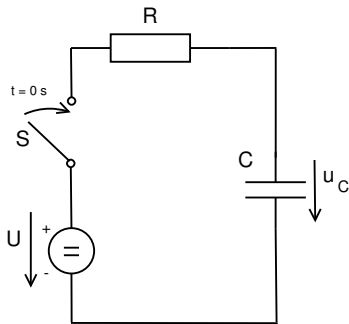
Krok 5 - Vypočítame fázový posun φ

$$\varphi_{C_1} = \arctan \frac{\text{Im}(U_{L_2})}{\text{Re}(U_{L_2})} = \arctan \frac{0,3998}{5,0396} = 0,0791 \text{ rad}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_C = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	R [Ω]	C [F]	$u_C(0)$ [V]
D	35	5	25	15



Krok 1 - Opíšeme obvod rovnicou pomocí Ohmovho zákona a II. Kirchhoffového zákona

$$\begin{aligned}
 U_R + U_C - U &= 0V \\
 R \times i + U_C - U &= 0V \\
 I &= \frac{U_R}{R} = \frac{U - U_C}{R}
 \end{aligned}$$

Krok 2 - Zostavíme rovnicu u'_c

$$u'_c = \frac{i}{C} = \frac{\frac{U - U_C}{R}}{C} = \frac{U - U_C}{R \times C} = \frac{35 - U_C}{5 \times 25}$$

Krok 3 - Zostavíme diferenciální rovnici

$$u'_c + U_C \times \frac{1}{125} = \frac{7}{25}$$

Krok 4 - Riešenie charakteristickej rovnice pre λ

$$\begin{aligned}\lambda + \frac{1}{R \times C} &= 0 \\ \lambda + \frac{1}{125} &= 0 \\ \lambda &= -\frac{1}{125}\end{aligned}$$

Krok 5 - Očakávané riešenie

$$\begin{aligned}u_c(t) &= k(t) \times e^{\lambda \times t} \\ u_c(t) &= k(t) \times e^{-\frac{t}{125}}\end{aligned}$$

Krok 6 - Dosadíme do všeobecnej rovnice a zderivujeme

$$u'_c(t) = k'(t) \times e^{-\frac{t}{125}} + k(t) \left(-\frac{1}{125}\right) e^{-\frac{t}{125}}$$

Krok 7 - Dosadíme do diferenciálnej rovnice z kroku 3

$$\begin{aligned}u'_c + U_C \times \frac{1}{125} &= \frac{7}{25} \\ k'(t) \times e^{-\frac{t}{125}} + k(t) \left(-\frac{1}{125}\right) e^{-\frac{t}{125}} + U_C \times \frac{1}{125} &= \frac{7}{25} \\ k'(t) \times e^{\frac{t}{125}} &= 0\end{aligned}$$

Krok 8 - Zbavíme sa derivácie pomocou integrácie

$$\begin{aligned}k'(t) &= \frac{7}{25} \times e^{\frac{t}{125}} \\ \int k'(t) &= \int \frac{7}{25} e^{\frac{t}{125}} \\ k(t) &= 35e^{\frac{t}{125}} + K\end{aligned}$$

Krok 9 - Dosadíme do očakávaného riešenia

$$\begin{aligned}u_c(t) &= k(t) \times e^{-\frac{t}{125}} \\u_c(t) &= (35e^{\frac{t}{125}} + K) \times e^{-\frac{t}{125}} \\u_c(t) &= 35 + Ke^{-\frac{t}{125}}\end{aligned}$$

Krok 10 - Dosadíme počiatočnú podmienku

$$\begin{aligned}u_c &= 35e^{\frac{t}{125}} + K \\15 &= 35 + K \\K &= -20\end{aligned}$$

Výsledok:

$$u_c(t) = 35 - 20e^{-\frac{t}{125}}$$

Krok 11 - Skúška správnosti riešenia

Vyjadríme si u'_c :

$$\begin{aligned}u'_c + U_C \times \frac{1}{125} &= \frac{7}{25} \\u'_c + \frac{1}{125} \times (35 - 20e^{-\frac{t}{125}}) &= \frac{7}{25} \\u'_c + \frac{35}{125} - \frac{20e^{-\frac{t}{125}}}{125} &= \frac{7}{25} \\u'_c &= \frac{20e^{-\frac{t}{125}}}{125}\end{aligned}$$

Dosadíme do diferenciálnej rovnice:

$$\begin{aligned}u'_c + U_C \times \frac{1}{125} &= \frac{7}{25} \\\frac{20e^{-\frac{t}{125}}}{125} + (35 - 20e^{-\frac{t}{125}}) \times \frac{1}{125} &= \frac{7}{25} \\\frac{4e^{-\frac{t}{125}}}{25} + (7 - 4e^{-\frac{t}{125}}) \times \frac{1}{25} &= \frac{7}{25} \\\frac{4e^{-\frac{t}{125}}}{25} + \frac{7}{25} - \frac{4e^{-\frac{t}{125}}}{25} &= \frac{7}{25} \\\mathbf{0} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky	
1	G	$U_{R7} = 49,9279$	$I_{R7} = 0,1218A$
2	D	$U_{R1} = 33,2546V$	$I_{R1} = 166,2731mA$
3	H	$U_{R3} = 9,4355V$	$I_{R3} = 0,1627A$
4	G	$ U_{L2} = 5,0396V$	$\varphi_{L2} = 0,0791rad$
5	D	$u_C = 35 - 20e^{-\frac{t}{125}}$	